

Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Περίληψη:

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών διαφορικών εξισώσεων κυρίως στην μηχανική (δομική ανάλυση). Η μέθοδος προσεγγίζει την λύση με μία παραμετροποιημένη δοκιμαστική συνάρτηση. Αντικαθιστώντας στο πρόβλημα λύνουμε τις προκύπτουσες εξισώσεις, ελαχιστοποιώντας το ολοκλήρωμα του παραμένοντος σφάλματος, ως προς τις παραμέτρους, έτσι ώστε να βρούμε την καλύτερη δυνατή προσέγγιση. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι πετυχαίνουμε καλύτερη συνολική προσέγγιση της λύσης αφού ελαχιστοποιούμε το ολοκληρωτικό σφάλμα. Πρακτικά σπάμε την περιοχή ενδιαφέροντος σε μικρότερα “πεπερασμένα στοιχεία” και προσεγγίζουμε την λύση με μικρού βαθμού πολυώνυμο σε κάθε ένα από αυτά.

Το πρόβλημα

Το πρόβλημα που παραθέτει το βιβλίο χάριν απλότητας είναι μονοδιάστατο αλλά η μέθοδος είναι πανομοιότυπη σε περισσότερες διαστάσεις.

Η διαφορική συνάρτηση που μας δίνεται είναι η εξής:

$$y'' - 6x = 0 \quad (1)$$

με συνοριακές συνθήκες

$$y(0)=0, \quad y(1)=1 \quad (2)$$

Είναι προφανές ότι η λύση του προβλήματος είναι $y=x^3$

Αναλυτική μέθοδος

Υποθέτουμε μια δοκιμαστική λύση του προβλήματος έστω

$$p(x)=ax^2+\beta x+\gamma$$

με α, β, γ παραμέτρους τις οποίες θα βρούμε από τις συνοριακές συνθήκες και την απαίτηση για ελάχιστο σφάλμα.

θέτοντας $p(0)=0$ και $p(1)=1$ έχουμε

$$p(x)=ax^2+(1-\alpha)x$$

και τώρα έχουμε την δοκιμαστική μας συνάρτηση παραμετροποιημένη μόνο με την α . Εντούτοις εάν αντικαταστήσουμε στην (1) όπου $y(x)$ την $p(x)$ το αποτέλεσμα δεν θα είναι μηδέν αλλά μια συνάρτηση

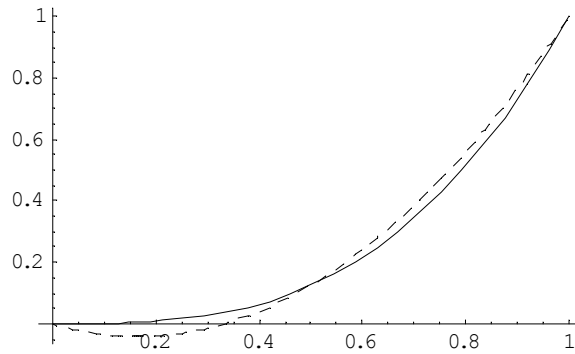
$$R = p'' - 6x = 2\alpha - 6x$$

την οποία ονομάζουμε παραμένον σφάλμα. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (ελαχιστοποιούμε το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της R , ως προς α), έχουμε την καλύτερη τιμή για το α που στην προκειμένη περίπτωση είναι $3/2$.

Έτσι έχουμε πλέον την καλύτερη λύση με προσέγγιση δευτέρου βαθμού για την διαφορική μας συνάρτηση

$$p(x) = \frac{3x^2 - x}{2}$$

Εάν κάνουμε την γραφική παράσταση της ακριβούς λύσης (συνεχής καμπύλη) και της προσέγγισής μας (διακεκομμένη) έχουμε



Για να βρούμε καλύτερη λύση πρέπει να αυξήσουμε τον βαθμό του πολυωνύμου που χρησιμοποιούμε σαν δοκιμαστική λύση. Σε μία διαφορετική προσέγγιση, θα μπορούσαμε να ‘κόψουμε’ την περιοχή ενδιαφέροντος σε μικρότερες στοιχεία και να χρησιμοποιήσουμε μικρότερου βαθμού πολυώνυμα. Η πρώτη προσέγγιση πρακτικά εμφανίζει προβλήματα εφόσον εάν χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερα του τρίτου βαθμού πολυώνυμα αυτά ταλαντεύονται και έτσι είναι πιθανό να μην έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αριθμητική Μέθοδος

Στην πράξη δηλαδή χρησιμοποιούμε την δεύτερη μέθοδο και πιο συγκεκριμένα χωρίζουμε την περιοχή ενδιαφέροντος σε πολλά στοιχεία και χρησιμοποιούμε πρώτου βαθμού πολυώνυμο σαν δοκιμαστική συνάρτηση.

Η έκφραση των πολυωνύμων αυτών έχει ως εξής

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{i-1} \\ \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \geq x_{i+1}. \end{cases} \quad (3)$$

Η γραφική παράσταση μιας από τις συναρτήσεις αυτές είναι ένα τρίγωνο ή μια συνάρτηση ‘στέγες’ και αποκαλούνται συναρτήσεις βάσης. Εναλλακτικά χρησιμοποιούνται συναρτήσεις Hermite και splines σαν βάση.

Τώρα, στην βάση αυτή, η δοκιμαστική μας συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω συναρτήσεων φ_i

$$p(x) = \sum_{i=0}^N \alpha_i \varphi_i(x) \quad (4)$$

όπου έχουμε χωρίσει την περιοχή ενδιαφέροντος σε N στοιχεία και α_i είναι οι παράμετροι που πρέπει να υπολογίσουμε. Η απαίτηση των συνοριακών συνθηκών (2) μας δίνει

$$p(0) = y(0) \rightarrow a_0 = y(0) \text{ και } p(1) = y(1) \rightarrow a_N = y(1)$$

και έτσι μας μένει να υπολογίσουμε $N-1$ παραμέτρους.

Ο υπολογισμός των παραμέτρων γίνεται θέτοντας το ολοκληρωτικό σφάλμα ίσο με μηδέν

$$\int R(x) w_i(x) dx = 0$$

όπου w_i συναρτήσεις βάρους. Παρατηρούμε ότι θέτοντας $w_i = \frac{\partial R}{\partial a_i}$ έχουμε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων που προαναφέραμε.

Στην προκειμένη περίπτωση όμως σαν συναρτήσεις βάρους συμφέρει να πάρουμε τις συναρτήσεις βάσης και η περίπτωση αυτή η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος Galerkin

$$\int R(x)\varphi_i(x)dx = 0, \quad i = 1, \dots, N-1$$

Πιο συγκεκριμένα στο πρόβλημα μας έχουμε

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 p(x)}{dx^2} - 6x \right) \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N-1$$

Παρατηρούμε ότι επειδή η $p(x)$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό πολυωνύμων πρώτου βαθμού, η δεύτερη παράγωγός της είναι μηδέν στα διαστήματα ανάμεσα στα σημεία. Επίσης ότι επειδή η κλίση αλλάζει σε κάθε σημείο φαινομενικά η δεύτερη παράγωγος απειρίζεται αλλά αυτό δεν είναι πρόβλημα αφού εμείς υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της και όχι την ίδια την παράγωγο. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{d^2 p(x)}{dx^2} \varphi_i(x) dx - \int_0^1 6x \varphi_i(x) dx = \\ & = \frac{dp}{dx} \varphi_i \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dp(x)}{dx} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} dx - \int_0^1 6x \varphi_i(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (5) \end{aligned}$$

Το πρώτο κομμάτι της (5) είναι μηδέν επειδή $\varphi_i(0)=\varphi_i(1)=0$ από τον ορισμό των συναρτήσεων βάσης. Το δεύτερο κομμάτι χρησιμοποιώντας την (4) γράφεται

$$-\int_0^1 \frac{dp(x)}{dx} \frac{d\varphi_i(x)}{dx} dx = -\sum_{j=0}^N a_j \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx, \quad i = 1, \dots, N-1$$

Παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται είναι ανεξάρτητα του προβλήματος και έτσι αρκεί να τα υπολογίσουμε μία φορά. Εάν τα x_i είναι ομοιόμορφα κατανομημένα στο διάστημα του ενδιαφέροντος $[a, b]=[0,1]$ με βήμα $h=x_i-x_{i-1}$ τότε έχουμε

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx = \begin{cases} \frac{2}{h}, & |i-j|=0, \\ -\frac{1}{h}, & |i-j|=1, \\ 0, & |i-j|>1. \end{cases}$$

Άρα το άθροισμα γίνεται

$$-\sum_{j=0}^N a_j \int_0^1 \frac{d\varphi_i(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx = \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h}$$

και η (5) γίνεται

```

integer npep,k,j,l
real down(0:500),diag(0:500),up(0:500),r(0:500),u(0:500),x(0:500)
      real h
      real bet,gam(1:500)

      print *, 'Methodos Peperasmenon Stoixeion -Theodonis Ioannis 2003'
10  print *, 'Doste ton arithmo ton peperasmenon stoixeion '
      print *, '(max=500),(0 gia exodo)'
      read(*,*) npep
      if (npep.eq.0) stop
      print *, 'ta apotelesmata grafontai sto arxeio apotel.dat'

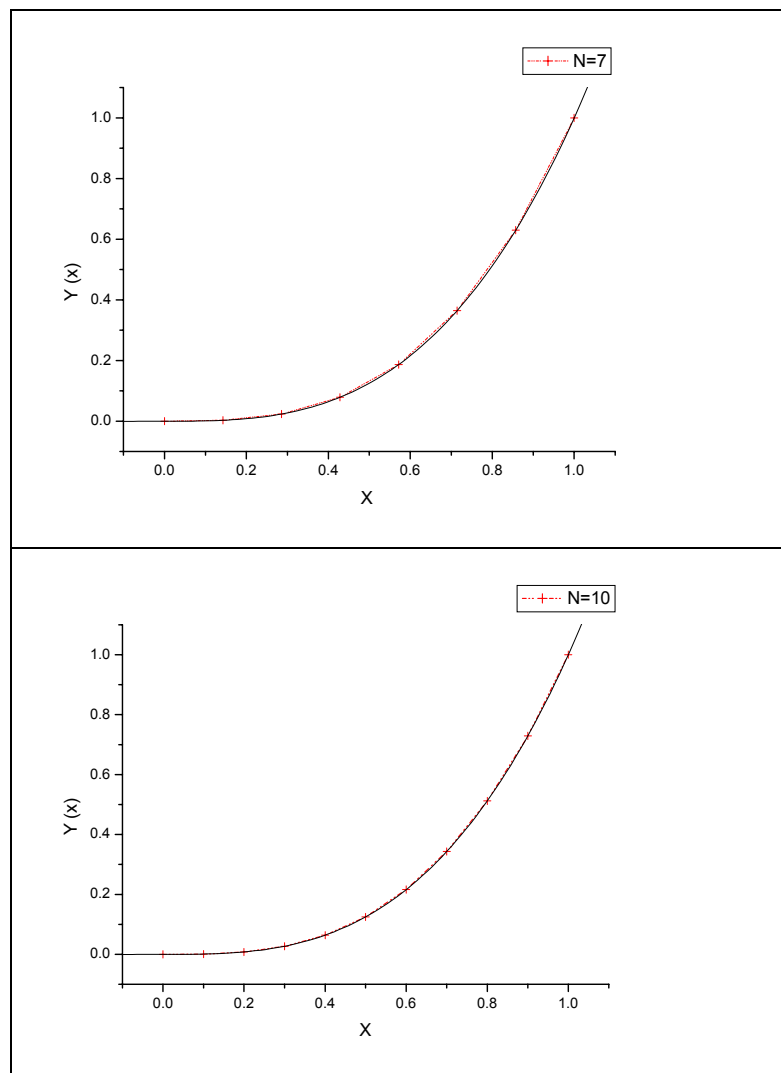
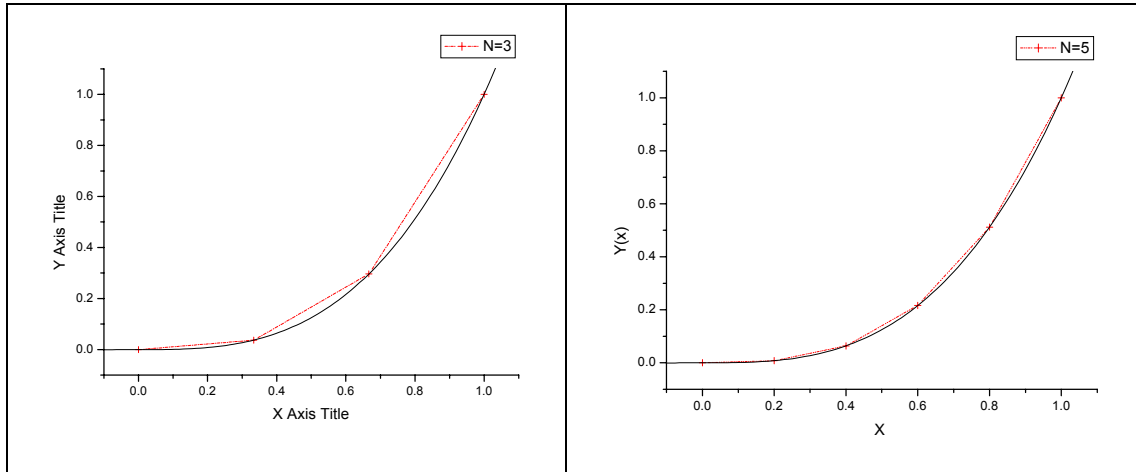
      h=1.0/real(npep)

```

[illegible]

Αποτελέσματα

Εκτελώντας το πρόγραμμα για $N=3,5,7,10$ παίρνουμε τις διαδοχικές προσεγγίσεις της λύσης όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.



Είναι εμφανής η πολύ καλή προσέγγιση της λύσης για $N=10$.

Βιβλιογραφία

A First Course in Computational Physics by Paul L. Devries

Πεπερασμένα Στοιχεία Α.Μπακακος ΕΜΠ

Θεοδώνης Ιωάννης

Για το μάθημα Υπολογιστικής Φυσικής

Φεβρουάριος 2003