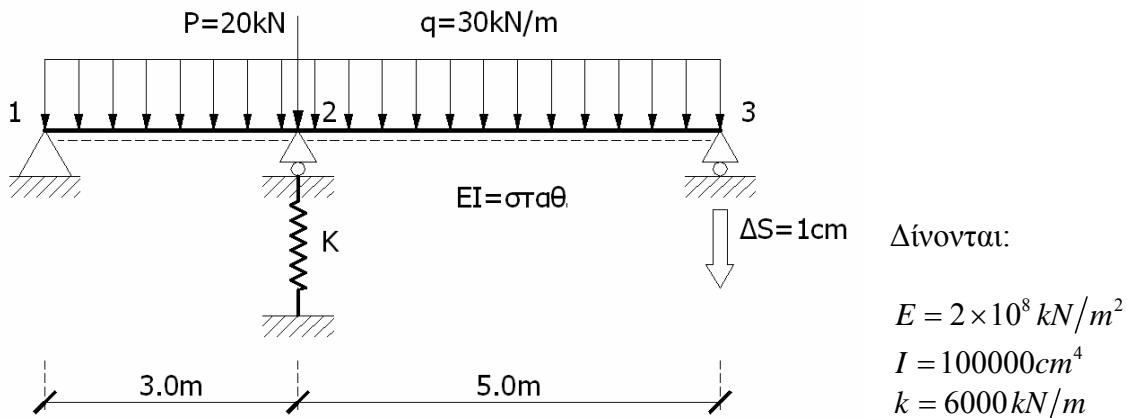


ΘΕΜΑ 1

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Στο φορέα του σχήματος ζητούνται:

- α) να χαραχθούν τα διαγράμματα M , Q (2.5 μονάδες)
- β) να υπολογιστεί το μέτρο και η φορά της κατακόρυφης μετατόπισης στο μέσο του τμήματος (23) (1 μονάδα)

**ΕΠΙΛΥΣΗ:****Ερώτημα α**

$$E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2, \quad I = 100000 \text{ cm}^4 = 10^{-3} \text{ m}^4, \quad EI = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \times 10^{-3} \text{ m}^4 = 2 \times 10^5 \text{ kNm}^2$$

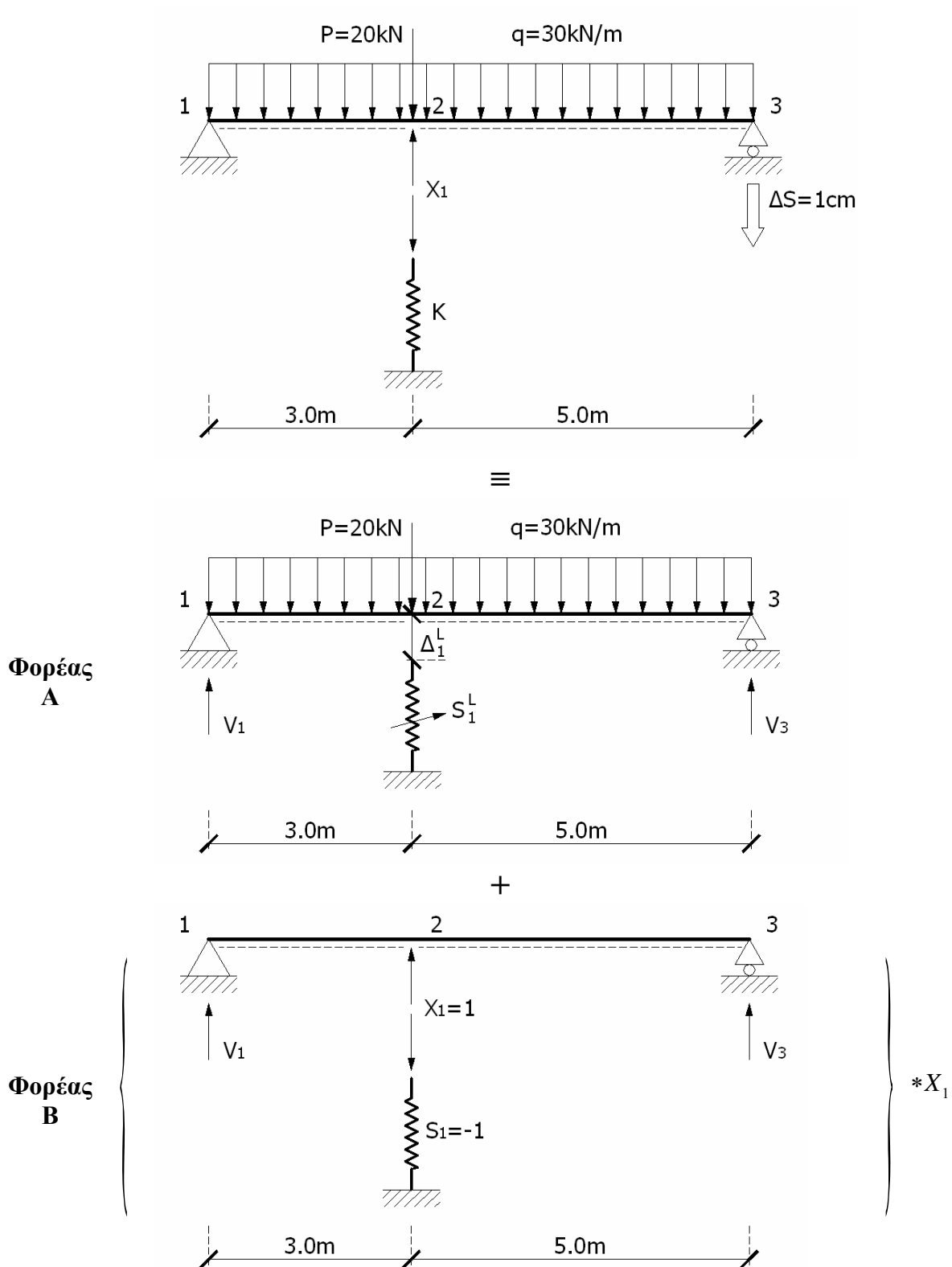
$$k = 6000 \text{ kN/m}, \quad f = 1/k = (1/6000) \text{ m/kN}$$

Μέθοδος των Δυνάμεων:

- Οι εξισώσεις ισορροπίας ικανοποιούνται
- Απαίτηση ικανοποίησης και της εξισώσεως συμβιβαστού

Α' ΤΡΟΠΟΣ:

Επιλέγω ως άγνωστο υπερστατικό μέγεθος την αντίδραση του γραμμικού ελατηρίου.
(Στατική Αοριστία = 1)



Στατική Επίλυση Φορέα Α

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 30 \cdot 8 \cdot 4 + 20 \cdot 3 - V_3 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = 127.50 \text{ kN}}$$

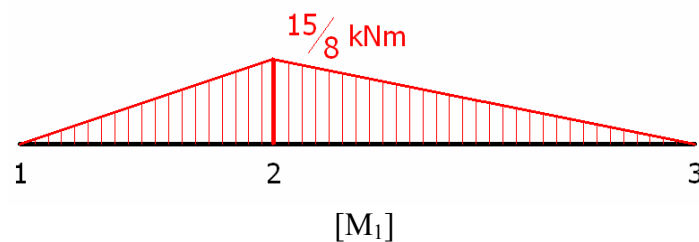
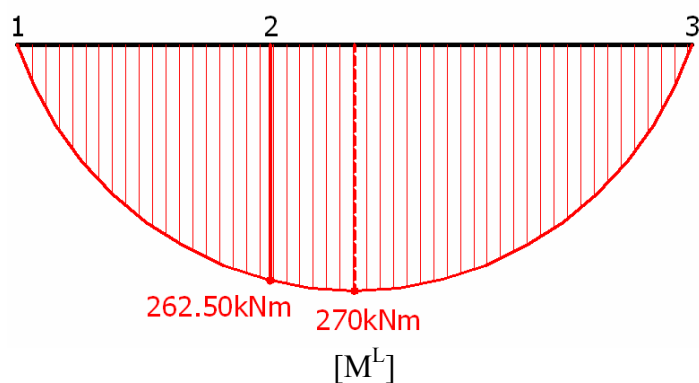
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_3 - 20 - 30 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 260 - V_3 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 132.50 \text{ kN}}$$

Στατική Επίλυση Φορέα Β

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 1 \cdot 3 + V_3 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = -3/8 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_3 + 1 = 0 \Leftrightarrow V_1 = -1 - (-3/8) \Leftrightarrow \boxed{V_1 = -5/8 \text{ kN}}$$

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών (Θεμελιώδης Φορέας)



Εξίσωση Συμβιβαστού:

$$0 = \Delta_1^{(s)} = \Delta_1^L + F_{11} \cdot X_1, \text{ όπου}$$

$$1 \cdot \Delta_1^L + \underbrace{\frac{1}{100} \cdot \frac{3}{8}}_{\text{ομόρροπα}} = \int \frac{M_1 \cdot M_L}{EI} dx + \cancel{S_1 \cdot (f \cdot S_1^L)} = 0$$

Για $ml = 3 \Rightarrow m = 3/8$ και $nl = 3 \Rightarrow n = 5/8$ από το αντίστοιχο διάγραμμα λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \int \frac{M_1 \cdot M_L}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{15}{8} \right) \cdot \left[0 + 2 \cdot 270 + 0 - \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot (0 - 2 \cdot 270 + 0) \right] \cdot 8 = \\ &= -\frac{15}{6EI} \cdot \left[540 + \frac{15}{64} \cdot 540 \right] = -6.75 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Επομένως, $\Delta_1^L + 3.75 \times 10^{-3} = -6.75 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \boxed{\Delta_1^L = 10.50 \times 10^{-3}}$

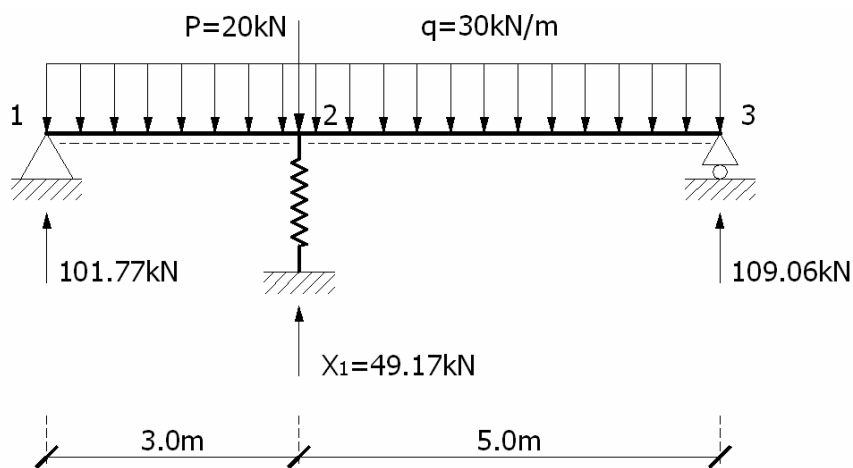
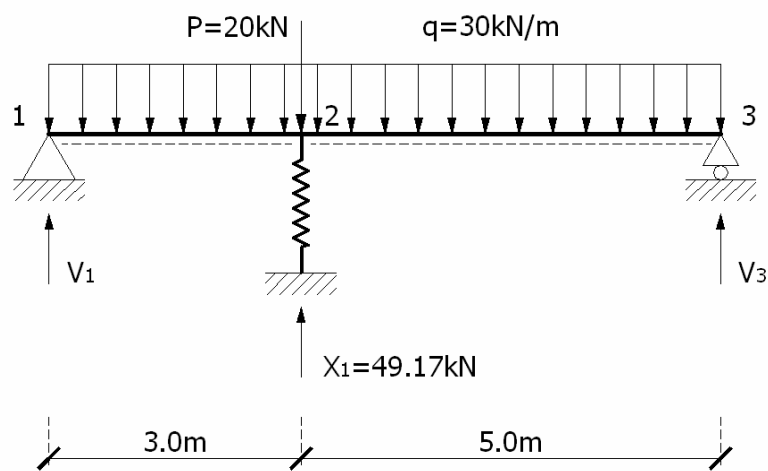
Επίσης, $F_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx + S_1 \cdot (f \cdot S_1)$, όπου

$$\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{15}{8}\right)^2 \cdot 8 = 4.6875 \times 10^{-5}$$

$$S_1 \cdot (f \cdot S_1) = (-1) \cdot \frac{1}{6000} \cdot (-1) = 1.6667 \times 10^{-4}$$

Επομένως, $F_{11} = 4.6875 \times 10^{-5} + 1.6667 \times 10^{-4} \Leftrightarrow \boxed{F_{11} = 2.1354 \times 10^{-4}}$

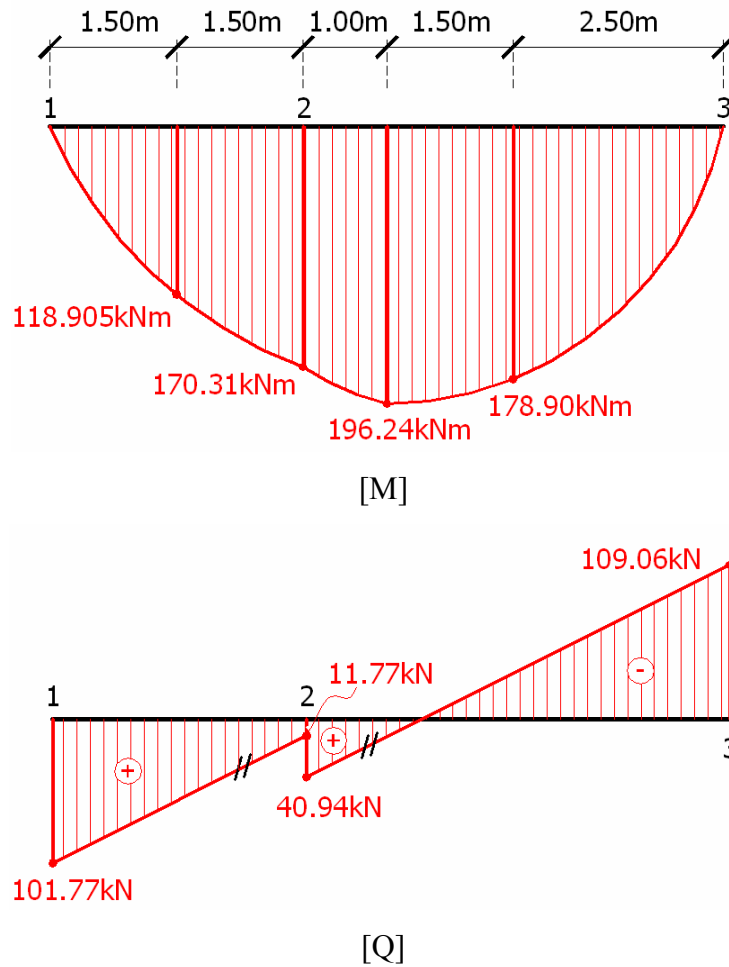
Τελικά, $0 = \Delta_1^{(s)} = \Delta_1^L + F_{11} \cdot X_1 \Leftrightarrow 0 = 10.50 \times 10^{-3} + 2.1354 \times 10^{-4} \cdot X_1 \Leftrightarrow \boxed{X_1 = 49.17 \text{ kN}}$



$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 49.17 \cdot 3 - 20 \cdot 3 - 30 \cdot 8 \cdot 4 + V_3 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = 109.06 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 49.17 + V_3 - 20 - 30 \cdot 8 + V_1 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 210.83 - V_3 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 101.77 \text{ kN}}$$

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών (Υπερστατικός Φορέας)

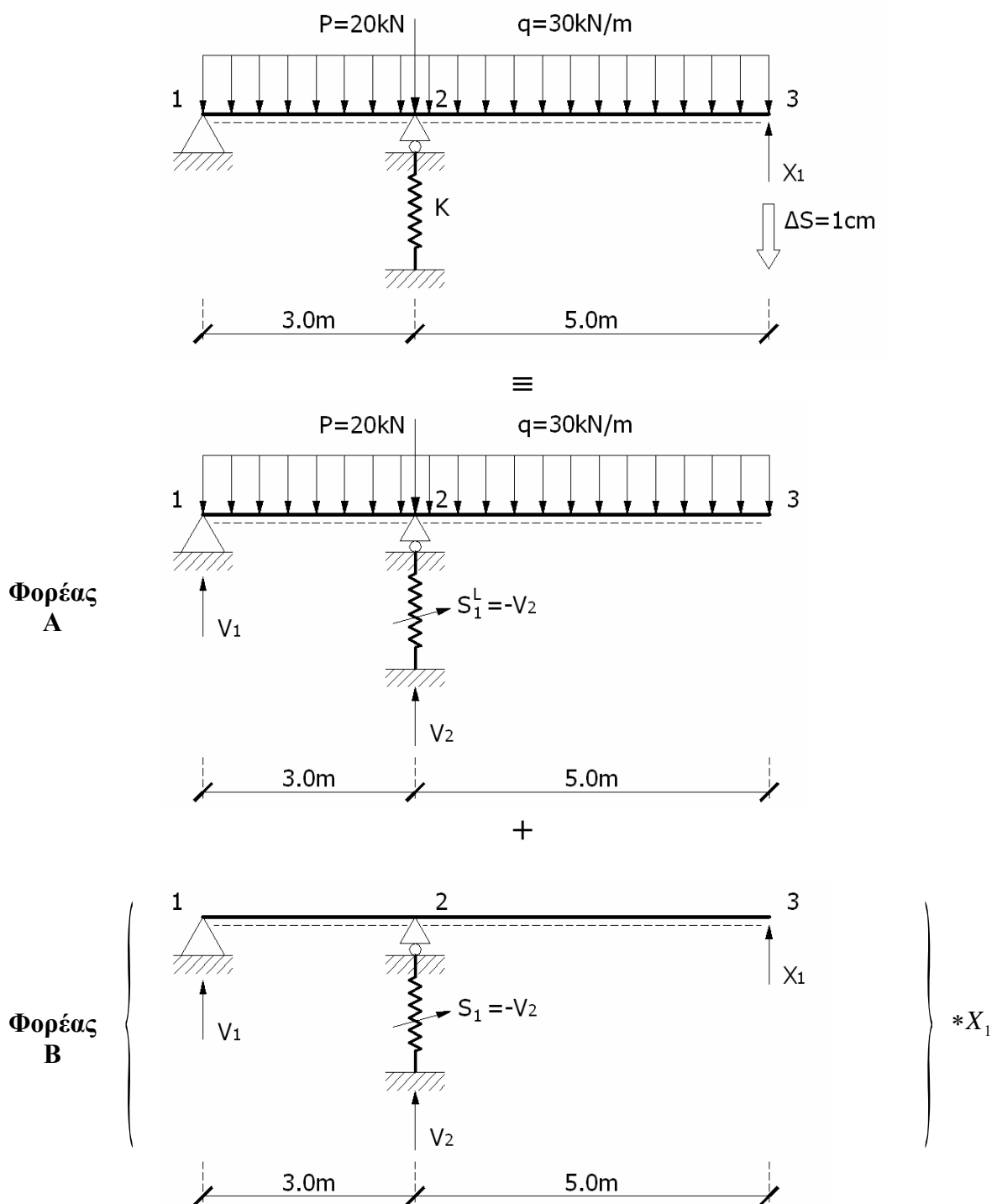


Παρατήρηση 1: Στον κόμβο #2 έχουμε πήδημα στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων λόγω της ύπαρξης συγκεντρωμένης φόρτισης ίσο με $49.17 - 20 = 29.17 \text{ kN}$

Παρατήρηση 2: Το διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων [N] είναι μηδενικό.

Β' ΤΡΟΠΟΣ:

Επιλέγω ως άγνωστο υπερστατικό μέγεθος την αντίδραση στη στήριξη #3.
(Στατική Αοριστία =1)



Στατική Επίλυση Φορέα Α

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow V_2 \cdot 3 - 20 \cdot 3 - 30 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow V_2 = 340 \text{ kN}$$

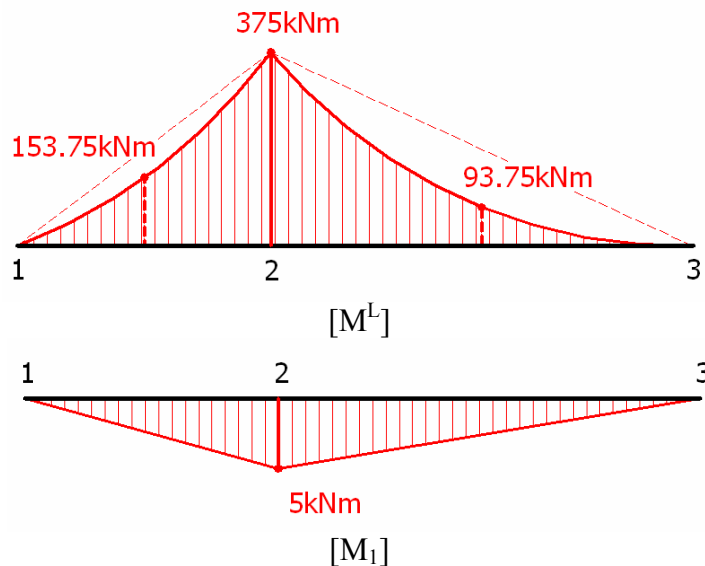
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_3 - 20 - 30 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 260 - V_3 \Leftrightarrow V_1 = -80 \text{ kN}$$

Στατική Επίλυση Φορέα Β

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 1 \cdot 8 + V_2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow V_2 = -8/3 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow V_1 = -1 - (-8/3) \Leftrightarrow V_1 = 5/3 \text{ kN}$$

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών (Θεμελιώδης Φορέας)



Εξίσωση Συμβιβαστού

$$-0.01 = \Delta_1^{(s)} = \Delta_1^L + F_{11} \cdot X_1, \text{ όπου } 1 \cdot \Delta_1^L = \int \frac{M_1 \cdot M_L}{EI} dx + S_1 \cdot (f \cdot S_1^L)$$

$$\int \frac{M_1 \cdot M_L}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot (2 \cdot (-153.75) - 375) + 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot (2 \cdot (-93.75) - 375) \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} [-1706.25 - 2343.75] = -0.02025$$

$$S_1 \cdot (f \cdot S_1) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6000} \cdot (-340) = -0.15111$$

$$\text{Επομένως, } \Delta_1^L = -0.02025 - 0.15111 \Leftrightarrow \Delta_1^L = -0.17136$$

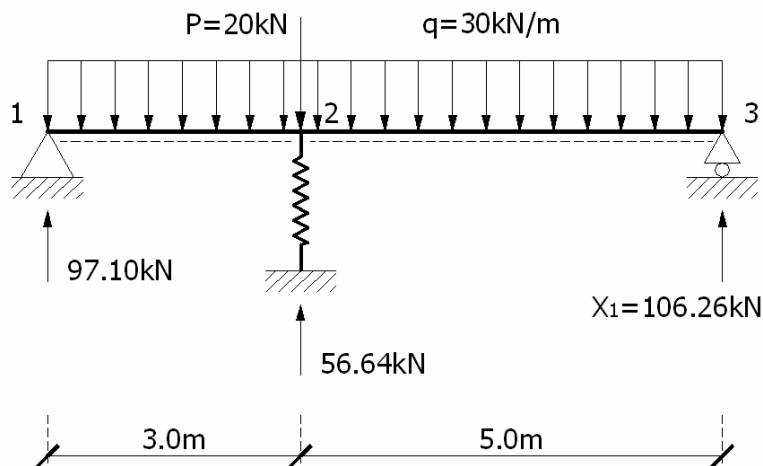
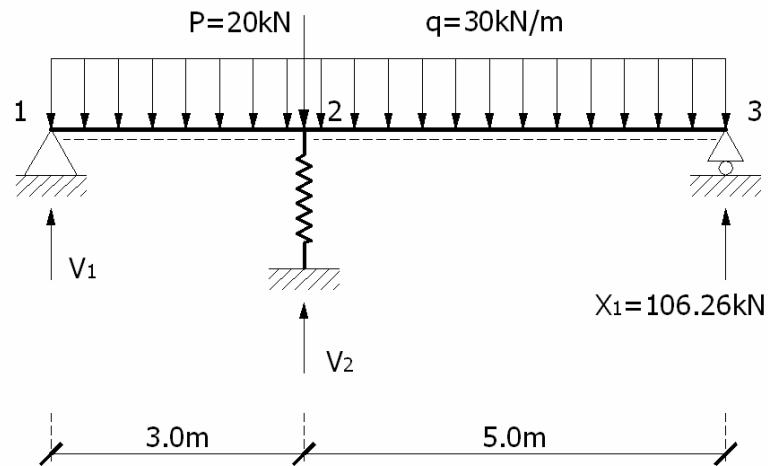
$$\text{Επίσης, } F_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx + S_1 \cdot (f \cdot S_1), \text{ όπου}$$

$$\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5^2 = 3.333 \times 10^{-4} \text{ και } S_1 \cdot (f \cdot S_1) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6000} \cdot \frac{8}{3} = 1.185 \times 10^{-3}$$

$$\text{Επομένως, } F_{11} = 3.333 \times 10^{-4} + 1.185 \times 10^{-3} \Leftrightarrow F_{11} = 1.15185 \times 10^{-3}$$

Τελικά,

$$-0.01 = \Delta_1^{(s)} = \Delta_1^L + F_{11} \cdot X_1 \Leftrightarrow -0.01 = -0.17136 + 1.5185 \times 10^{-3} \cdot X_1 \Leftrightarrow \boxed{X_1 = 106.26 \text{ kN}}$$

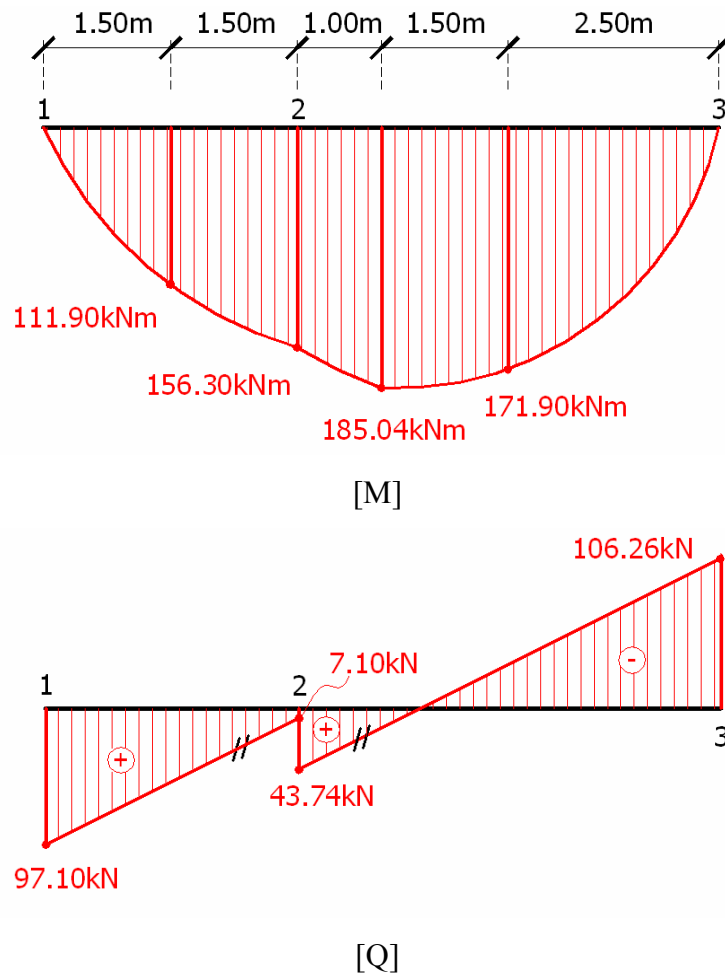


$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 106.26 \cdot 8 - 20 \cdot 3 - 30 \cdot 8 \cdot 4 - V_2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_2 = 56.64 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_2 + 106.26 - 20 - 30 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 153.74 - V_2 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 97.10 \text{ kN}}$$

Παρατήρηση: Τα αποτελέσματα της μεθόδου β' παρουσιάζουν μικρές διαφορές με εκείνα της μεθόδου α' λόγω δεκαδικών ψηφίων. Δεν υπάρχουν σημαντικά αξιολογες διαφορές.

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών (Υπερστατικός Φορέας)

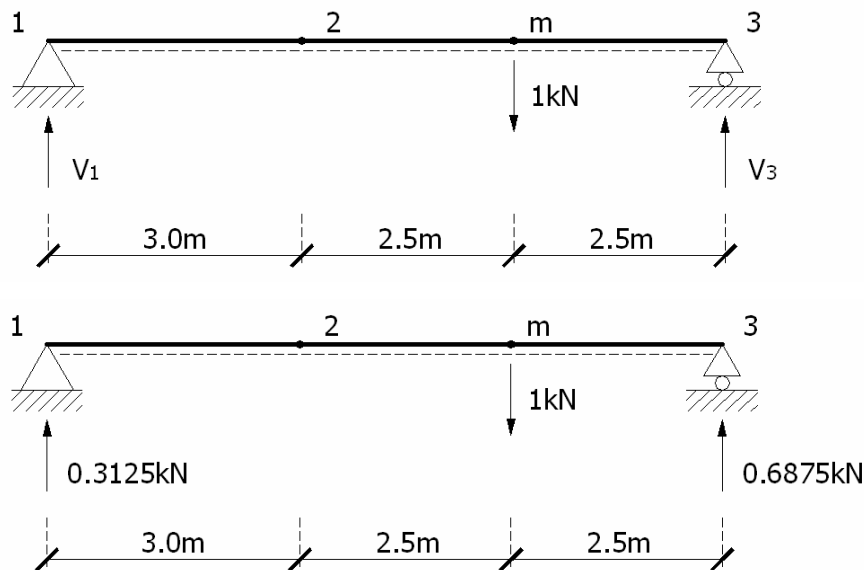


Παρατήρηση 1: Στον κόμβο #2 έχουμε πήδημα στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων λόγω της ύπαρξης συγκεντρωμένης φόρτισης ίσο με $56.64 - 20 = 36.64 \text{ kN}$

Παρατήρηση 2: Το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων είναι μηδενικό.

Ερώτημα β

Προκειμένου να υπολογιστεί το μέτρο και η φορά της κατακόρυφης μετατόπισης στο μέσο του τμήματος (23), τοποθετούμε μία συγκεντρωμένη μοναδιαία φόρτιση στο σημείο αυτό, αναφερόμενοι σε οποιοδήποτε θεμελιώδη ισοστατικό φορέα.. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί ο θεμελιώδης φορέας του πρώτου τρόπου επίλυσης, που είδαμε παραπάνω.

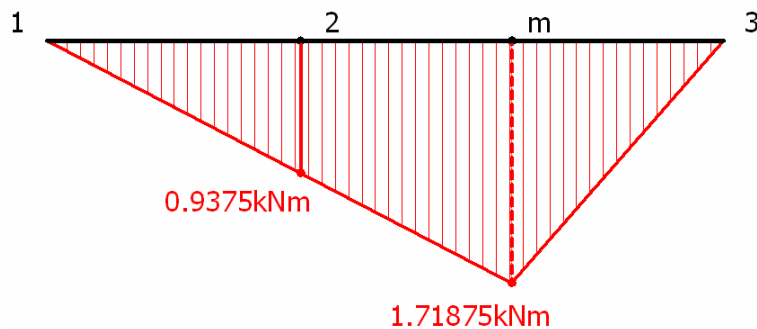


Εξισώσεις ισορροπίας

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow V_3 \cdot 8 - 1 \cdot 5.50 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = 0.6875 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 - 1 + V_3 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 1 - V_3 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 0.3125 \text{ kN}}$$

Διάγραμμα Ροπών Κάμψεως [\bar{M}]



Θεώρημα Μοναδιαίου Φορτίου (Εξίσωση Ελαστικότητας):

$$1 \cdot \delta + \left(-\frac{1}{100}\right) \cdot 0.6875 = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx$$

$$\int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1.71875 \cdot \left[0 + 2 \cdot 196.24 + 0 - \frac{5.5}{8} \cdot \frac{2.5}{8} \cdot (0 - 2 \cdot 196.24 + 0)\right] =$$

$$= \frac{13.75}{6EI} \cdot [392.48 + 84.321875] = 5.463 \times 10^{-3}$$

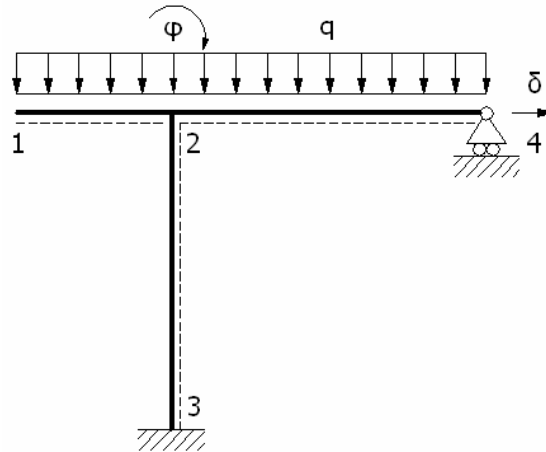
$$\text{Άρα, } 1 \cdot \delta - 6.875 \times 10^{-3} = 5.463 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \boxed{\delta = 1.23 \text{ cm} \downarrow}$$

ΘΕΜΑ 2

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

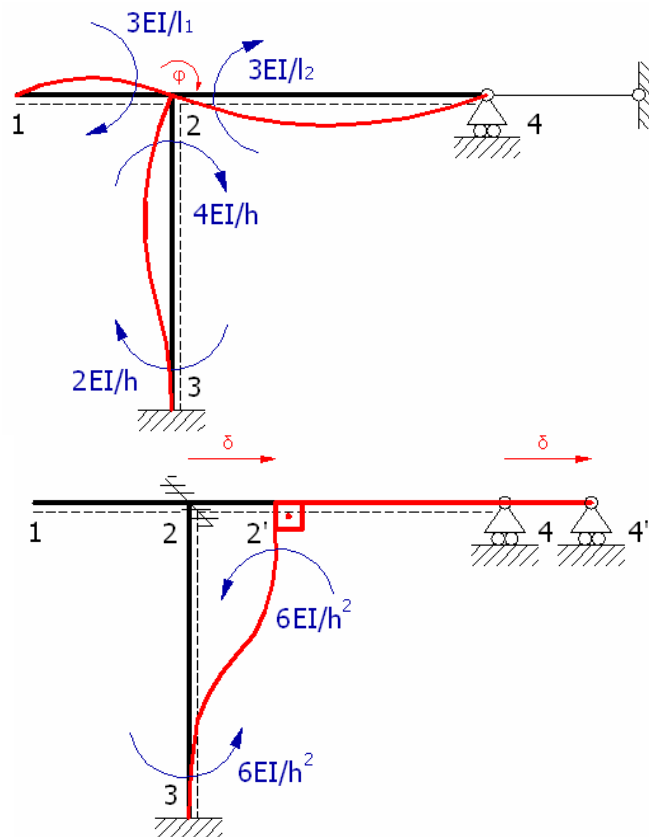
Στο φορέα του σχήματος ζητείται: (2.5 μονάδες)

- α) η ποιοτική χάραξη των διαγραμμάτων M , Q , N χωρίς κανένα υπολογισμό
- β) να καθοριστεί η φορά της οριζόντιας μετατόπισης του κόμβου 2

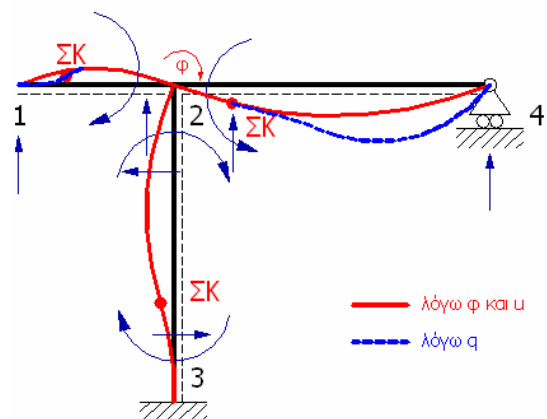


ΕΠΙΛΥΣΗ:

- Κινηματική Αοριστία Φορέα = 2, $\{\delta, \varphi\}$
- Χάραξη ελαστικής γραμμής για φ και δ



Δίνουμε μία επιπλέον παραμόρφωση στην ελαστική γραμμή στο τμήμα που περιέχει το φορτίο. Από τις ελαστικές γραμμές των φ και δ προκύπτει συνολικά:



$$M_{12} = 0, \quad M_{21} < 0$$

$$M_{23} < 0, \quad M_{32} > 0$$

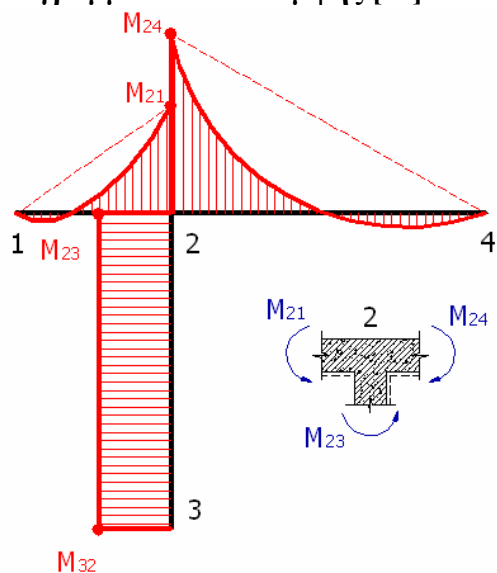
$$M_{24} < 0, \quad M_{42} = 0$$

$$Q_{12} > 0, \quad Q_{21} < 0, \quad |Q_{21}| > Q_{12}$$

$$Q_{24} > 0, \quad Q_{42} < 0, \quad |Q_{42}| > Q_{24}$$

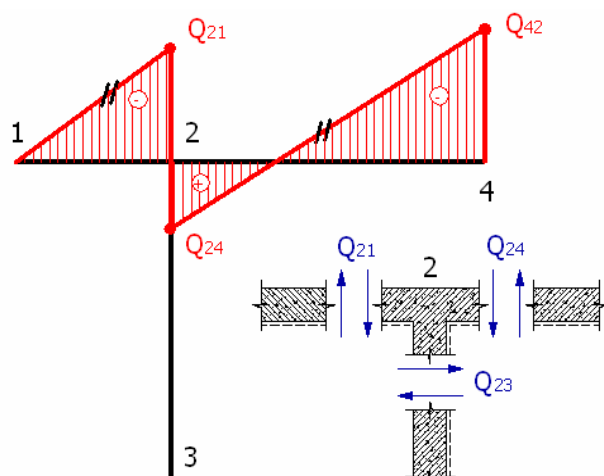
$$Q_{23} < 0, \quad Q_{32} < 0, \quad |Q_{23}| = |Q_{32}|$$

Διάγραμμα Ροπών Κάμψης [M]

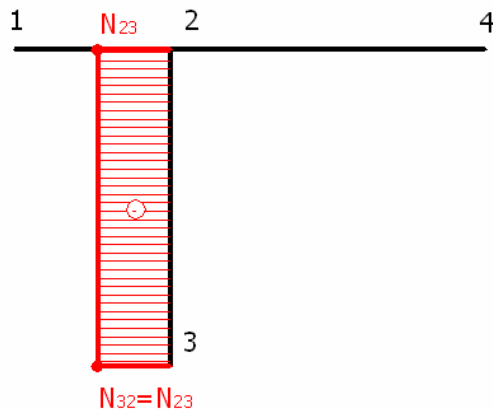


Πρέπει: $M_{24} = M_{21} + M_{23}$

Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων [Q]



Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων [N]



Αξονικές Δυνάμεις:

$$N_{12} = N_{21} = Q_{23} > 0$$

$$N_{23} = N_{32} = -|Q_{21}| - |Q_{24}| < 0$$

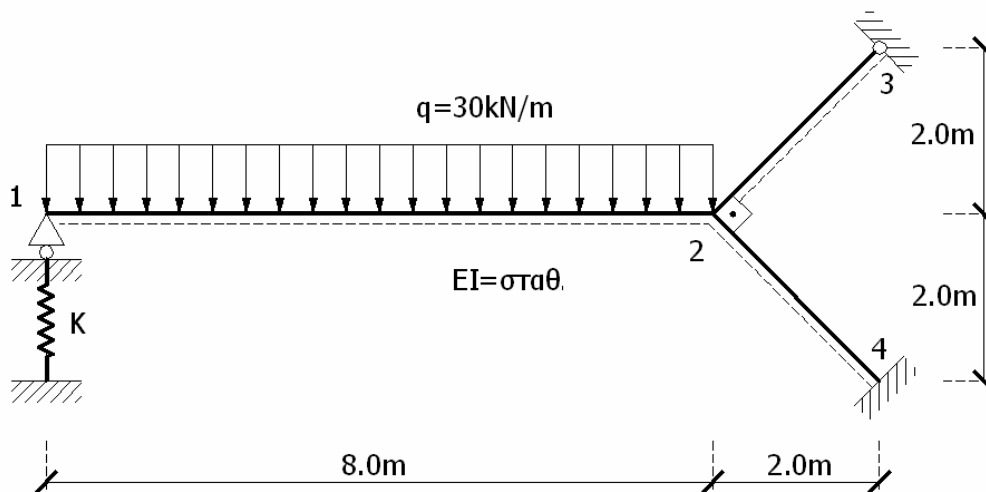
$$N_{24} = N_{42} = 0 \text{ (κύλιση στον \#4)}$$

Η φορά της οριζόντιας μετατόπισης του κόμβου #2 είναι προς τα δεξιά, δεδομένου ότι παντού $EI = \text{σταθ.}$ και το μήκος του τμήματος (24) είναι μεγαλύτερο από εκείνο του τμήματος (12).

ΘΕΜΑ 3

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Στο φορέα του σχήματος ζητούνται να χαραχθούν τα διαγράμματα M, Q, N (3 μονάδες)
 Δίνονται: $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$, $I = 100000 \text{ cm}^4$, $k = 6000 \text{ kN/m}$



ΕΠΙΛΥΣΗ:

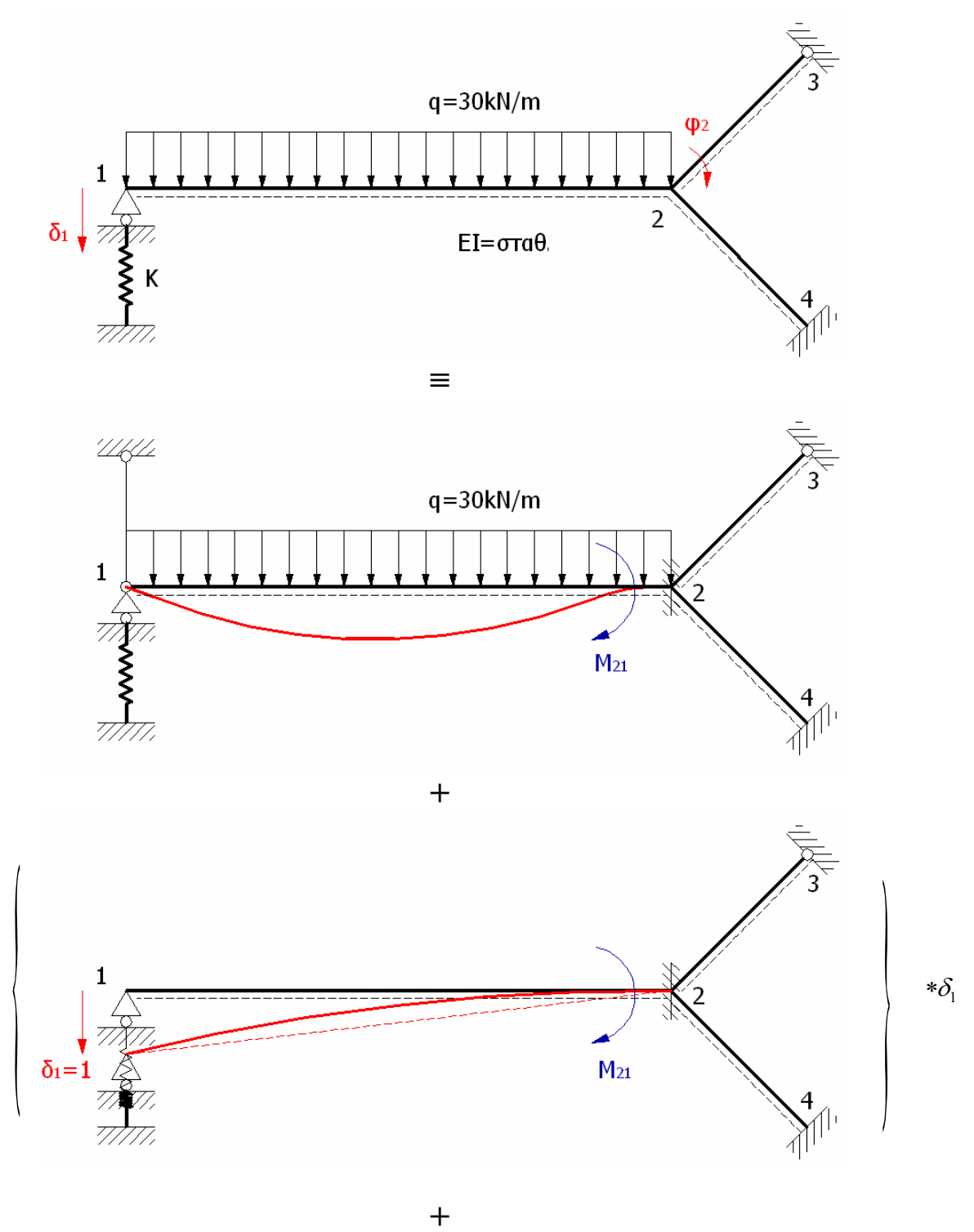
$$E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2, I = 100000 \text{ cm}^4 = 10^{-3} \text{ m}^4, EI = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2 \times 10^{-3} \text{ m}^4 = 2 \times 10^5 \text{ kNm}^2$$

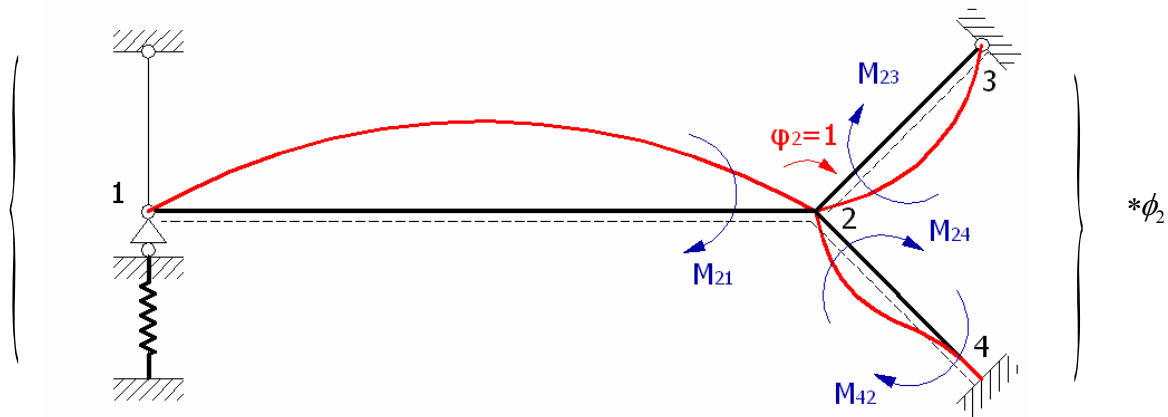
$$l_{23} = l_{24} = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

Κινηματική Αοριστία: 2, (δ_1, ϕ_2)

Μέθοδος των Μετατοπίσεων:

- Οι εξισώσεις συμβιβαστού ικανοποιούνται
- Απαίτησης ικανοποίησης και των εξισώσεων ισορροπίας





Ροπές Κάμψεως

$$M_{12} = 0$$

$$M_{21} = -240 - \frac{3EI}{8^2} \delta_1 - \frac{3EI}{8} \phi_2$$

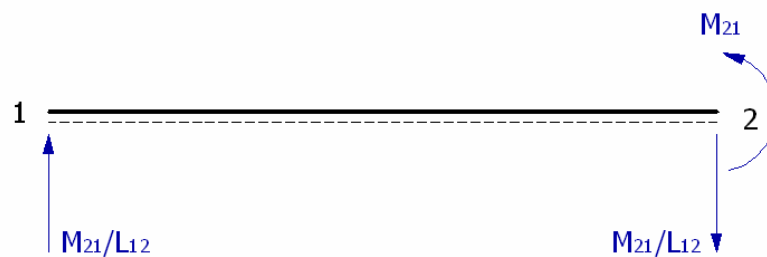
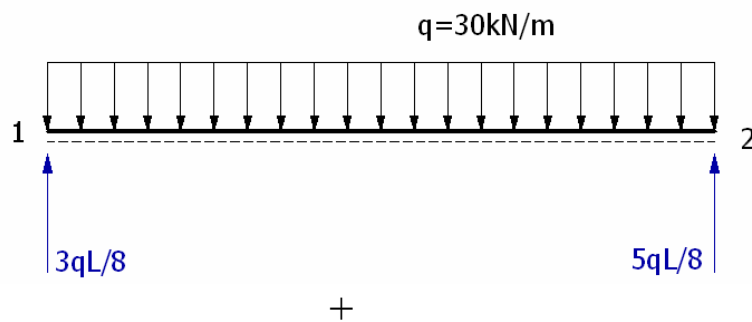
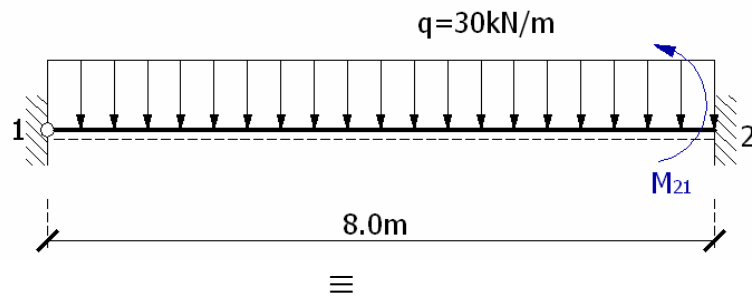
$$M_{23} = \frac{3EI}{2\sqrt{2}} \phi_2$$

$$M_{32} = 0$$

$$M_{24} = \frac{4EI}{2\sqrt{2}} \phi_2$$

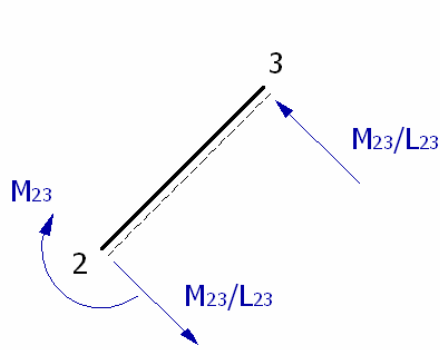
$$M_{42} = -\frac{2EI}{2\sqrt{2}} \phi_2$$

Τέμνουσες Δυνάμεις

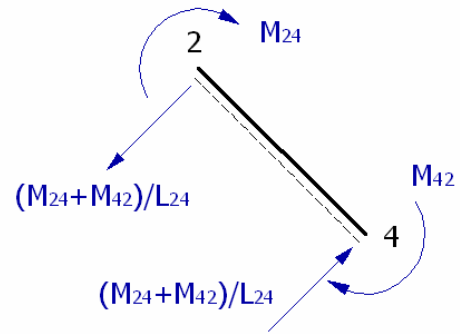


$$Q_{12} = 90 + \frac{M_{21}}{8}$$

$$Q_{21} = -150 + \frac{M_{21}}{8}$$

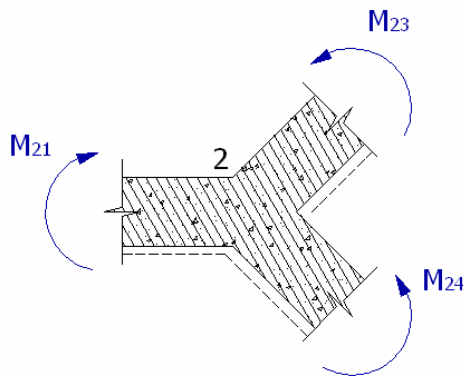


$$Q_{23} = -\frac{M_{23}}{2\sqrt{2}} \quad Q_{32} = -\frac{M_{32}}{2\sqrt{2}}$$

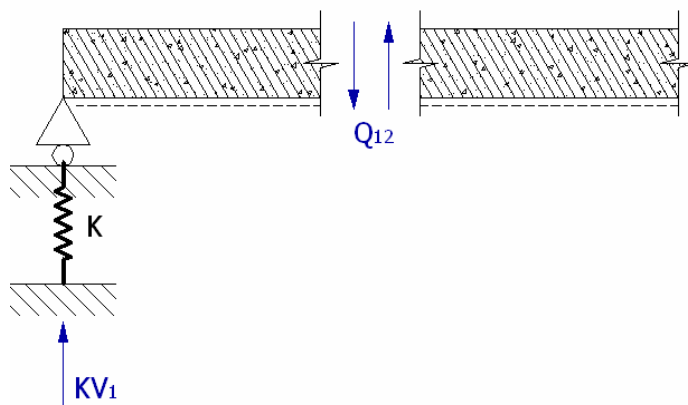


$$Q_{24} = -\frac{M_{24} + M_{42}}{2\sqrt{2}} \quad Q_{42} = -\frac{M_{24} + M_{42}}{2\sqrt{2}}$$

Εξισώσεις Ισοροπίας



$$\begin{aligned} M_{21} &= M_{23} + M_{24} \Rightarrow \\ \Rightarrow -240 - \frac{3EI}{8^2} \delta_1 - \frac{3EI}{8} \phi_2 &= \frac{3EI}{2\sqrt{2}} \phi_2 + \frac{4EI}{2\sqrt{2}} \phi_2 \\ \Rightarrow -240 - 9375\delta_1 - 75000\phi_2 &= 494974.7468\phi_2 \\ \Rightarrow \boxed{569974.7468\phi_2 + 9375\delta_1} &= -240 \quad (A) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} K\delta_1 = Q_{12} = 90 - 30 - 1171.875\delta_1 - 9375\phi_2 &\Rightarrow 6000\delta_1 = 60 - 1171.875\delta_1 - 9375\phi_2 \\ \Rightarrow \boxed{7171.875\delta_1 + 9375\phi_2} &= 60 \quad (B) \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος εξισώσεων (A) και (B) είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_2 &= -5.7095 \times 10^{-4} \text{ rad} \\ \delta_1 &= +9.1124 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}}$$

Επομένως,

$$M_{12} = 0 \quad M_{21} = -240 - \frac{3EI}{8^2} \delta_1 - \frac{3EI}{8} \phi_2 = -240 - 85.42875 + 42.82125 = -282.61kNm$$

$$M_{23} = \frac{3EI}{2\sqrt{2}} \phi_2 = -121.12kNm \quad M_{32} = 0$$

$$M_{24} = \frac{4EI}{2\sqrt{2}} \phi_2 = -161.49kNm \quad M_{42} = -\frac{2EI}{2\sqrt{2}} \phi_2 = 80.74kNm$$

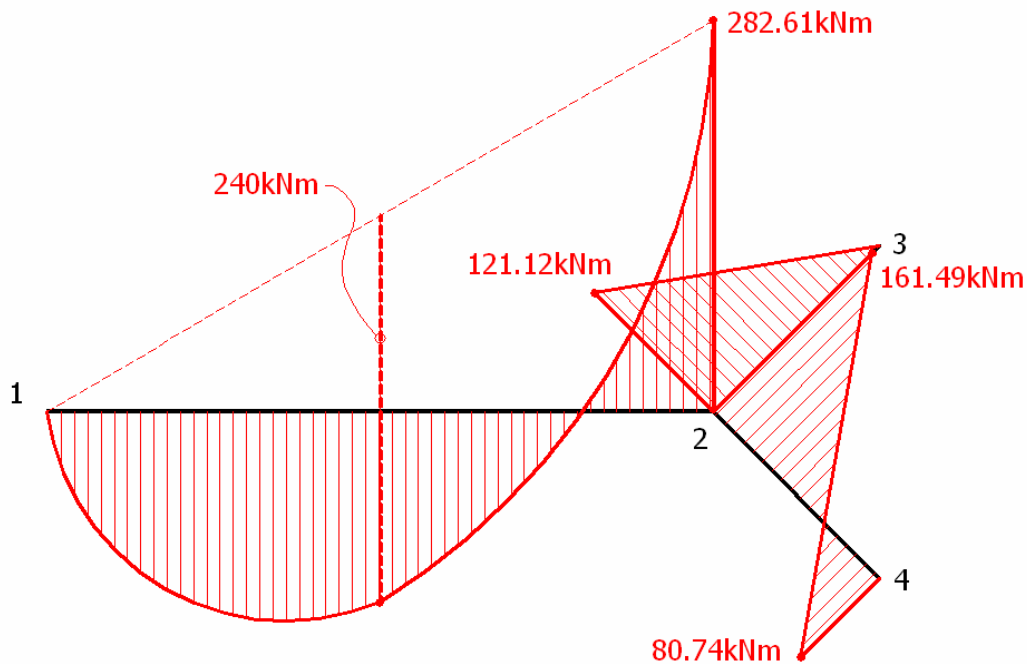
$$Q_{12} = 90 + \frac{M_{21}}{8} = 90 - 35.32625 = 54.67kN$$

$$Q_{21} = -150 + \frac{M_{21}}{8} = -150 - 35.32625 = -185.33kN$$

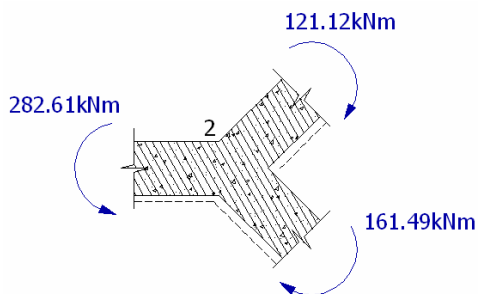
$$Q_{23} = -\frac{M_{23}}{2\sqrt{2}} = 42.82kN \quad Q_{32} = Q_{23} = 42.82kN$$

$$Q_{24} = -\frac{M_{24} + M_{42}}{2\sqrt{2}} = \frac{161.49 + 80.74}{2\sqrt{2}} = 85.64kN \quad Q_{42} = Q_{24} = 85.64kN$$

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών

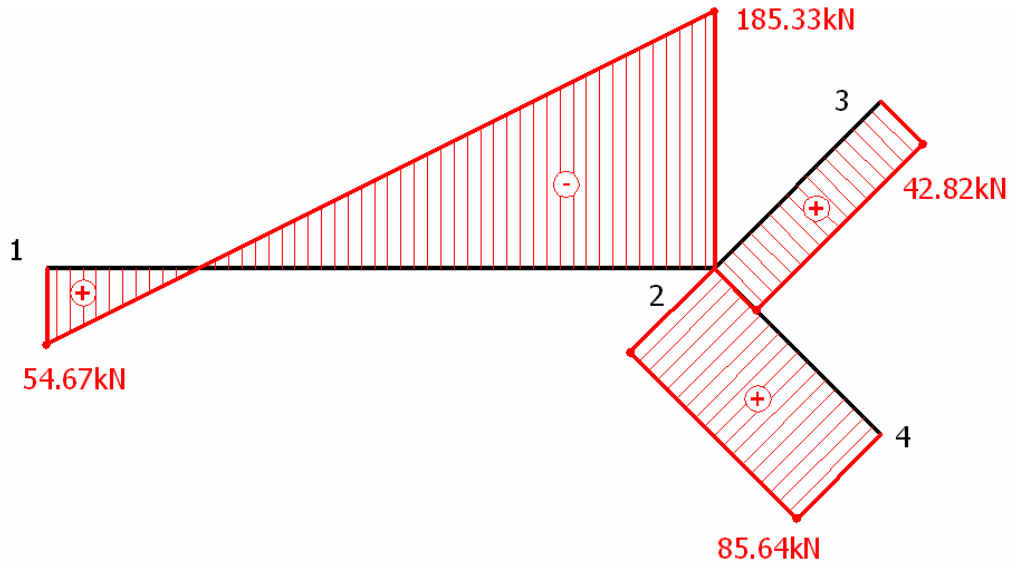


[M]

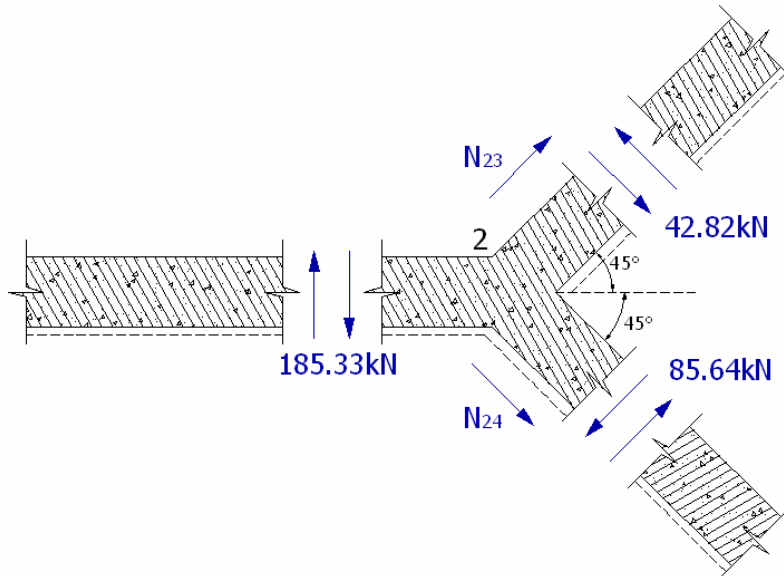


Έλεγχος:

$$121.12kNm + 161.49kNm = 282.61kNm \text{ ισχύει}$$



[Q]



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 42.82 \cos 45^\circ + N_{23} \cos 45^\circ + N_{24} \cos 45^\circ = 85.64 \cos 45^\circ \Rightarrow$$

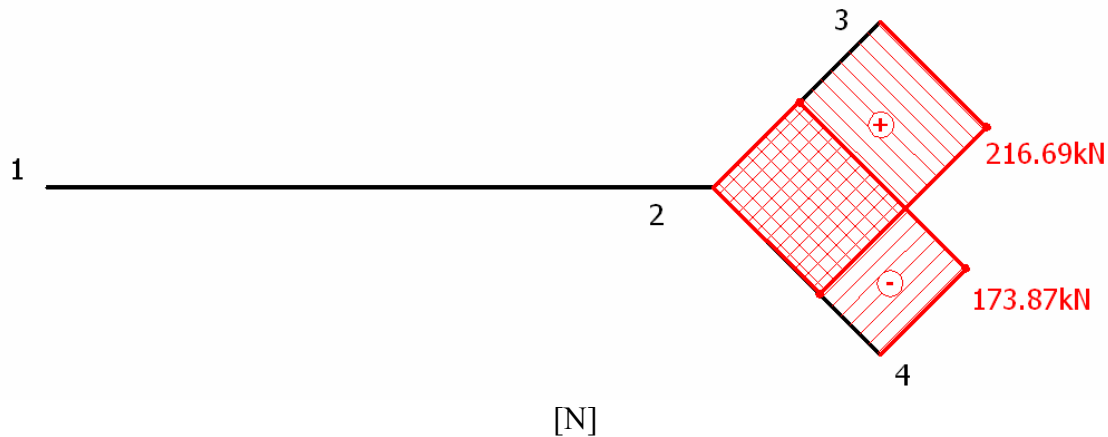
$$\boxed{N_{23} + N_{24} = 42.82} \quad (\Gamma)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 185.33 + 42.82 \sin 45^\circ + 85.64 \sin 45^\circ + N_{24} \cos 45^\circ = N_{23} \sin 45^\circ \Rightarrow$$

$$\boxed{N_{23} - N_{24} = 390.56} \quad (\Delta)$$

Η λύση του συστήματος εξισώσεων (Γ) και (Δ) είναι:

$$\boxed{\begin{matrix} N_{23} = 216.69 \text{ kN} \\ N_{24} = -173.87 \text{ kN} \end{matrix}}$$



Έλεγχος:

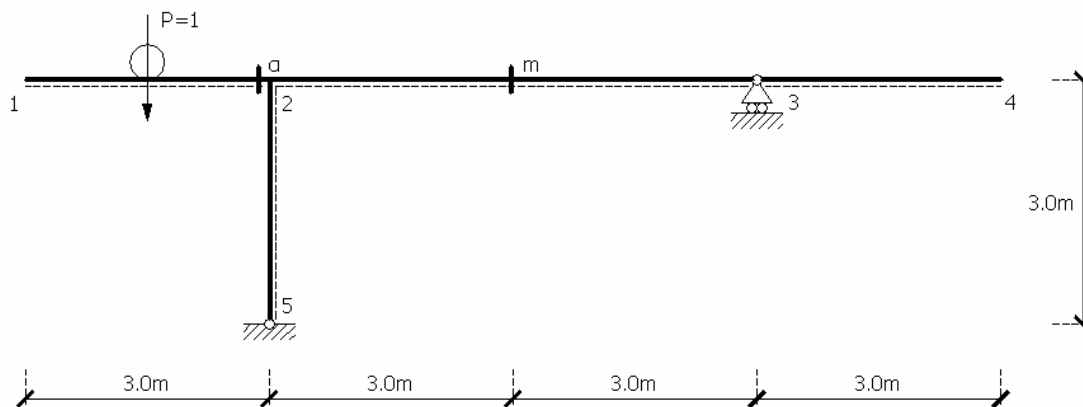
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 216.69 \cos 45^\circ + 42.82 \sin 45^\circ = 85.64 \cos 45^\circ + 173.87 \sin 45^\circ \Rightarrow 259.51 = 259.51$$

ΘΕΜΑ 4

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Στο φορέα του σχήματος και για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου από 1 έως 4 ζητείται η χάραξη των γραμμών επιρροής (1 μονάδα):

- α) της τέμνουσας δύναμης στη θέση α
- β) της ροπής κάμψεως στο μέσο m του τμήματος (23)



ΕΠΙΛΥΣΗ:

Μέθοδος Müller – Breslau:

- Κατά την κίνηση φορτίου $P=1$, τα εντατικά μεγέθη M , Q , N και τα παραμορφωσιακά μεγέθη δ , φ μεταβάλλονται. Σε κάθε σημείο θα υπάρχει διαφορετική μεταβολή στα διαγράμματα εντατικών μεγεθών. Η μεταβολή αυτή απεικονίζεται μέσω των γραμμών επιρροής.
- Για την εύρεση της Γ.Ε. κάποιου εντατικού μεγέθους, κατασκευάζουμε έναν βοηθητικό φορέα καταργώντας το αντίστοιχο εντατικό μέγεθος. Στο φορέα αυτό, ο οποίος είναι

