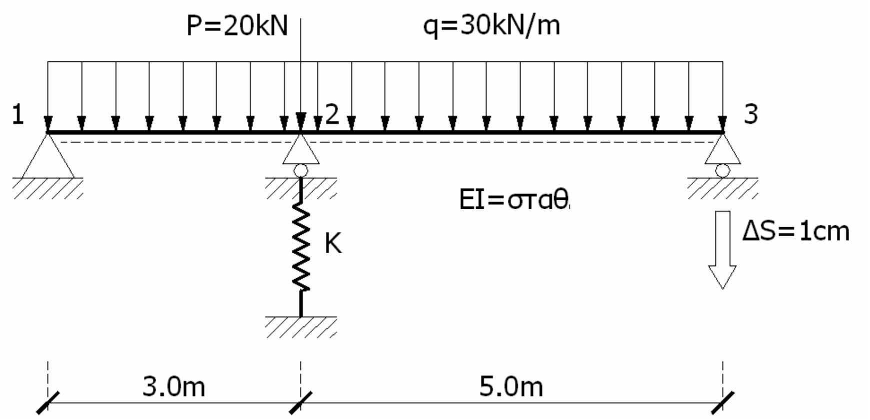
ΑΣΚΗΣΗ 17

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Στο φορέα του σχήματος ζητούνται:
α) να χαραχθούν τα διαγράμματα M, Q (2.5 μονάδες)
β) να υπολογιστεί το μέτρο και η φορά της κατακόρυφης μετατόπισης στο μέσο του τμήματος (23) (1 μονάδα)



Δίνονται:

$E = 2\times 10^8\, kN/m^2$
$I = 100000 cm^4$
$k = 6000\, kN/m$

ΕΠΙΛΥΣΗ:

Ερώτημα α

$E = 2\times 10^8\, kN/m^2$, $I = 100000 cm^4 = 10^{-3} m^4$, $EI = 2\times 10^8\, kN/m^2 \times 10^{-3} m^4 = 2\times 10^5\, kNm^2$

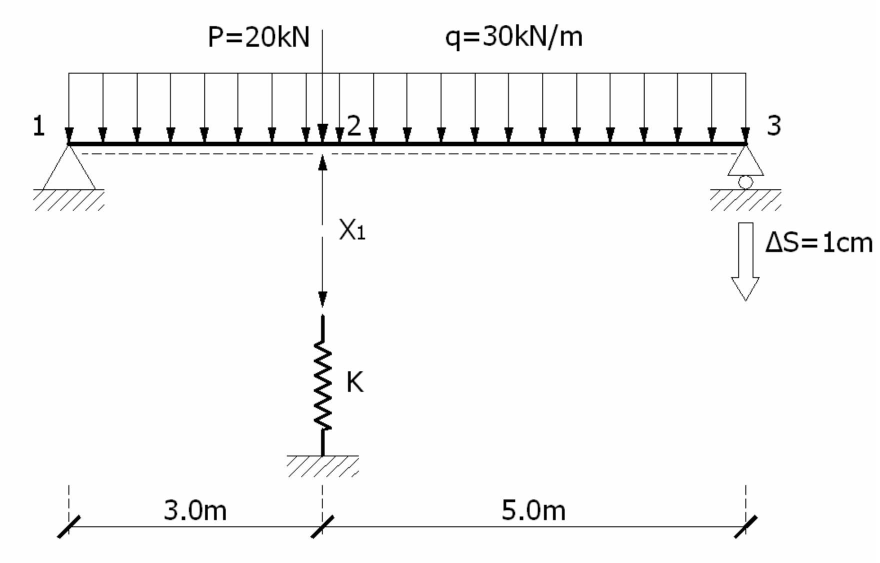
$k = 6000\, kN/m$, $f = 1/k = (1/6000)\, m/kN$

Μέθοδος των Δυνάμεων:

– Οι εξισώσεις ισορροπίας ικανοποιούνται
– Απαίτηση ικανοποίησης και της εξισώσεως συμβιβαστού

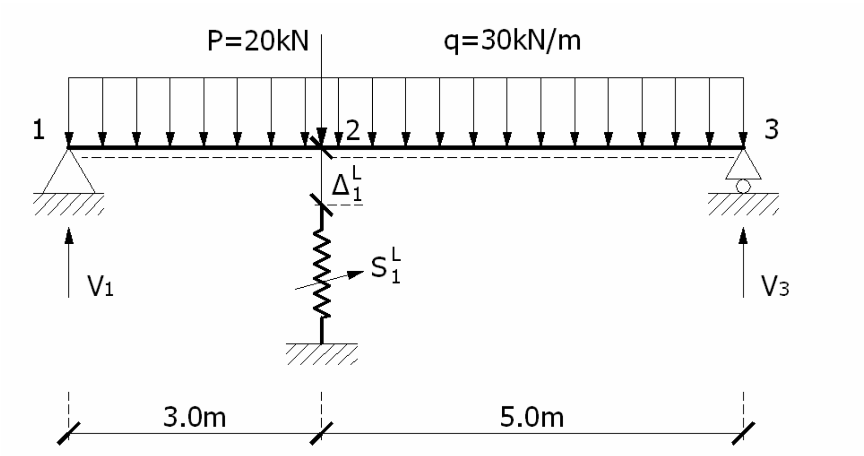
Α' ΤΡΟΠΟΣ:

Επιλέγω ως άγνωστο υπερστατικό μέγεθος την αντίδραση του γραμμικού ελατηρίου.
(Στατική Αοριστία = 1)



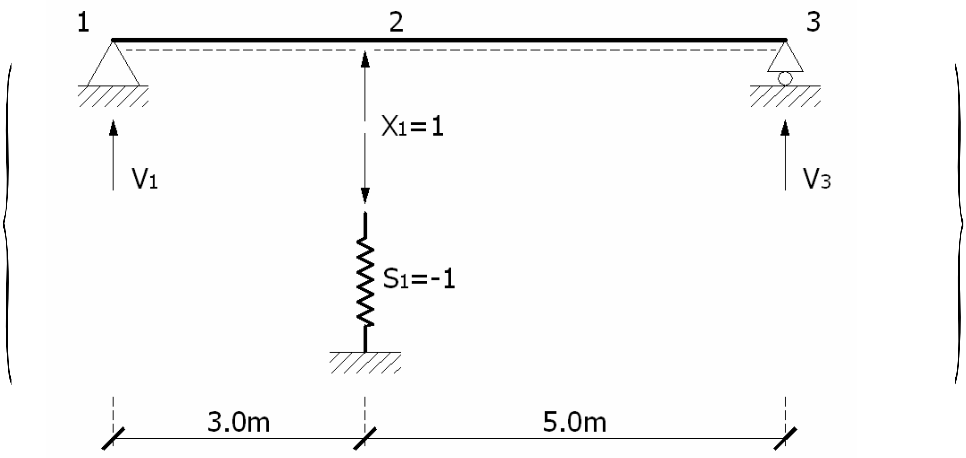
≡

Φορέας Α



+

Φορέας Β



$*X_1$

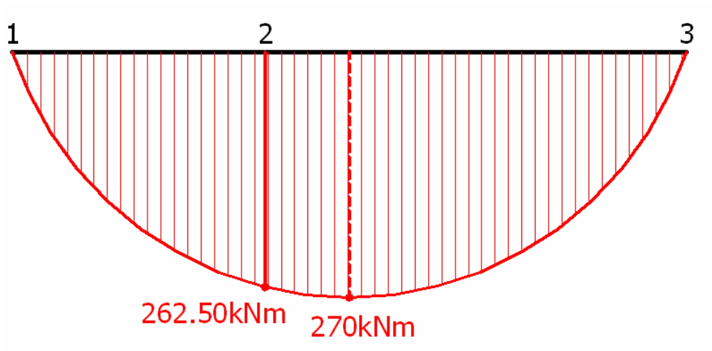
Στατική Επίλυση Φορέα Α

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 30\cdot 8\cdot 4 + 20\cdot 3 - V_3\cdot 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = 127.50kN}$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_3 - 20 - 30\cdot 8 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 260 - V_3 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 132.50kN}$$

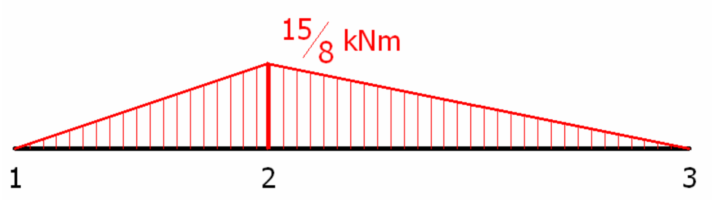
Στατική Επίλυση Φορέα Β

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 1\cdot 3 + V_3\cdot 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = -3/8\,kN}$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_3 + 1 = 0 \Leftrightarrow V_1 = -1 - (-3/8) \Leftrightarrow \boxed{V_1 = -5/8\,kN}$$

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών (Θεμελιώδης Φορέας)



[M^L]



[M₁]

Εξίσωση Συμβιβαστού:

$0 = \Delta_1^{(s)} = \Delta_1^L + F_{11}\cdot X_1$, όπου

$$1\cdot\Delta_1^L + \underbrace{\frac{1}{100}\cdot\frac{3}{8}}_{\text{ομόρροπα}} = \int \frac{M_1\cdot M_L}{EI}dx + \cancel{S_1\cdot\left(f\cdot S_1^L\right)^{=0}}$$

Για $ml = 3 \Rightarrow m = 3/8$ και $nl = 3 \Rightarrow n = 5/8$ από το αντίστοιχο διάγραμμα λαμβάνουμε:

$$\int \frac{M_1\cdot M_L}{EI}dx = \frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)\cdot\left[0 + 2\cdot 270 + 0 - \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(0 - 2\cdot 270 + 0\right)\right]\cdot 8 =$$
$$= -\frac{15}{6EI}\cdot\left[540 + \frac{15}{64}\cdot 540\right] = -6.75\times 10^{-3}$$

Επομένως, $\Delta_1^L + 3.75\times10^{-3} = -6.75\times10^{-3} \Leftrightarrow \boxed{\Delta_1^L = 10.50\times10^{-3}}$

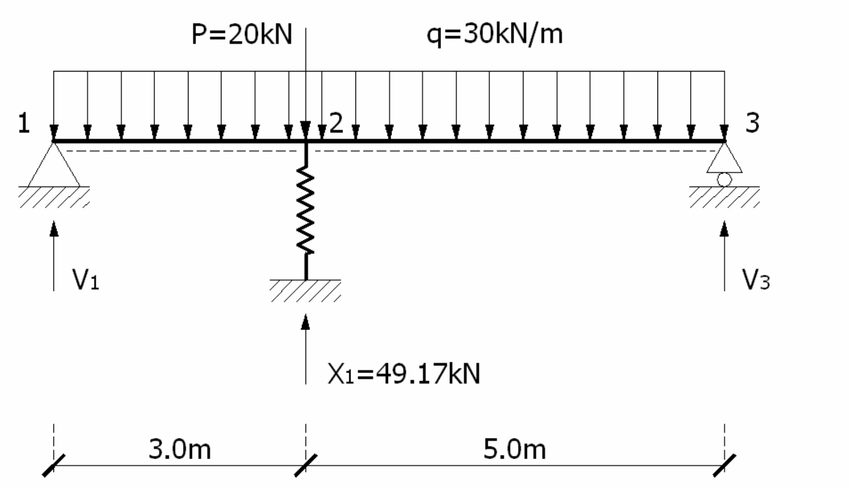
Επίσης, $F_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx + S_1 \cdot \left(f \cdot S_1 \right)$, όπου

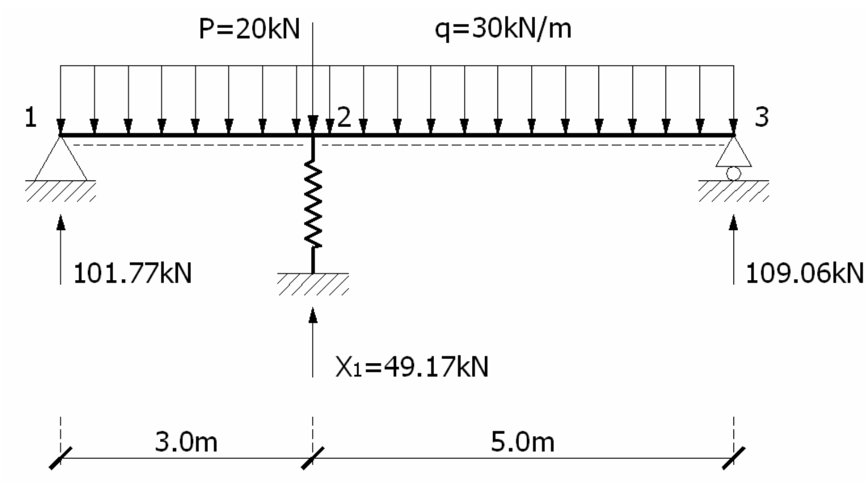
$$\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{15}{8} \right)^2 \cdot 8 = 4.6875\times10^{-5}$$

$$S_1 \cdot \left(f \cdot S_1 \right) = (-1) \cdot \frac{1}{6000} \cdot (-1) = 1.6667\times10^{-4}$$

Επομένως, $F_{11} = 4.6875\times10^{-5} + 1.6667\times10^{-4} \Leftrightarrow \boxed{F_{11} = 2.1354\times10^{-4}}$

Τελικά, $0 = \Delta_1^{(s)} = \Delta_1^L + F_{11} \cdot X_1 \Leftrightarrow 0 = 10.50\times10^{-3} + 2.1354\times10^{-4} \cdot X_1 \Leftrightarrow \boxed{X_1 = 49.17kN}$

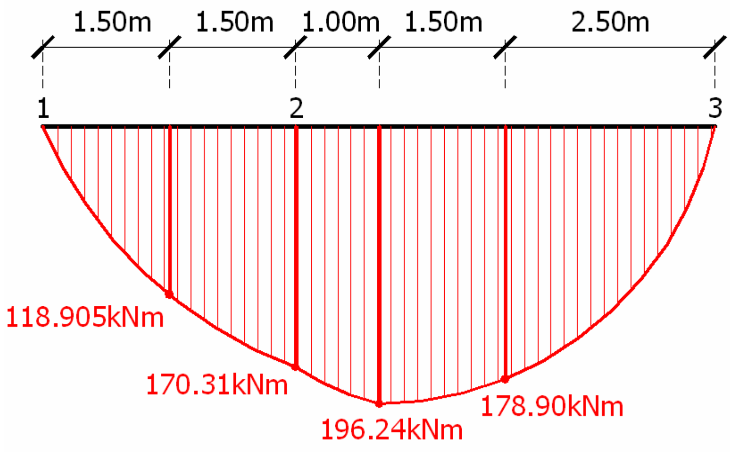




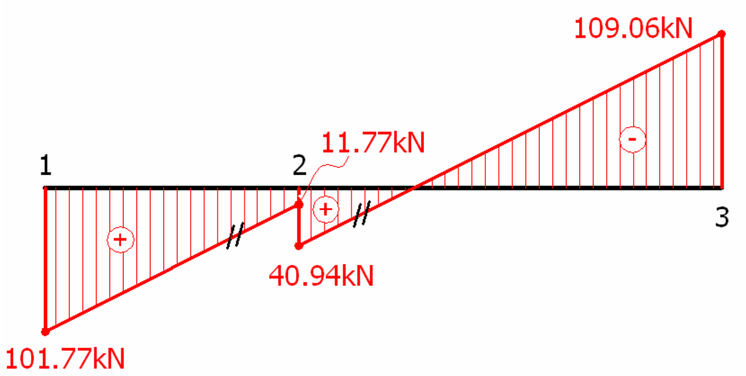
$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 49.17 \cdot 3 - 20 \cdot 3 - 30 \cdot 8 \cdot 4 + V_3 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = 109.06kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 49.17 + V_3 - 20 - 30 \cdot 8 + V_1 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 210.83 - V_3 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 101.77kN}$$

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών (Υπερστατικός Φορέας)



[M]



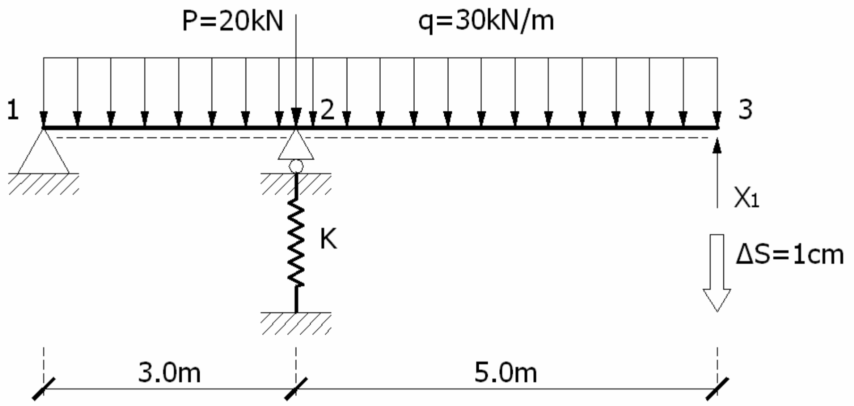
[Q]

<u>Παρατήρηση 1:</u> Στον κόμβο #2 έχουμε πήδημα στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων λόγω της ύπαρξης συγκεντρωμένης φόρτισης ίσο με $49.17-20=29.17kN$

<u>Παρατήρηση 2:</u> Το διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων [N] είναι μηδενικό.

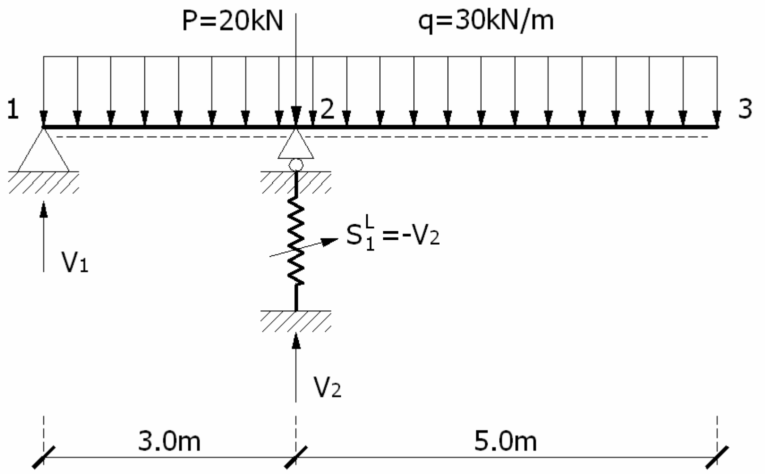
Β' ΤΡΟΠΟΣ:

Επιλέγω ως άγνωστο υπερστατικό μέγεθος την αντίδραση στη στήριξη #3.
(Στατική Αοριστία =1)



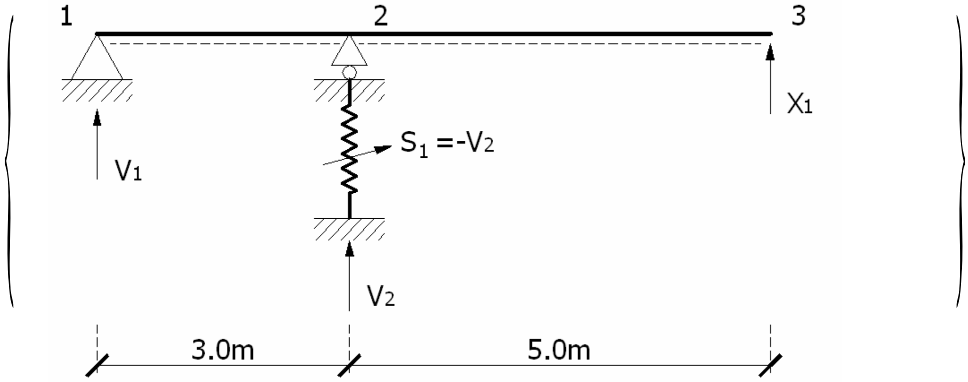
≡

Φορέας
Α



+

Φορέας
Β



$*X_1$

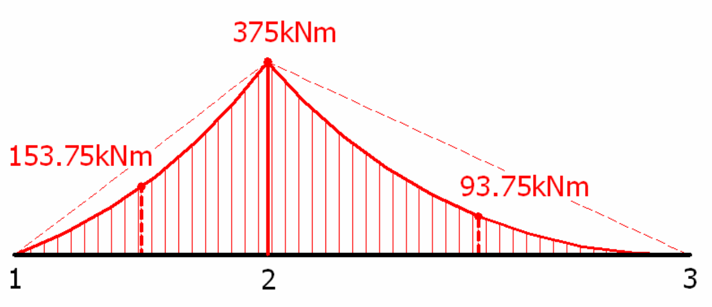
Στατική Επίλυση Φορέα Α

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow V_2 \cdot 3 - 20 \cdot 3 - 30 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_2 = 340kN}$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_3 - 20 - 30 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 260 - V_3 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = -80kN}$$

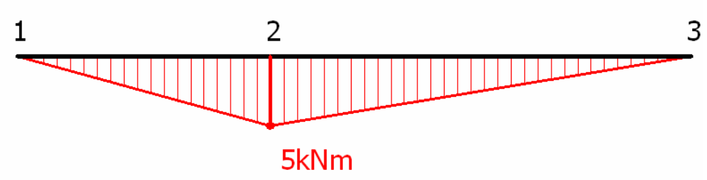
Στατική Επίλυση Φορέα Β

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 1 \cdot 8 + V_2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = -8/3\,kN}$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow V_1 = -1 - (-8/3) \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 5/3\,kN}$$

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών (Θεμελιώδης Φορέας)



$[M^L]$



$[M_1]$

Εξίσωση Συμβιβαστού

$$-0.01 = \Delta_1^{(s)} = \Delta_1^L + F_{11} \cdot X_1, \text{ όπου } 1 \cdot \Delta_1^L = \int \frac{M_1 \cdot M_L}{EI} dx + S_1 \cdot \left(f \cdot S_1^L \right)$$

$$\int \frac{M_1 \cdot M_L}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot \left(2 \cdot (-153.75) - 375 \right) + 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot \left(2 \cdot (-93.75) - 375 \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{EI} \left[-1706.25 - 2343.75 \right] = -0.02025$$

$$S_1 \cdot \left(f \cdot S_1 \right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6000} \cdot (-340) = -0.15111$$

Επομένως, $\Delta_1^L = -0.02025 - 0.15111 \Leftrightarrow \boxed{\Delta_1^L = -0.17136}$

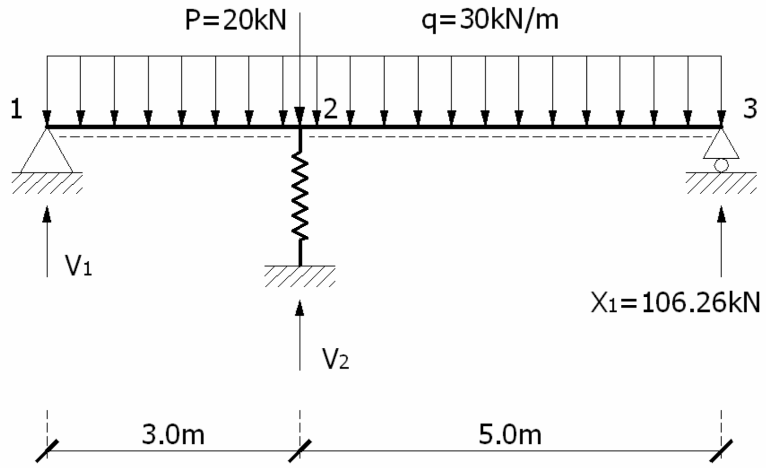
Επίσης, $F_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx + S_1 \cdot \left(f \cdot S_1 \right)$, όπου

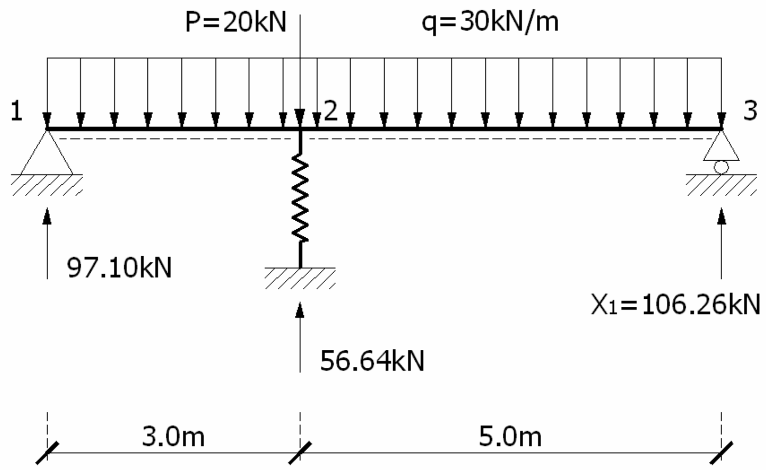
$$\int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5^2 = 3.333 \times 10^{-4} \quad \text{και} \quad S_1 \cdot \left(f \cdot S_1 \right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{6000} \cdot \frac{8}{3} = 1.185 \times 10^{-3}$$

Επομένως, $F_{11} = 3.333 \times 10^{-4} + 1.185 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \boxed{F_{11} = 1.15185 \times 10^{-3}}$

Τελικά,

$$-0.01 = \Delta_1^{(s)} = \Delta_1^L + F_{11} \cdot X_1 \Leftrightarrow -0.01 = -0.17136 + 1.5185 \times 10^{-3} \cdot X_1 \Leftrightarrow \boxed{X_1 = 106.26kN}$$



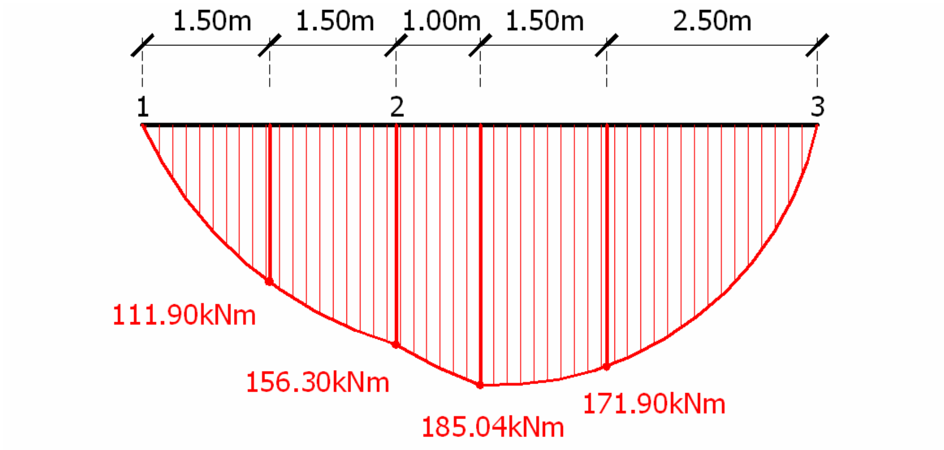


$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 106.26 \cdot 8 - 20 \cdot 3 - 30 \cdot 8 \cdot 4 - V_2 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_2 = 56.64kN}$$

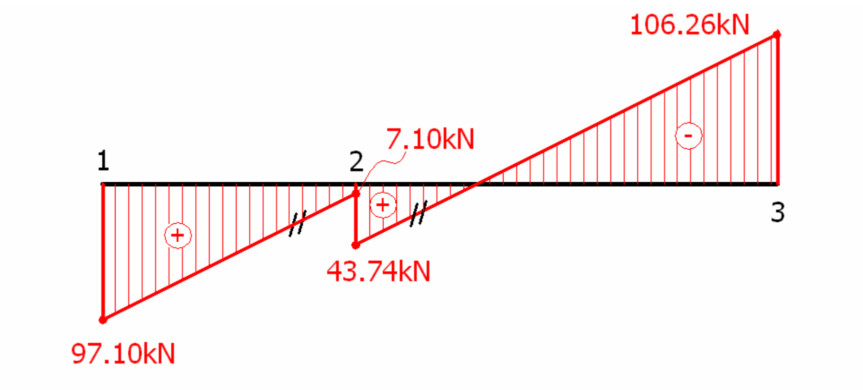
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_2 + 106.26 - 20 - 30 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 153.74 - V_2 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 97.10kN}$$

<u>Παρατήρηση:</u> Τα αποτελέσματα της μεθόδου β’ παρουσιάζουν μικρές διαφορές με εκείνα της μεθόδου α’ λόγω δεκαδικών ψηφίων. Δεν υπάρχουν σημαντικά αξιόλογες διαφορές.

Διαγράμματα Εντατικών Μεγεθών (Υπερστατικός Φορέας)



[M]



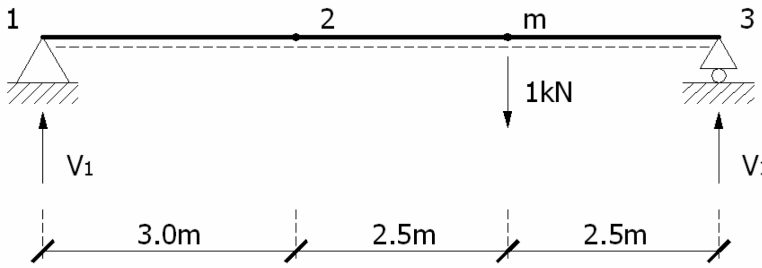
[Q]

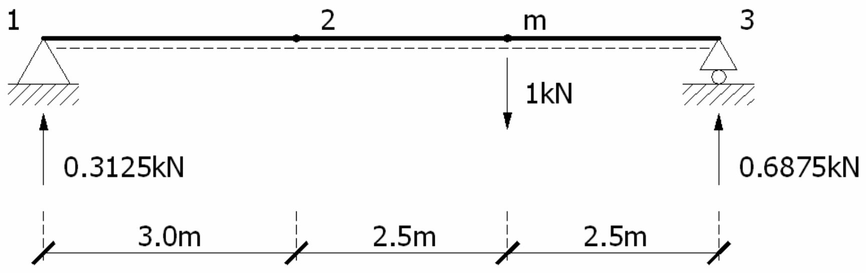
Παρατήρηση 1: Στον κόμβο #2 έχουμε πήδημα στο διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων λόγω της ύπαρξης συγκεντρωμένης φόρτισης ίσο με $56.64 - 20 = 36.64kN$

Παρατήρηση 2: Το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων είναι μηδενικό.

Ερώτημα β

Προκειμένου να υπολογιστεί το μέτρο και η φορά της κατακόρυφης μετατόπισης στο μέσο του τμήματος (23), τοποθετούμε μία συγκεντρωμένη μοναδιαία φόρτιση στο σημείο αυτό, αναφερόμενοι σε οποιοδήποτε θεμελιώδη ισοστατικό φορέα.. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί ο θεμελιώδης φορέας του πρώτου τρόπου επίλυσης, που είδαμε παραπάνω.



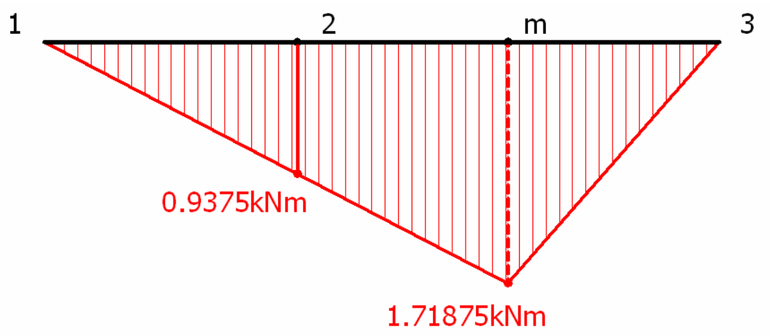


Εξισώσεις ισορροπίας

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow V_3 \cdot 8 - 1 \cdot 5.50 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = 0.6875kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 - 1 + V_3 = 0 \Leftrightarrow V_1 = 1 - V_3 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 0.3125kN}$$

Διάγραμμα Ροπών Κάμψεως [$\overline{M}$]



Θεώρημα Μοναδιαίου Φορτίου (Εξίσωση Ελαστικότητας):

$$1 \cdot \delta + \left(-\frac{1}{100}\right) \cdot 0.6875 = \int \frac{M \cdot \overline{M}}{EI} dx$$

$$\int \frac{M \cdot \overline{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1.71875 \cdot \left[0 + 2 \cdot 196.24 + 0 - \frac{5.5}{8} \cdot \frac{2.5}{8} \cdot \left(0 - 2 \cdot 196.24 + 0\right)\right] =$$

$$= \frac{13.75}{6EI} \cdot \left[392.48 + 84.321875\right] = 5.463 \times 10^{-3}$$

Άρα, $1 \cdot \delta - 6.875 \times 10^{-3} = 5.463 \times 10^{-3} \Leftrightarrow \boxed{\delta = 1.23cm \downarrow}$