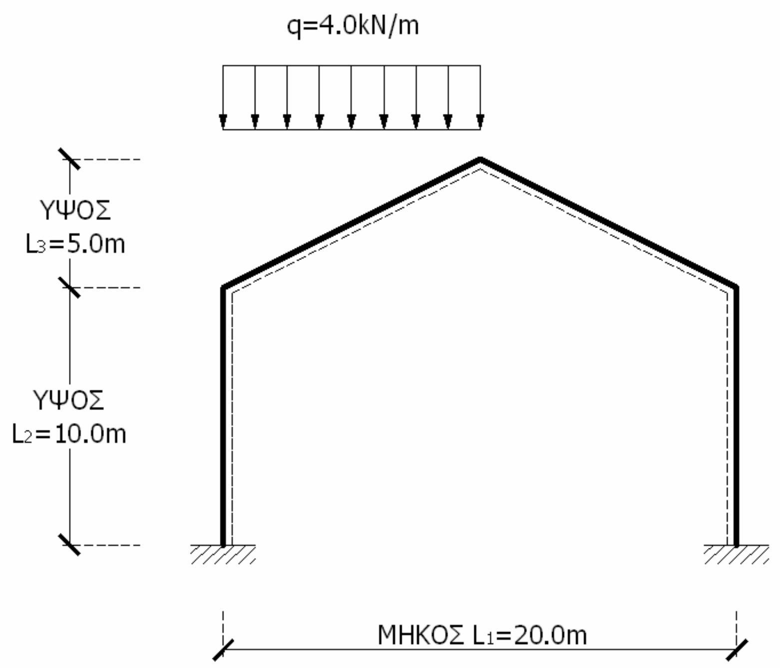
ΑΣΚΗΣΗ 14

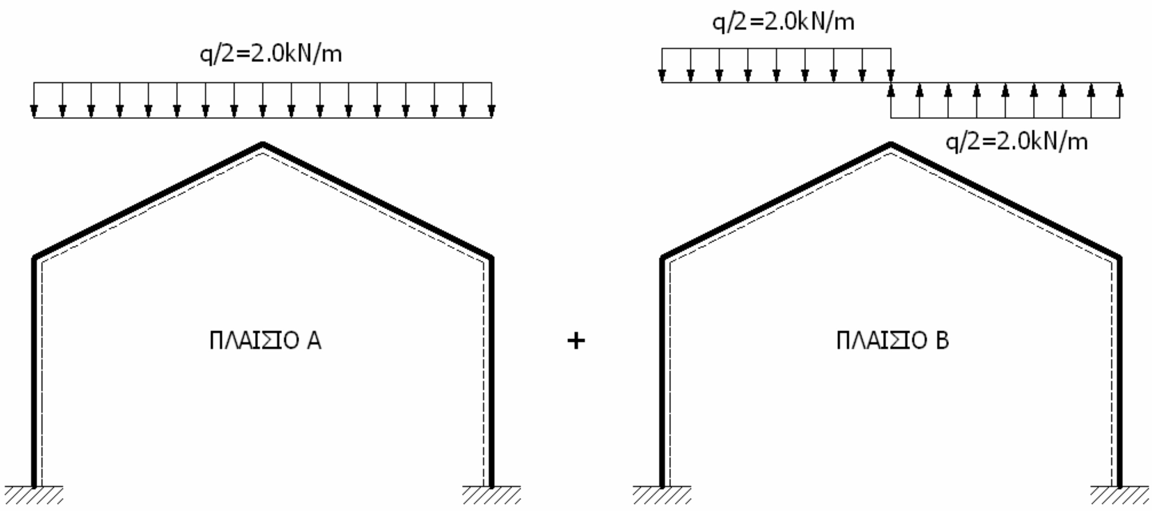
ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Για το πλαίσιο του σχήματος με τεθλασμένο ζύγωμα ζητείται να μορφωθούν τα διαγράμματα M, Q, για τη δεδομένη φόρτιση.



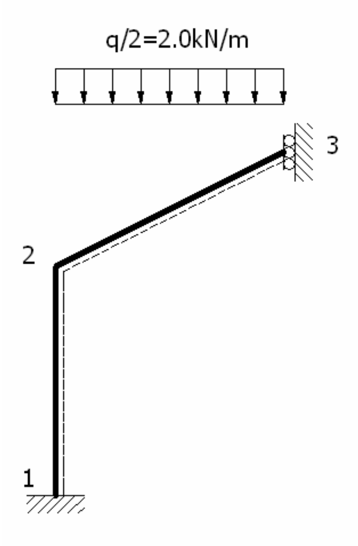
ΕΠΙΛΥΣΗ:

Ο φορέας είναι συμμετρικός ως προς άξονα με τυχαία φόρτιση. Μπορούμε να τον χωρίσουμε σε δύο φορείς, τον έναν με συμμετρική φόρτιση και τον άλλον με αντισυμμετρική. Με επαλληλία ο φορέας γίνεται:



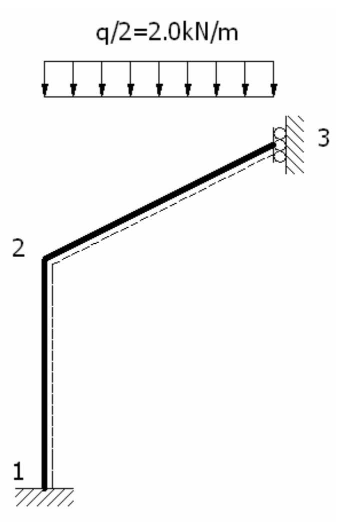
1*) Υπολογισμός πλαισίου Α*

Είναι συμμετρικό με συμμετρική φόρτιση, άρα μπορούμε να μελετήσουμε το μισό φορέα, τοποθετώντας κατάλληλη στήριξη (κυλιόμενη πάκτωση). Τα διαγράμματα που θα προκύψουν θα είναι: συμμετρικό το [M] και αντισυμμετρικό το [Q].

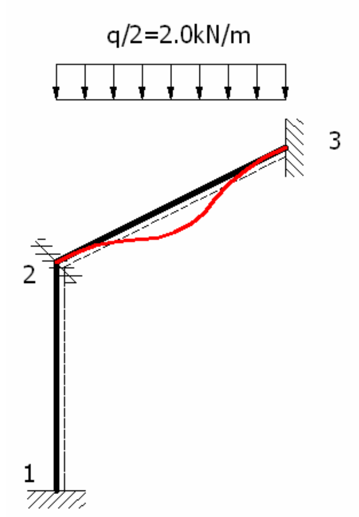


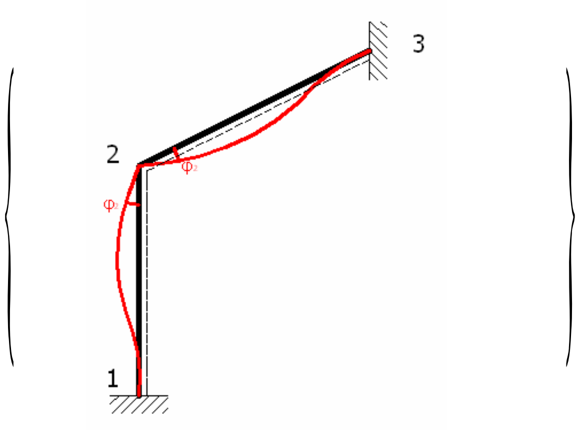
Εύρεση κινηματικής αοριστίας:

Ο φορέας είναι δύο φορές υπερστατικός με άγνωστα παραμορφωσιακά μεγέθη τη στροφή στον κόμβο 2 και η μετακίνηση του (1-2-3). Το ότι υπάρχει μία μετατόπιση ως παραμορφωσιακό μέγεθος μπορεί να βεβαιωθεί και από το γεγονός ότι απαιτείται μία ράβδος ώστε ο φορέας να είναι σταθερός. Οι μετακινήσεις των κόμβων 2 και 3 σχετίζονται αφού δεν είναι δυνατόν να αλλάξει το μήκος της ράβδου (2-3).

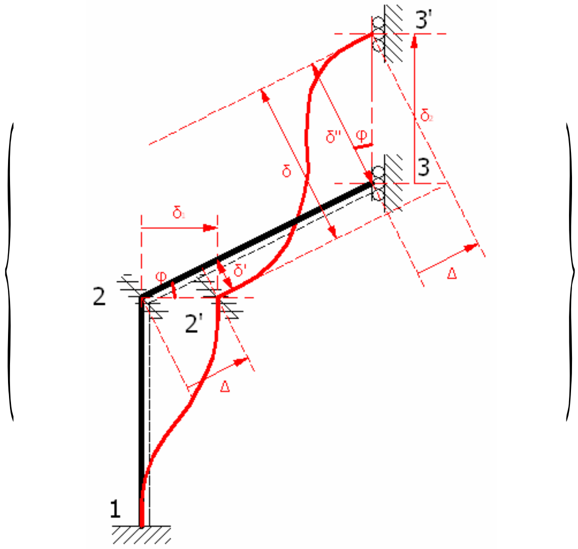


=





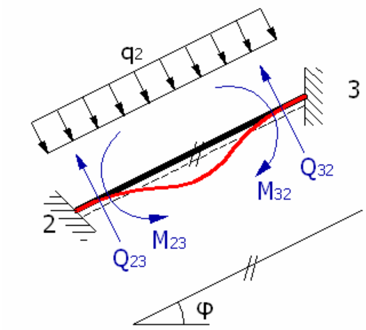
$*\phi$



$*\delta$

Παγιωμένος φορέας (φ=δ=0)
Μόρφωση ελαστικών γραμμών και υπολογισμός των M,Q

Για εξωτερική ομοιόμορφη φόρτιση q.



$$\frac{q}{2}\cdot l_{\pi\rho o\beta.(2-3)} = q_1 \cdot l_{(2-3)} \rightarrow$$

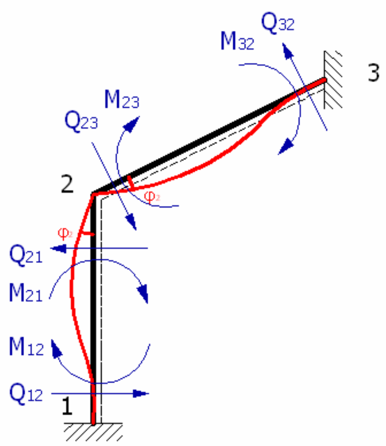
$$\frac{4}{2}\cdot 10 = q_1 \cdot 11{,}18 \rightarrow q_1 = 1{,}789KN/m \rightarrow$$

$$q_2 = q_1 \cdot \cos\varphi = 1{,}789 \cdot 0{,}894 = 1{,}6KN$$

$$M_{23}^{(0)} = M_{32}^{(0)} = q_2 l^2/12 = 1{,}6 \cdot 11{,}18^2/1 = 16{,}67KNm$$

$$Q_{23}^{(0)} = Q_{32}^{(0)} = q_2 l/2 = 1{,}6 \cdot 11{,}18/2 = 8{,}94KN$$

Παραμορφωσιακή κατάσταση για φ=1



$$M_{21}^{(1)} = \frac{4EI}{L}\varphi = \frac{2EI}{5}\varphi$$

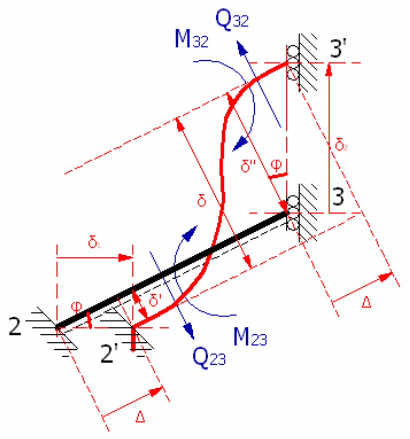
$$Q_{12}^{(1)} = Q_{21}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}\varphi = \frac{3EI}{50}\varphi \qquad M_{12}^{(1)} = \frac{2EI}{L}\varphi = \frac{EI}{5}\varphi$$

$$Q_{23}^{(1)} = Q_{32}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}\varphi = \frac{6EI}{125}\varphi \qquad M_{23}^{(1)} = \frac{4EI}{L}\varphi = \frac{4EI}{11{,}18}\varphi$$

$$M_{32}^{(1)} = \frac{2EI}{L}\varphi = \frac{2EI}{11{,}18}\varphi$$

Παραμορφωσιακή κατάσταση για δ=1

α) ράβδος (2-3)



$\delta' = \delta_1 \sin\varphi$ και $\delta'' = \delta_2 \cos\varphi$

$\Delta = \delta_1 \cos\varphi = \delta_2 \sin\varphi$, άρα $\delta_2 = \delta_1 \cos\varphi / \sin\varphi$

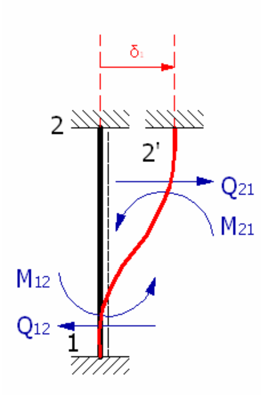
$\delta = \delta' + \delta'' = \delta_1 \sin\varphi + \delta_2 \cos\varphi = \delta_1 \sin\varphi + \delta_1 \cos^2\varphi/\sin\varphi =$

$= \delta_1(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)/\sin\varphi = \delta_1/\sin\varphi = 2{,}24\delta_1$

$$M_{23}^{(2)} = M_{32}^{(2)} = \frac{6EI}{L^2}\cdot\delta = \frac{6\text{EI}}{125}\cdot\delta$$

$$Q_{23}^{(2)} = Q_{32}^{(2)} = \frac{12EI}{L^3}\cdot\delta = \frac{12\text{EI}}{1397{,}42}\cdot\delta$$

β) ράβδος (1-2)

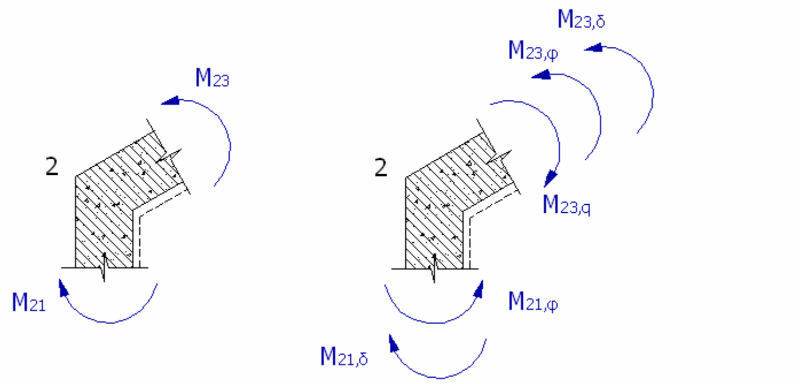


$$M_{21}^{(2)} = M_{12}^{(2)} = \frac{6EI}{L^2}\delta_1 = \frac{6\text{EI}}{100}\frac{\delta}{2{,}24} = \frac{3}{112}EI\delta$$

$$Q_{12}^{(2)} = Q_{21}^{(2)} = \frac{12EI}{L^3}\delta_1 = \frac{12\text{EI}}{1000}\frac{\delta}{2{,}24} = \frac{3}{560}EI\delta$$

Υπολογισμός των μεγεθών δ και φ

1) Η στροφή φ θα προσδιοριστεί από την ισορροπία του κόμβου 2: $M_{21} = M_{23}$

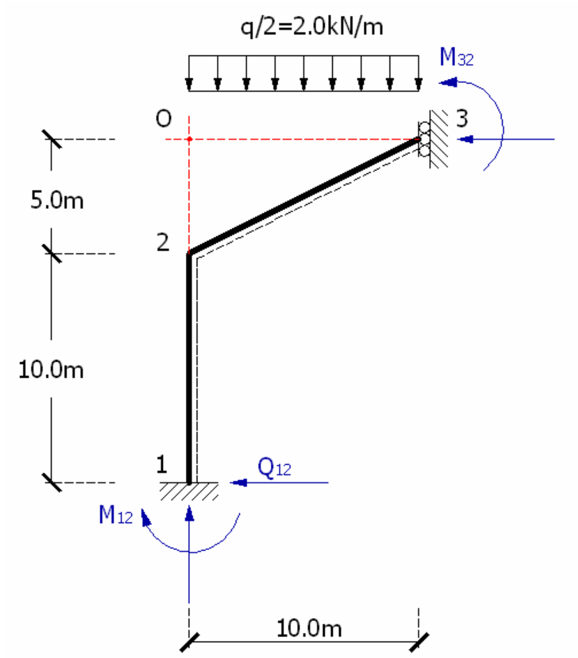


$$-M_{21}^{(1)} + M_{21}^{(2)} = -M_{23}^{(0)} + M_{23}^{(1)} + M_{23}^{(2)} \rightarrow$$

$$-\frac{2\text{EI}}{5}\phi + \frac{3\text{EI}}{50}\delta = -16{,}67 + \frac{4\text{EI}}{11{,}18}\phi + \frac{10{,}728\text{EI}}{125}\delta + \frac{2{,}682\text{EI}}{125}\delta \rightarrow$$

$$\boxed{0{,}7578EI\phi + 0{,}04728EI\delta = 16{,}67} \quad (1)$$

2) Η μετατόπιση δ προκύπτει από την εξίσωση ροπών ως προς σημείο Ο: $\Sigma M_O=0$.



$$M_{12}+Q_{12}\cdot 15+(2\cdot 10)\cdot\frac{10}{2}-M_{32}=0\rightarrow$$

$$M_{12}^{(1)}-M_{12}^{(2)}+[-Q_{12}^{(1)}+Q_{12}^{(2)}]\cdot 15+100=-M_{32}^{(0)}-M_{32}^{(1)}-M_{32}^{(2)}\rightarrow$$

$$\frac{EI}{5}\phi-\frac{3EI}{50}\delta-15\cdot\frac{3\mathrm{EI}}{50}\phi+15\cdot\frac{3\mathrm{EI}}{250}\delta+100=-16,67-\frac{2EI}{11,18}\phi-\frac{10,782\mathrm{EI}}{125}\delta-\frac{2,682\mathrm{EI}}{125}\delta\rightarrow$$

$$\boxed{-0,521\mathrm{EI}\phi+0,2273\mathrm{EI}\delta=-116,67}\quad(2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει: φ=47,26/ΕΙ και δ=-404,95/ΕΙ.

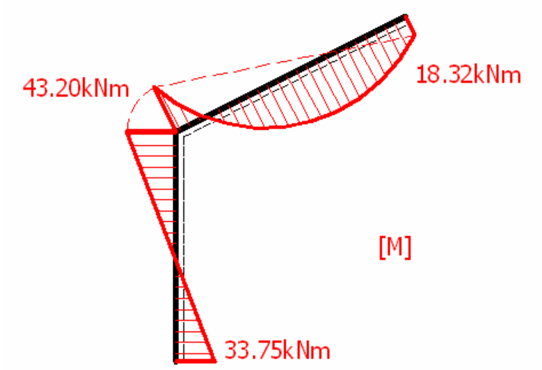
Εύρεση εντατικών μεγεθών

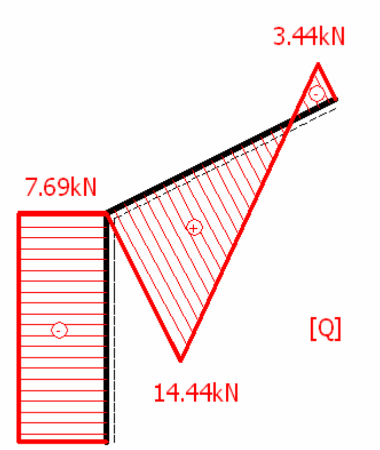
Στύλος 1-2:
$$\begin{cases} M_{12}=M_{12}^{(1)}-M_{12}^{(2)}=\dfrac{EI}{5}\phi-\dfrac{3EI}{50}\delta=33,75\mathrm{KN}m \\ M_{21}=-M_{21}^{(1)}+M_{21}^{(2)}=-\dfrac{2EI}{5}\phi+\dfrac{3EI}{50}\delta=-43,20\mathrm{KN}m \\ Q_{12}=-Q_{12}^{(1)}+Q_{12}^{(2)}=-\dfrac{3EI}{50}\phi+\dfrac{3EI}{250}\delta=-7,69KN \\ Q_{21}=-Q_{21}^{(1)}+Q_{21}^{(2)}=-\dfrac{3EI}{50}\phi+\dfrac{3EI}{250}\delta=-7,69KN \end{cases}$$

Ζύγωμα 2-3:

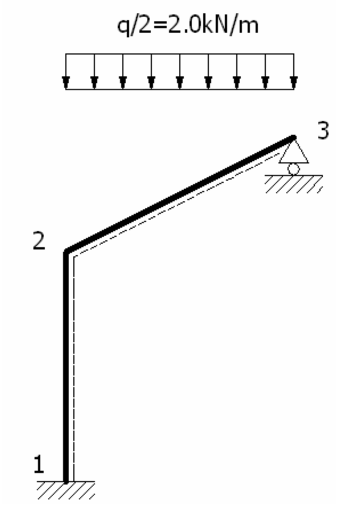
$$\begin{cases} M_{23} = -M_{23}^{(0)} + M_{23}^{(1)} + M_{23}^{(2)} = -16,67 + \dfrac{4EI}{11,18}\phi + \dfrac{10,728EI}{125}\delta + \dfrac{2,682EI}{125}\delta = -43,20KNm \\ M_{32} = -M_{32}^{(0)} - M_{32}^{(1)} - M_{32}^{(2)} = -16,67 - \dfrac{2EI}{11,18}\phi - \dfrac{10,728EI}{125}\delta - \dfrac{2,682EI}{125}\delta = 18,32KNm \\ Q_{23} = Q_{23}^{(0)} - Q_{23}^{(1)} - Q_{23}^{(2)} = 8,94 - \dfrac{6EI}{125}\phi - \dfrac{21,456EI}{1397,42}\delta - \dfrac{5,364EI}{1397,42}\delta = 14,44KN \\ Q_{32} = -Q_{32}^{(0)} - Q_{32}^{(1)} - Q_{32}^{(2)} = -8,94 - \dfrac{6EI}{125}\phi - \dfrac{21,456EI}{1397,42}\delta - \dfrac{5,364EI}{1397,42}\delta = -3,44KN \end{cases}$$

Μόρφωση των διαγραμμάτων M,Q





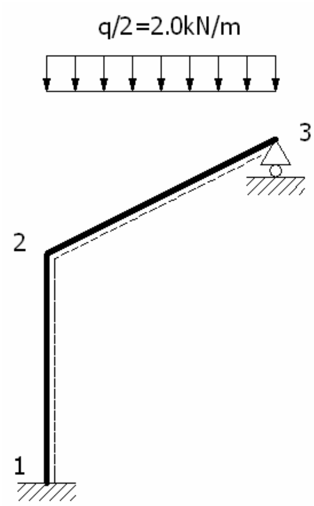
__2) Υπολογισμός πλαισίου Β__



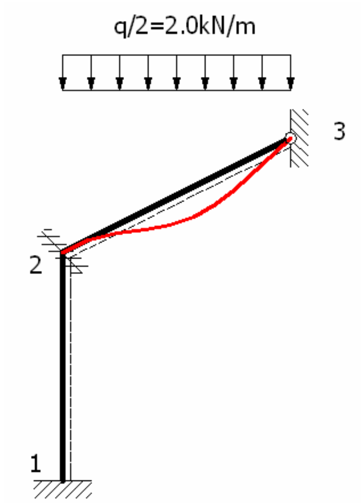
Κατά όμοιο τρόπο μελετάμε το πλαίσιο Β. Είναι συμμετρικό ως προς άξονα με αντισυμμετρική φόρτιση και επομένως λύνουμε το μισό, τοποθετώντας οριζόντια κύλιση στον άξονα συμμετρίας, έτσι ώστε να απαγορεύεται η κάθετη μετακίνηση και να επιτρέπεται η οριζόντια και η στροφή (μηδενική ροπή). Έτσι, τα διαγράμματα των ροπών και αξονικών δυνάμεων προκύπτουν αντισυμμετρικά, ενώ των τεμνουσών συμμετρικό.

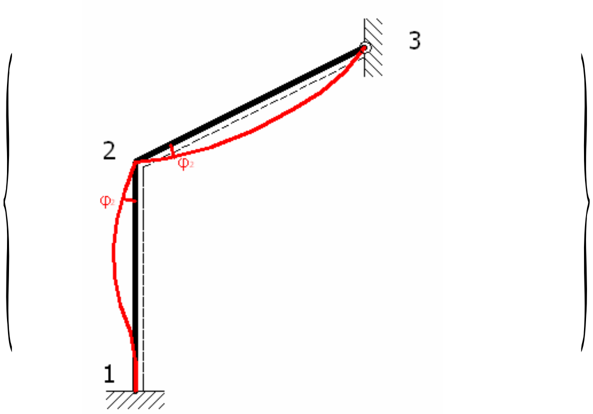
Ο βαθμός κινηματικής αοριστίας είναι και σ' αυτόν το φορέα 2, με υπερστατικά μεγέθη στροφή του κόμβου 2 και μετατόπιση.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, έχουμε:

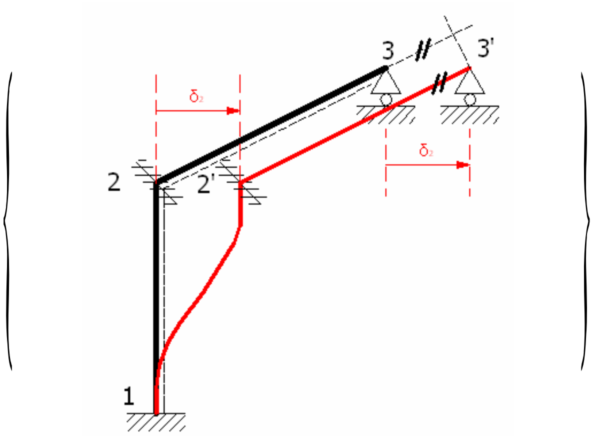


=





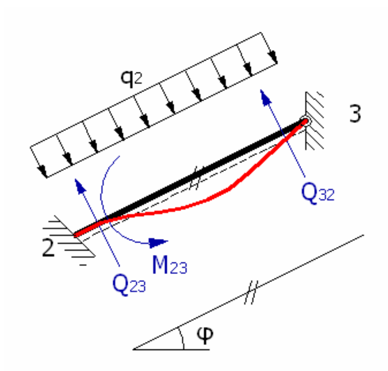
$*\phi$



$*\delta$

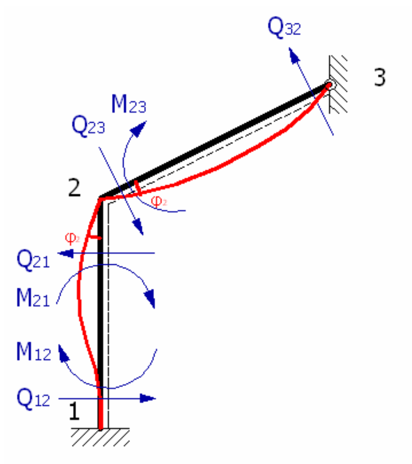
Παγιωμένος φορέας (φ=δ=0)
Μόρφωση ελαστικών γραμμών και υπολογισμός των M,Q

Για εξωτερική ομοιόμορφη φόρτιση q.



$$\frac{q}{2}\cdot l_{\pi\rho o\beta.(2-3)} = q_1 \cdot l_{(2-3)} \rightarrow$$
$$\frac{4}{2}\cdot 10 = q_1 \cdot 11{,}18 \rightarrow q_1 = 1{,}789KN/m \rightarrow$$
$$q_2 = q_1 \cdot \cos\varphi = 1{,}789 \cdot 0{,}894 = 1{,}6KN$$
$$M_{23}^{(0)} = q_2 l^2/8 = 1{,}6 \cdot 11{,}18^2/8 = 25KNm$$
$$Q_{23}^{(0)} = 5q_2 l/8 = 5 \cdot 1{,}6 \cdot 11{,}18/8 = 11{,}18KN$$
$$Q_{32}^{(0)} = 3q_2 l/8 = 3 \cdot 1{,}6 \cdot 11{,}18/8 = 6{,}71KN$$

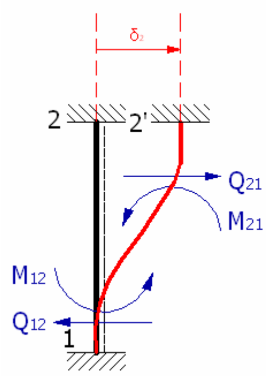
Παραμορφωσιακή κατάσταση για φ=1



$$M_{21}^{(1)} = \frac{4EI}{L}\varphi = \frac{2EI}{5}\varphi$$
$$M_{12}^{(1)} = \frac{2EI}{L}\varphi = \frac{EI}{5}\varphi$$
$$M_{23}^{(1)} = \frac{3EI}{L}\varphi = \frac{3EI}{11{,}18}\varphi$$
$$Q_{12}^{(1)} = Q_{21}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2}\varphi = \frac{3EI}{50}\varphi$$
$$Q_{23}^{(1)} = Q_{32}^{(1)} = \frac{3EI}{L^2}\varphi = \frac{3EI}{125}\varphi$$

Παραμορφωσιακή κατάσταση για $\delta=\delta_1=1$

Ράβδος (1-2)

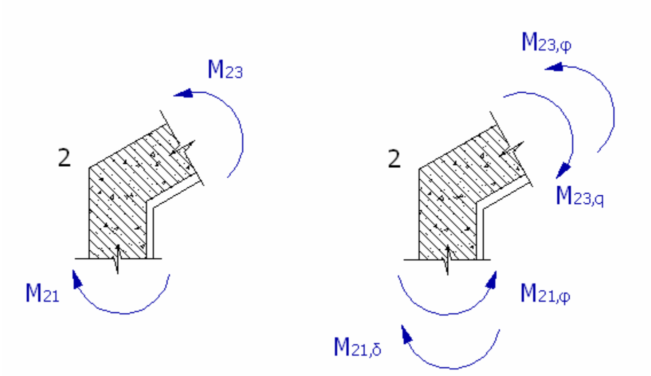


$$M_{23}^{(2)}=\frac{3EI}{L^2}\delta''=\frac{3EI}{125}\cdot 2{,}236\cdot\delta=\frac{6{,}708}{125}EI\delta$$

$$Q_{23}^{(2)}=Q_{32}^{(2)}=\frac{3EI}{L^3}\delta''=\frac{3EI}{1397{,}42}\cdot 2{,}236\cdot\delta=\frac{6{,}708}{1397{,}42}EI\delta$$

Υπολογισμός των μεγεθών δ και φ

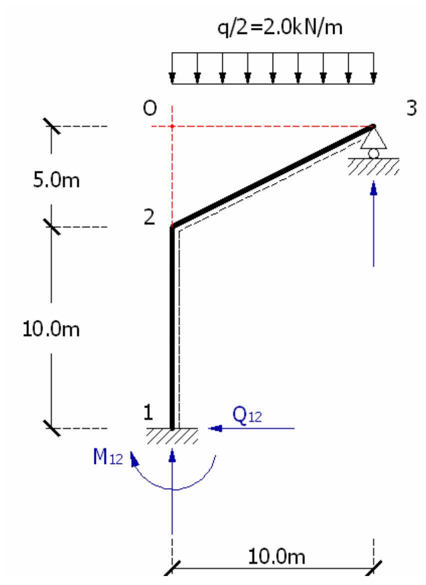
1) Η στροφή φ προκύπτει από την ισορροπία του κόμβου 2: $M_{21}=M_{23}$



$$-M_{21}^{(1)}+M_{21}^{(2)}=-M_{23}^{(0)}+M_{23}^{(1)}+M_{23}^{(2)}-M_{23}^{(2)'}\rightarrow$$

$$-\frac{2EI}{5}\phi+\frac{3EI}{50}\delta=-25+\frac{3EI}{11{,}18}\phi+\frac{6{,}708EI}{125}\delta-\frac{6{,}708EI}{125}\delta\rightarrow\boxed{0{,}668EI\phi-0{,}06EI\delta=25}\quad(1)$$

2) Η μετατόπιση δ προκύπτει από την ισορροπία του φορέα, συγκεκριμένα $\Sigma F_x=0$.



$$Q_{12}=0\rightarrow -Q_{12}^{(1)}+Q_{12}^{(2)}=0\rightarrow$$

$$-\frac{3EI}{50}\phi+\frac{3EI}{250}\delta=0\rightarrow$$

$$\boxed{-0{,}06EI\phi+0{,}012EI\delta=0}\quad(2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει:

φ=67,93/EI και δ=339,67/EI.

Εύρεση εντατικών μεγεθών

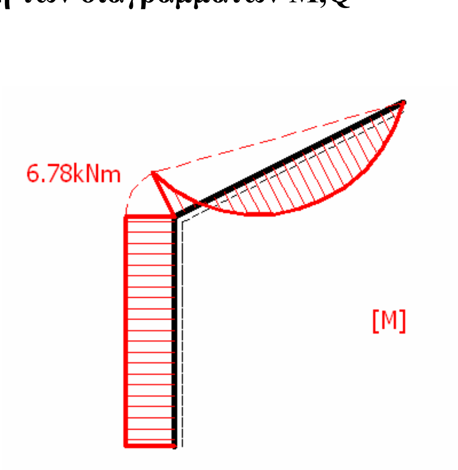
Στύλος 1-2:

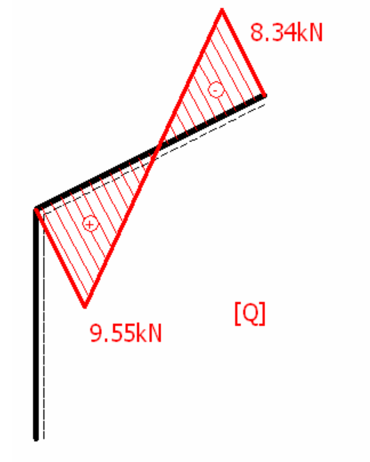
$$
\begin{cases}
M_{12} = M_{12}^{(1)} - M_{12}^{(2)} = \dfrac{EI}{5}\phi - \dfrac{3EI}{50}\delta = -6,78\text{KN}m \\
M_{21} = -M_{21}^{(1)} + M_{21}^{(2)} = -\dfrac{2EI}{5}\phi + \dfrac{3EI}{50}\delta = -6,78\text{KN}m \\
Q_{12} = -Q_{12}^{(1)} + Q_{12}^{(2)} = -\dfrac{3EI}{50}\phi + \dfrac{3EI}{250}\delta = 0 \\
Q_{21} = -Q_{21}^{(1)} + Q_{21}^{(2)} = -\dfrac{3EI}{50}\phi + \dfrac{3EI}{250}\delta = 0
\end{cases}
$$

Ζύγωμα 2-3:

$$
\begin{cases}
M_{23} = -M_{23}^{(0)} + M_{23}^{(1)} + M_{23}^{(2)} - M_{23}^{(2)'} = -25 + \dfrac{3EI}{11,18}\phi + \dfrac{6,708EI}{125}\delta - \dfrac{6,708EI}{125}\delta = -6,78KNm \\
Q_{23} = Q_{23}^{(0)} - Q_{23}^{(1)} - Q_{23}^{(2)} + Q_{23}^{(2)'} = 11,18 - \dfrac{3EI}{125}\phi - \dfrac{6,708EI}{1397,42}\delta + \dfrac{6,708EI}{1397,42}\delta = 9,55KN \\
Q_{32} = -Q_{32}^{(0)} - Q_{32}^{(1)} - Q_{32}^{(2)} + Q_{32}^{(2)'} = -6,71 - \dfrac{3EI}{125}\phi - \dfrac{6,708EI}{1397,42}\delta + \dfrac{6,708EI}{1397,42}\delta = -8,34KN
\end{cases}
$$

Μόρφωση των διαγραμμάτων M,Q





Με επαλληλία των διαγραμμάτων των πλαισίων Α και Β που προέκυψαν παραπάνω προκύπτουν τα τελικά διαγράμματα M,Q.