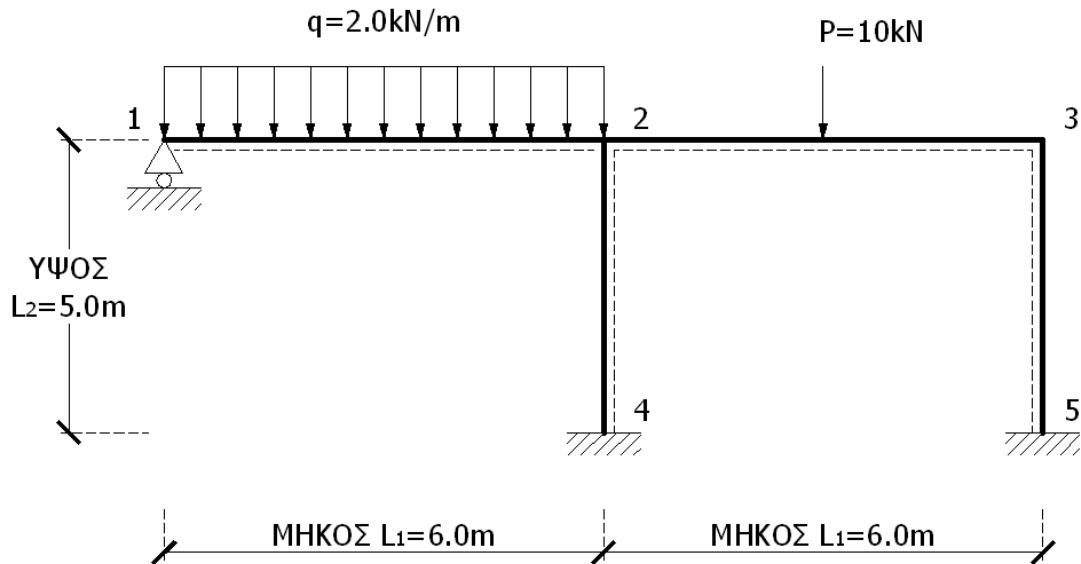


ΑΣΚΗΣΗ 13

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Για το πλαίσιο του σχήματος να μορφοθούν τα διαγράμματα M , Q , για ομοιόμορφο και συγκεντρωμένο φορτίο.



ΕΠΙΛΥΣΗ:

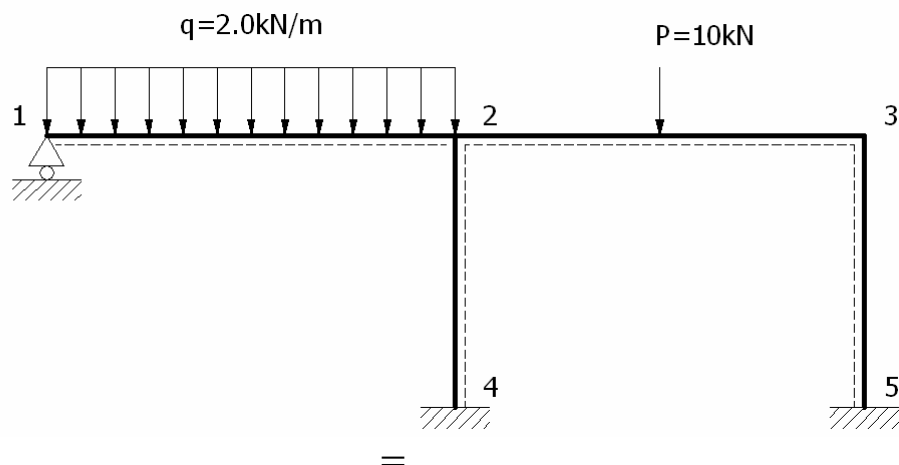
Πρόκειται για κινητό φορέα αφού οι ορισμένοι κόμβοι του αλλάζουν θέση υπό την επίρεια της δεδομένης φόρτισης.

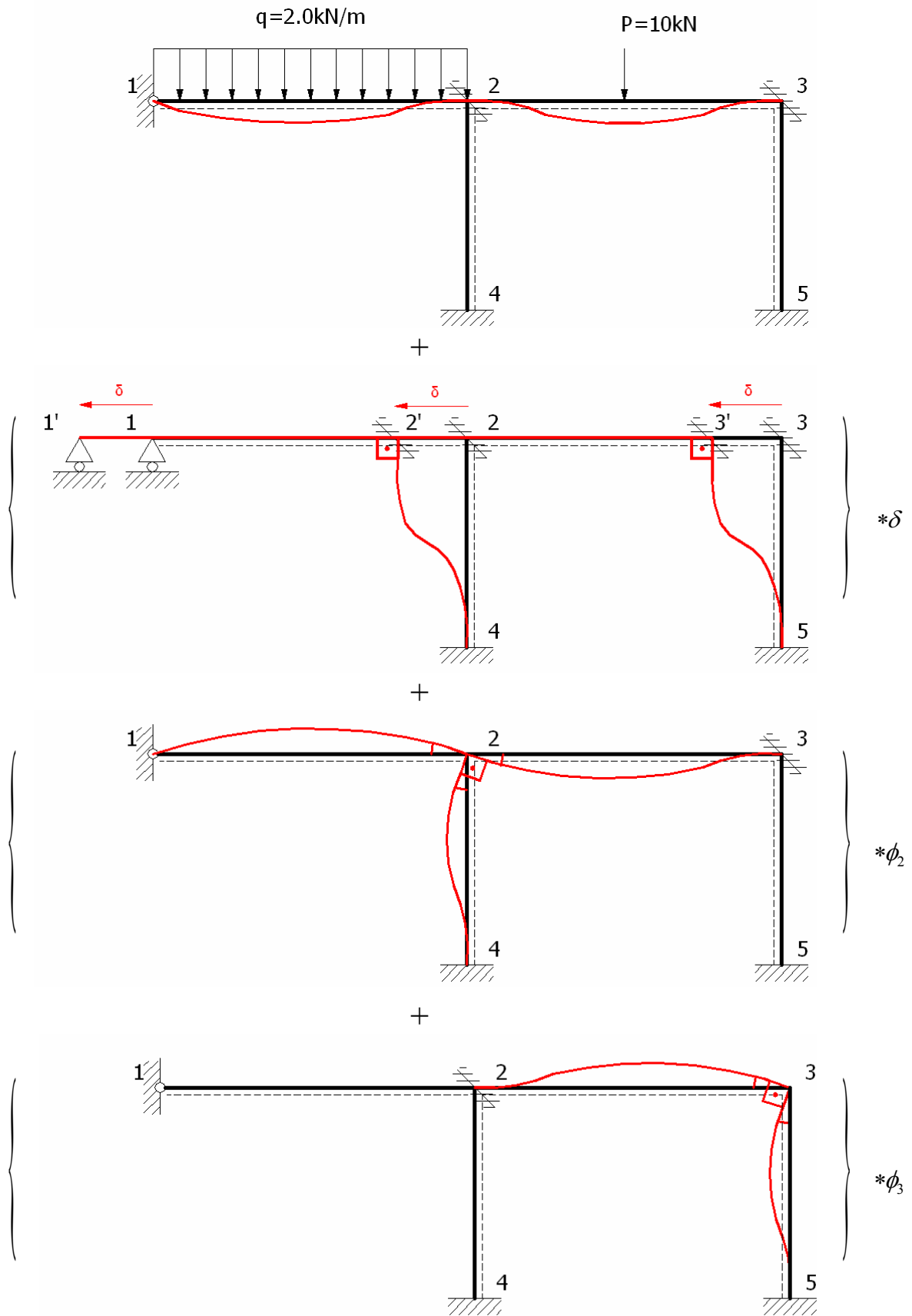
Εύρεση κινηματικής αοριστίας

$K.A.=3: \varphi_2, \varphi_3, \delta=\delta_{x,1}=\delta_{x,2}=\delta_{x,3}$

Ο φορέας είναι τρεις φορές υπερστατικός και τα άγνωστα παραμορφωσιακά μεγέθη θα υπολογιστούν από εξισώσεις κόμβων και μετακινήσεως.

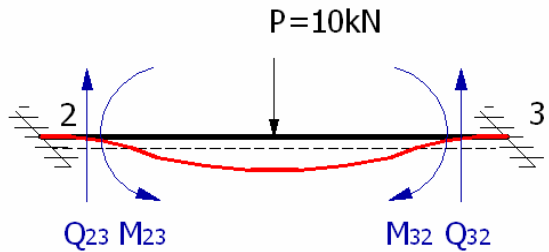
Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, έχω:





Παγιομένος φορέας ($\varphi=\delta=0$)
Μόρφωση ελαστικών γραμμών και υπολογισμός των M,Q, N

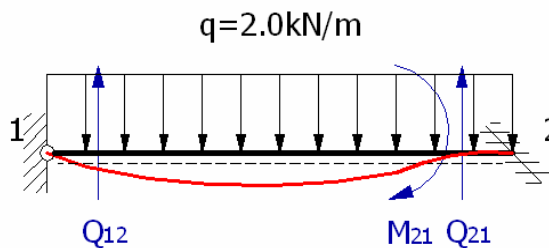
α) για εξωτερική φόρτιση P



$$M_{23}^{(0)} = M_{32}^{(0)} = \frac{PL}{8} = \frac{10 \cdot 6}{8} = 7,5 \text{KNm}$$

$$Q_{23}^{(0)} = Q_{32}^{(0)} = \frac{P}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{KN}$$

β) για ομοιόμορφη φόρτιση

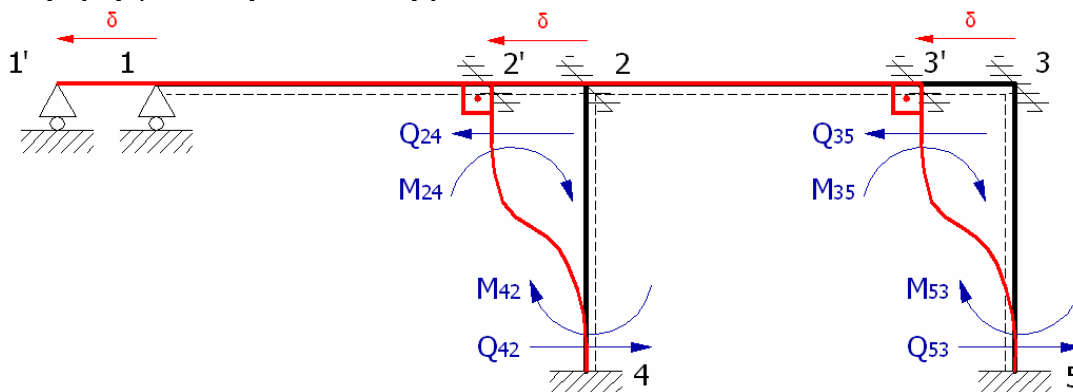


$$M_{21}^{(0)} = ql^2 / 8 = 2 \cdot 6^2 / 8 = 9 \text{KNm}$$

$$Q_{12}^{(0)} = 3ql / 8 = 3 \cdot 2 \cdot 6 / 8 = 4,5 \text{KN}$$

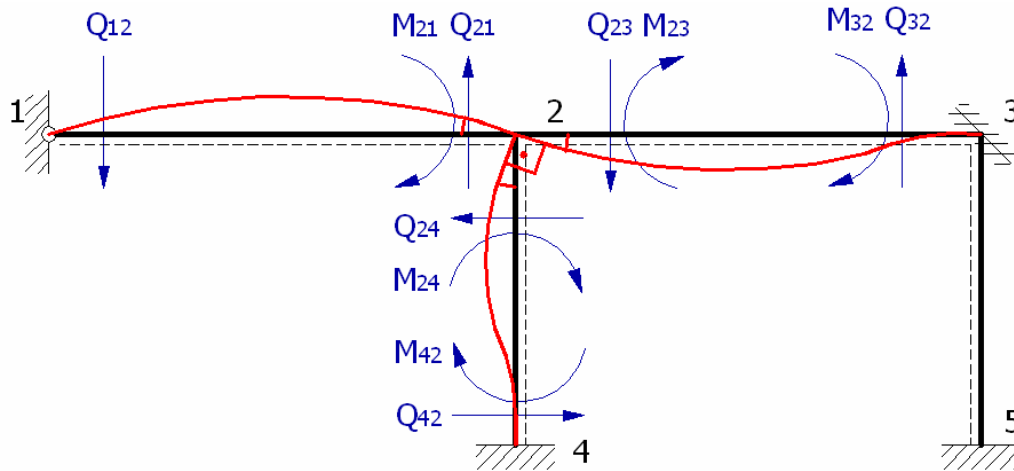
$$Q_{21}^{(0)} = 5ql / 8 = 5 \cdot 2 \cdot 6 / 8 = 7,5 \text{KN}$$

Παραμορφωσιακή κατάσταση για $\delta_1=1$



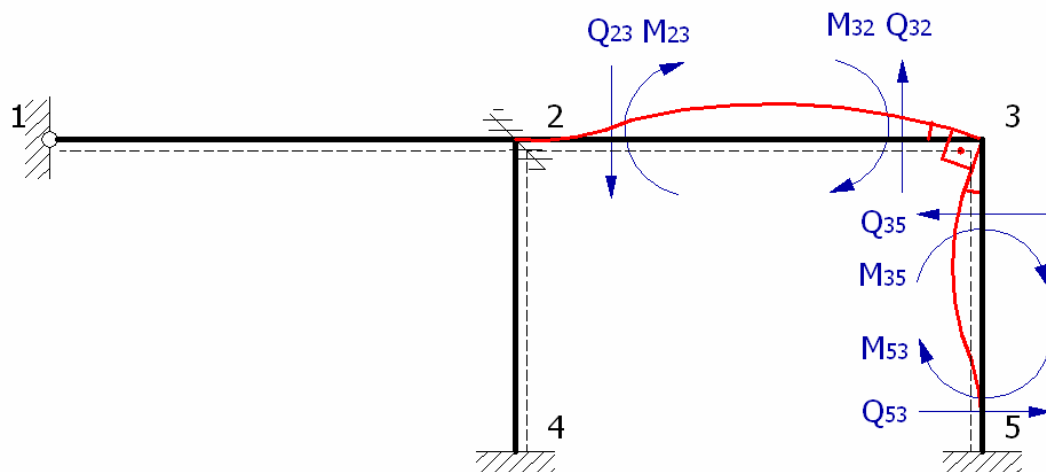
$$M_{24}^{(1)} = M_{42}^{(1)} = M_{35}^{(1)} = M_{53}^{(1)} = \frac{6EI}{L^2} \delta_1 = \frac{6EI}{25} \delta_1, \quad Q_{24}^{(1)} = Q_{42}^{(1)} = Q_{35}^{(1)} = Q_{53}^{(1)} = \frac{12EI}{L^3} \delta_1 = \frac{12EI}{125} \delta_1$$

Παραμορφωσιακή κατάσταση για $\phi_2=1$



$$\begin{aligned}
 M_{21}^{(2)} &= \frac{3EI}{L} \phi_2 = \frac{EI}{2} \phi_2 & M_{24}^{(2)} &= \frac{4EI}{L} \phi_2 = \frac{4EI}{5} \phi_2 & Q_{12}^{(2)} = Q_{21}^{(2)} &= \frac{3EI}{L^2} \phi_2 = \frac{EI}{12} \phi_2 \\
 M_{23}^{(2)} &= \frac{4EI}{L} \phi_2 = \frac{2EI}{3} \phi_2 & M_{42}^{(2)} &= \frac{2EI}{L} \phi_2 = \frac{2EI}{5} \phi_2 & Q_{23}^{(2)} = Q_{32}^{(2)} &= \frac{6EI}{L^2} \phi_2 = \frac{EI}{6} \phi_2 \\
 M_{32}^{(2)} &= \frac{2EI}{L} \phi_2 = \frac{EI}{3} \phi_2 & & & Q_{24}^{(2)} = Q_{42}^{(2)} &= \frac{6EI}{L^2} \phi_2 = \frac{6EI}{25} \phi_2
 \end{aligned}$$

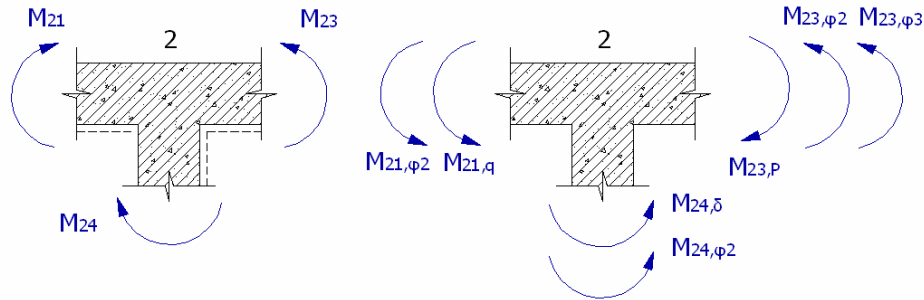
Παραμορφωσιακή κατάσταση για $\phi_3=1$



$$\begin{aligned}
 M_{23}^{(3)} &= \frac{2EI}{L} \phi_3 = \frac{EI}{3} \phi_3 & M_{35}^{(3)} &= \frac{4EI}{L} \phi_3 = \frac{4EI}{5} \phi_3 & Q_{23}^{(3)} = Q_{32}^{(3)} &= \frac{6EI}{L^2} \phi_3 = \frac{EI}{6} \phi_3 \\
 M_{32}^{(3)} &= \frac{4EI}{L} \phi_3 = \frac{2EI}{3} \phi_3 & M_{53}^{(3)} &= \frac{2EI}{L} \phi_3 = \frac{2EI}{5} \phi_3 & Q_{53}^{(3)} = Q_{35}^{(3)} &= \frac{6EI}{L^2} \phi_3 = \frac{6EI}{25} \phi_3
 \end{aligned}$$

Υπολογισμός των μεγεθών δ_1 , ϕ_2 και ϕ_3

1) Η στροφή ϕ_2 θα προσδιοριστεί από την ισοροπία του κόμβου 2: $M_{21}+M_{24}=M_{23}$

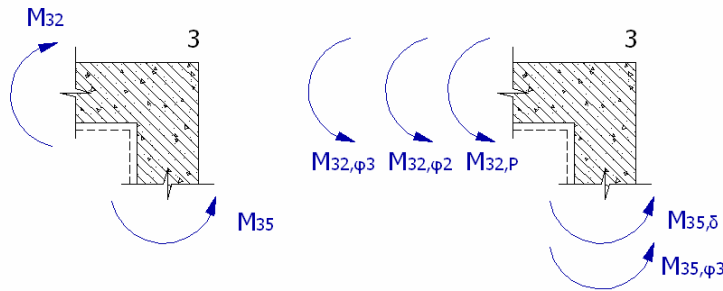


$$-M_{21}^{(0)} - M_{21}^{(2)} - M_{24}^{(1)} - M_{24}^{(2)} = -M_{23}^{(0)} + M_{23}^{(2)} + M_{23}^{(3)} \rightarrow$$

$$-9 - \frac{EI}{2}\phi_2 - \frac{6EI}{25}\delta_1 - \frac{4EI}{5}\phi_2 = -7,5 + \frac{2EI}{3}\phi_2 + \frac{EI}{3}\phi_3 \rightarrow$$

$$\boxed{0,24EI\delta_1 + 1,967EI\phi_2 + 0,333EI\phi_3 = -1,5} \quad (1)$$

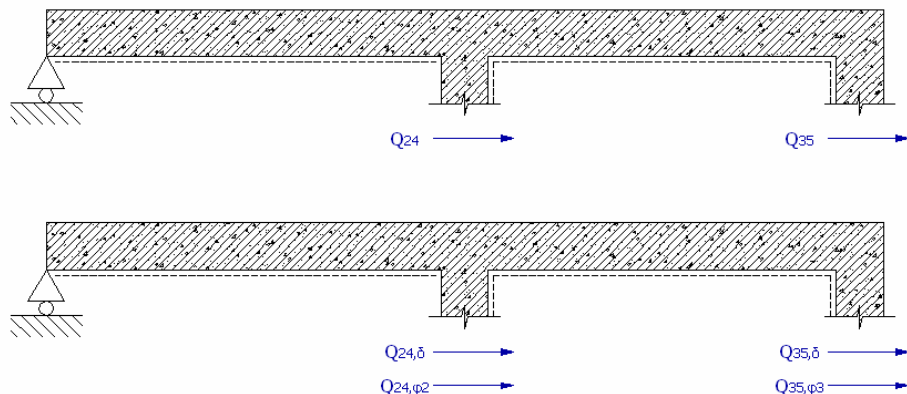
2) Ισοροπία κόμβου 3: $M_{32}=M_{35}$



$$-M_{32}^{(0)} - M_{32}^{(2)} - M_{32}^{(3)} = M_{35}^{(1)} + M_{35}^{(3)} \rightarrow -7,5 - \frac{EI}{3}\phi_2 - \frac{2EI}{3}\phi_3 = \frac{6EI}{25}\delta_1 + \frac{4EI}{5}\phi_3 \rightarrow$$

$$\boxed{0,24EI\delta_1 + 0,333EI\phi_2 + 1,4667EI\phi_3 = -7,5} \quad (2)$$

3) Ισοροπία ζυγώματος (1-2-3): $Q_{24}+Q_{35}=0$



$$-Q_{24}^{(1)} - Q_{24}^{(2)} - Q_{35}^{(1)} - Q_{35}^{(3)} = 0 \rightarrow -\frac{12EI}{125}\delta_1 - \frac{6EI}{25}\phi_2 - \frac{12EI}{125}\delta_1 - \frac{6EI}{25}\phi_3 = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{0,192EI\delta_1 + 0,24EI\phi_2 + 0,24EI\phi_3 = 0} \quad (3)$$

Από (1), (2) και (3) προκύπτει: $\delta_1=8,974/EI$, $\phi_2=-0,773/EI$ και $\phi_3=-6,407/EI$

Εύρεση εντατικών μεγεθών

$$\text{Ζύγωμα 1-2: } \begin{cases} M_{12} = 0 \\ M_{21} = -M_{21}^{(0)} - M_{21}^{(2)} = -9 - \frac{EI}{2}\phi_2 = -8,6\text{KNm} \\ Q_{12} = Q_{12}^{(0)} - Q_{12}^{(2)} = 4,5 - \frac{EI}{12}\phi_2 = 4,56\text{KN} \\ Q_{21} = -Q_{21}^{(0)} - Q_{21}^{(2)} = -7,5 - \frac{EI}{12}\phi_2 = -7,43\text{KN} \end{cases}$$

$$\text{Ζύγωμα 2-3: } \begin{cases} M_{23} = -M_{23}^{(0)} + M_{23}^{(2)} + M_{23}^{(3)} = -7,5 + \frac{2EI}{3}\phi_2 + \frac{EI}{3}\phi_3 = -10,151\text{KNm} \\ M_{32} = -M_{32}^{(0)} - M_{32}^{(2)} - M_{32}^{(3)} = -7,5 - \frac{EI}{3}\phi_2 - \frac{2EI}{3}\phi_3 = -2,97\text{KNm} \\ Q_{23} = Q_{23}^{(0)} - Q_{23}^{(2)} - Q_{23}^{(3)} = 5 - \frac{EI}{6}\phi_2 - \frac{EI}{6}\phi_3 = 6,19\text{KN} \\ Q_{32} = -Q_{32}^{(0)} - Q_{32}^{(2)} - Q_{32}^{(3)} = -5 - \frac{EI}{6}\phi_2 - \frac{EI}{6}\phi_3 = -3,8\text{KN} \end{cases}$$

$$\text{Στύλος 4-2: } \begin{cases} M_{42} = M_{42}^{(1)} + M_{42}^{(2)} = \frac{6EI}{25}\delta_1 + \frac{2EI}{5}\phi_2 = 1,85\text{KNm} \\ M_{24} = -M_{24}^{(1)} - M_{24}^{(2)} = -\frac{6EI}{25}\delta_1 - \frac{4EI}{5}\phi_2 = -1,54\text{KNm} \\ Q_{42} = -Q_{42}^{(1)} - Q_{42}^{(2)} = -\frac{12EI}{125}\delta_1 - \frac{6EI}{25}\phi_2 = -0,68\text{KN} \\ Q_{24} = -Q_{24}^{(1)} - Q_{24}^{(2)} = -\frac{12EI}{125}\delta_1 - \frac{6EI}{25}\phi_2 = -0,68\text{KN} \end{cases}$$

$$\text{Στύλος 3-5: } \begin{cases} M_{35} = M_{35}^{(1)} + M_{35}^{(3)} = \frac{6EI}{25}\delta_1 + \frac{4EI}{5}\phi_3 = -2,97\text{KNm} \\ M_{53} = -M_{53}^{(1)} - M_{53}^{(3)} = -\frac{6EI}{25}\delta_1 - \frac{2EI}{5}\phi_3 = 0,409\text{KNm} \\ Q_{35} = -Q_{35}^{(1)} - Q_{35}^{(3)} = -\frac{12EI}{125}\delta_1 - \frac{6EI}{25}\phi_3 = 0,68\text{KN} \\ Q_{53} = -Q_{53}^{(1)} - Q_{53}^{(3)} = -\frac{12EI}{125}\delta_1 - \frac{6EI}{25}\phi_3 = 0,68\text{KN} \end{cases}$$

Μόρφωση των διαγραμμάτων M,Q

