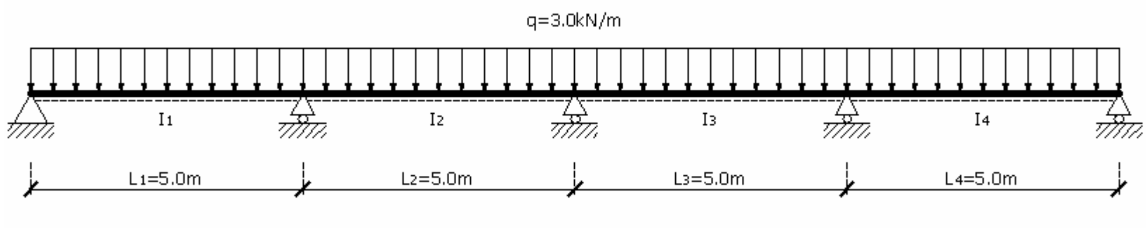
ΑΣΚΗΣΗ 6

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Για τη δοκό του σχήματος με ίσα ανοίγματα και ροπές αδρανείας σταθερές αλλά όχι ίδιες σε κάθε άνοιγμα, ζητείται να μορφωθεί το διάγραμμα ροπών κάμψεως.



$$I_1 = I_2 = 200 \cdot 10^6 mm^4 \qquad E = 210000 \cdot 10^3 KN/m^2$$
$$I_3 = I_4 = 400 \cdot 10^6 mm^4 \qquad l = 5m, q = 3KN/m$$

ΕΠΙΛΥΣΗ:

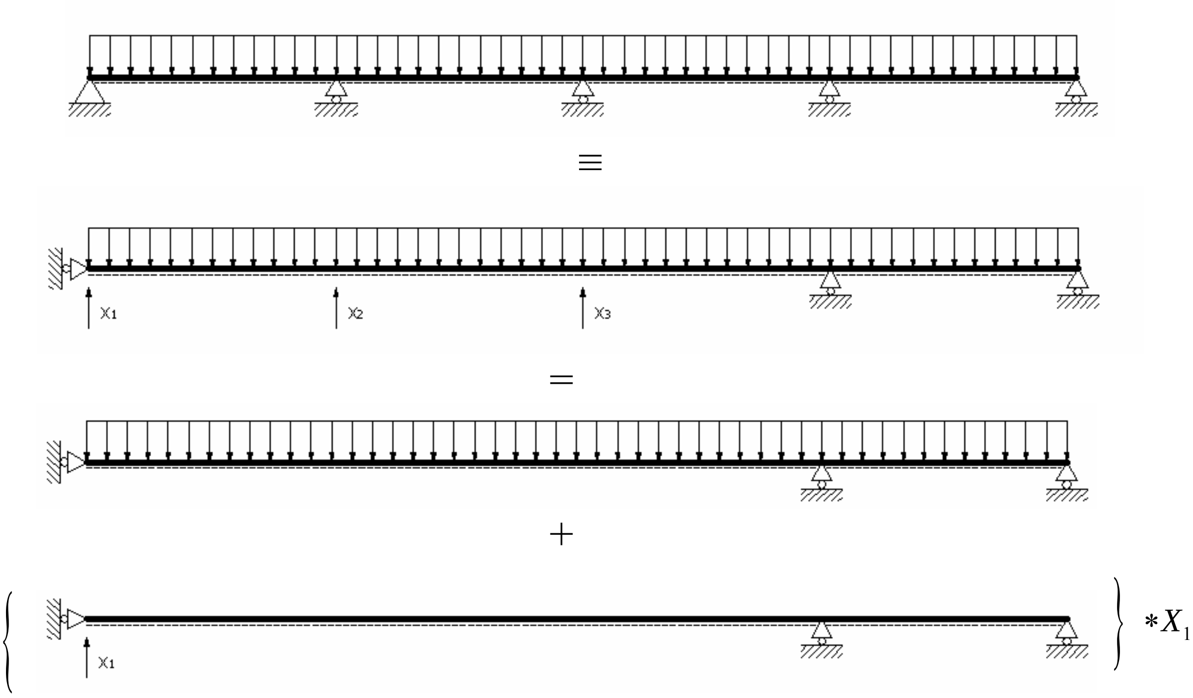
Α' Τροπος:

Εύρεση στατικής αοριστίας

εξωτερική υπερστατικότητα=3 (6 άγνωστες αντιδράσεις – 3 εξισώσεις ισορροπίας)
εσωτερική υπερστατικότητα=0
συνολικά: 3 φορές υπερστατικός φορέας

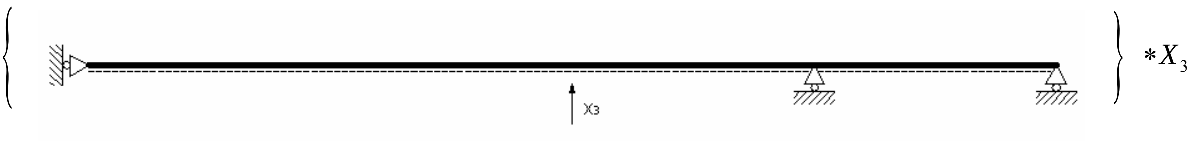
Διαλέγουμε ως υπερστατικά μεγέθη τις κατακόρυφες αντιδράσεις στις τρεις αριστερές στηρίξεις.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας, έχουμε:

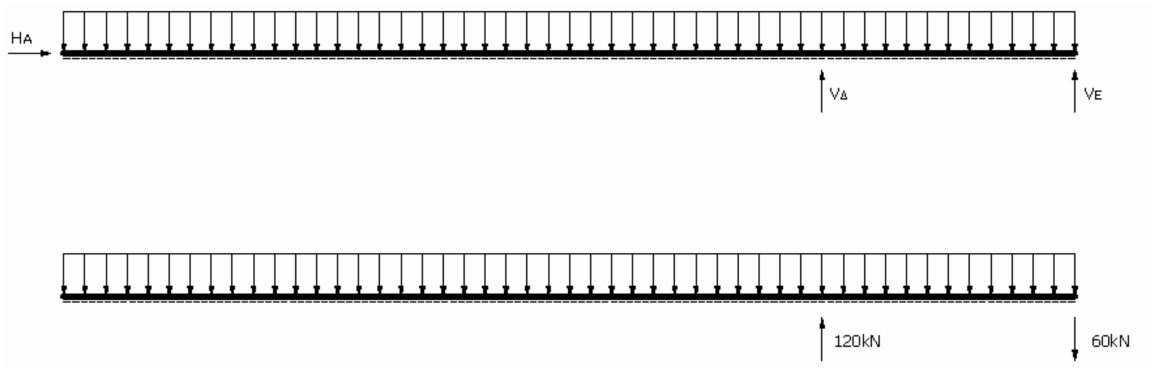


+

+

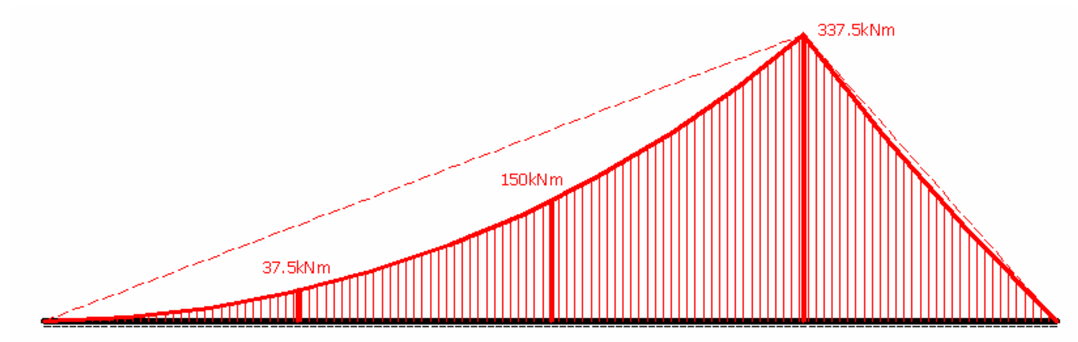


Επίλυση του πλαισίου μόνο με εξωτερικά φορτία και για $X_1=X_2=X_3=0$

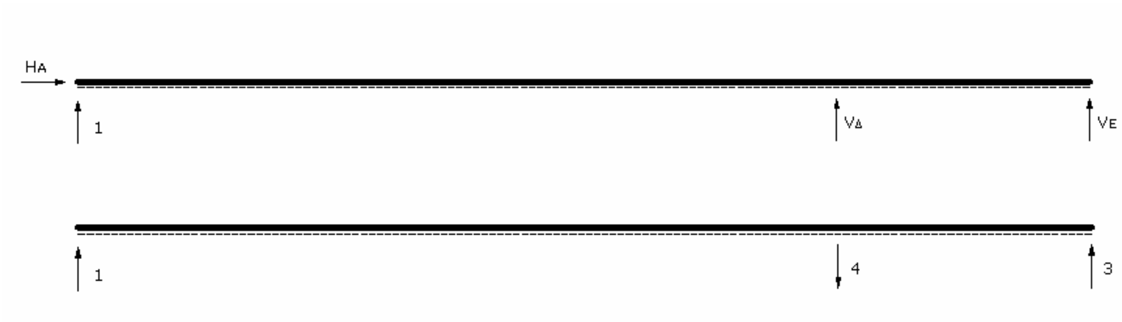


$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0\\
&\sum F_y = 0 \rightarrow V_\Delta + V_E = 3\cdot 20 = 60\\
&\sum M_\Gamma = 0 \rightarrow -V_\Delta \cdot 5 - V_E \cdot 10 = 0
\end{aligned}\right\}
\quad
\begin{aligned}
V_\Delta &= 120KN\\
V_E &= -60KN
\end{aligned}$$

Μόρφωση διαγράμματος M_0

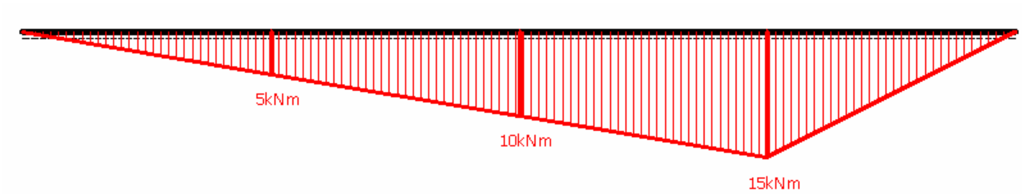


Επίλυση του πλαισίου χωρίς εξωτερικά φορτία και για X_1=1 (X_2=X_3=0)

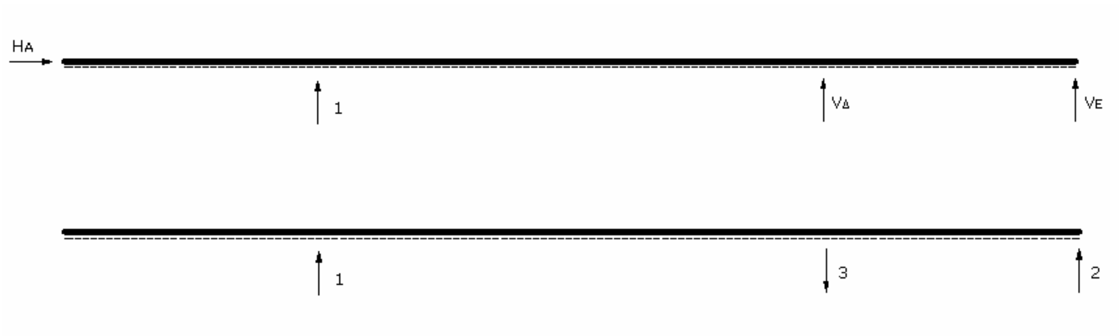


$$\left.\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ &\sum F_y = 0 \rightarrow V_\Delta + V_E + 1 = 0 \\ &\sum M_A = 0 \rightarrow -V_\Delta \cdot 15 - V_E \cdot 20 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} V_\Delta &= -4KN \\ V_E &= 3KN \end{aligned}$$

Μόρφωση διαγράμματος $\overline{M}_1$

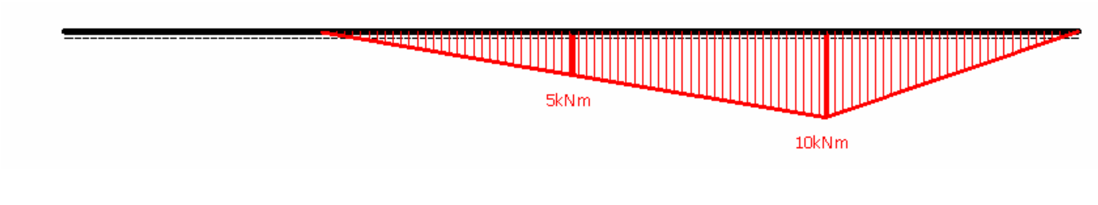


Επίλυση του πλαισίου χωρίς εξωτερικά φορτία και για X_2=1 (X_1=X_3=0).

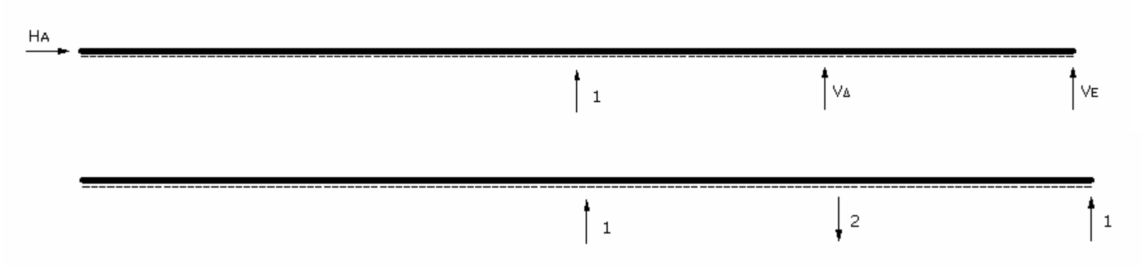


$$\left.\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0 \\ &\sum F_y = 0 \rightarrow V_\Delta + V_E + 1 = 0 \\ &\sum M_B = 0 \rightarrow -V_\Delta \cdot 10 - V_E \cdot 15 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} V_\Delta &= -3KN \\ V_E &= 2KN \end{aligned}$$

Μόρφωση διαγράμματος $\overline{M}_2$

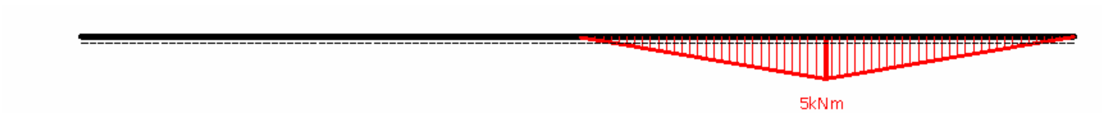


Επίλυση του πλαισίου χωρίς εξωτερικά φορτία και για X_3=1 (X_1=X_2=0)



$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_x = 0 \rightarrow H_A = 0\\
&\sum F_y = 0 \rightarrow V_\Delta + V_E + 1 = 0\\
&\sum M_\Gamma = 0 \rightarrow -V_\Delta \cdot 5 - V_E \cdot 10 = 0
\end{aligned}\right\}\qquad
\begin{aligned}
V_\Delta &= -2KN\\
V_E &= 1KN
\end{aligned}$$

Μόρφωση διαγράμματος $\overline{M}_3$



$$\boxed{\tilde{1} \cdot \delta + \sum \tilde{R} \cdot \Delta s = (\Delta_{1L} + F_{1t}) + F_{11} \cdot X_1 = \Delta_1^{(s)}} \qquad (1)$$

a/a	Πραγματική φόρτιση	Δυνατή φόρτιση
F_{10}	L	X_1=1
F_{11}	X_1=1	X_1=1
F_{12}	X_1=1	X_2=1
F_{13}	X_1=1	X_3=1
F_{20}	L	X_2=1
F_{22}	X_2=1	X_2=1
F_{23}	X_2=1	X_3=1
F_{30}	L	X_3=1
F_{33}	X_3=1	X_3=1

$1 \cdot \tilde{\delta}_i + \sum \tilde{R}\Delta s_i = 0$, εφόσον δεν υπάρχει αρχική μετατόπιση κόμβου.

F_{it}=0, εφόσον δεν έχουμε θερμοκρασιακή μεταβολή.

$$\Delta_{1L} = F_{10} = \int \frac{\overline{M}_1 M_0}{EI} dx = \frac{5}{EI}\{[\frac{1}{6}5[2(-9,375) - 37,5]\} +$$

$$\frac{5}{EI}\{\frac{1}{6}[(-37,5)5 - 2 \cdot 84,375(5+10) - 337,5 \cdot 15]\} +$$

$$\frac{5}{EI'}\{\frac{1}{6}[-150 \cdot 10 + 2(234,375)(10+15) - 337,5 \cdot 15]\} +$$

$$\frac{5}{EI'}\{\frac{1}{6}15[2(-159,375) - 337,5]\} = -0,36830$$

$$F_{11} = \int \frac{M_1^2}{EI} dx = 0,021825$$

$$F_{12} = \int \frac{\bar{M}_1 M_2}{EI} dx = 0,01116$$

$$F_{13} = \int \frac{\bar{M}_1 M_3}{EI} dx = 0,003472$$

$$\Delta_{2L} = F_{20} = \int \overline{M}_2 \frac{M_0}{EI} dx = -0,207403$$

$$F_{22} = \int \frac{M_2^2}{EI} dx = 0,006448$$

$$F_{23} = \int \frac{\overline{M}_2 M_3}{EI} dx = 0,002232$$

$$\Delta_{3L} = F_{30} = \int \overline{M}_3 \frac{M_0}{EI} dx = -0,07254$$

$$F_{33} = \int \frac{M_3^2}{EI} dx = 0,000992$$

Άρα έχουμε να λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Delta_{1L} + F_{11}X_1 + F_{12}X_2 + F_{13}X_3 \\ 0 &= \Delta_{2L} + F_{21}X_1 + F_{22}X_2 + F_{23}X_3 \\ 0 &= \Delta_{3L} + F_{31}X_1 + F_{32}X_2 + F_{33}X_3 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0,36830 &= 0,021825X_1 + 0,01116X_2 + 0,003472X_3 \\ 0,207403 &= 0,01116X_1 + 0,006448X_2 + 0,002232X_3 \\ 0,07254 &= 0,003472X_1 + 0,002232X_2 + 0,000992X_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} X_1 &= 5,88KN \\ X_2 &= 17,17KN \\ X_3 &= 13,89KN \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας, έχω:

$$M_A = 0 + 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 = 0$$

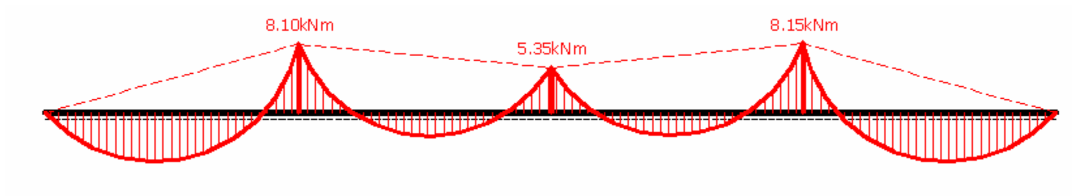
$$M_B = -37,5 + 5X_1 + 0X_2 + 0X_3 = -8,1\text{KN}m \cong -8,04KNm$$

$$M_\Gamma = -150 + X_1 10 + X_2 5 + X_3 0 = -5,35KNm \cong -5,36KNm$$

$$M_\Delta = -337,5 + 15X_1 + 10X_2 + 5X_3 = -8,15KNm \cong -8,04KNm$$

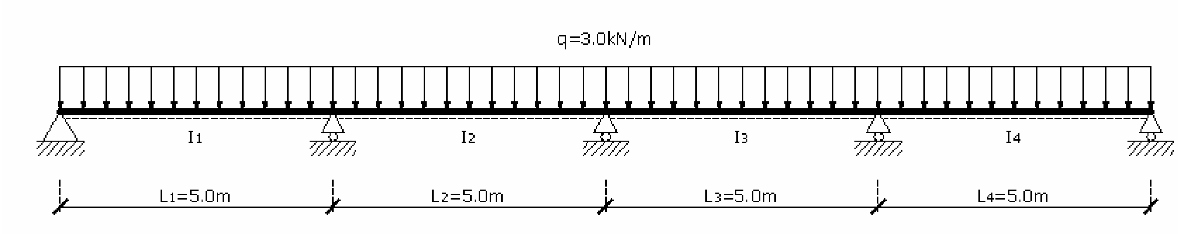
$$M_E = 0 + 0X_1 + 0X_2 + 0X_3 = 0$$

Μόρφωση διαγράμματος ροπών κάμψεως.



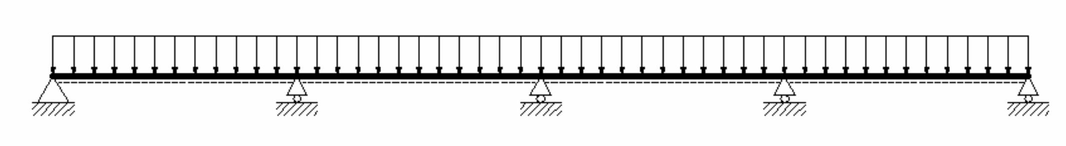
B’ Τροπος:

Να μορφωθεί το Δ.Ρ.Κ. του φορέα με την εξίσωση τριών ροπών.

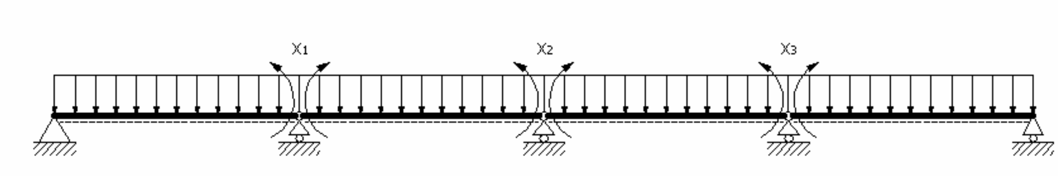


Εύρεση στατικής αοριστίας
εξωτερική υπερστατικότητα=3 (6 άγνωστες αντιδράσεις – 3 εξισώσεις ισορροπίας)
εσωτερική υπερστατικότητα=0
συνολικά: 3 φορές υπερστατικός φορέας

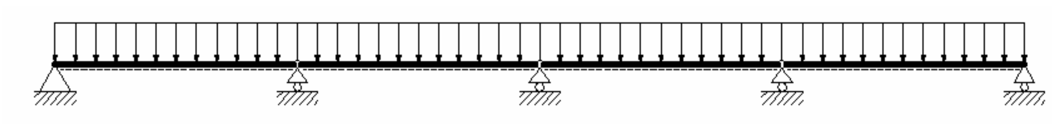
Επιλέγω ως υπερστατικά μεγέθη ροπές στις τρεις ενδιάμεσες κυλίσεις. Άρα θα έχουμε:



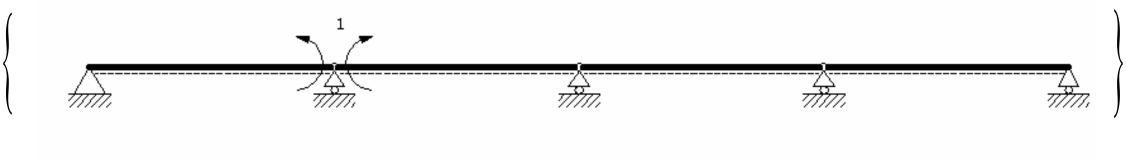
≡



=

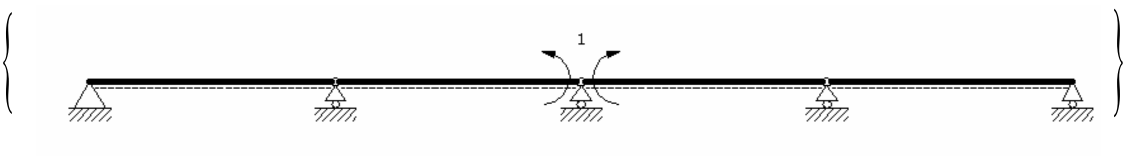


+



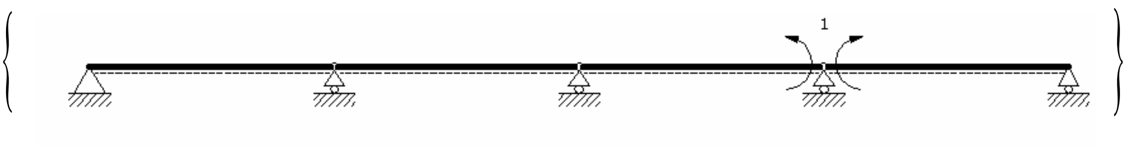
$*X_1$

+



$*X_2$

+



$*X_3$

Εξισώσεις ελαστικότητας:

$$0=\Delta_i^{(s)}=\Delta_i^L+F_{i(i-1)}\cdot X_{i-1}+F_{ii}\cdot X_i+F_{i(i+1)}\cdot X_{i+1} \qquad \text{ή}$$

$$0=\Delta_i^{(s)}=\Delta_i^L+F_{i(i-1)}\cdot M_{i-1}+F_{ii}\cdot M_i+F_{i(i+1)}\cdot X_{i+1}\Rightarrow$$

$$\frac{l_{i-1}}{I_{i-1}}\cdot M_{i-1}+2\cdot\left(\frac{l_{i-1}}{I_{i-1}}+\frac{l_i}{I_i}\right)\cdot M_i+\frac{l_i}{I_i}\cdot M_{i+1}=-\frac{6\cdot A_{i-1}^{M_L}\cdot x_{KB,i-1}}{I_{i-1}\cdot l_{i-1}}-\frac{6A_{i-1}^{M_L}\cdot \bar{x}_{KB,i}}{I_i\cdot l_i}$$
$$-6\cdot E\cdot\left(\frac{\delta_{i-1}-\delta_i}{l_{i-1}}+\frac{\delta_{i+1}-\delta_i}{l_i}\right)$$

Όπου $\delta_{i-1},\delta_i,\delta_{i+1}$ οι δεδομένες υποχωρήσεις των υποστηριγμάτων (i-1),(i),(i+1) αντίστοιχα, l_{i-1},l_i τα μεταξύ των μήκη, A το εμβαδόν του δ.ρ.κ., και $x_{κβ}$ η οριζόντια απόσταση του κ.β. φόρτισης από διπλανές στηρίξεις.

Για i=2, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\frac{l_1}{I_1}M_1+2\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right)M_2+\frac{l_2}{I_2}M_3=-\frac{6A_1x_{κβ,1}}{I_1l_1}-\frac{6A_2\bar{x}_{κβ,2}}{I_2l_2}\rightarrow$$

$$2\left(\frac{5}{2\cdot10^{-4}}+\frac{5}{2\cdot10^{-4}}\right)M_2+\frac{5}{2\cdot10^{-4}}M_3=-\frac{6\cdot31,25\cdot2,5}{2\cdot10^{-4}\cdot5}-\frac{6\cdot31,25\cdot2,5}{2\cdot10^{-4}\cdot5}\rightarrow$$

$$\underline{M_2+0,25M_3=-9,37} \qquad (1)$$

Όπου $M_1=0$ και $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$.

Για i=3,έχω:

$$\frac{l_2}{I_2}M_2+2\left(\frac{l_2}{I_2}+\frac{l_3}{I_3}\right)M_3+\frac{l_3}{I_3}M_4=-\frac{6A_2x_{κβ,2}}{I_2l_2}-\frac{6A_3\bar{x}_{κβ,3}}{I_3l_3}\rightarrow$$

$$\frac{5}{2\cdot10^{-4}}M_2+2\left(\frac{5}{2\cdot10^{-4}}+\frac{5}{4\cdot10^{-4}}\right)M_3+\frac{5}{4\cdot10^{-4}}M_4=-\frac{6\cdot31,25\cdot2,5}{2\cdot10^{-4}\cdot5}-\frac{6\cdot31,25\cdot2,5}{4\cdot10^{-4}\cdot5}$$

$$\underline{2,5M_2+7,5M_3+1,25M_4=-70,3125} \qquad (2)$$

Για i=4,έχω:

$$\frac{l_3}{I_3}M_3+2\left(\frac{l_3}{I_3}+\frac{l_4}{I_4}\right)M_4+\frac{l_4}{I_4}M_5=-\frac{6A_3x_{κβ,3}}{I_3l_3}-\frac{6A_4\bar{x}_{κβ,4}}{I_4l_4}$$

$$\frac{5}{4\cdot10^{-4}}M_3+2\left(\frac{5}{4\cdot10^{-4}}+\frac{5}{4\cdot10^{-4}}\right)M_4=-\frac{6\cdot31,25\cdot2,5}{4\cdot10^{-4}\cdot5}-\frac{6\cdot31,25\cdot2,5}{4\cdot10^{-4}\cdot5}$$

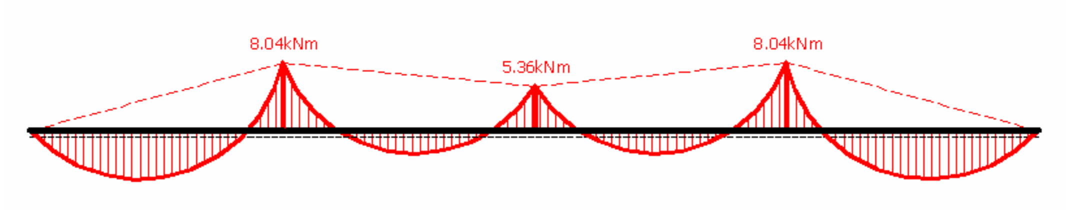
$$\underline{1,25M_3+5M_4=-46,875} \qquad (3)$$

Όπου $M_5=0$.

Επίσης, $A_i=ql^3/12=31,25$ και $x_{κβ,i}=\bar{x}_{κβ,i}=1/2=2,5$, για ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο.

Από (1),(2),(3) έχω: M_2= -8,04KNm, M_3= -5,36KNm, M_4= -8,04KNm

Μόρφωση διαγράμματος ροπών κάμψεως



<u>Σύγκριση τιμών των διαγραμμάτων ροπών από τις δύο πορείες επίλυσης</u>:

Τα αποτελέσματα διαφέρουν ελάχιστα. Σε περίπτωση όμως που η δοκός είχε περισσότερα ανοίγματα η διαφορά θα ήταν μεγαλύτερη· αυτό συμβαίνει γιατί με τη γνωστή διαδικασία επίλυσης απαιτείται μεγάλη υπολογιστική διαδικασία και η ακρίβεια της λύσης μειώνεται. Έτσι, είναι προτιμότερη η εφαρμογή της εξίσωσης των τριών ροπών, αφού είναι πιο ακριβής και σύντομη. Το ίδιο ισχύει αν εφαρμόσουμε και την εξίσωση των πέντε ροπών (ελαστικές στηρίξεις).