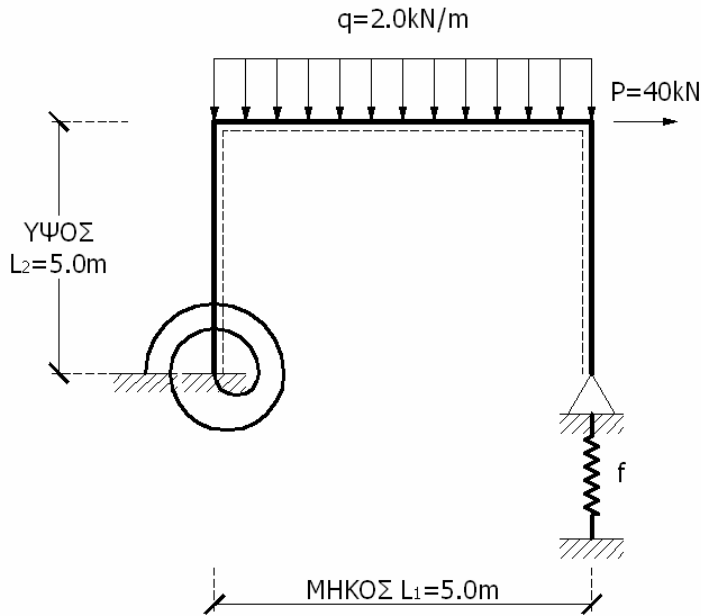


**ΑΣΚΗΣΗ 5**

**ΔΕΔΟΜΕΝΑ:**

Να μορφωθούν τα διαγράμματα M,Q,N για το φορέα που υποβάλλεται στις εξωτερικές δράσεις όπως φαίνεται στο σχήμα.



Δίνονται:

$$EI = 5 \cdot 10^4 \text{ KNm}^2$$

$$h = 0,50\text{m}$$

$$C_\phi = 10^{-5} \cdot 1/\text{KNm}$$

$$f = 1/k = 1/10^3 = 10^{-3} \text{ m/KN}$$

**ΕΠΙΛΥΣΗ:**

**Εύρεση στατικής αοριστίας**

εξωτερική υπερστατικότητα = 2 (5 άγνωστες αντιδράσεις – 3 εξισώσεις ισορροπίας)

εσωτερική υπερστατικότητα = 0

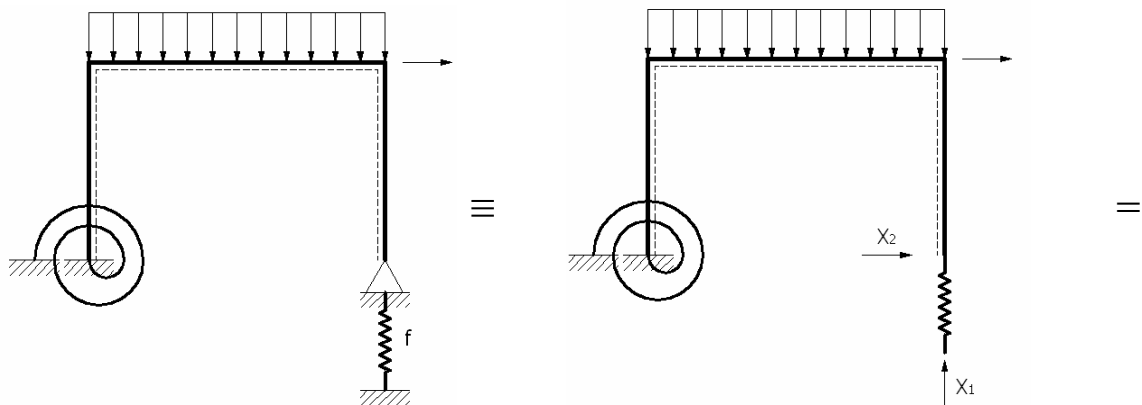
συνολικά: 2 φορές υπερστατικός φορέας

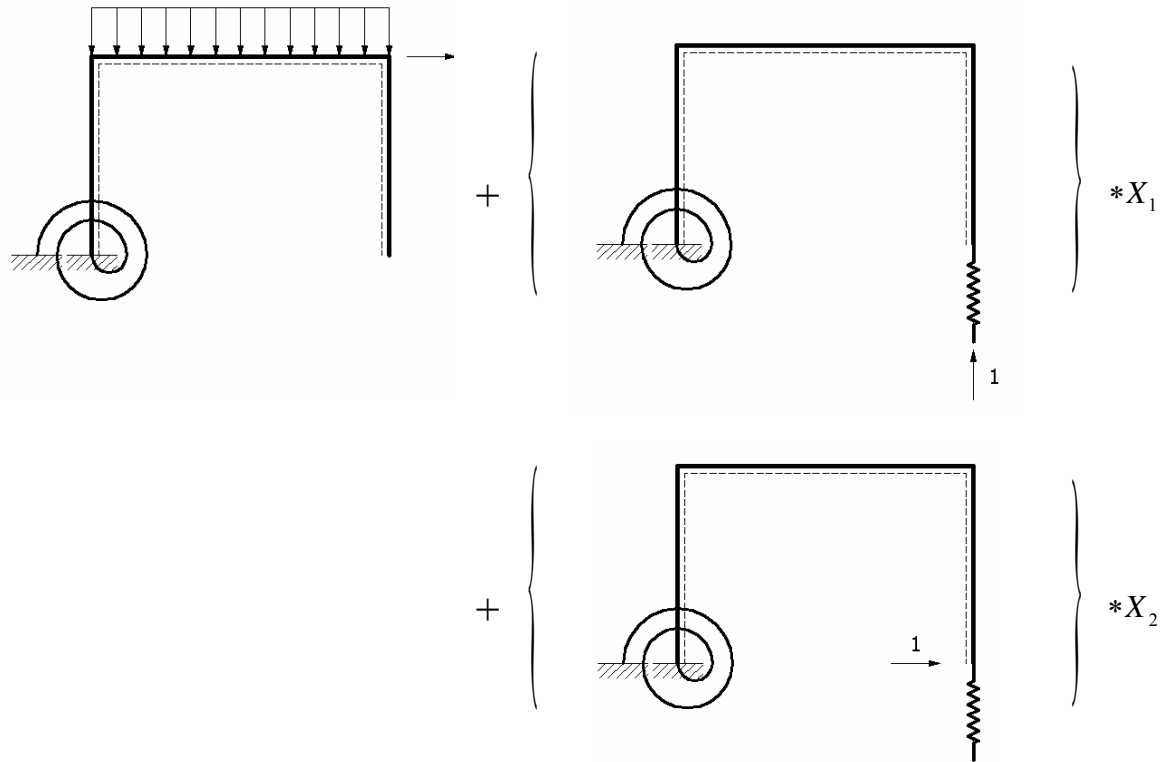
**Επιλογή υπερστατικών μεγεθών**

X<sub>1</sub>: κατακόρυφη αντίδραση στον κόμβο 4.

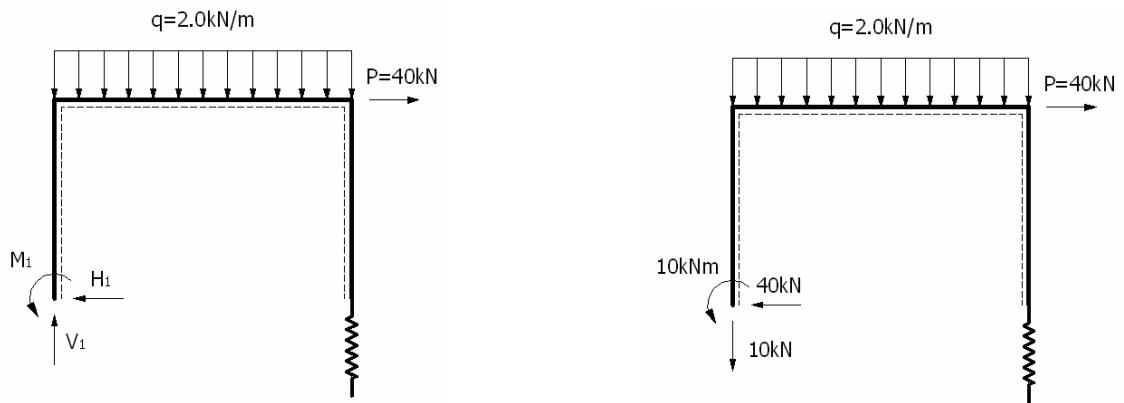
X<sub>2</sub>: οριζόντια αντίδραση στον κόμβο 4.

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας:





**Επίλυση του φορέα μόνο με εξωτερικά φορτία και για  $X_1=X_2=0$**

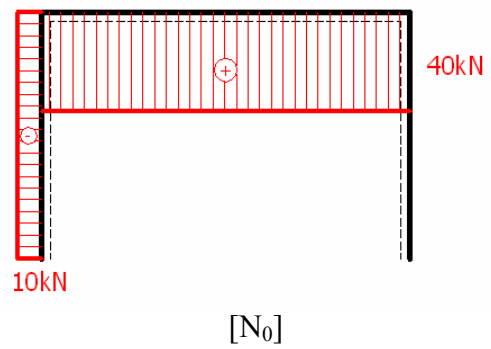
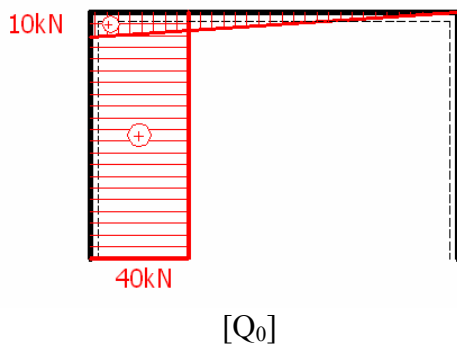
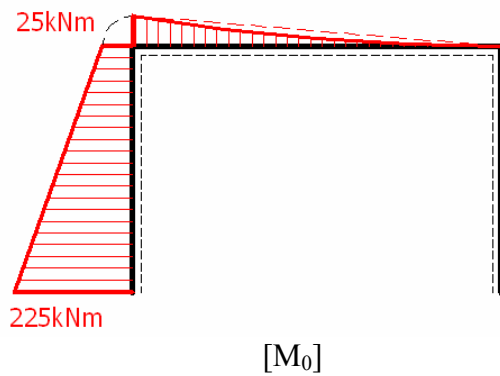


$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_1 = 40\text{KN}$$

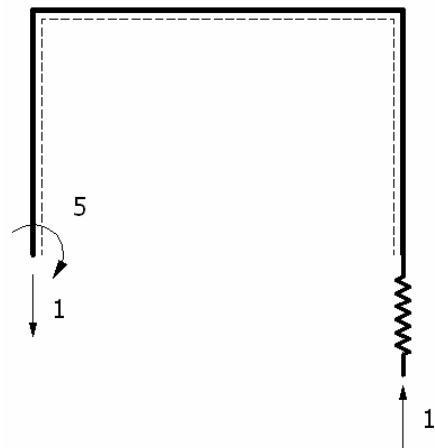
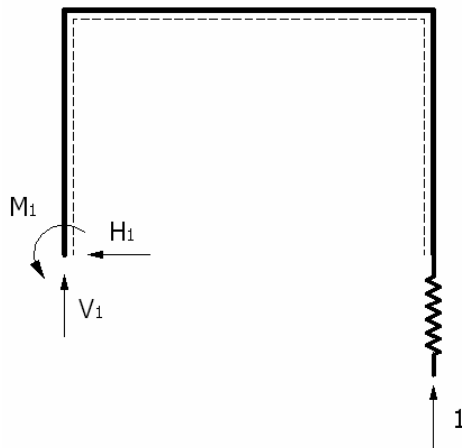
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 = 2 \cdot 5 = 10\text{KN}$$

$$\sum M_1^{\curvearrowright} = 0 \rightarrow -M_1 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} + 40 \cdot 5 = 0 \rightarrow M_1 = 225\text{KNm}$$

**Μόρφωση διαγραμμάτων  $M_0, Q_0, N_0$**



**Επίλυση του φορέα χωρίς εξωτερικά φορτία και για  $X_1=1$  ( $X_2=0$ )**

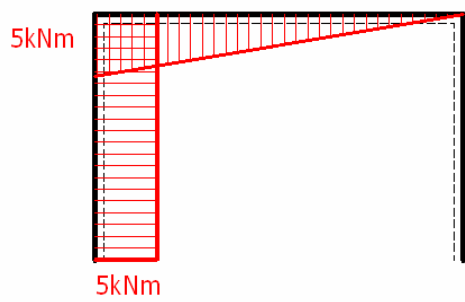


$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_1 = 0$$

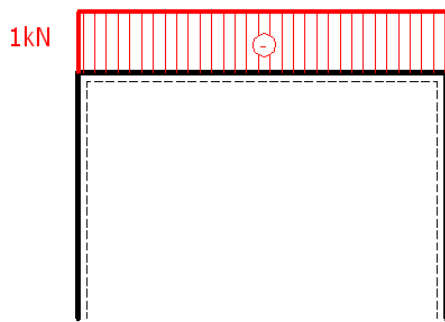
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 = -1 \text{ kN}$$

$$\sum M_1^+ = 0 \rightarrow M_1 - 1 \cdot 5 = 0 \rightarrow M_1 = 5 \text{ kNm}$$

Μόρφωση διαγραμμάτων  $\bar{M}_1, \bar{Q}_1, \bar{N}_1$



[M<sub>1</sub>]

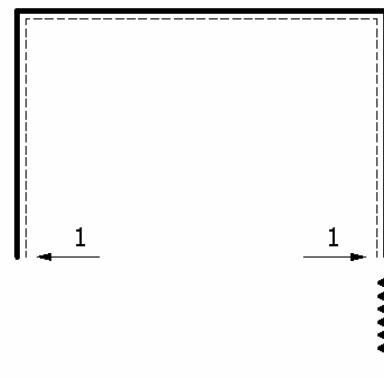
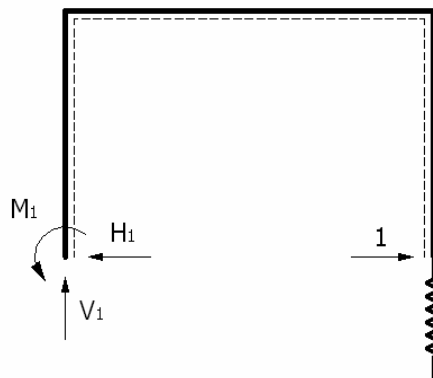


[Q<sub>1</sub>]



[N<sub>1</sub>]

Επίλυση του φορέα χωρίς εξωτερικά φορτία και για X<sub>2</sub>=1 (X<sub>1</sub>=0)

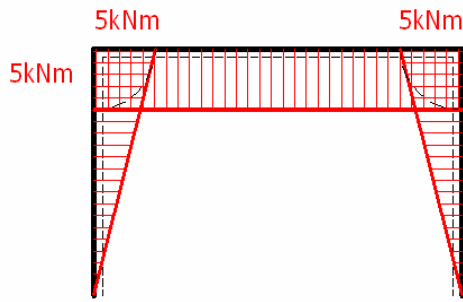


$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_1 = 1 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 = 0$$

$$\sum M_1^+ = 0 \rightarrow M_1 = 0$$

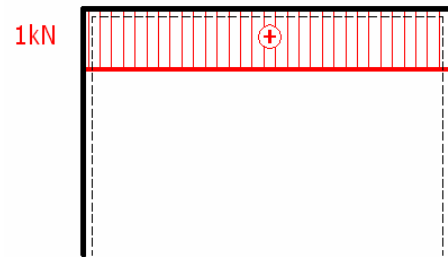
Μόρφωση διαγραμμάτων  $\bar{M}_2, \bar{Q}_2, \bar{N}_2$



[M<sub>2</sub>]



[Q<sub>2</sub>]



[N<sub>2</sub>]

$$\tilde{I} \cdot \delta_1 + \sum \tilde{R}_1 \cdot \Delta s = (\Delta_{iL} + F_{it}) + F_{11} \cdot X_1 + F_{12} X_2 = \Delta_1^{(s)} \quad (1)$$

a/a	Πραγματική φόρτιση	Δυνατή φόρτιση
F <sub>10</sub>	L	X <sub>1</sub> =1
F <sub>11</sub>	X <sub>1</sub> =1	X <sub>1</sub> =1
F <sub>12</sub>	X <sub>1</sub> =1	X <sub>2</sub> =1

$$F_{it} = \sum \int \bar{N} \alpha \Delta T dx + \int \bar{M} \frac{\alpha}{h} \delta T dx = 0, \text{ αφού δεν έχουμε θερμοκρασιακή μεταβολή}$$

$$\Delta_{iL} = \int \frac{\bar{M}_1 M_0}{EI} dx + \sum \frac{\bar{N}_1 N_0}{EA} dx + \sum \bar{P}_2 P_0 f + \sum \bar{M}_2 M_0 C_\varphi$$

$$\text{όπου } \sum \frac{N_1 N_0}{EA} dx = 0, \text{ εφόσον δεν υπάρχουν ελκυστήρες}$$

$$\text{Άρα } \Delta_{iL} = \int \frac{\bar{M}_1 M_0}{EI} + \sum \bar{P}_1 P_0 f_1 + \sum \bar{M}_1 M_0 C_\varphi = \frac{5}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-225 - 25) \right] + \frac{5}{EI} \left[ \frac{1}{12} \cdot (-25) \cdot 5 \right] + 0 \cdot 1 \cdot 10^{-3} - 225 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = -0,07479$$

$$\Delta_1^{(s)} = 1 \cdot \tilde{\delta}_1 + \sum \tilde{R}_1 \Delta s = 0, \text{ εφόσον δεν υπάρχει αρχική μετατόπιση κόμβου.}$$

$$F_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dx + \sum \bar{P}_1^2 f_1 + \sum \bar{M}_1^2 C_\varphi = \frac{5}{EI} \left( \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \right) + 1 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 5 \cdot 10^{-5} = 0,004583$$

$$F_{12} = F_{21} = \int \frac{\bar{M}_1 M_2}{EI} dx + \sum \bar{P}_1 P_2 f_1 + \sum \bar{M}_1 M_2 C_\varphi = \frac{5}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \right) + 1 \cdot 0 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 0 \cdot 10^{-5} = 0,0025$$

$$\boxed{\tilde{I} \cdot \delta_2 + \sum \tilde{R}_2 \cdot \Delta s = (\Delta_{2L} + F_{2t}) + F_{21} \cdot X_1 + F_{22} X_2 = \Delta_2^{(s)}} \quad (2)$$

a/a	Πραγματική φόρτιση	Δυνατή φόρτιση
F <sub>20</sub>	L	X <sub>2</sub> =1
F <sub>21</sub>	X <sub>2</sub> =1	X <sub>1</sub> =1
F <sub>22</sub>	X <sub>2</sub> =1	X <sub>2</sub> =1

$$\Delta_2^{(s)} = 1 \cdot \tilde{\delta}_2 + \sum \tilde{R}_2 \Delta s = 0$$

$$F_{2t} = 0$$

$$\Delta_{2L} = \int \frac{\bar{M}_2 M_o}{EI} dx + \sum \frac{\bar{N}_2 N_o}{EA} dx + \sum \bar{P}_2 P_o f + \sum \bar{M}_2 M_o C_\varphi = \frac{5}{EI} \left[ \frac{1}{6} \cdot 5 \cdot (-225 - 2 \cdot 25) \right] + \frac{5}{EI} \left[ \frac{1}{3} \cdot (-25) \cdot 5 \right] + 0 \cdot 0 \cdot 10^{-3} + 225 \cdot 0 \cdot 10^{-5} = -0,027083$$

$$F_{22} = \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dx + \sum \bar{P}_2^2 f + \sum \bar{M}_2^2 C_\varphi = \frac{5}{EI} \left( \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 5 \right) + 0 \cdot 0 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 0 \cdot 10^{-5} = 0,004167$$

$$\text{Από (1) και (2), έχω: } \left. \begin{array}{l} 0 = -0,07479 + 0,004583X_1 + 0,0025X_2 \\ 0 = -0,027083 + 0,0025X_1 + 0,004167X_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_1 = 19 \text{KN} \\ X_2 = -4,9 \text{KN} \end{array}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας, έχουμε:

$$M_1 = -225 + X_1 \cdot 5 + X_2 \cdot 0 = -225 + 19 \cdot 5 = -130 \text{KNm}$$

$$M_3 = -25 + X_1 \cdot 5 + X_2 \cdot 5 = -25 + 19 \cdot 5 - 4,9 \cdot 5 = 45,5 \text{KNm}$$

$$M_4 = 0 + X_1 \cdot 0 + X_2 \cdot 5 = -4,9 \cdot 5 = -24,5 \text{KNm}$$

$$M_2 = 0 + X_1 \cdot 0 + X_2 \cdot 0 = 0$$

$$Q_1 = 40 + X_1 \cdot 0 + X_2 \cdot 1 = 40 - 4,9 \cdot 1 = 35,1 \text{KN} = Q_3^{\text{κάτω}}$$

$$Q_3^{\text{δέρξ}} = 10 + X_1 \cdot (-1) + X_2 \cdot 0 = 10 - 19 = -9 \text{KN}$$

$$Q_4^{\text{αρ}} = 0 + X_1 \cdot (-1) + X_2 \cdot 0 = -19 \text{KN}$$

$$Q_4^{\text{κάτω}} = 0 + X_1 \cdot 0 + X_2 \cdot (-1) = 4,9 \text{KN} = Q_2$$

$$N_1 = -10 + X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot 0 = -10 + 19 = 9 \text{KN} = N_3^{\text{κάτω}}$$

$$N_3^{\text{δέρξ}} = 40 + X_1 \cdot 0 + X_2 \cdot 1 = 40 - 4,9 = 35,1 \text{KN} = N_4^{\text{αρ}}$$

$$N_4^{\text{κάτω}} = N_2 = 0 + X_1 \cdot (-1) + X_2 \cdot 0 = -19 \text{KN}$$

Μόρφωση τελικών διαγραμμάτων M,Q,N

