

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**

**ΣΧΟΙΝΟΕΙΔΗΣ ΦΟΡΕΑΣ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΦΟΣΤΑΤΙΚΗΣ**

Σημειώσεις

**Βλάσης Κουμούσης
Καθηγητής**

**ΑΘΗΝΑ
Φεβρουάριος 2008**

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΦΟΣΤΑΤΙΚΗΣ - Σχοινοειδής Φορέας

Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν συμπλήρωμα της ύλης του μαθήματος της ΣΤΑΤΙΚΗΣ Ι του 4^{ου} εξαμήνου του προγράμματος σπουδών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ. Σκοπό έχουν να παρουσιάσουν συνοπτικά ορισμένες βασικές γνώσεις γραφικών μεθόδων ως εργαλεία εκτίμησης των αναπτυσσόμενων δυνάμεων που υπεισέρχονται στην ισορροπία των σωμάτων τα οποία θεωρούνται απαραμόρφωτα.

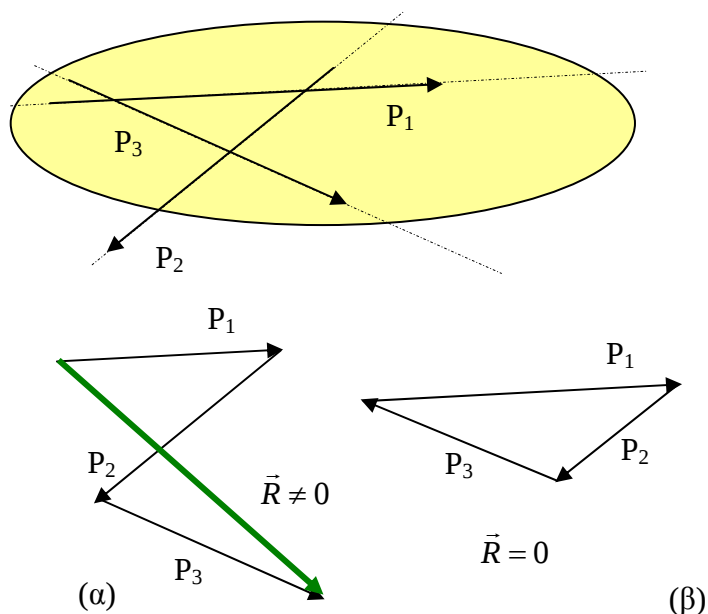
Η ανάπτυξη των μεθόδων αυτών αποτέλεσε κατά τον 19^ο αλλά και τις αρχές του 20^{ου} αιώνα την κύρια μεθοδολογία επίλυσης ισοστατικών φορέων και αναφέρεται ως Γραφοστατική. Βασίστηκε αποτελεσματικά σε προτάσεις της Προβολικής Γεωμετρίας, αν και οι μέθοδοι αυτές αντιμετωπίζονται και εφαρμόζονται ανεξάρτητα ως γραφικές μέθοδοι. Ιδιαίτερα σήμερα, με την ανάπτυξη των γραφικών εφαρμογών μέσω υπολογιστή, οι μέθοδοι αυτές επιδέχονται μιας νέας προσέγγισης που προσφέρει μεγαλύτερη ακρίβεια κάτι που μπορεί να βοηθήσει στην εποπτικότερη κατανόηση της στατικής συμπεριφοράς των ισοστατικών φορέων.

Η χρήση του απλού προγράμματος Draw που είναι ενσωματωμένο στο Ms Office παρέχει την δυνατότητα, με χρήση της «αντιγραφής» και «επικόλλησης», χάραξης παράλληλων ευθειών και αντίστοιχων διαγραμμάτων. Τα περισσότερα σχήματα των σημειώσεων αυτών παρήχθησαν με βάση τη δυνατότητα αυτή. Πληρέστερη αντιμετώπιση παρέχεται και με χρήση του προγράμματος Autocad ή συναφών προγραμμάτων που πέραν της απρόσκοπτης χάραξης παράλληλων ευθειών παρέχουν μέσω των εντολών «distance» και «area» την δυνατότητα ακριβούς μέτρησης αποστάσεων και εμβαδών υπό κλίμακα προσδίδοντας στις μεθόδους αυτές μεγάλη ακρίβεια κατά τον ποσοτικό προσδιορισμό των διαφόρων μεγεθών.

Ισορροπία τριών δυνάμεων

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισορροπεί ένα σώμα υπό την δράση τριών δυνάμεων είναι αυτές να διέρχονται από ένα σημείο και να συνθέτουν ένα κλειστό δυναμοτρίγωνο. Το δυναμοτρίγωνο ορίζεται με την διαδοχική παράθεση των δυνάμεων κατά διεύθυνση και φορά υπό την ίδια κλίμακα εντάσεως-μήκους. Αν οι τρεις δυνάμεις δεν διέρχονται από ένα κοινό σημείο τότε προκαλείται ροπή της μίας δύναμης ως προς το σημείο τομής των άλλων δύο και άρα περιστροφή. Επίσης, αν το δυναμοπολύγωνο των τριών δυνάμεων δεν σχηματίζει ένα κλειστό δυναμοτρίγωνο στο οποίο η αρχή της πρώτης δυνάμεως και το πέρας της τελευταίας να συμπίπτουν, τότε η συνισταμένη δεν είναι μηδέν και άρα προκαλείται μεταφορική κίνηση κατά τη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης (Σχήμα 1). Δηλαδή η απαίτηση κλειστού δυναμοτρίγωνου απαγορεύει την μεταφορική κίνηση, ενώ η συνθήκη σύγκλισης των δυνάμεων σε ένα κοινό σημείο απαγορεύει την περιστροφή.

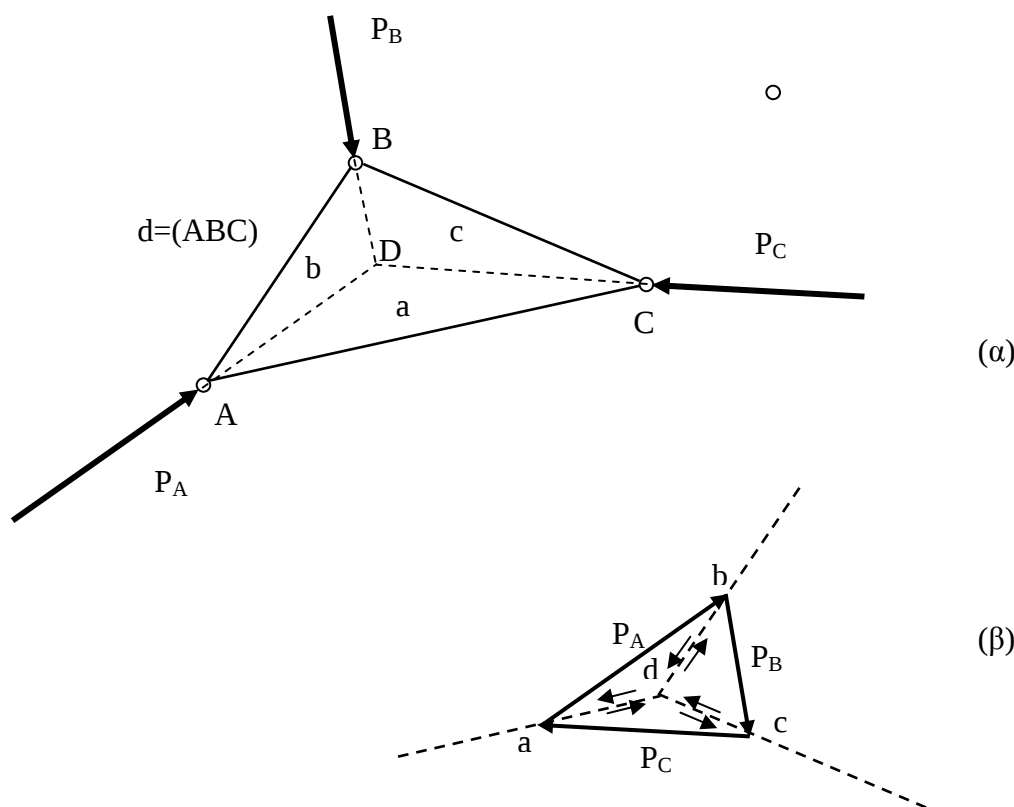
Έτσι αν το δυναμοτρίγωνο τριών δυνάμεων είναι κλειστό αυτό σημαίνει ότι η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν και άρα δεν προκαλείται μεταφορική κίνηση, προκύπτει όμως περιστροφική κίνηση, η οποία αναιρείται μόνο όταν οι δυνάμεις διέρχονται από ένα κοινό σημείο.



Σχήμα 1. Τρεις μη Ισορροπούσες Δυνάμεις
α) μεταφορική και περιστροφική κίνηση β) περιστροφική κίνηση

Επίλυση Τριγωνικού Σχηματισμού

Θεωρούμε τρεις ράβδους που σχηματίζουν ένα τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A, B, C και αντίστοιχα τρεις δυνάμεις P_A , P_B , και P_C που δρουν σε αυτά και διέρχονται από κοινό σημείο D (Σχήμα 2α). Αν οι δυνάμεις αυτές σχηματίζουν μεταξύ τους ένα κλειστό δυναμοτρίγωνο (Σχ. 2β) τότε το τρίγωνο των ράβδων, σύμφωνα με τα προηγούμενα, βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, μπορούμε δε να υπολογίσουμε τις αναπτυσσόμενες τάσεις των ράβδων ως εξής:



Σχήμα 2. Τριγωνικός Σχηματισμός σε Ισορροπία

Παρατηρούμε ότι οι δυνάμεις P_A , P_B , και P_C που δρουν αντίστοιχα στους κόμβους A, B και C και διέρχονται από το σημείο D, σχηματίζουν τα τρίγωνα a , b και c (Σχ. 2α), ενώ d θεωρούμε ολόκληρο το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία A, B και C.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε το Σχήμα 1α ως την προβολή ενός τετραέδρου στο επίπεδο των τριών σημείων A, B και C με την τέταρτη κορυφή του να προβάλλεται στο σημείο D και έδρες αντίστοιχα τις a , b , c και d . Στο κλειστό δυναμοτρίγωνο του Σχ. 2β που χαράσσεται φέρνοντας παράλληλες προς τις τρεις δυνάμεις, παρατηρούμε μια δυική σχέση μεταξύ των κορυφών και των εδρών των τετραέδρων οι οποίες εναλλάσσονται μεταξύ τους. Έτσι η έδρες a , b , c και d του Σχ. 2α γίνονται κορυφές στο Σχ. 2β και οι κορυφές A, B, C και D του σχ. 2α γίνονται έδρες στο σχ. 2β, ενώ οι ακμές τους είναι παράλληλες και ίδιου πλήθους. Η

παρατήρηση αυτή αξιοποιείται σημαντικά από την προβολική γεωμετρία που υπηρέτησε αποτελεσματικά την Γραφοστατική.

Ανεξάρτητα από την παραπάνω παρατήρηση οι δυνάμεις da , db , dc , υπό την κλίμακα σχεδιασμού του δυναμοτριγώνου, αντιστοιχούν στις τάσεις των ράβδων AC , AB και BC . Επίσης τα κλειστά δυναμοτρίγωνα με κορυφές (a,b,d) , (b,c,d) και (c,a,d) εκφράζουν την ισορροπία στους κόμβους A , B και C αντίστοιχα. Οι αντίθετες δυνάμεις σε κοινές πλευρές γειτονικών δυναμοτριγώνων στο Σχήμα 2β αντιστοιχούν στις αντίθετες φορές των δυνάμεων στους δύο κόμβους της ίδιας ράβδου.

Η παραπάνω γεωμετρική θεώρηση - επίλυση αντιστοιχεί αναλυτικά με την επίλυση δύο συστημάτων δύο εξισώσεων ισορροπίας ως προς δύο άξονες x , y γύρω από δύο κόμβους του τριγωνικού πλέγματος των ράβδων. Αντιστοιχεί δηλαδή σε μια σχετικά επίπονη αναλυτική διαδικασία που δεν προσφέρει εποπτεία και ενέχει κινδύνους αριθμητικών λαθών. Μέσα από την σύγκριση αυτή αναδεικνύεται η συνοχή και εποπτικότητα των μεθόδων της γραφοστατικής έναντι των αναλυτικών μεθόδων οι οποίες κυριαρχούν μεν σήμερα, λόγω της δυνατότητάς τους να διαχειριστούν μεγάλους φορείς, αλλά απομακρύνονται από την εποπτεία και το συνολικό έλεγχο της συμπεριφοράς των φορέων που παραμένει ως ζητούμενο ιδιαίτερα για τον σχεδιασμό των φορέων.

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία με κατάλληλη αρίθμηση και διαγραφή των περιοχών με ενιαία φορά (ωρολογιακή ή αντιωρολογιακή) είναι δυνατόν να αναλυθούν απλά ισοστατικά δικτύωματα. Αυτά μορφώνονται με βάση ένα τρίγωνο ράβδων προσθέτοντας διαδοχικά ένα νέο κόμβο και δύο πλευρές, με ένα άκρο τους το νέο κόμβο, οι οποίες μαζί με μία ήδη υπάρχουσα τρίτη ράβδο σχηματίζουν τρίγωνο. Συστηματική διαγραφή των δυναμοτριγώνων οδηγεί στα διαγράμματα Maxwell-Cremona.

Διαγράμματα Maxwell – Cremona

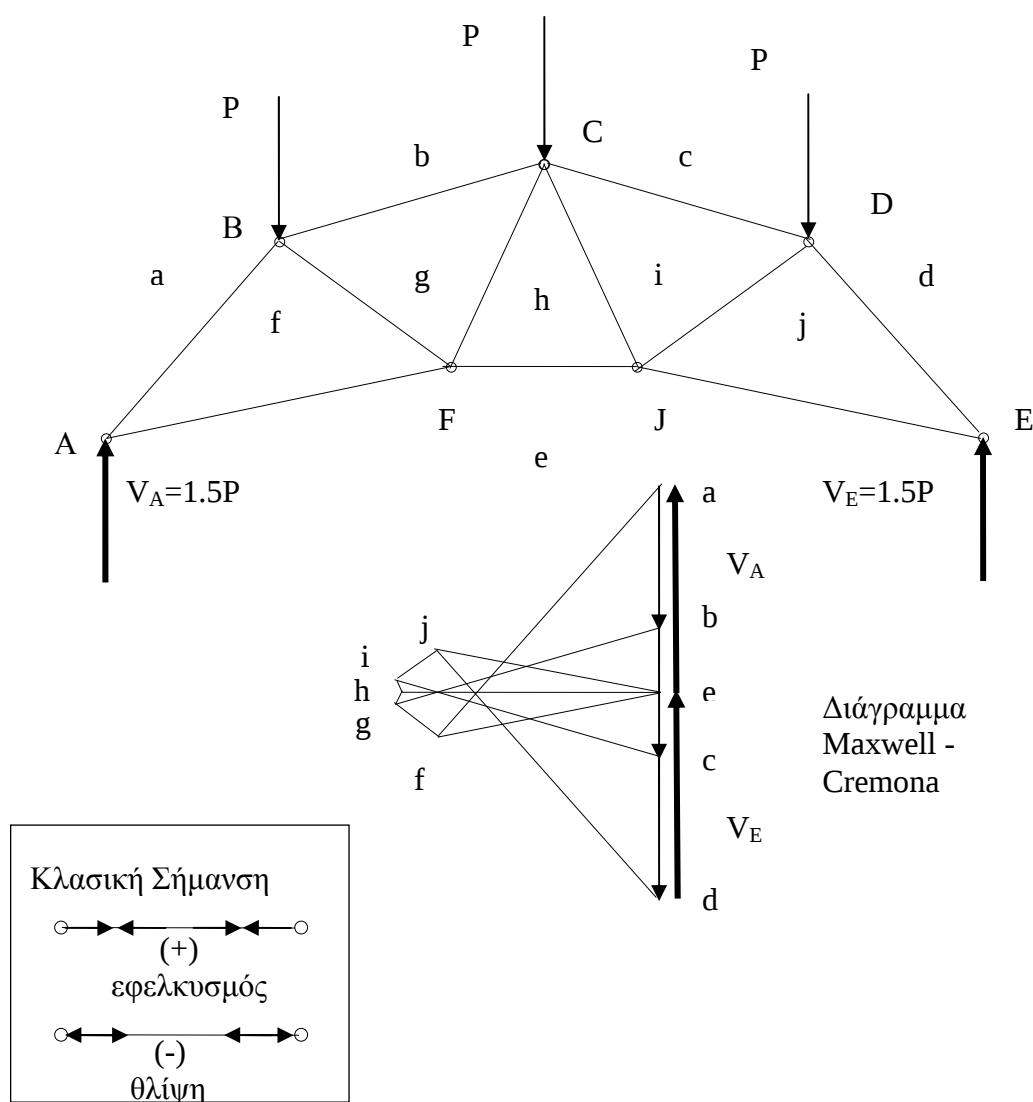
Δίνεται το ισοστατικό αμφιέρειστο δικτύωμα του Σχήματος 3. Στη συνέχεια ολόκληρη η επιφάνεια του επιπέδου του δικτύωματος χωρίζεται σε επιμέρους ανοικτά ή κλειστά χωρία a , b , ..., e όπως αυτά διαχωρίζονται από τις ράβδους του δικτύωματος και τους άξονες των εξωτερικών δράσεων και αντιδράσεων. Η ένωση των χωρίων συνθέτει ολόκληρο το επίπεδο, η δε τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Ακολουθώντας, με μία προκαθορισμένη φορά, έστω την ωρολογιακή, διαγράφεται σταδιακά το δυναμοπολύγωνο των εξωτερικών δυνάμεων με κόμβους αρχής και πέρατος τις αντίστοιχες περιοχές. Έτσι το δυναμοπολύγωνο a , b , c , d αποτελεί το άθροισμα των δράσεων. Λόγω συμμετρίας οι αντιδράσεις είναι ίσες. Ορίζεται έτσι το σημείο e , ως το μέσον της ad , ώστε το δυναμοπολύγωνο a , b , c , d , e , a να είναι κλειστό εκφράζοντας έτσι την ισορροπία του δικτύωματος με τον προσδιορισμό και των αντιδράσεων V_A και V_E .

Στη συνέχεια, για τον προσδιορισμό των τάσεων των ράβδων εξετάζεται διαδοχικά η ισορροπία των κόμβων ξεκινώντας από κόμβο στον οποίο συντρέχουν δύο ράβδοι όπως π.χ ο κόμβος A . Το δυναμοτρίγωνο e , a , f , e περιγράφει την ισορροπία του κόμβου A ως κλειστό δυναμοπολύγωνο. Από αυτό και υπό την κλίμακα σχεδίασης του δυναμοπολύγωνα, προκύπτουν οι τάσεις των ράβδων κατά διεύθυνση, φορά και μέτρο. Αντίστοιχα το κλειστό δυναμοπολύγωνο a , b , g , f , a περιγράφει κατά

διεύθυνση, φορά και μέτρο - σε σχέση πάντα με την κλίμακα των δυνάμεων, την ισορροπία του κόμβου B.

Παρατηρούμε επίσης ότι για την κοινή πλευρά a, f, η διαγραφή, στην ισορροπία του κόμβου A, είναι από το a στο f, ενώ για την ισορροπία του κόμβου B διαγράφεται από το f στο a δηλαδή με αντίθετη φορά. Επειδή εξετάζεται η ισορροπία των κόμβων οι φορές αυτές καθορίζουν την δράση της τάσης της ράβδου στον κόμβο A και B αντίστοιχα. Στο μέλος, κατά την αρχή της δράσης- αντίδρασης, επενεργούν οι αντίθετες δυνάμεις οι οποίες θέτουν την ράβδο υπό θλίψη την οποία κατά σύμβαση προσημαίνουμε αρνητική.



Σχήμα 3. Διάγραμμα Maxwell-Cremona

Γενικότερα παρατηρούμε ότι κάθε ράβδος διατρέχεται δύο φορές καθώς συνμετέχει στην ισορροπία των δύο κόμβων των άκρων της. Στην συνέχεια εξετάζεται η ισορροπία του κόμβου F μέσω του κλειστού δυναμοπολυγώνου ξεκινώντας από οποιαδήποτε περιοχή π.χ. e, f, g, h, e, όπου οι πλευρές e, f και f, g προϋπάρχουν και διανύονται κατά αντίθετη φορά της προηγούμενης. Με τον ίδιο τρόπο αποκαθίσταται η ισορροπία στους κόμβους C με το κλειστό δυναμοπολύγωνο

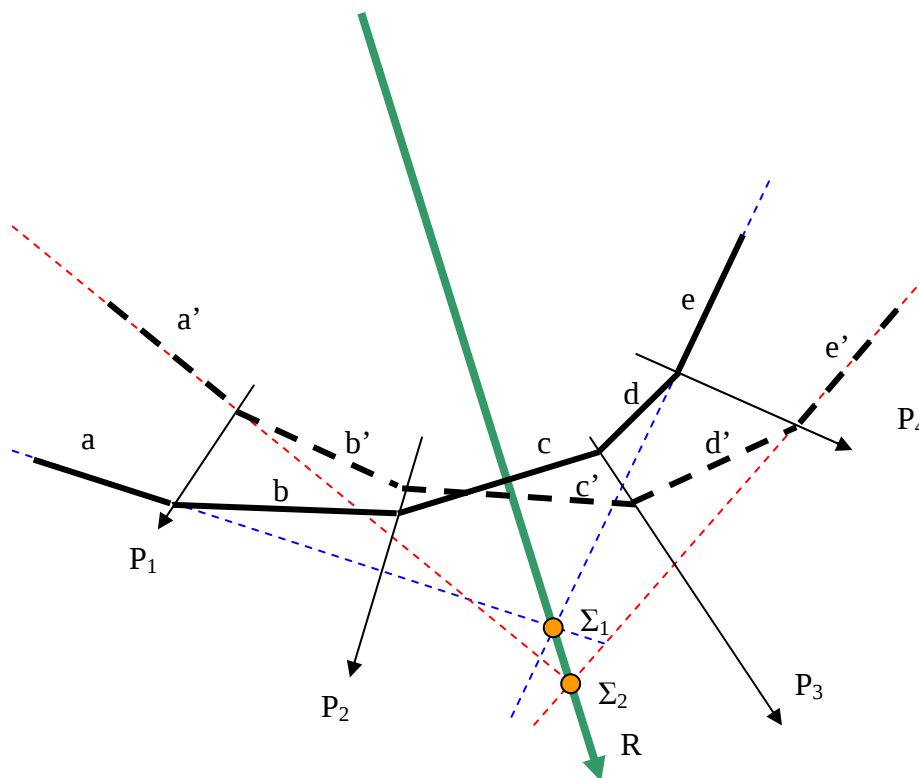
b, c, i, h, g, b, του κόμβου D με το κλειστό δυναμοπολύγωνο c, d, j, i, c και του κόμβου J με το κλειστό δυναμοπολύγωνο e, h, i, j, e που ολοκληρώνει των προσδιορισμό των τάσεων όλων των ράβδων του δικτύματος. Η ισορροπία του κόμβου E περιγράφεται από το κλειστό δυναμοπολύγωνο e, j, d, e που συμπληρώνει με δεύτερη διαγραφή τις ράβδους e, j και j, d.

Με τις σημερινές δυνατότητες των υπολογιστικών γραφικών συστημάτων είναι εύκολο να προγραμματιστεί η παραπάνω διαδικασία και να μετρηθούν με μεγάλη ακρίβεια οι τάσεις των ράβδων, αναβιώνοντας ηλεκτρονικά τις μεθόδους της γραφοστατικής.

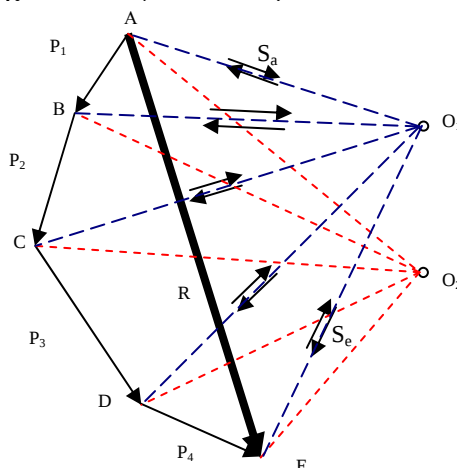
Σχοινοπολύγωνο

Για δεδομένο σύστημα n δυνάμεων στο επίπεδο όπως π.χ. οι P_1, P_2, P_3, P_4 , ($n=4$) που ολισθαίνουν πάνω σε δεδομένες διευθύνσεις (Σχήμα 4α), κάθε δέσμη κατευθύνσεων, που χαράσσεται με βάση τυχαίο πόλο O , σχηματίζει ισορροπα δυναμοτρίγωνα π.χ. όπως αυτά με πόλους τα σημεία O_1 και O_2 στο Σχήμα 4β.

Θεωρώντας τις παράλληλες διευθύνσεις κάθε δέσμης, χαράσσονται αντίστοιχα οι τεθλασμένες γραμμές a, b, c, d, e και a', b', c', d', e' που καλούνται σχοινοπολύγωνα. Αυτά καθορίζουν την μορφή που θα λάβει ένα τελείως εύκαμπτο και αβαρές σχοινί που δεν παραμορφώνεται κατά το μήκος του και εντείνεται από το δεδομένο σύστημα δυνάμεων, στηρίζεται δε σε δύο οποιαδήποτε σημεία των αρχικών και τελικών πλευρών των σχοινοπολυγώνων. Τα διαδοχικά $(n-1)$ μήκη κάθε σχοινοπολυγώνου δεν είναι προκαθορισμένα και εν γένει διαφέρουν από σχοινοπολύγωνο σε σχοινοπολύγωνο.



Σχήμα 4α. Σχοινοπολύγωνα δυνάμεων – Συνισταμένη Δύναμη



Σχήμα 4β. Δυναμοπολύγωνα

Οι διευθύνσεις διαδοχικών τμημάτων ενός σχοινοπολυγώνου ορίζουν αντίστοιχα δυναμοτρίγωνα και τις διαδοχικές τάσεις που αναπτύσσονται στα τμήματα αυτά τα οποία ισορροπούν την αντίστοιχη δύναμη που εφαρμόζεται στην κορυφή μεταξύ των τμημάτων.

Συνισταμένη Δύναμη

Ένα οποιοδήποτε σχοινοπολύγωνο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση της συνισταμένης δύναμης δεδομένου συστήματος συνεπίπεδων δυνάμεων όπως π.χ. P_1, P_2, P_3, P_4 , ($n=4$) στο Σχήμα 4. Η σύνδεση της αρχής της πρώτης δύναμης και το πέρας της τελευταίας ορίζουν την διεύθυνση και το μέτρο της συνισταμένης του συστήματος των δυνάμεων R κατά την ίδια κλίμακα της χάραξης τους (Σχ. 4β). Τόσο η διεύθυνση όσο και το μέτρο της συνισταμένης R είναι ανεξάρτητα της επιλογής του πόλου. Η συνισταμένη δύναμη ισορροπεί τις ακραίες δυνάμεις S_a και S_e και άρα διέρχεται από το σημείο τομής τους δηλ. σημείο Σ_1 . Αντίστοιχα ισχύουν για το δεύτερο σχοινοπολύγωνο που ορίζει το σημείο Σ_2 από το οποίο διέρχεται η συνισταμένη.

Ευθεία Culmann

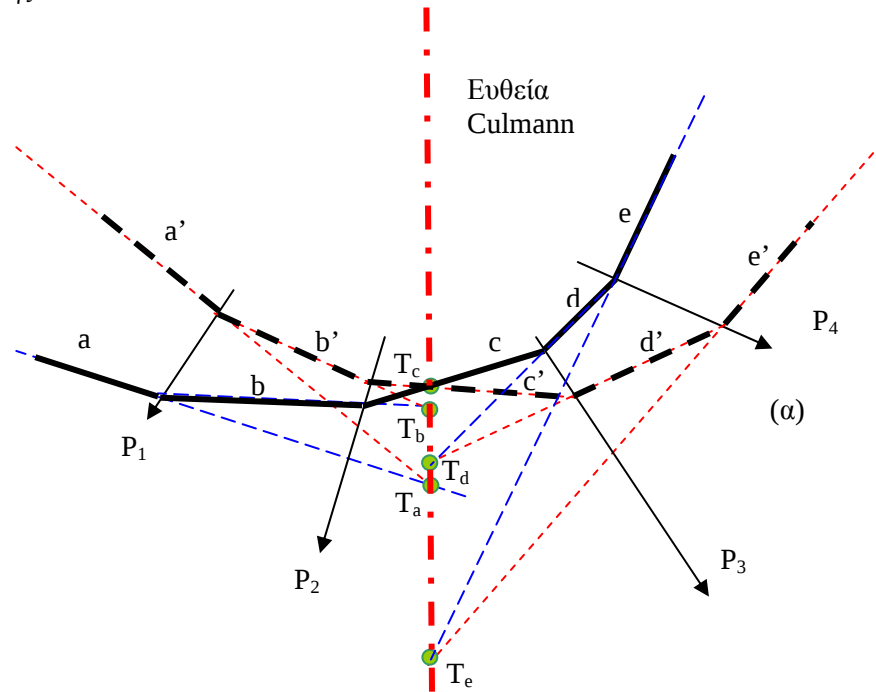
Μεταξύ των αντίστοιχων πλευρών δύο σχοινοπολυγώνων ισχύει η παρακάτω ενδιαφέρουσα πρόταση:

αν για ένα δεδομένο σύστημα συνεπίπεδων δυνάμεων χαραχθούν δύο σχοινοειδή πολύγωνα με πόλους τα σημεία O_1 και O_2 προκύπτει ότι τα σημεία τομής των αντίστοιχων πλευρών (a, a') , (b, b') , (c, c') , (d, d') , (e, e') βρίσκονται επ' ευθείας η οποία καλείται ευθεία Culmann.

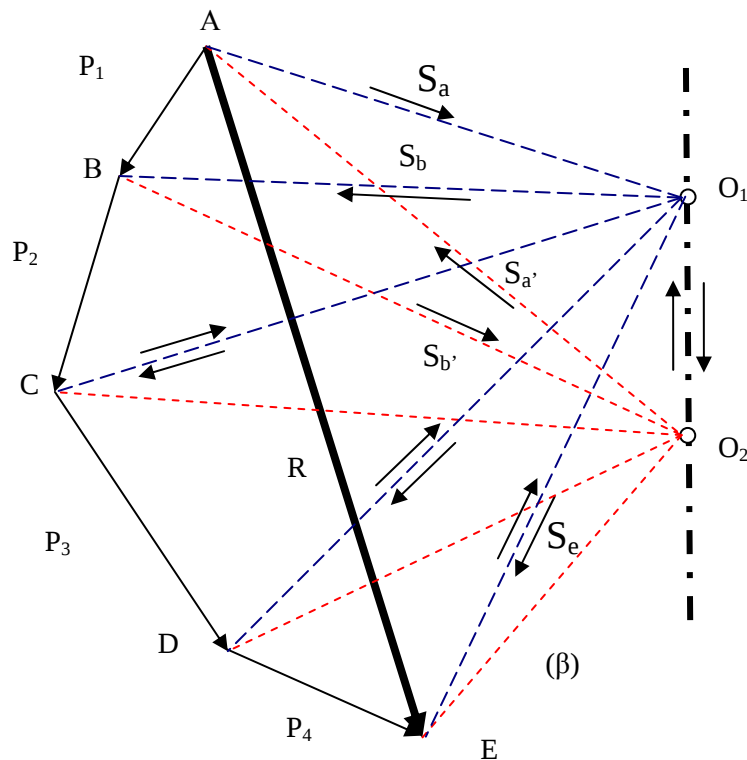
Αρχικά αντικαθιστούμε τη δύναμη P_1 με τις S_a και S_b με την φορά που εμφανίζονται στο δυναμοπολύγωνο. Η σύνθεση των ζευγών δυνάμεων S_a και S_a' καθώς και S_b και S_b' δίνει την δύναμη O_2O_1 και O_1O_2 αντίστοιχα οι οποίες ως αντίθετες είναι σε ισορροπία. Προκύπτει έτσι ότι οι κορυφές T_a και T_b ως σημεία τομής των πλευρών a a' και b, b' ορίζουν στο σχοινοπολύγωνο την ευθεία Culmann που είναι παράλληλη

της ευθείας των πόλων O_1 και O_2 . Για τον ίδιο λόγο και τα υπόλοιπα σημεία T_c , T_d , T_e βρίσκονται και αυτά επί της ίδιας ευθείας (Σχήμα 5).

Ο Κ. Culmann (1821-1881) συνέγραψε τα βασικότερα βιβλία της Γραφοστατικής για την ανάλυση των κατασκευών την οποία βάσισε στην Προβολική Γεωμετρία αν και αυτή δεν είναι απαραίτητη για την ανάπτυξή της.



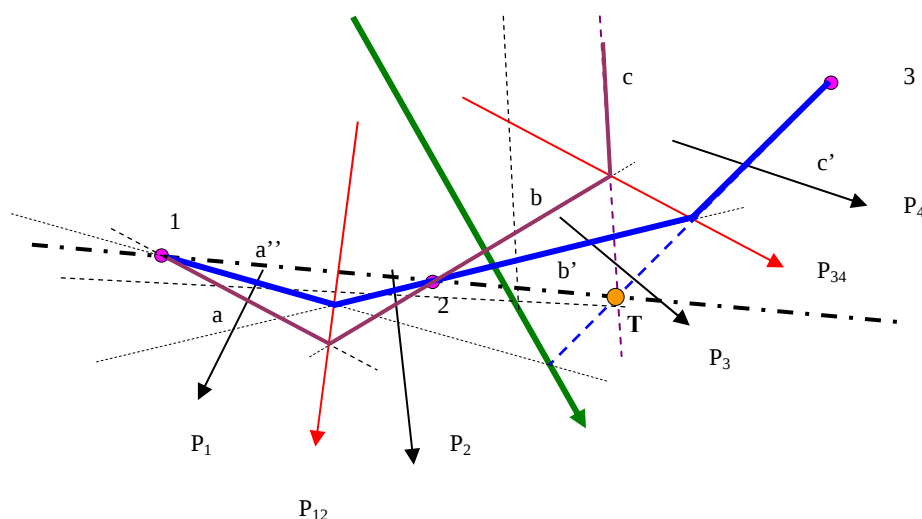
Σχήμα 5α. Ευθεία Culmann - Σχοινοπολύγωνα



Σχήμα 5β. Ευθεία Culmann -δυναμοπολύγωνα

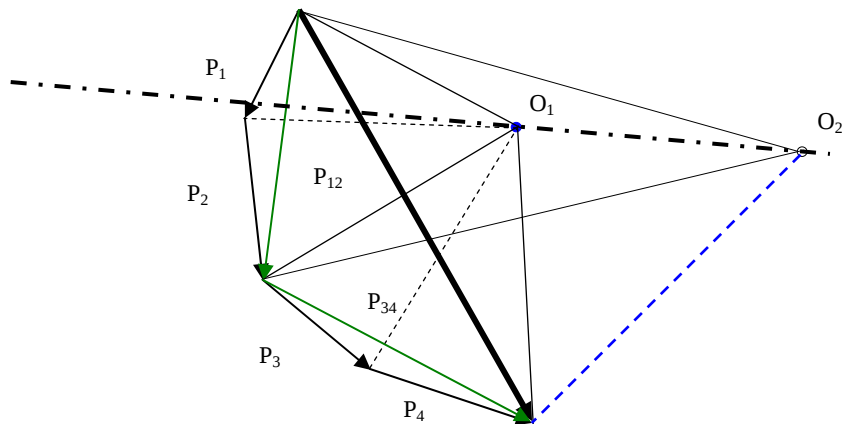
Σχοινοειδές πολύγωνο που διέρχεται από τρία σημεία

Δίδεται ένα σύστημα συνεπίπεδων δυνάμεων έστω P_1, P_2, P_3, P_4 . Ζητείται να χαραχθεί το σχοινοπολύγωνο που φορτίζεται από το σύστημα των δυνάμεων και διέρχεται από τρία δεδομένα σημεία. Αρχικά συνθέτουμε όλες τις δυνάμεις μεταξύ των σημείων 1, 2 και 2, 3 και τις αντικαθιστούμε με τις συνισταμένες τους P_{12} και P_{23} . Επιλέγουμε τυχαία τις ευθείες a και b ώστε να διέρχονται από τα σημεία 1 και 2 και να τέμνονται επί της συνισταμένης P_{12} . Χαράσσουμε παράλληλες των a και b στο σχήμα (β) και προσδιορίζουμε τον βοηθητικό πόλο O_1 . Με βάση αυτόν συμπληρώνουμε το σχοινοπολύγωνο χαράσσοντας την πλευρά c παράλληλα προς την αντίστοιχη πλευρά του δυναμοπολυγώνου. Η ευθεία 1,2 είναι η ευθεία Culmann επί της οποίας κείνται όλα τα σημεία τομής των αντίστοιχων πλευρών δύο σχοινοπολυγώνων. Κατά συνέπεια επεκτείνοντας την πλευρά c του σχοινοπολυγώνου αυτή τέμνει την ευθεία Culmann στο σημείο T . Από το ίδιο σημείο όμως θα πρέπει να διέρχεται και η πλευρά c' του τελικού σχοινοπολυγώνου. Ενώνοντας το σημείο T με το τρίτο σημείο 3 ορίζουμε την διεύθυνση της αντίστοιχης πλευράς του ζητούμενου σχοινοπολυγώνου.



Σχήμα 6α. Σχοινοειδές πολύγωνο που διέρχεται από τρία γνωστά σημεία

Αντίστοιχα αν από το σημείο O_1 του δυναμοπολυγώνου χαράξουμε μία παράλληλη προς την γραμμή Culmann και από το άκρο της P_{23} μία παράλληλη προς την ευθεία $T,3$ οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο O_2 που αποτελεί και τον ζητούμενο πόλο με βάση τον οποίο χαράσσουμε το τελικό σχοινοπολύγωνο a', b', c' για τις δυνάμεις P_{12} και P_{23} ή αναλυτικότερα για τις αρχικές δυνάμεις P_1, P_2, P_3, P_4 .



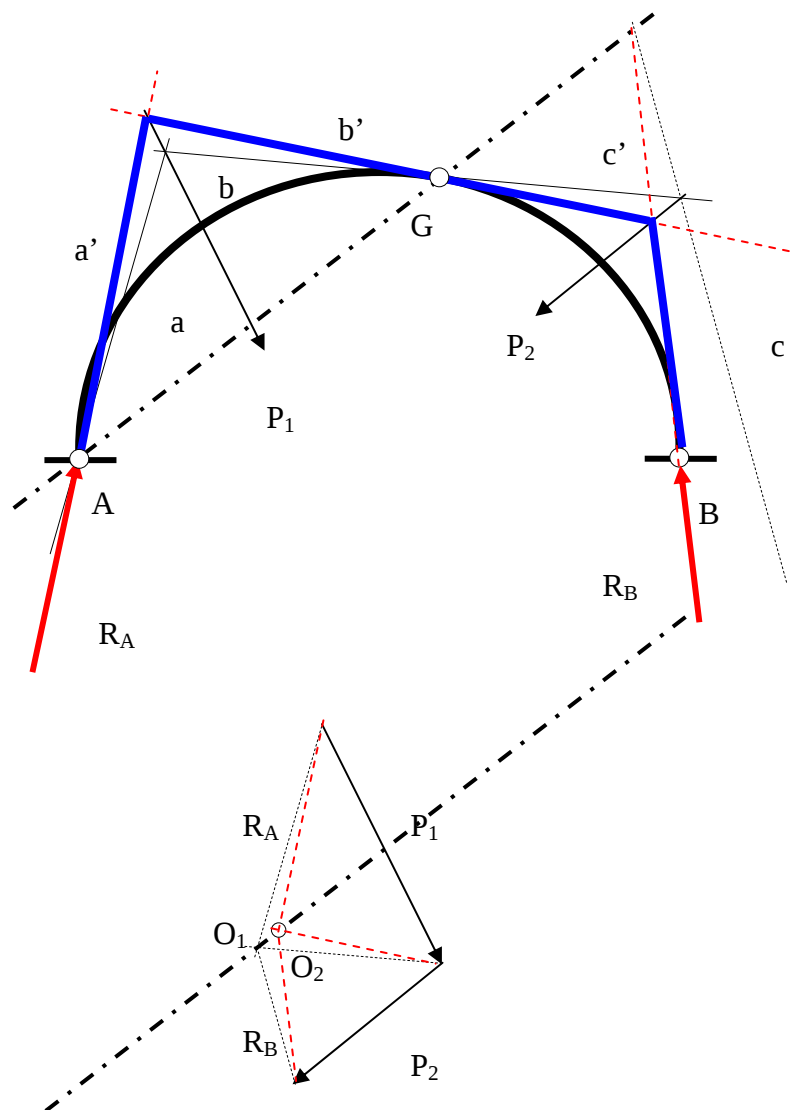
Σχήμα 6β. Δυναμοπολύγωνο

Τριαρθρωτό τόξο

Έστω τρεις αρθρώσεις σε ένα επίπεδο A, G, B και οι δυνάμεις P_1 και P_2 αντίστοιχα στις περιοχές AG και GB . Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι δυνάμεις αυτές μπορεί να είναι και οι συνισταμένες ενός αριθμού δυνάμεων στα αντίστοιχα τμήματα. Ζητείται η χάραξη του σχοινοπολυγώνου που διέρχεται από τα τρία σημεία.

Αρχικά χαράσσουμε το δυναμοτρίγωνο των δυνάμεων P_1 και P_2 . Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα τις δύο πρώτες πλευρές a, b ενός σχοινοπολυγώνου ώστε να διέρχονται από τα σημεία A και G . Στο σχήμα (β) φέρουμε παράλληλες προς τις a, b και ορίζουμε τον πόλο O_1 . Συμπληρώνουμε το δυναμοπολύγωνο χαράσσοντας και την τρίτη πλευρά παράλληλη της οποίας είναι η τρίτη πλευρά c του σχοινοπολυγώνου, η οποία και τέμνει την γραμμή Culmann A, G στο σημείο T .

Από το σημείο αυτό αναγκαστικά θα διέρχεται και η c' . Οπότε στο δυναμοτρίγωνο από το σημείο O_1 φέρουμε παράλληλη προς την A, G ευθεία Culmann από το τέλος της δυνάμεως P_2 στο δυναμοτρίγωνο παράλληλη προς την B, T ορίζοντας έτσι την τομή τους στο σημείο O_2 που αποτελεί τον πόλο του ζητούμενου δυναμοπολυγώνου και αντίστοιχα χαράσσοντας τις παράλληλες γραμμές του ζητούμενου σχοινοπολυγώνου που διέρχεται από τα τρία δεδομένα σημεία A, G, B . Οι διευθύνσεις a' και c' αντιστοιχούν στις διευθύνσεις των αντιδράσεων στα σημεία A και B . Το τριαρθρωτό τόξο που αντιστοιχεί στο σχοινοπολύγωνο a', b', c' καταπονείται μόνο αξονικά.



Σχήμα 7. Σχοινοειδής Φορέας Τριαρθρωτού Τόξου

Το ίδιο σχοινοπολύγωνο μπορεί να χαραχθεί και απλούστερα θεωρώντας την επαλληλία των δυνάμεων P_1 και P_2 ως εξής. Ας θεωρήσουμε ότι επενεργεί πρώτα η δύναμη P_1 , ενώ το τμήμα G, B παραμένει αφόρτιστο. Ως τέτοιο θα αντιδράσει με μία δύναμη κατά την διεύθυνση B,G. Βρίσκουμε το σημείο τομής της B, G και της δύναμης P_1 Από το οποίο αναγκαστικά θα πρέπει να διέρχεται η αντίδραση που ασκείται στο σημείο A. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για την δύναμη P_2 καθορίζοντας τις αντιδράσεις της και τέλος συνθέτουμε με τον κανόνα του παραλληλογράμμου τις επιμέρους αντιδράσεις ώστε να βρεθεί η αντίδραση στα σημεία A και B λόγω της ταυτόχρονης δράσης των δυνάμεων P_1 και P_2 . Η επέκταση των διευθύνσεων των αντιδράσεων μέχρι να τμήσουν τις P_1 και P_2 αντίστοιχα και η ένωση των σημείων αυτών ορίζουν το ζητούμενο σχοινοπολύγωνο που διέρχεται και από το σημείο G. Στην περίπτωση περισσοτέρων φορτίων σε κάθε τμήμα μεταξύ των σημείων A, G και G, B, η αναλυτικότερη χάραξη ορίζει το αντίστοιχο

σχοινοπολύγωνο το οποίο καλείται και γραμμή πιέσεων του τόξου καθόσον σε κάθε τμήμα του ορίζεται η αξονική δύναμη που καταπονεί το τόξο.

Είναι φανερό ότι κάθε άλλο τόξο μεταξύ των τριών αρθρώσεων εκτός από αξονική ένταση αναπτύσσει και καμπτική η οποία είναι ανάλογη της εκκεντρότητας της διατομής σε σχέση με το σχοινοπολύγωνο. Έτσι αν η διατομή βρίσκεται επάνω από το σχοινοπολύγωνο αναπτύσσει αρνητική ροπή που θλίβει τις κάτω ίνες (σχ. 2) ή αν βρίσκεται κάτω από το σχοινοπολύγωνο αναπτύσσει θετική ροπή.

Επίσης αν θεωρήσει κανείς το συμμετρικό σχήμα του σχοινοπολυγώνου περί την ευθεία A, B καθώς και τις συμμετρικές διευθύνσεις των δυνάμεων διατηρώντας όμως την φορά των δυνάμεων προκύπτει το ίδιο πρόβλημα με εναλλαγή του προσήμου των αναπτυσσόμενων δυνάμεων, δηλ. αντί για θλίψη των μελών προκύπτει εφελκυσμός.



Σχήμα 8. Τριαρθρωτό Τόξο ως σχοινοειδής φορέας για τα αναρτημένα φορτία
σχεδιασμένο από τον Gustav Eiffel με την μορφή ανεστραμμένης αλυσοειδούς
καμπύλης

Η σιδηροδρομική γέφυρα «Μαρία Πία» στο Πόρτο της Πορτογαλίας (Σχήμα 9) κτίστηκε το 1877 από τον Gustav Eiffel. Ο κύριος φορέας είναι ένα αμφιαρθρωτό τόξο ανοίγματος 160 m που αποτελούσε το μεγαλύτερο άνοιγμα τοξωτής γέφυρας την εποχή εκείνη με ύψος 60 m.

Οι γέφυρα αυτή όπως και αυτή του Σχήματος 10 δεν ανταποκρίνονται στις αυξημένες απαιτήσεις των σύγχρονων κανονισμών και έχουν αντικατασταθεί από άλλες σύγχρονες.



Σχήμα 9. Σιδηροδρομική γέφυρα «Μαρία Πία» στο Πόρτο της Πορτογαλίας



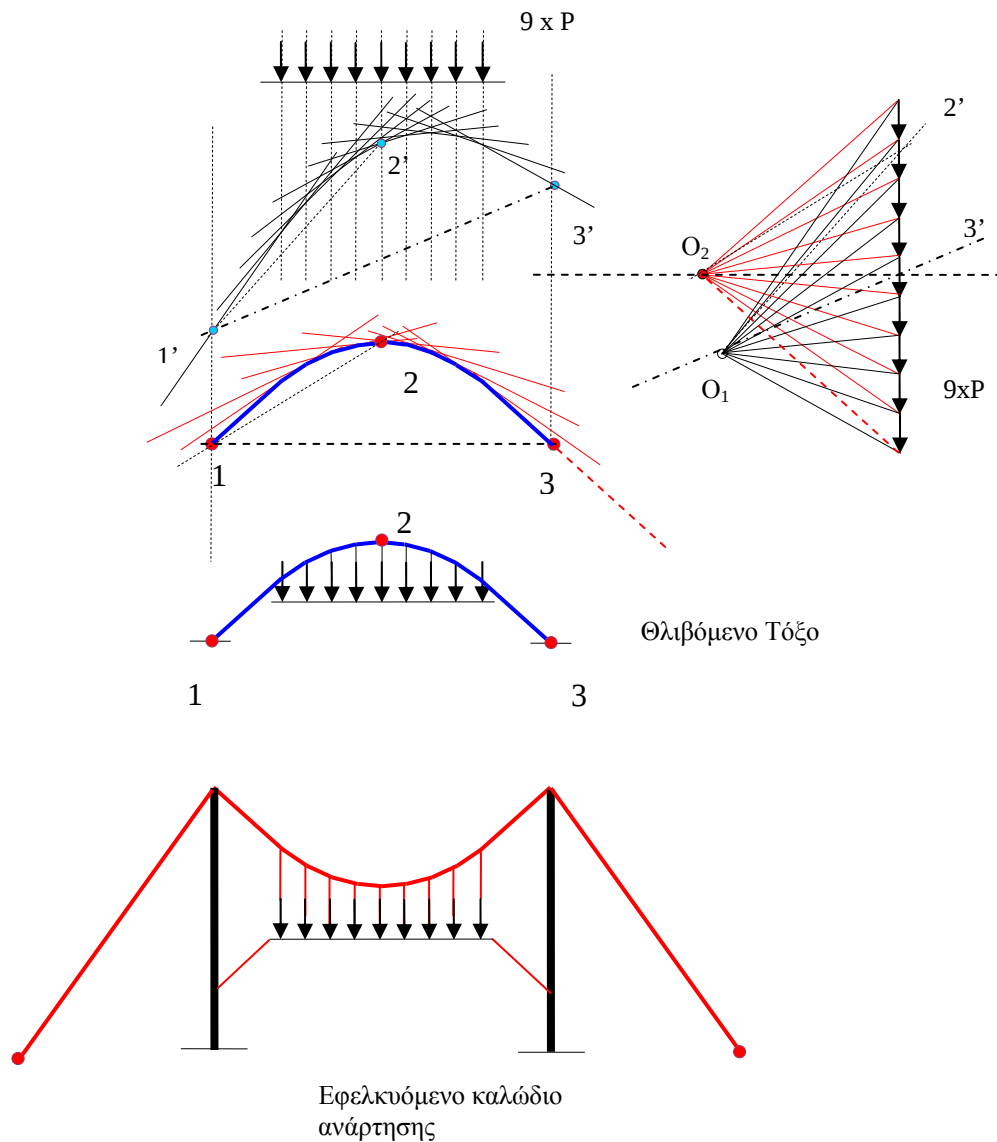
Σχήμα 10. Μεταλλική Σιδηροδρομική Γέφυρα με σύστημα αντώσεως

Κατακόρυφα Συγκεντρωμένα Φορτία

Στην περίπτωση κατακορύφων φορτίων ισχύουν τα ίδια με αυτά που αναφέρθηκαν για την γενική συνεπίπεδη φόρτιση. Στην περίπτωση αυτή απλώς τα σχήματα απλουστεύονται σημαντικά. Αν για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε τον σχοινοειδή φορέα που διέρχεται από τρία σημεία και μεταφέρει ένα πλήθος από κατακόρυφα φορτία μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

Χαράσσουμε το δυναμοπολύγωνο των κατακορύφων δυνάμεων. Στη συνέχεια με αυθαίρετα επιλεγμένο πόλο το σημείο O_1 σχηματίζουμε τη δέσμη των ευθειών που ενώνουν το πόλο με τα άκρα των δυνάμεων του δυναμοπολυγώνου.

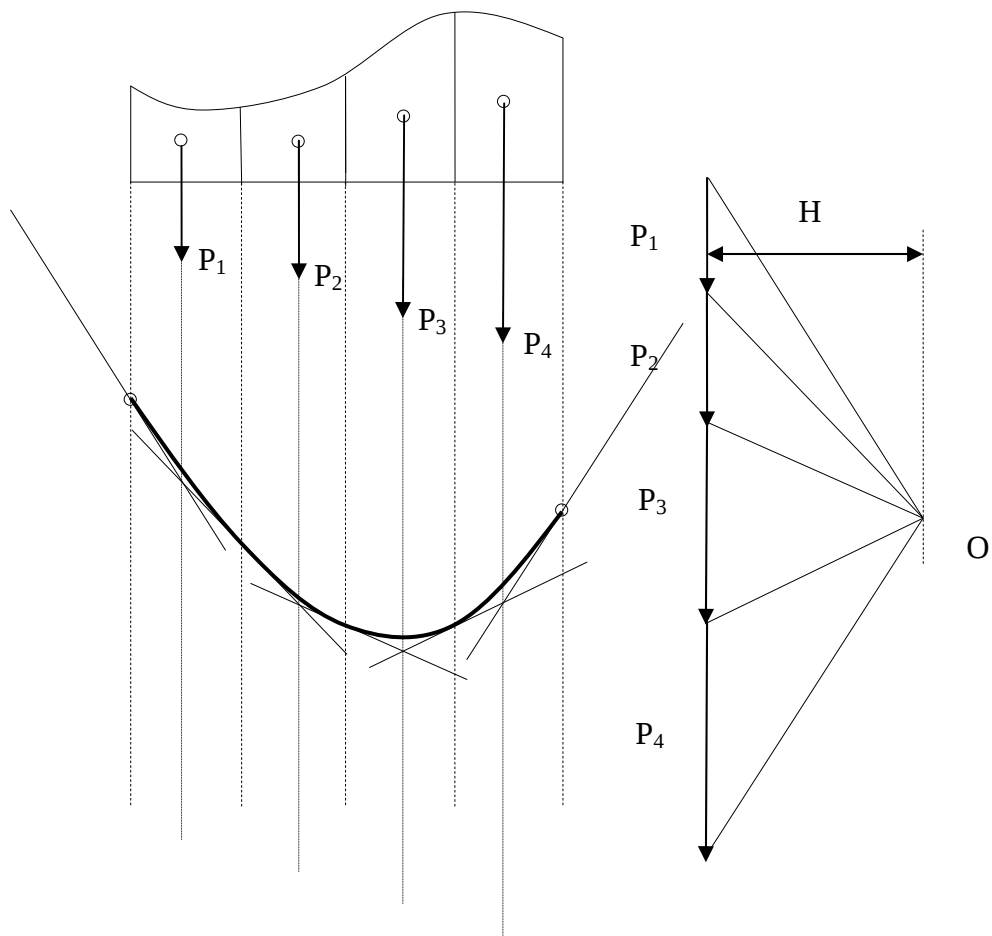
Οι παράλληλες ευθείες της δέσμης διαγράφουν το αντίστοιχο σχοινοπολύγωνο ξεκινώντας από το σημείο $1'$. Η κλείουσα ευθεία $1',3'$ και η ευθεία $1',2'$ έχουν τις αντίστοιχες τους στο δυναμοπολύγωνο που ορίζουν τα σημεία $3'$ και $2'$. Από τα σημεία αυτά του δυναμοπολυγώνου θα πρέπει να διέρχονται αντίστοιχα και η $1,3$ καθώς $1,2$ του τόξου και άρα χαράσσοντας τις παράλληλες προς αυτές από τα σημεία $3'$ και $2'$ του δυναμοπολυγώνου ορίζεται ο πόλος O_2 χρησιμοποιώντας τον οποίο χαράσσουμε το ζητούμενο σχοινοπολύγωνο που διέρχεται από τρία δεδομένα σημεία $1,2,3$.



Σχήμα 11. Χάραξη σχοινοειδούς φορέα για την ανάληψη κατακορύφων φορτίων

Καταναμεμημένα Φορτία

Εκτός από τα συγκεντρωμένα φορτία ενδέχεται να υπάρχουν και καταναμεμημένα φορτία σταθερής ή και μεταβλητής έντασης. Ενδιαφέρει να βρεθεί το σχήμα ενός αβαρούς και απαραμόρφωτου σχοινιού όταν επιβάλλεται σε αυτό ένα καταναμεμημένο φορτίο.

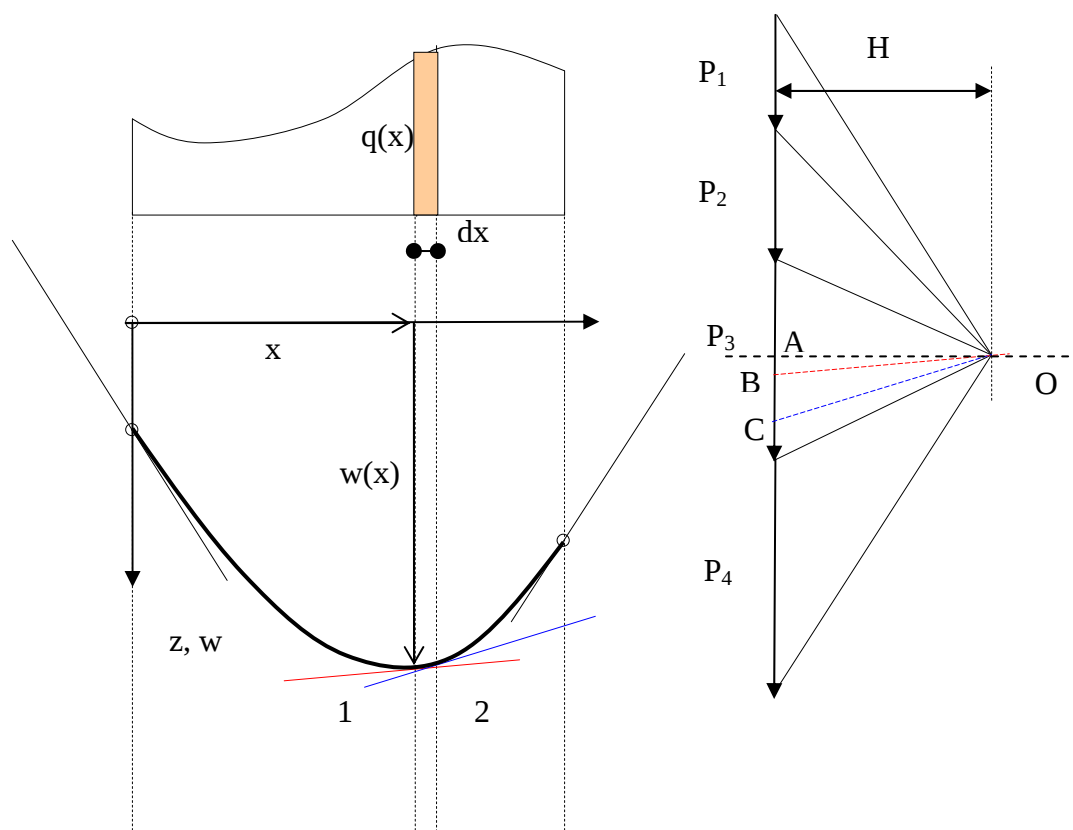


Σχήμα 12. Σχοινοειδής Καμπύλη

Διαιρώντας το φορτίο σε περισσότερα τμήματα και πυκνώνοντας έτσι το σχοινοπολύγωνο θα προκύψει η σχοινοειδής καμπύλη που αντιστοιχεί στο καταναμεμημένο φορτίο και εφάπτεται στις ευθείες του σχοινοπολυγώνου που είναι παράλληλες προς τις ευθείες της δέσμης των ακτίνων του αντίστοιχου δυναμοπολυγώνου. Οι ακτίνες του δυναμοπολυγώνου αντιστοιχούν, υπό την κλίμακα των δυνάμεων, στις τάσεις στα άκρα της σχοινοειδούς καμπύλης. Η απόσταση H στο δυναμοπολύγωνο αντιστοιχεί στην οριζόντια αντίδραση στα άκρα του σχοινοειδή φορέα, ισούται δε με την οριζόντια προβολή κάθε τάσεως σε οποιαδήποτε θέση του. Επίσης οι εφαπτόμενες σε δύο σημεία της σχοινοειδούς καμπύλης ορίζουν στο δυναμοπολύγωνο το τμήμα του συνολικού φορτίου που φέρεται μεταξύ των δύο αυτών σημείων. Οι παράλληλες ακτίνες του δυναμοπολυγώνου ορίζουν, υπό την κλίμακα των δυνάμεων, τις τάσεις στα άκρα που αναρτούν το τμήμα αυτό της σχοινοειδούς καμπύλης.

Εξίσωση Σχοινοειδούς Καμπύλης

Σύμφωνα με τα παραπάνω αν σε απόσταση x από την αρχή των αξόνων αποκόψουμε ένα στοιχειώδες τμήμα dx της σχοινοειδούς καμπύλης και ισχύουν τα εξής:



Σχήμα 13. Σχοινοειδής καμπύλη

Το συνολικό φορτίο $q(x)dx$ αντιστοιχεί στο τμήμα B-C του δυναμοπολυγώνου. Οι δε ακτίνες OB και OC υπό την κλίμακα των δυνάμεων που χαράχθηκε το δυναμοπολύγωνο αντιστοιχούν στις αντιδράσεις που αναπτύσσονται στα άκρα του στοιχειώδους τμήματος dx και το συγκρατούν στην ισορροπία. Οι κλίσεις της σχοινοειδούς καμπύλης στις θέσεις B και C αντίστοιχα είναι:

$$\frac{dw}{dx}, \quad \text{και} \quad \frac{dw}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) dx \quad (1)$$

Αυτές όμως αντιστοιχούν στην τιμή της αντίστοιχης εφαπτόμενης των γωνιών στις θέσεις B και C. Αυτές από τα αντίστοιχα τρίγωνα OAB και OAC για το δυναμοπολύγωνο με απόσταση πόλου H είναι:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{AB}{H}, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} \right) dx = \frac{AC}{H} \quad (2)$$

Αφαιρώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε:

$$\frac{d^2w}{dx^2} dx = \frac{BC}{OA} = \frac{q(x)dx}{H} \quad (3)$$

Από όπου προκύπτει η διαφορική εξίσωση μιας οικογένειας σχοινοειδών καμπυλών με παράμετρο την πολική απόσταση H , δηλ. την οριζόντια αντίδραση στα άκρα του σχοινοιού.

$$H \frac{d^2w}{dx^2} = q(x) \quad \text{ή} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{q(x)}{H} \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) είναι μία δευτεροβάθμια γραμμική διαφορική εξίσωση που χρειάζεται δύο συνοριακές συνθήκες για την επίλυσή της δηλ. τις τιμές της βύθισης στα δύο άκρα του σχοινοιού. Η παράμετρος H που εκφράζει την οριζόντια αντίδραση στα άκρα αλλά και την οριζόντια συνιστώσα της τάσης του σχοινοιού σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο ορίζει μια ολόκληρη οικογένεια από σχοινοειδείς καμπύλες που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

Η γενική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει από διπλή ολοκλήρωση είναι:

$$w(x) = \iint \frac{q(x)}{H} dx dx + C_1 x + C_2 \quad (5)$$

Όπου οι τιμές των σταθερών C_1 και C_2 καθορίζονται με βάση τις συνοριακές συνθήκες στα σημεία $x=0$ και $x=L$, όπου L το μήκος προβολής της σχοινοειδούς καμπύλης στον άξονα x .

Εξισώσεις άλλων Δομικών Στοιχείων - Σύγκριση

Η εξίσωση (4) είναι η πρώτη από μία σειρά εξισώσεων που περιγράφουν την συμπεριφορά των δομικών στοιχείων.

α) Η παραπάνω δευτεροβάθμια διαφορική εξίσωση έχει ως αντίστοιχη που περιγράφει την συμπεριφορά διδιάστατης μεμβράνης με την μορφή εξίσωσης Laplace:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{q(x,y)}{T} \quad (6)$$

όπου $u(x,y)$ η βύθιση της μεμβράνης, $q(x,y)$ το επιφανειακό φορτίο και T η εφελκυστική δύναμη.

β) Η εξίσωση που περιγράφει την συμπεριφορά της δοκού σύμφωνα με την τεχνική θεωρία κάμψης η οποία βασίζεται στις παραδοχές Euler-Bernoulli είναι:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \quad (7)$$

όπου E το μέτρο ελαστικότητας και I η ροπή αδρανείας της διατομής της δοκού. Η παραπάνω τεταρτοβάθμια εξίσωση της δοκού είναι η αμέσως επόμενη εξίσωση που περιγράφει την ελαστική γραμμή καμπτόμενης δοκού με δυσκαμψία EI.

Η παραπάνω εξίσωση συνδυάζεται με την σχέση ροπών-καμπυλοτήτων της δοκού για την οποία ισχύει:

$$M(x) = EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \quad (8)$$

Η εξίσωση (8) είναι ίδια με την εξίσωση του σχοινιού και ταυτίζει τη γενική έκφραση της ελαστικής γραμμής δοκού στην οποία εφαρμόζεται η ανηγμένη φόρτιση $\frac{M(x)}{EI} (m^{-1})$ είναι ίδια με αυτή ενός σχοινιού με φόρτιση $\frac{q(x)}{H} (m^{-1})$.

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (8) δύο φορές ως προς x, και αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7) λαμβάνουμε:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = q(x) \quad (9)$$

που εκφράζει ότι η ελαστική γραμμή του σχοινιού υπό φορτίο q(x) με οριζόντια δύναμη H=1 συμπίπτει με το διάγραμμα ροπών M(x) δοκού που καταπονείται με το ίδιο φορτίο. Τις παραπάνω σχέσεις αξιοποίησε ο Mohr για να διατυπώσει γραφική μέθοδο χάραξης της ελαστικής γραμμής μιας δοκού ως το διάγραμμα ροπών της ίδιας δοκού που φορτίζεται με φορτίο $M(x)/EI$.

Τέλος αντίστοιχη μορφή εξισώσεων τετάρτης τάξεως έχουμε για την κάμψη διδιάστατων πλακών, ενώ επίσης ως προς την βύθιση διατυπώνεται μία εξίσωση ογδόης τάξεως για κυλινδρικά κελύφη σύμφωνα με τις παραδοχές του Donnell.

Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q ανά μονάδα μήκους του ανοίγματος

Για ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q ανά μονάδα μήκους του ανοίγματος η γενική λύση δίνεται από την σχέση:

$$w(x) = \frac{qx^2}{2H} + C_1x + C_2 \quad (10)$$

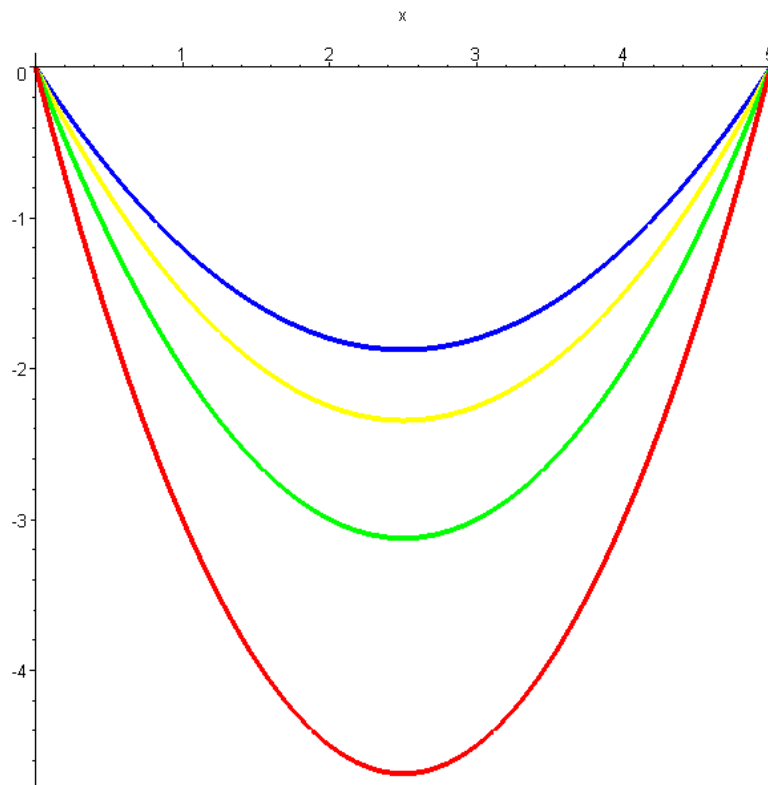
Εφαρμόζοντας συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες π.χ. $w(0) = w(L) = 0$ και επιλύοντας ως προς C_1 και C_2 , προκύπτουν:

$$w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \text{ και } w(L) = 0 \Rightarrow \frac{qL^2}{2H} + C_1L = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{qL}{2H} \quad (11)$$

Άρα η γενική λύση για σχοινί με άκρα στην ίδια στάθμη δίνεται από τη σχέση:

$$w(x) = \frac{q}{2H}x^2 - \frac{qL}{2H}x \quad (12)$$

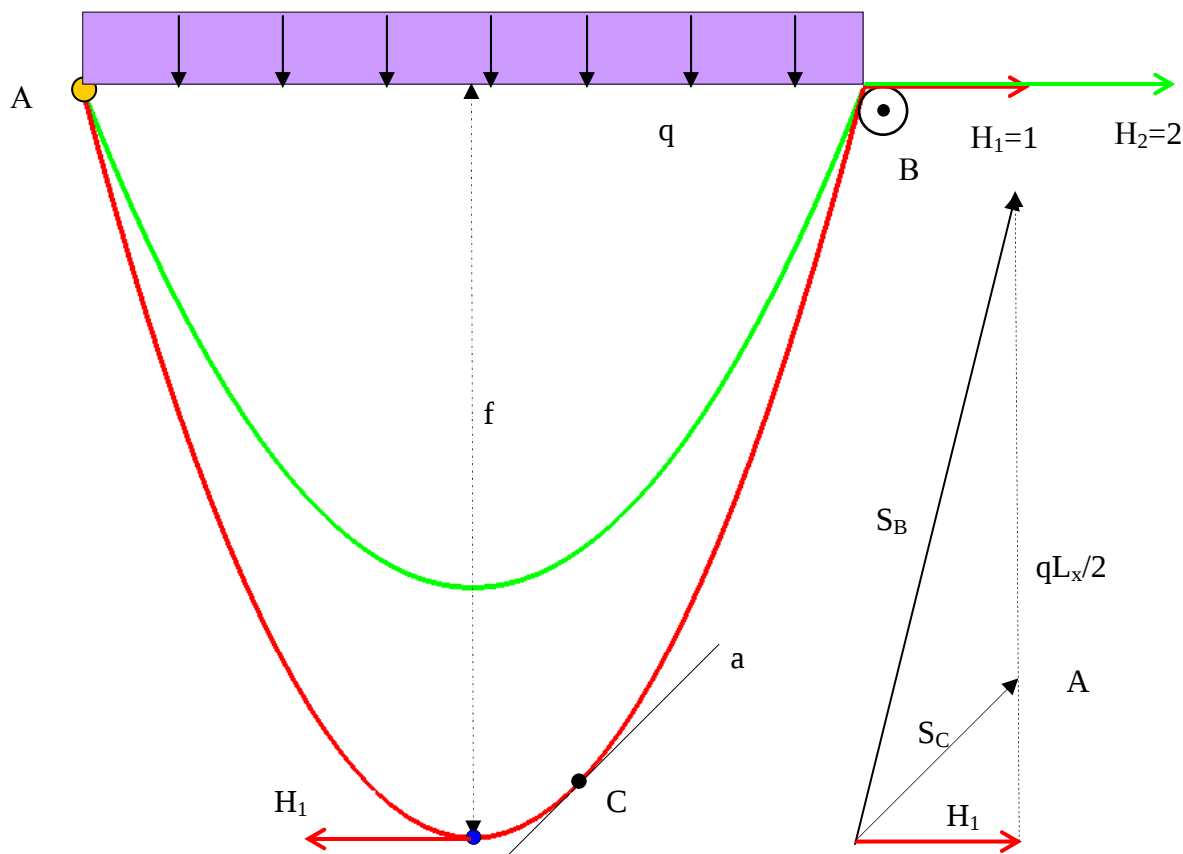
Για $q=3\text{kN/m}$ και $L=5\text{m}$ και $w=0$ στο $x=0$ και L για τιμές του $H=1,2,3,4$ λαμβάνουμε τις παρακάτω παραβολές, όπου η μεγαλύτερη τιμή του H αντιστοιχεί στο μικρότερο μήκος σχοινοειδούς καμπύλης.



Σχήμα 14. Σχοινοειδείς Καμπύλες για διάφορες τιμές της Οριζόντιας Δύναμης H

Τούτο σημαίνει ότι αν ένα δεδομένο ομοιόμορφο φορτίο q ανά μονάδα μήκους οριζοντίου άξονα εφαρμοστεί σε σχοινί, το αριστερό άκρο του οποίου αρθρώνουμε σε σταθερό σημείο, ενώ σε απόσταση L στην ίδια στάθμη τοποθετήσουμε μία τροχαλία

στο δεξί άκρο θεωρούμενη χωρίς τριβές και ασκήσουμε την οριζόντια δύναμη H , θα παρατηρήσουμε ότι τραβώντας το σχοινί θα φτάσουμε σε μία κατάσταση κατά την οποία δεν θα μπορούμε να μαζέψουμε άλλο σχοινί και θα έχει αποκατασταθεί ισορροπία. Είναι φανερό ότι αν ασκήσουμε μεγαλύτερη οριζόντια δύναμη θα μαζέψουμε περισσότερο σχοινί μέχρι την ισορροπία όπως φαίνεται στο Σχήμα 16.



Σχήμα 15. Ισορροπία σχοινιού για διάφορες οριζόντιες ελκτικές δυνάμεις

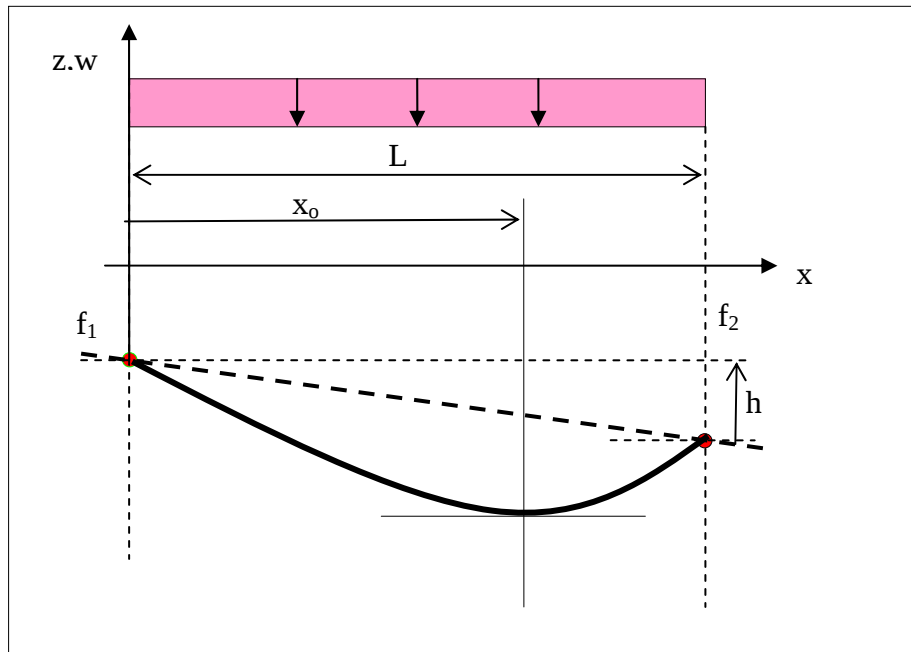
Όπως αναφέρθηκε η οριζόντια δύναμη H είναι ίδια σε οποιοδήποτε σημείο της σχοινοειδούς καμπύλης έτσι στο σημείο C με βάση το δυναμοτρίγωνο υπολογίζεται η τάση της ράβδου S_C στην διεύθυνση της εφαπτόμενης στο ίδιο σημείο. Αντίστοιχα στο άκρο B η τάση S_B είναι σημαντικά μεγαλύτερη. Οι μεγαλύτερες τάσεις είναι προς τα άκρα ενώ η ελάχιστη είναι ίση με H στο μέσον εκεί που η εφαπτόμενη είναι οριζόντια. Εξετάζοντας την ισορροπία της δεξιά ημίσεως σχοινοειδούς καμπύλης αυτή ισορροπεί υπό την επενέργεια της οριζόντιας δύναμης H της τάσης S_B και το μισό κατανεμημένο φορτίο $\frac{qL}{2}$ όπως ζυγίζονται στο δυναμοτρίγωνο του σχήματος.

Έτσι ισχύει:

$$S_B = \sqrt{H^2 + \left(\frac{qL}{2}\right)^2} \quad (13)$$

Στην γενική περίπτωση οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται αν αρχή των αξόνων ληφθεί στο σημείο με οριζόντια εφαπτόμενη (προτείνεται ως άσκηση).

Με αρχή των αξόνων το ένα άκρο στην γενική περίπτωση ισχύει:



Σχήμα 16. Γενική διάταξη σχοινοειδούς καμπύλης

Η γενική λύση δίδεται από την σχέση:

$$w(x) = \frac{qx^2}{2H} + C_1x + C_2 \quad (14)$$

Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} w(0) &= f_1 = C_2 \\ w(L) &= f_2 = \frac{q}{2H}L^2 + C_1L + C_2 = \frac{q}{2H}L^2 + C_1L + f_1 \end{aligned} \quad (15)$$

Από όπου προκύπτει:

$$\begin{aligned} f_2 - f_1 - \frac{qL^2}{2H} &= C_1L \\ C_1 &= \frac{f_2 - f_1}{L} - \frac{qL}{2H} = \frac{h}{L} - \frac{qL}{2H} \end{aligned} \quad (16)$$

όπου $h = f_2 - f_1$, οπότε η γενική έκφραση γίνεται:

$$w(x) = \frac{qx^2}{2H} + \left(\frac{h}{L} - \frac{qL}{2H} \right) x + f_1 \quad (17)$$

Το σημείο μηδενικής εφαπτόμενης προκύπτει από τον μηδενισμό της πρώτης παραγώγου της βύθισης $w(x)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{qx}{H} + \left(\frac{h}{L} - \frac{qL}{2H} \right) = 0 \\ x_0 &= \left(\frac{L}{2} - \frac{Hh}{qL} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι για $h < 0$ δηλ. για σημείο Β χαμηλότερα ως προς το σημείο Α, το σημείο μηδενισμού της εφαπτόμενης βρίσκεται δεξιότερα του μέσου.

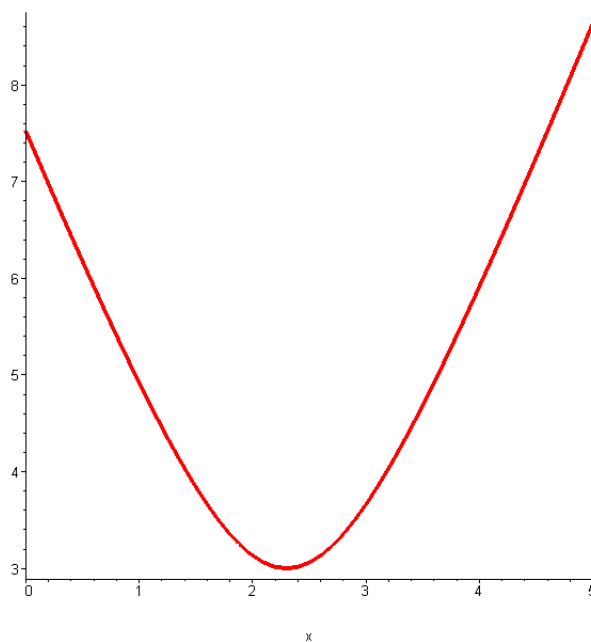
Εφόσον σε κάθε θέση x η τάση $S(x)$ ασκείται κατά την εφαπτόμενη ισχύει:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{H}{\cos \varphi} \\ \varphi &= \arctan \left(\frac{qx}{H} + \frac{h}{L} - \frac{qL}{2H} \right), \quad \cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H} + \frac{h}{L} - \frac{qL}{2H} \right)^2}} \end{aligned} \quad (19)$$

Από όπου προκύπτει η γενική σχέση που εκφράζει την τάση σε κάθε θέση ως:

$$S(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{qx}{H} + \frac{h}{L} - \frac{qL}{2H} \right)^2} \quad (20)$$

Η γραφική της παράσταση της τάσης σε όλο το άνοιγμα για $q=3\text{kN/m}$, $L=5$ $f_1=1.5$, $f_2=2.2$ δίνεται στο παρακάτω Σχήμα 18.



Σχήμα 17. Τάση ως συνάρτηση της απόστασης x

Από όπου προκύπτει ότι οι μέγιστες τιμές της τάσεως εμφανίζονται στα άκρα, ενώ η ελάχιστη στο κατώτερο σημείο.

Αλυσοειδής Καμπύλη

Ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο q ανά μονάδα μήκους του σχοινιού

Το κατανεμημένο κατακόρυφο φορτίο ανά μέτρο οριζοντίου άξονα προβαλλόμενο στο κεκλιμένο σχοινί υπό γωνία φ δίνει ισοδύναμο φορτίο με ένταση:

$$q'(x) = q(x) \cos \varphi = g \quad (21)$$

Κατά συνέπεια για να είναι το κατανεμημένο φορτίο επί του κεκλιμένου άξονα του σχοινιού σταθερό το κατανεμημένο φορτίο επί οριζοντίου άξονα θα πρέπει να είναι μεταβλητό και να έχει τιμή:

$$q(x) = \frac{g}{\cos \varphi} \quad (22)$$

Έκφραση ανάλογη με αυτή της τάσης $S(x)$ στη σχέση (19) στη οποία η γωνία φ εκφράζεται από την σχέση

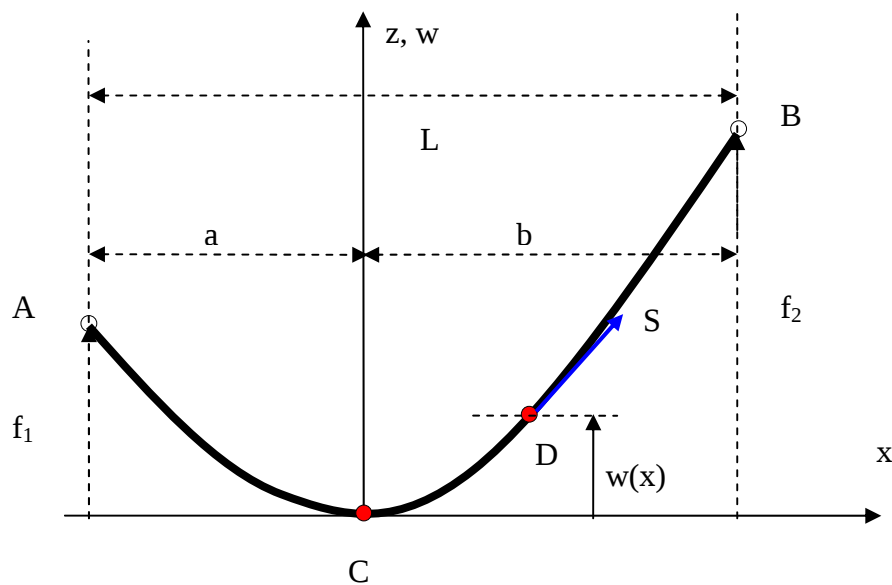
$$\varphi = \arctan \left(\frac{dw(x)}{dx} \right) \quad (23)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση (22) για το καταναμεμένο φορτίο ανά μονάδα μήκους οριζοντίου άξονα, η γενική λύση της σχοινοειδούς καμπύλης δίνεται από τη έκφραση:

$$w(x) = \frac{H}{g} \left(\cosh \left(\frac{g}{H} x + C_1 \right) \right) + C_2 \quad (24)$$

Η καμπύλη αυτή είναι γνωστή ως αλυσοειδής (catenary) καθόσον αποτελεί το σχήμα που λαμβάνει βαριά αλυσίδα που δεν παραμορφώνεται. Οι σταθερές C_1 και C_2 μετακινούν την καμπύλη ως προς το σύστημα αξόνων. Η σταθερά C_2 την ανεβοκατεβάζει πάνω-κάτω, ενώ η σταθερά C_1 αριστερά - δεξιά. Επιλέγοντας για σταθερές τις $C_1 = 0$ και $C_2 = -1$ η αρχή των αξόνων τοποθετείται στο κατώτερο σημείο της καμπύλης, η δε αντίστοιχη έκφραση της αλυσοειδούς καμπύλης απλοποιούμενη γίνεται:

$$\frac{g}{H} w(x) = \cosh \left(\frac{g}{H} x \right) - 1 \quad (25)$$



Σχήμα 18. Αλυσοειδής Καμπύλη

$$ds = \sqrt{dx^2 + dw^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2} dx \quad (26)$$

Αντίστοιχα η τιμή της τάσης σε κάθε θέση της αλυσοειδούς καμπύλης εκφράζεται ως:

$$S(x) = H \cosh\left(\frac{gx}{H}\right) \quad (27)$$

$$S(x) = H + g w(x) \quad (28)$$

Τα βέλη στα άκρα εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$f_1 = \frac{H}{g} \left(\cosh\left(\frac{ga}{H}\right) - 1 \right) \quad f_2 = \frac{H}{g} \left(\cosh\left(\frac{gb}{H}\right) - 1 \right) \quad (29)$$

Επιλύοντας αντίστροφα ως προς τις αποστάσεις a και b λαμβάνουμε:

$$a = \frac{H}{g} \cosh^{-1}\left(\frac{gf_1}{H} + 1\right) \quad b = \frac{H}{g} \cosh^{-1}\left(\frac{gf_2}{H} + 1\right) \quad (30)$$

Και επειδή $a+b=L$ ισχύει:

$$\frac{gL}{H} = \cosh^{-1}\left(\frac{gf_1}{H} + 1\right) + \cosh^{-1}\left(\frac{gf_2}{H} + 1\right) \quad (31)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε με δεδομένα τα βέλη f_1, f_2 και φορτίο g να επιλυθεί ως προς την οριζόντια συνιστώσα της αντίδρασης H , με βάση την τιμή της οποίας υπολογίζονται και οι υπόλοιπες εκφράσεις των παραμέτρων της αλυσοειδούς καμπύλης, κάτι που προγραμματίζεται εύκολα σε οποιαδήποτε γλώσσα προγραμματισμού.

Σύγκριση παραβολής και αλυσοειδούς καμπύλης

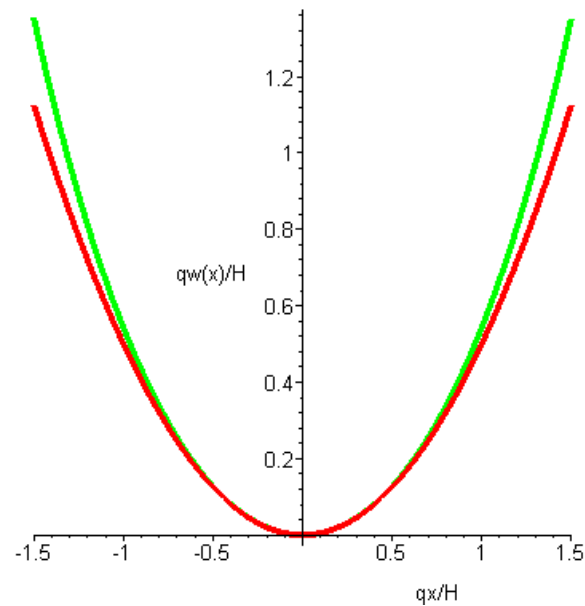
Για την σύγκριση των δύο διαφορετικών καμπυλών που αντιστοιχούν σε ομοιόμορφο φορτίο ανά μέτρο μήκους του οριζόντιου άξονα ή επί της καμπύλης. Για την αδιαστατοποίηση των καμπυλών χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις:

$$\frac{qw(x)}{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{qx}{H} \right)^2 \Rightarrow \tilde{w}(\tilde{x}) = \frac{1}{2} (\tilde{x})^2 \quad (32)$$

Για την αλυσοειδή καμπύλη αντίστοιχη αδιαστατοποίηση οδηγεί στην παρακάτω έκφραση:

$$\frac{qw(x)}{H} = \cosh\left(\frac{qx}{H}\right) - 1 \quad \text{ή} \quad \tilde{w}(\tilde{x}) = \cosh(\tilde{x}) - 1 \quad (33)$$

Στο Σχήμα 15 παρουσιάζονται οι δύο καμπύλες, όπου επάνω είναι η αλυσοειδής και κάτω η παραβολή.

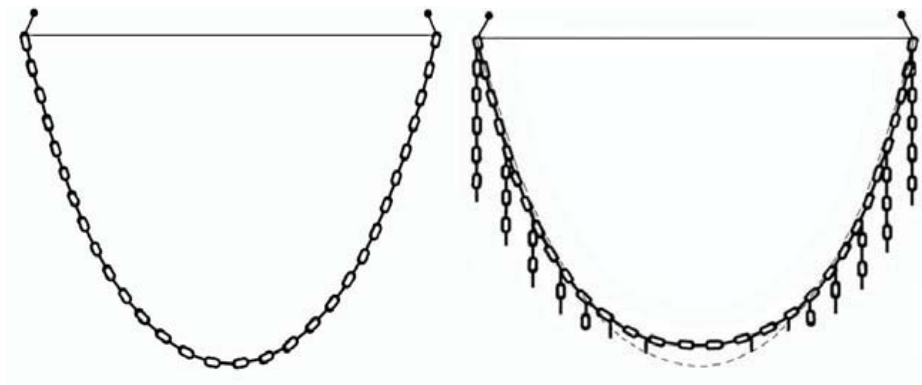


Σχήμα 19. Σύγκριση αλυσοειδούς και παραβολής

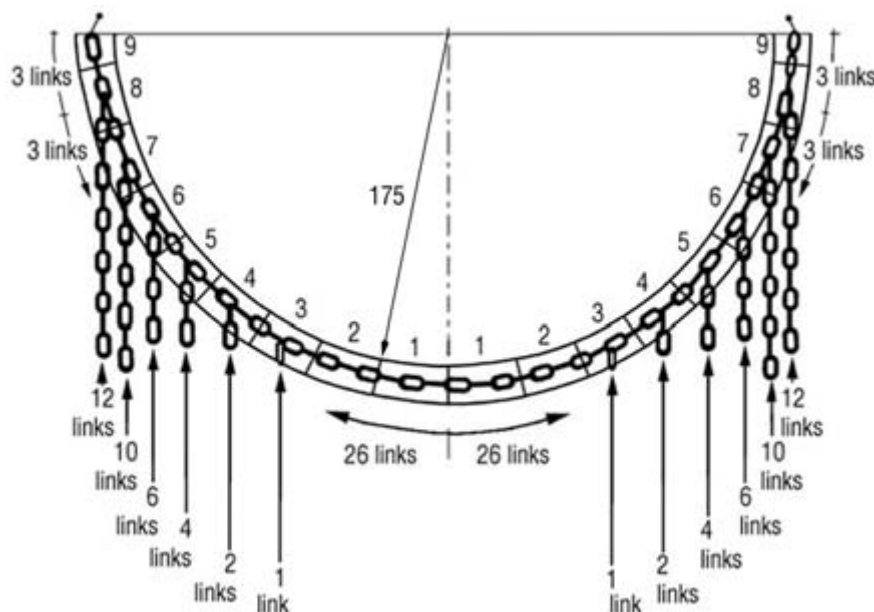
Για τιμές $\frac{qx}{H} < 1$ παρατηρείται μικρή απόκλιση μεταξύ αλυσοειδούς και αντίστοιχης παραβολής, ενώ για μεγαλύτερες τιμές η απόκλιση μεγεθύνεται.

Αλυσοειδείς Καμπύλες με διάφορα βάρη

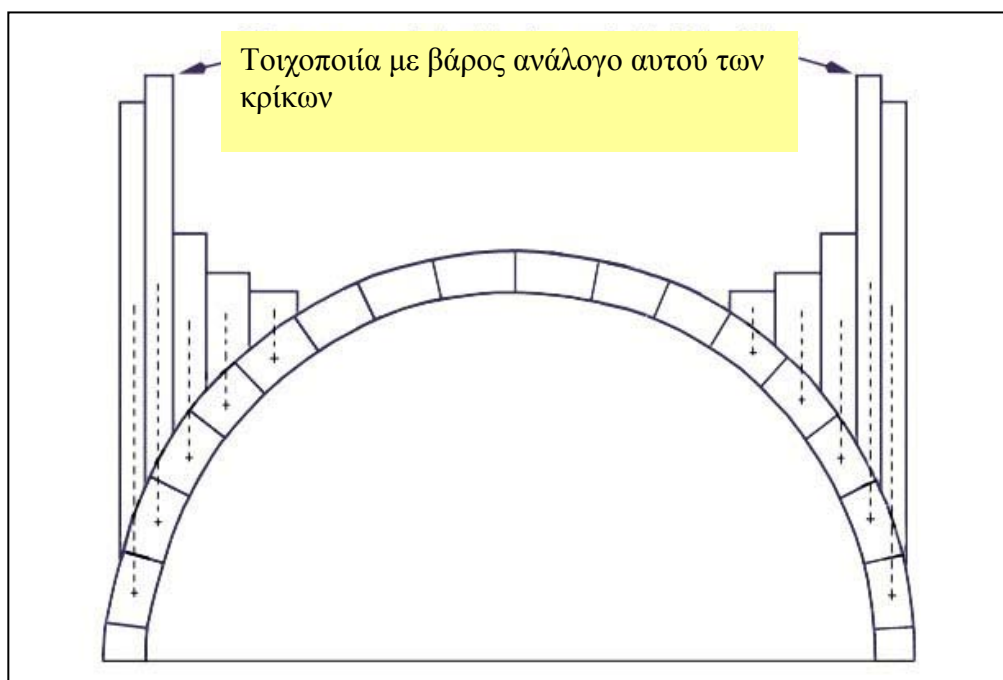
Στα παρακάτω σχήματα φαίνεται η μορφή της αλυσοειδούς καμπύλης που σχηματίζει αλυσίδα υπό το ίδιο βάρος κάθε κρίκου της (Σχ. 20α) και ένα περισσότερο κυκλικό σχήμα για την ίδια αλυσίδα με πρόσθετα φορτία στις περιοχές των άκρων.



Σχήμα 20. Αλυσοειδείς καμπύλες



Σχήμα 21. Σχεδόν Κυκλική Αλυσοειδής Καμπύλη με πρόσθετα βάρη ανάλογα του πλήθους των κρίκων



Σχήμα 22. Κυκλικός Θλιβόμενος Θόλος με πρόσθετα βάρη στα άκρα ανάλογα με τα βάρη των κρίκων του σχήματος 21.

Βιβλιογραφία

1. S. P. Timoshenko, D. H. Young, "Theory of Structures", 2nd Edition, McGraw-Hill Inc., 1965.
2. S. P. Timoshenko, "History of Strength of Materials", McGraw-Hill Inc., 1953.
3. J. P. Den Hartog, "Mechanics", McGraw-Hill Inc., 1948.