

## ΘΕΜΑ 1

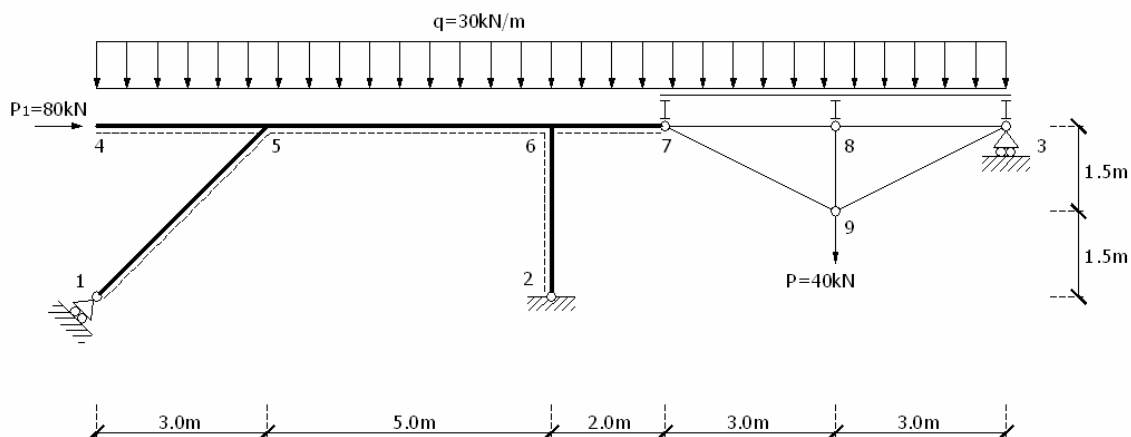
**ΔΕΔΟΜΕΝΑ:**

Στο φορέα του σχήματος ζητούνται:

α) να χαραχθούν τα διαγράμματα  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  (3.5 μονάδες)

β) η κατακόρυφη βύθιση του κόμβου 7 λόγω της φόρτισης και μιας ομοιόμορφης μείωσης της θερμοκρασίας της κατασκευής κατά  $\Delta T = 20^\circ C$  (1.5 μονάδα)

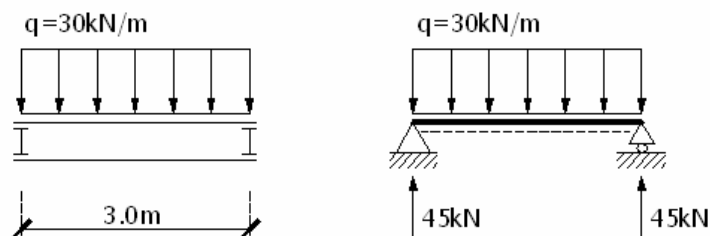
Δίνονται:  $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ ,  $I = 80000 \text{ cm}^4$ ,  $\alpha_T = 10^{-5} / ^\circ C$

**ΕΠΙΛΥΣΗ:**

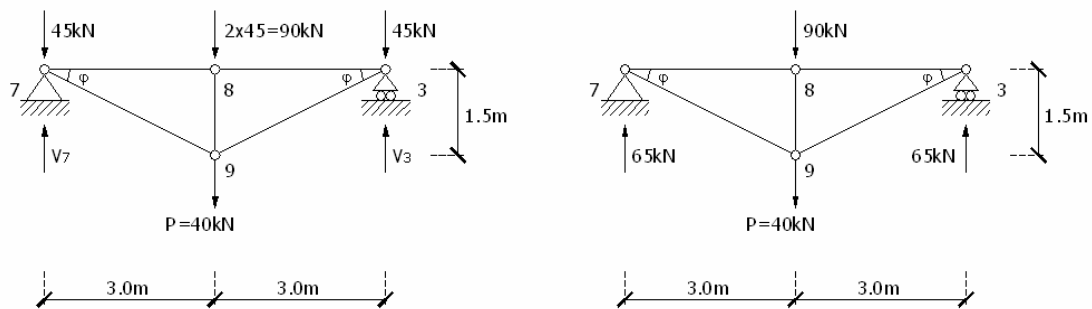
$$E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2, I = 80000 \text{ cm}^4 = 0.8 \times 10^{-3} \text{ m}^4, EI = 160000 \text{ kNm}^2$$

Ισοστατικό δικτύωμα στηριζόμενο στον υπόλοιπο ισοστατικό φορέα.

Τα δικτύωματα είναι φορείς που απαρτίζονται από ευθύγραμμες αρθρωτές ράβδους και φορτίζονται μόνο στους κόμβους τους, με συνέπεια οι ράβδοι τους να αναπτύσσουν μόνο αξονική ένταση. Ο τρόπος αυτός της φορτίσεως του δικτύωματος εξασφαλίζεται μέσω κατάλληλης διάταξης δοκίδων που στηρίζονται στους κόμβους του δικτύωματος και την οποιαδήποτε φόρτιση που δέχονται τη μεταφέρουν σε συγκεντρωμένα φορτία στους κόμβους. Ακόμα και αν υπάρχει ομοιόμορφη φόρτιση, αυτή μεταφέρεται σημειακά στους κόμβους μέσω των μηκίδων (έμμεση φόρτιση).



Άρα:

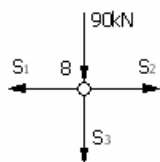


$$\tan \phi = \frac{1.5}{3.0} \Rightarrow \phi = 26.565^\circ$$

$$\sum M_7 = 0 \Rightarrow V_3 \cdot 6 - 130 \cdot 3 - 45 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \boxed{V_3 = 110kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_7 - 45 - 130 - 45 + 110 = 0 \Rightarrow \boxed{V_7 = 110kN}$$

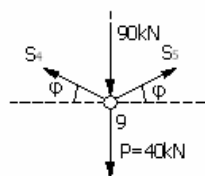
Κόμβος #8:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_1 = S_2$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{S_3 = -90kN}$$

Κόμβος #9:

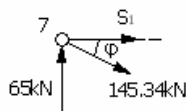


$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_4 = S_5$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow 2 \cdot S_4 \sin \phi = 130 \Rightarrow \boxed{S_4 = 145.34kN}$$

$$\boxed{S_4 = S_5 = 145.34kN} \text{ (εφελκυστική)}$$

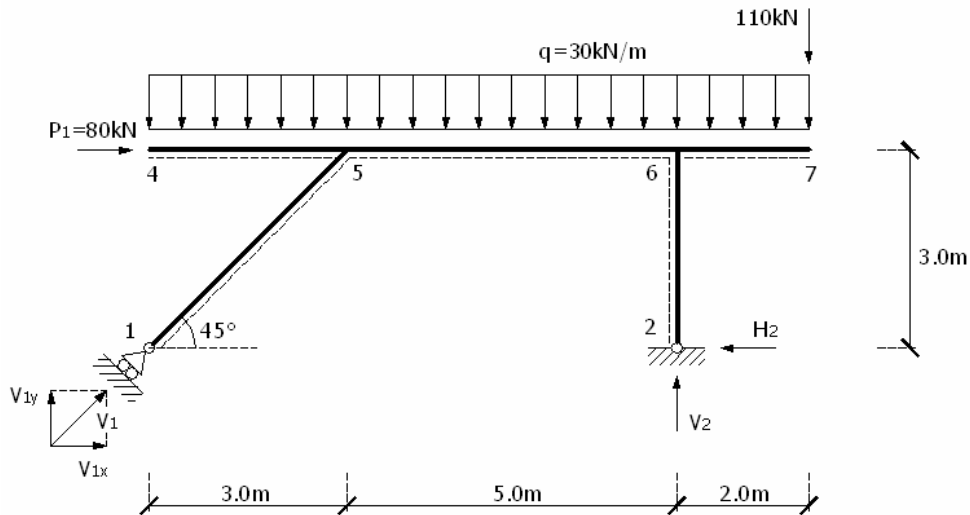
Κόμβος #7 (αντίστοιχα #8):



$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_1 + 145.34 \cos \phi = 0 \Rightarrow \boxed{S_1 \cong 130kN}$$

$$\boxed{S_1 = S_2 = 130kN} \text{ (εφελκυστική)}$$

Έλεγχος:  $\sum F_y = 0 \rightarrow 145.34 \sin \phi = 64.9979kN \cong 65kN$  ισχύει



Εξισώσεις ισορροπίας:

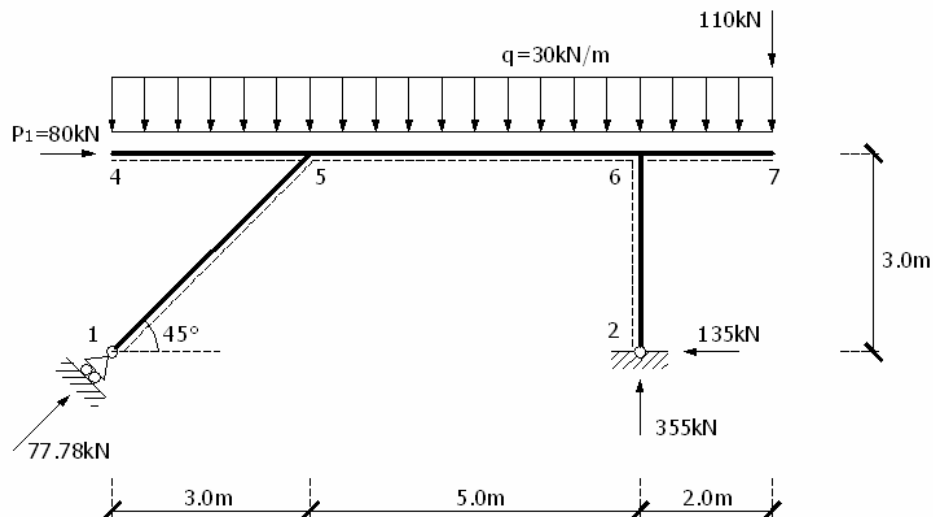
$$\sum F_x = 0 \rightarrow 80 + V_1 \cos 45^\circ - H_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 \sin 45^\circ + V_2 - 30 \cdot 10 - 110 = 0 \Rightarrow V_1 \sin 45^\circ + V_2 = 410 \quad (2)$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow V_2 \cdot 8 - 80 \cdot 3 - 30 \cdot 10 \cdot 5 - 110 \cdot 10 = 0 \Rightarrow V_2 = 355 \text{ kN} \quad (3)$$

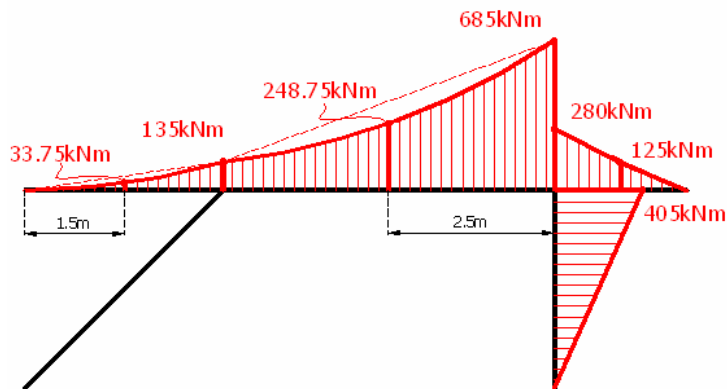
Από (2) και (3) προκύπτει:  $V_1 = 77.78 \text{ kN}$  (4)

Από (1) και (4) προκύπτει:  $H_2 = 135 \text{ kN}$



Έλεγχος:  $\sum M_2 = 0 \rightarrow 80 \cdot 3 + 77.78 \cos 45^\circ \cdot 8 + 110 \cdot 2 - 30 \cdot 10 \cdot 3 = -0.0098764 \cong 0$  ισχύει

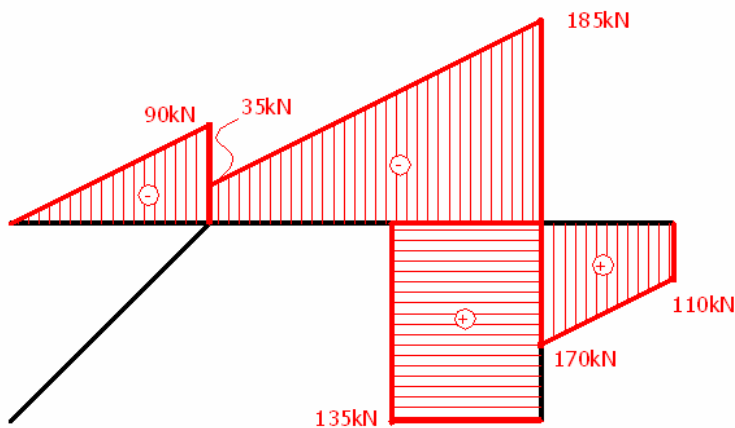
**Διάγραμμα Ροπών Κάμψης [M]**



$$\frac{ql_{45}^2}{8} = 33.75, \quad \frac{ql_{56}^2}{8} = 93.75,$$

$$\frac{ql_{67}^2}{8} = 15.00$$

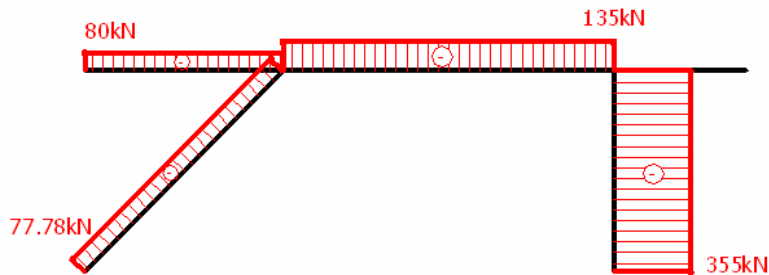
**Διάγραμμα Τεμνουσών Δυνάμεων [Q]**



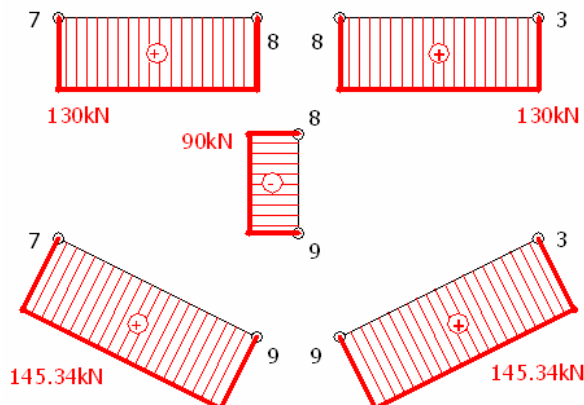
Κόμβος #5:  
 $90 - 35 = 55 = 77.78 \sin 45^\circ$

Κόμβος #6:  
 $185 + 170 = 355 \text{ kN} = V_2$

**Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων [N]**



Καμπτόμενα Μέλη



Μέλη Δικτύωματος

Η Αρχή των Δυνατών Έργων (Α.Δ.Ε.) συνδέει τις αλληλοϊσορροπούμενες δυνάμεις της δυνατής φορτίσεως τις αντίστοιχες προς αυτές παραμορφώσεις που οφείλονται στην πραγματική φόρτιση και τις εντατικές καταστάσεις της δυνατής και της πραγματικής φόρτισης.

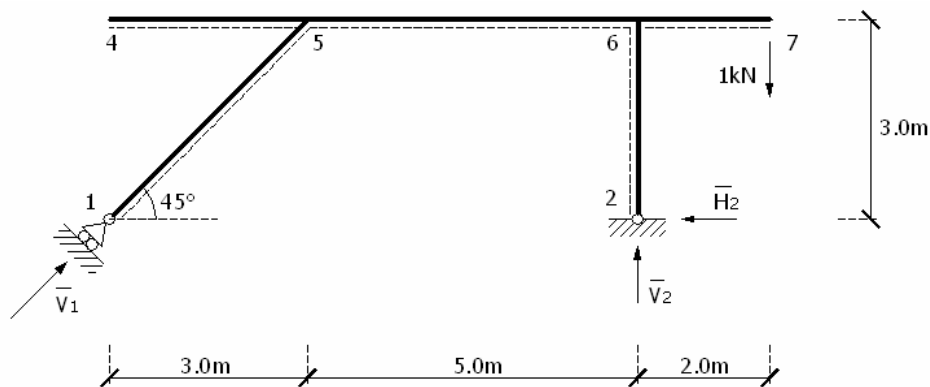
### Θερμοκρασιακή Επιρροή:

- (α) ομοιόμορφη μεταβολή θερμοκρασίας ως προς την  $T_0$  όλων των ινών του στοιχείου  
 (β) διαφορά θερμοκρασίας  $\Delta T$  μεταξύ δύο ακραίων ινών, τέτοια που να διατηρεί στον κεντροβαρικό άξονα τη θερμοκρασία  $T_0$

Η περίπτωση (α) επιφέρει μία άτονη επιμήκυνση ή βράχυνση του στοιχείου.

Η περίπτωση (β) επιφέρει μία άτονη κάμψη του στοιχείου με ουδέτερο (μη εκτεινόμενο) άξονα την κεντροβαρική ίνα.

$$1 \cdot \delta_7 + \sum \bar{R}_i \cdot \Delta_i = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx + \int \bar{M} a_T \frac{\Delta T}{h} dx + \int \bar{N} a_T \delta T dx + \sum_{i=1} \bar{S}_i \frac{S_i}{E_i A_i} l_i + \sum_{i=1} \bar{S}_i a_T dT dx$$



Οι όροι  $\sum_{i=1} \bar{S}_i \frac{S_i}{E_i A_i} l_i$  και  $\sum_{i=1} \bar{S}_i a_T dT dx$  μηδενίζονται λόγω του γεγονότος ότι η μοναδιαία φόρτιση αναφέρεται στον ολόσωμο φορέα. Το δικτύωμα δεν επηρεάζεται καθόλου, απλά στηρίζεται μέσω του κόμβου #7 στον ολόσωμο φορέα. Επίσης, μηδενίζεται και ο όρος  $\int \bar{M} a_T \frac{\Delta T}{h} dx$ , αφού έχουμε μόνο ομοιόμορφη μεταβολή της θερμοκρασίας.

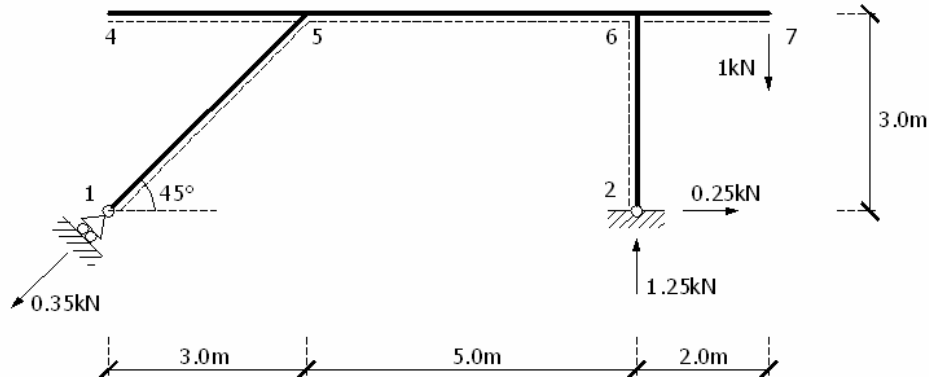
Εξισώσεις ισορροπίας:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \bar{V}_1 \cos 45^\circ - \bar{H}_2 = 0$$

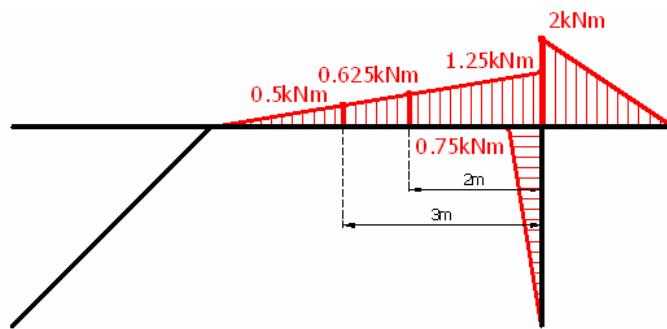
$$\sum F_y = 0 \rightarrow \bar{V}_1 \sin 45^\circ + \bar{V}_2 - 1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow \bar{V}_2 \cdot 8 - 1 \cdot 10 = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{V}_2 = 1.25 \text{ kN}}$$

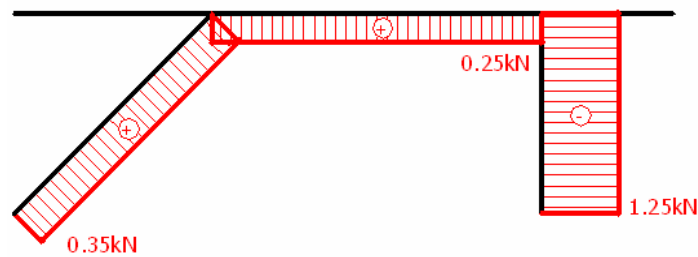
Άρα:  $\boxed{\bar{V}_1 = -0.35 \text{ kN}}$  και  $\boxed{\bar{H}_2 = -0.25 \text{ kN}}$



**Διάγραμμα Ροπών Κάμψης [  $\bar{M}$  ]**



**Διάγραμμα Αξονικών Δυνάμεων [  $\bar{N}$  ]**



Έχουμε:  $1 \cdot \delta_7 + \sum \bar{R}_i \cdot \Delta_i = 0 = \int \bar{M} \frac{M}{EI} dx + \int \bar{N} a_T \delta T dx$ , όπου

$$\int \bar{M} \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-1.25) \cdot [2 \cdot (-248.75) - 685] + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2) \cdot [2 \cdot (-125) - 280] + 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-405) \cdot 0.75 \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \cdot [1231.77083 + 353.3333 - 151.8750] = \frac{1433.22913}{160000} = 8.95768 \times 10^{-3}$$

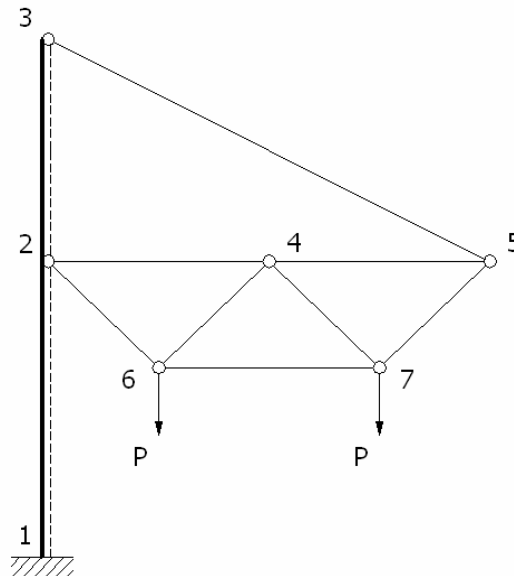
$$\int \bar{N} a_T \delta T dx = 10^{-5} \cdot 20 \cdot [3\sqrt{2} \cdot 0.35 + 5 \cdot 0.25 + 3 \cdot (-1.25)] = -2.030151519 \times 10^{-4}$$

Συνεπώς έχουμε:  $1 \cdot \delta_7 = 8.95768 \times 10^{-3} - 2.030151519 \times 10^{-4} \Rightarrow \delta_7 = 8.075 \text{ mm} \cong 0.81 \text{ cm}$

## ΘΕΜΑ 2

### ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

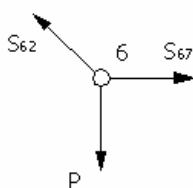
Στο φορέα του σχήματος ζητείται η ποιοτική χάραξη των διαγραμμάτων M, Q, N χωρίς απολύτως κανένα υπολογισμό (2.5 μονάδες)



### ΕΠΙΛΥΣΗ:

Οι ράβδοι (46) και (47) δεν εντείνονται καθόλου. Στον κόμβο #4 υπάρχουν μόνο οι αξονικές των ράβδων (24) και (45). Πρόκειται για ένα δικτύωμα που φορτίζεται συμμετρικά στους κόμβους #6 και #7 με φορτίο P.

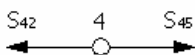
#### Κόμβος #6:



$$S_{62} > 0 \text{ και } S_{67} > 0$$

(ισχύει:  $S_{62} = S_{75}$  από κόμβο #7)

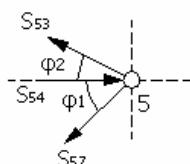
#### Κόμβος #4:



$$S_{42} = S_{45}$$

Οι ράβδοι (26), (57) και (67) εφελκύνονται, ενώ οι (46) και (47) είναι άτονοι.

#### Κόμβος #5:



$S_{35} > 0$ , άρα η ράβδος εφελκύεται

$$S_{45} = S_{57} \cos \phi_1 + S_{35} \cos \phi_2 < 0$$

$$S_{35} \sin \phi_2 = S_{57} \sin \phi_1$$



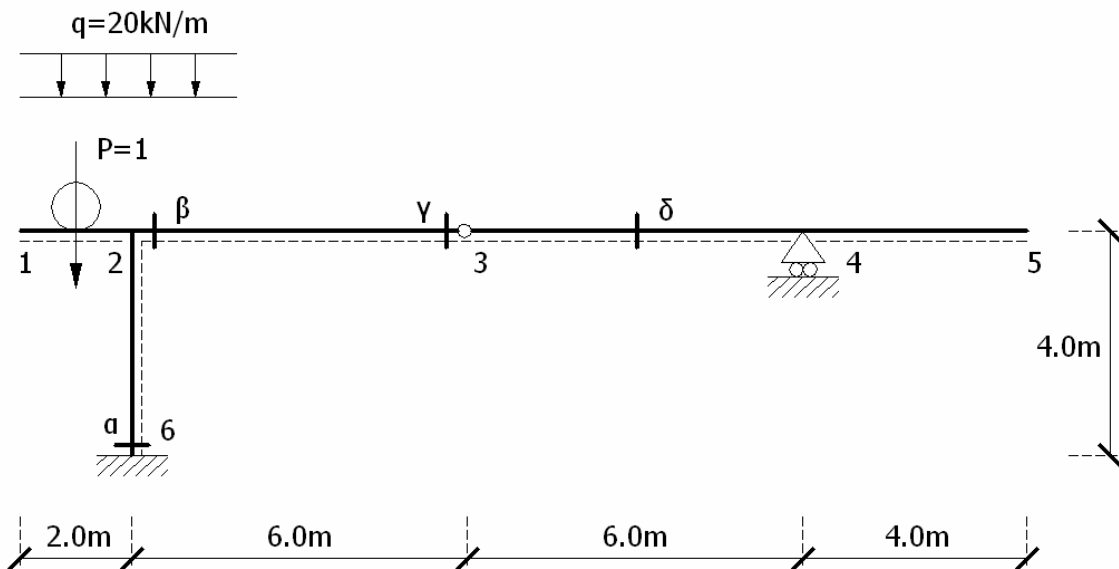


## ΘΕΜΑ 3

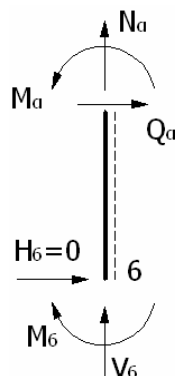
**ΔΕΔΟΜΕΝΑ:**

Στο φορέα του σχήματος και για κίνηση του μοναδιαίου φορτίου από 1 έως 5 ζητείται η χάραξη των γραμμών επιρροής:

- 1) της ροπής κάμψεως  $M_\alpha$  στην πάκτωση 6
- 2) της ροπής κάμψεως  $M_\beta$  στον κόμβο 2 δεξιά
- 3) της τέμνουσας δύναμης  $Q_\gamma$  στην άρθρωση 3
- 4) της ροπής κάμψεως  $M_\delta$  στο μέσο m του τμήματος (34)
- 5) να υπολογιστούν οι ακραίες τιμές της ροπής κάμψεως  $M_\beta$  στον κόμβο 2 δεξιά για ένα κινητό φορτίο  $q = 20 \text{ kN/m}$  δυνάμενο να εκτείνεται χωρίς περιορισμό από 1 έως 5

**ΕΠΙΛΥΣΗ:**

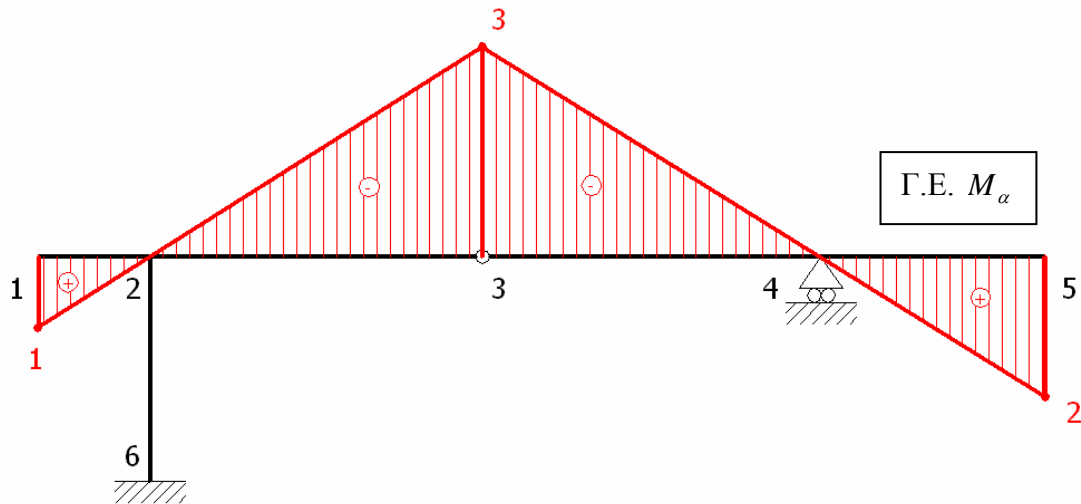
Γραμμή επιρροής του μεγέθους  $E$  είναι το διάγραμμα εκείνο που αναφέρεται στην προδιαγεγραμμένη διαδρομή του φορτίου και του οποίου η τεταγμένη σε κάθε σημείο ισούται με την τιμή του  $E$  που αναπτύσσει στη συγκεκριμένη διατομή ο φορέας, όταν το φορτίο  $P = 1$  έλθει στο σημείο αυτό.

**Γραμμή****Επιρροής  $M_\alpha$** 

$$Q_\alpha + H_6 = 0 \rightarrow Q_\alpha = 0$$

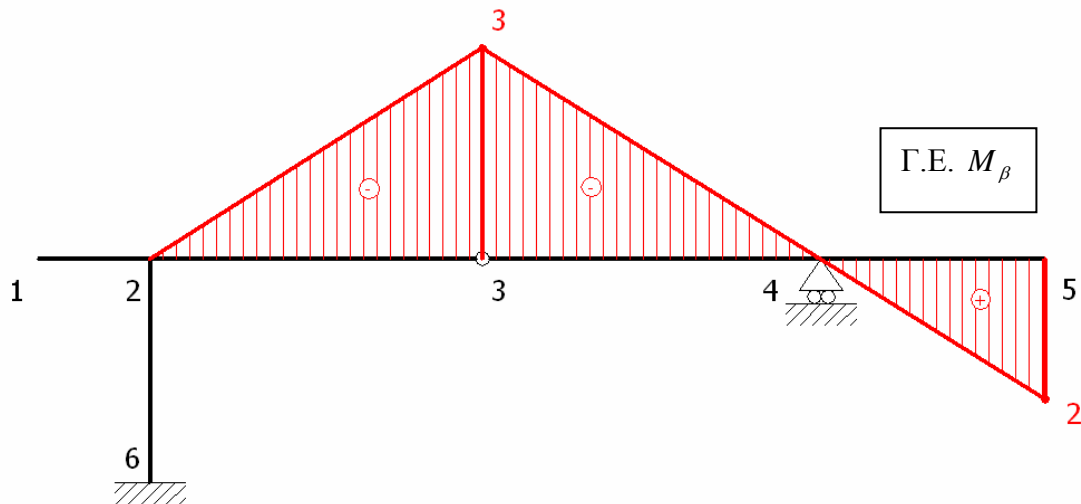
$$V_6 + N_\alpha = 0 \rightarrow N_\alpha = (-1) \cdot V_6$$

$$M_\alpha - M_6 = 0 \rightarrow M_\alpha = M_6$$

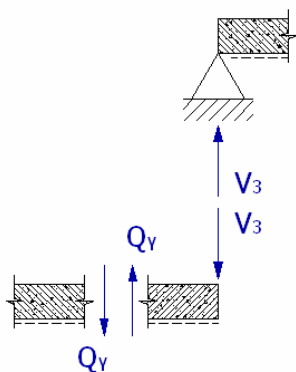


**Γραμμή Επιρροής  $M_\beta$**

Η ροπή  $M_\beta$  είναι μηδενική στο τμήμα (12), διότι όσο το φορτίο κινείται σε αυτό το τμήμα η ροπή λίγο πριν τον κόμβο 2 είναι ίση κατ' απόλυτη τιμή με τη ροπή στην πάκτωση 6 και συνεπώς από την εξίσωση ισορροπίας έχουμε:  $M_\beta = M_6 - 1 \cdot x_{21}$  και  $M_6 = 1 \cdot x_{21}$ . Άρα  $M_\beta = 0$  στο (12).

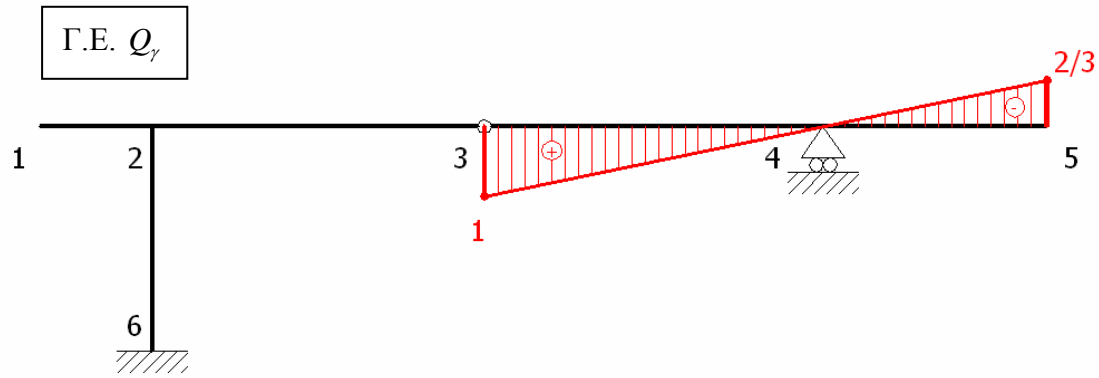


**Γραμμή Επιρροής  $Q_\gamma$**



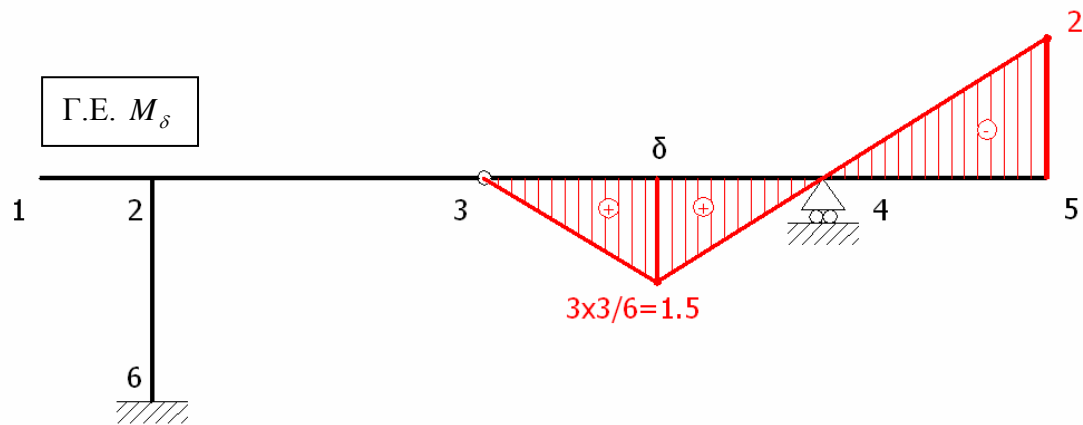
$V_6 = +1$  αριστερά της διατομής  $\gamma$ , άρα  $Q_\gamma^{\text{αριστ}} = V_6 - 1 = 0$

$Q_\gamma = V_3$

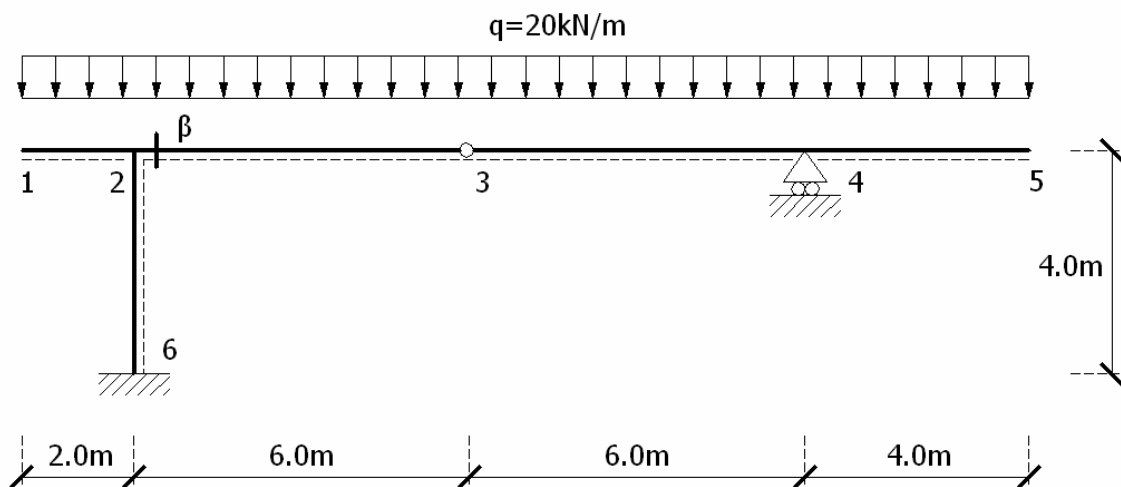


**Γραμμή Επιρροής  $M_\delta$**

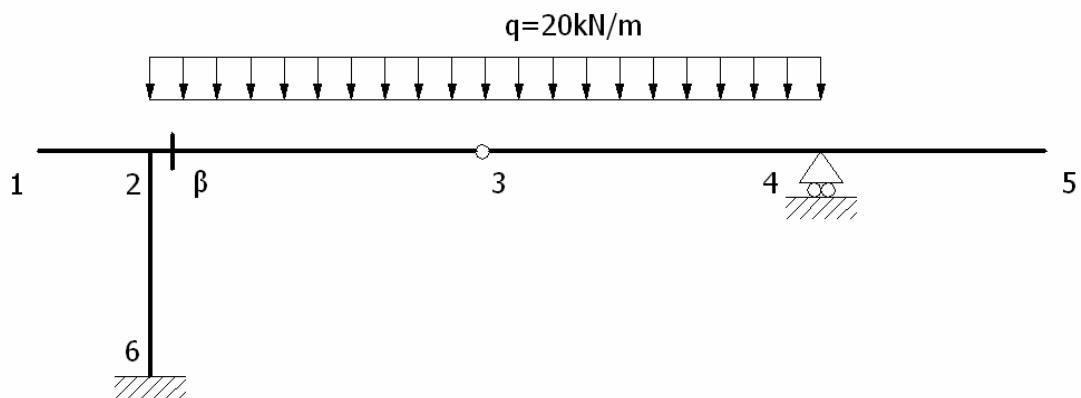
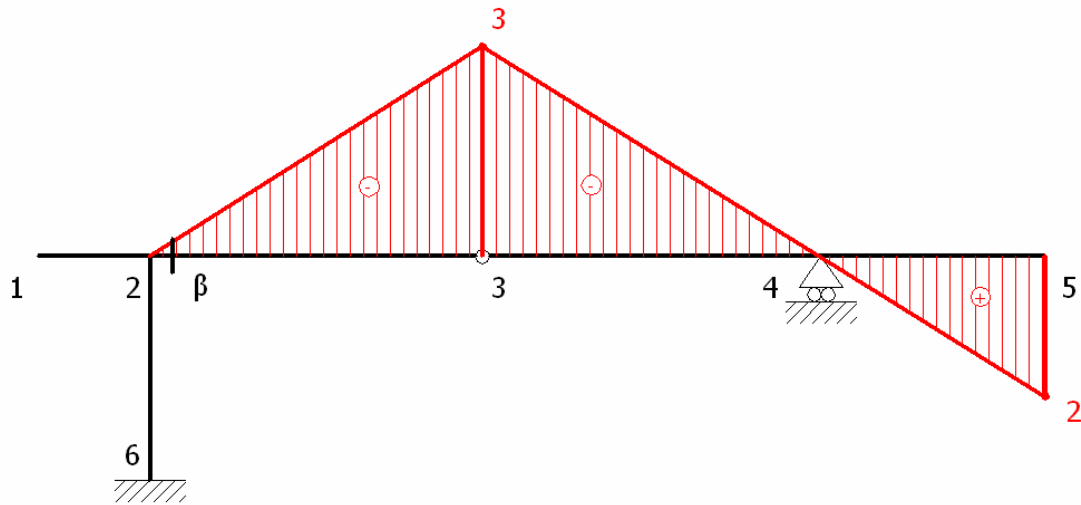
Η ροπή στη διατομή δ είναι μη μηδενική μόνο όσο το φορτίο κινείται στο τμήμα 3-4-5.



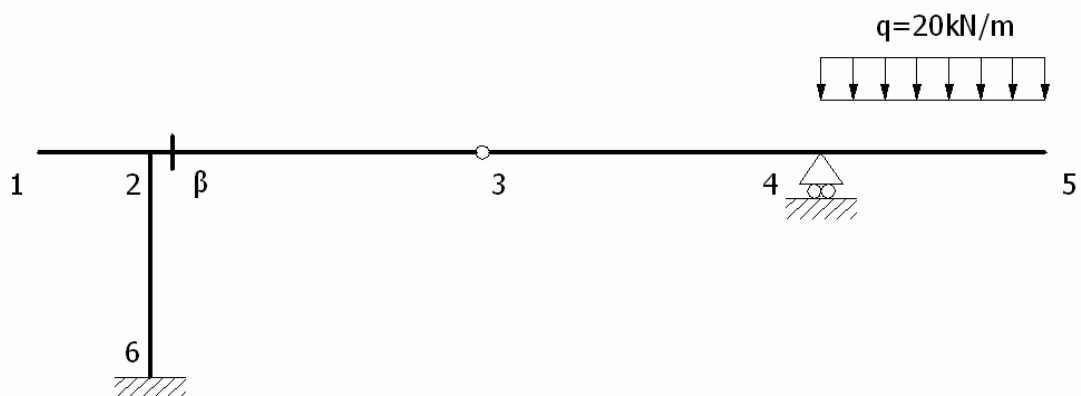
**Κινητό φορτίο  $q = 20 \text{ kN/m}$**



Η μέγιστη αρνητική ροπή στη διατομή β προκύπτει όσο το  $q$  φορτίζει το τμήμα 2-3-4 και μόνο, όπως άλλωστε φαίνεται από την προσημασμένη Γ.Ε.  $M_\beta$ . Η μέγιστη θετική ροπή προκύπτει όταν το φορτίο  $q$  βρίσκεται στο τμήμα 4-5.



$$\min M_\beta = -\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot 20 = -360 \text{ kNm}$$



$$\max M_\beta = +\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 20 = +80 \text{ kNm}$$

Ακραίες Τιμές  $M_\beta$  :  $\boxed{\min M_\beta = -360 \text{ kNm}}$  και  $\boxed{\max M_\beta = +80 \text{ kNm}}$