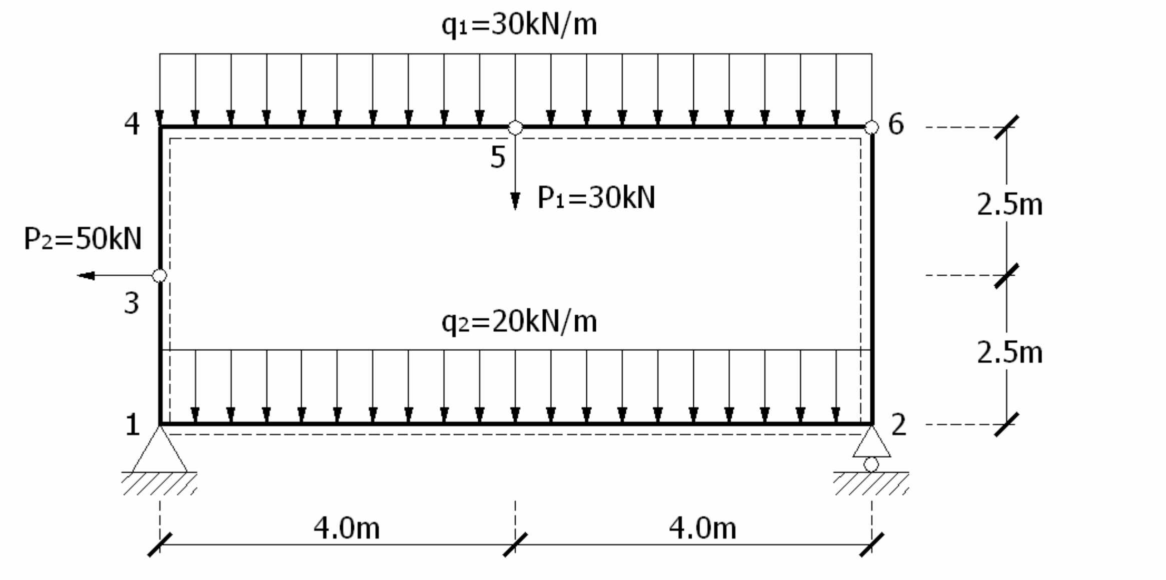
ΘΕΜΑ 1

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

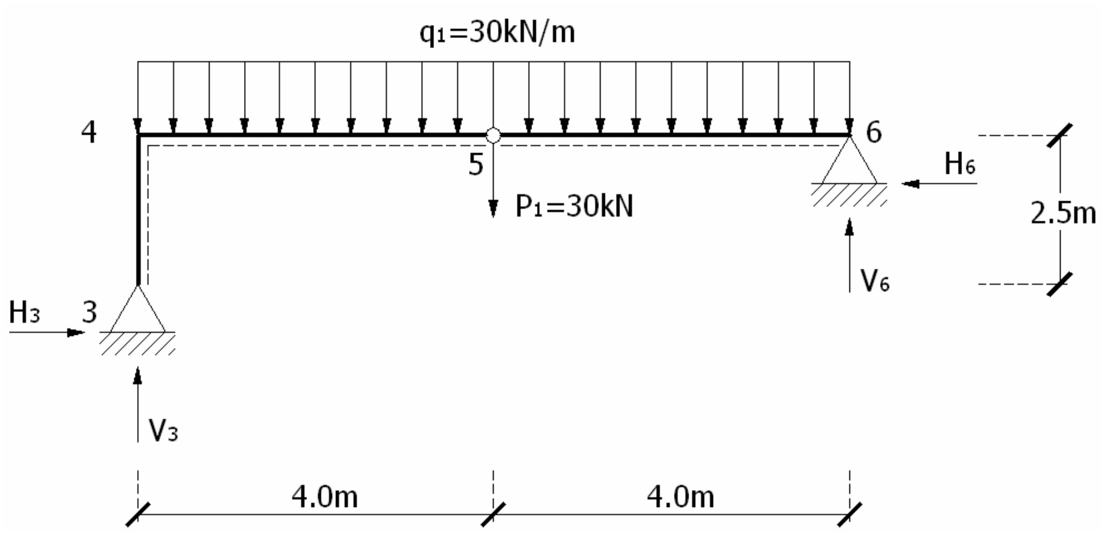
Στο φορέα του σχήματος ζητούνται να χαραχθούν τα διαγράμματα M, Q, N. (3 μονάδες)



ΕΠΙΛΥΣΗ:

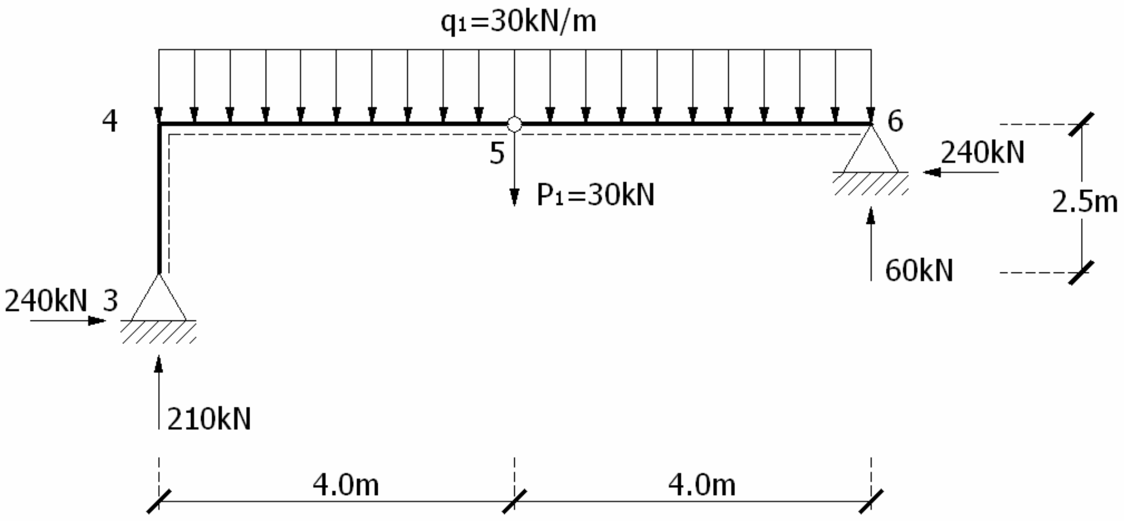
Ο φορέας χωρίζεται στα τμήματα A και B. Το τμήμα A είναι τριαρθρωτό τόξο. Απομονώνοντας το A και επιλύοντας το τριαρθρωτό τόξο, βρίσκουμε τις αντιδράσεις των αρθρώσεων #3 και #6. Αυτές τοποθετούνται με την αντίθετη φορά, αλλά με το ίδιο μέτρο, στο φορέα του τμήματος B. Το φορτίο P_2 καταπονεί το τμήμα B.

ΤΜΗΜΑ Α

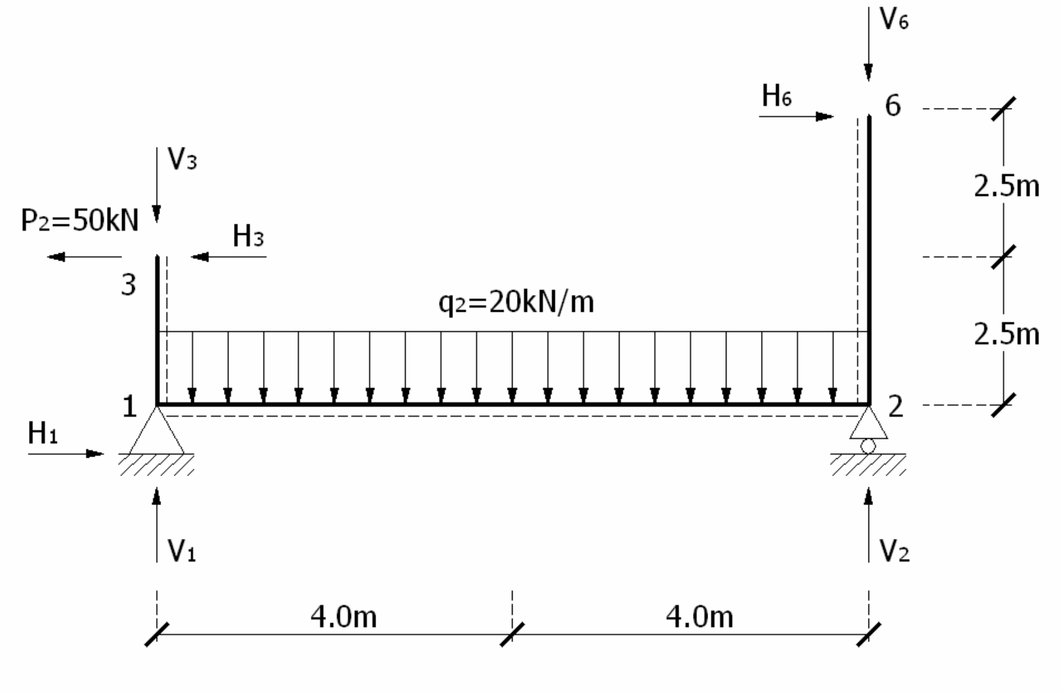


Επίλυση Τμήματος Α

$$\sum M_5 = 0 \rightarrow 30\cdot 4\cdot 2 - V_6\cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_6 = 60kN}$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_3 + V_6 - 30 - 30\cdot 8 = 0 \Leftrightarrow V_3 + 60 - 30 - 240 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_3 = 210kN}$$
$$\sum M_3 = 0 \rightarrow V_6\cdot 8 + H_6\cdot 2.5 - 30\cdot 4 - 30\cdot 8\cdot 4 = 0 \Leftrightarrow 60\cdot 8 + H_6\cdot 2.5 - 30\cdot 4 - 30\cdot 8\cdot 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\boxed{H_6 = 240kN}$$
$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_3 - H_6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{H_3 = 240kN}$$



ΤΜΗΜΑ Β



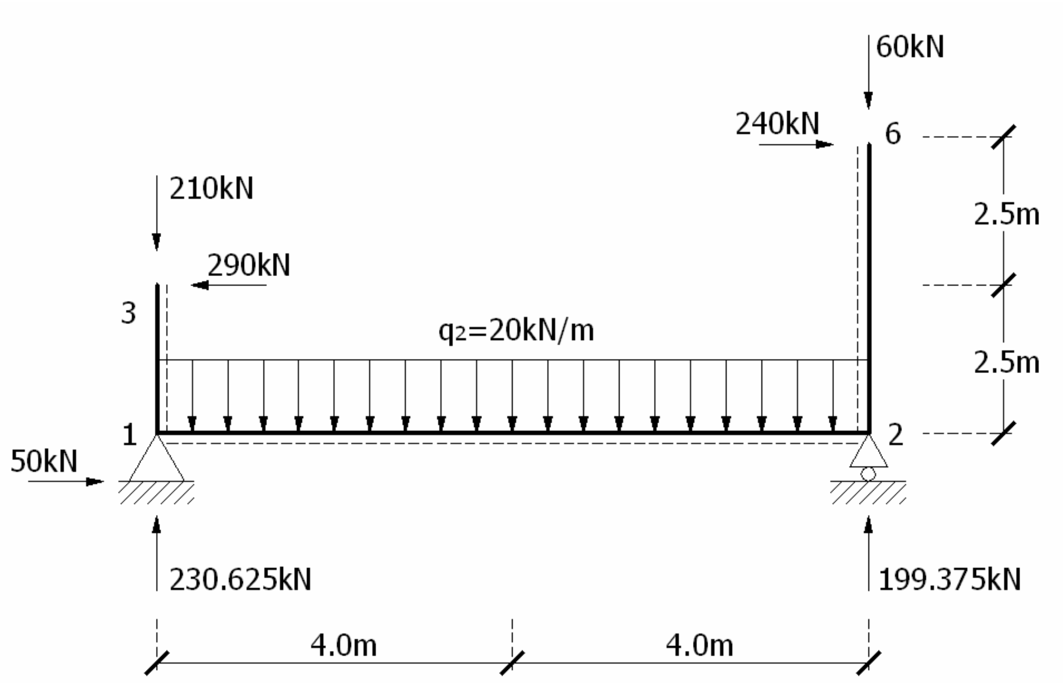
Επίλυση Τμήματος Β

$$\sum F_x = 0 \rightarrow H_1 - 50 - 240 + 240 = 0 \Leftrightarrow \boxed{H_1 = 50kN}$$

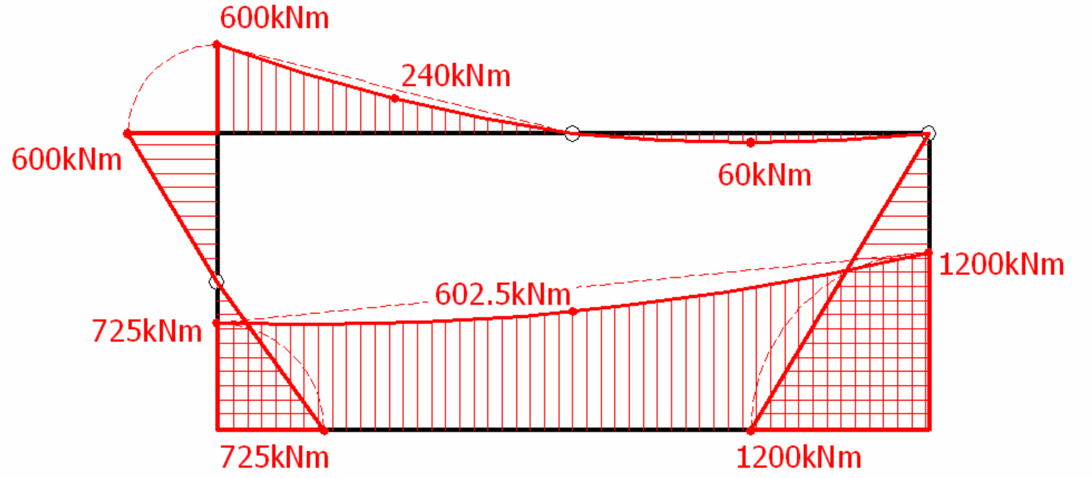
$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 60 \cdot 8 + 240 \cdot 5 - V_2 \cdot 8 + 20 \cdot 8 \cdot 4 - 290 \cdot 2.5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 480 + 1200 - 8 \cdot V_2 + 640 - 725 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_2 = 199.375kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 + V_2 - 210 - 60 - 20 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow V_1 + 199.375 - 430 = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_1 = 230.625kN}$$



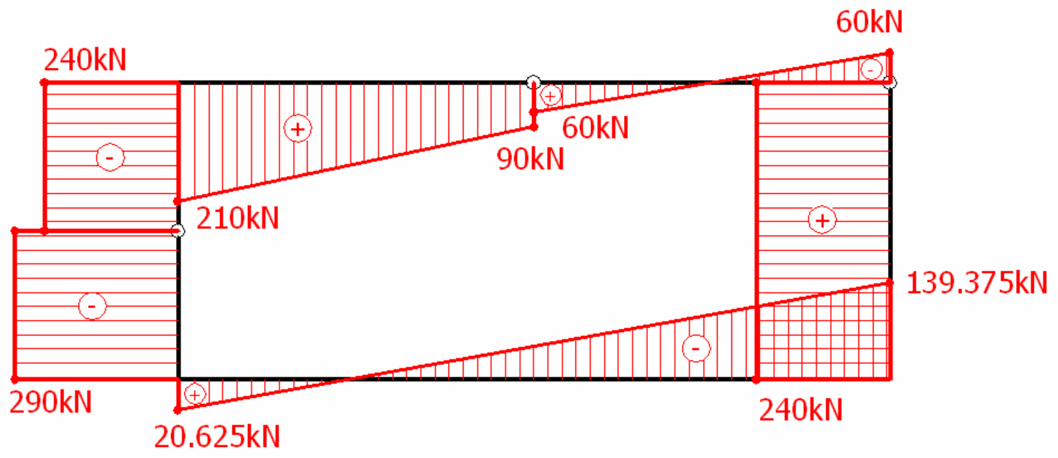
Μόρφωση Διαγραμμάτων Εντατικών Μεγεθών



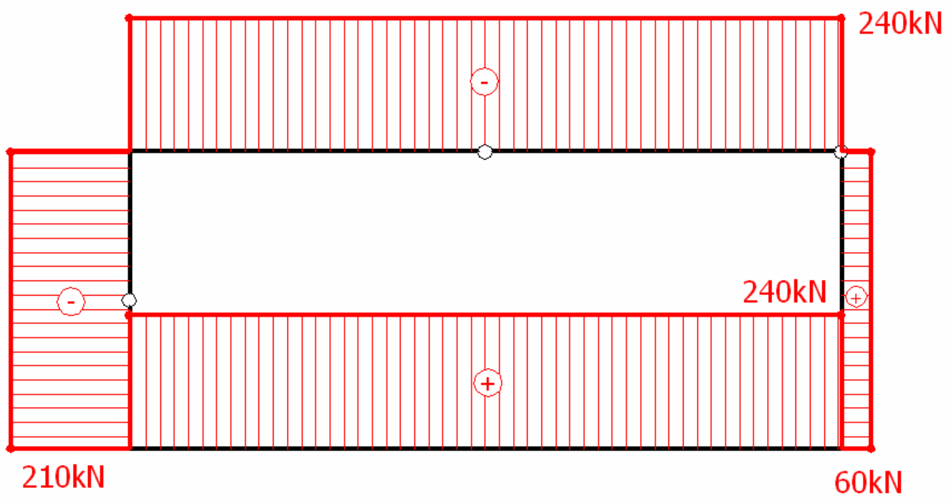
[M]

Μέλη (45) και (56): $q_1 \cdot l_{45}^2/8 = q_1 \cdot l_{56}^2/8 = 30 \cdot 4^2/8 = 60kNm$

Μέλος (12): $q_2 \cdot l_{12}^2/8 = 20 \cdot 8^2/8 = 160kNm$



[Q]

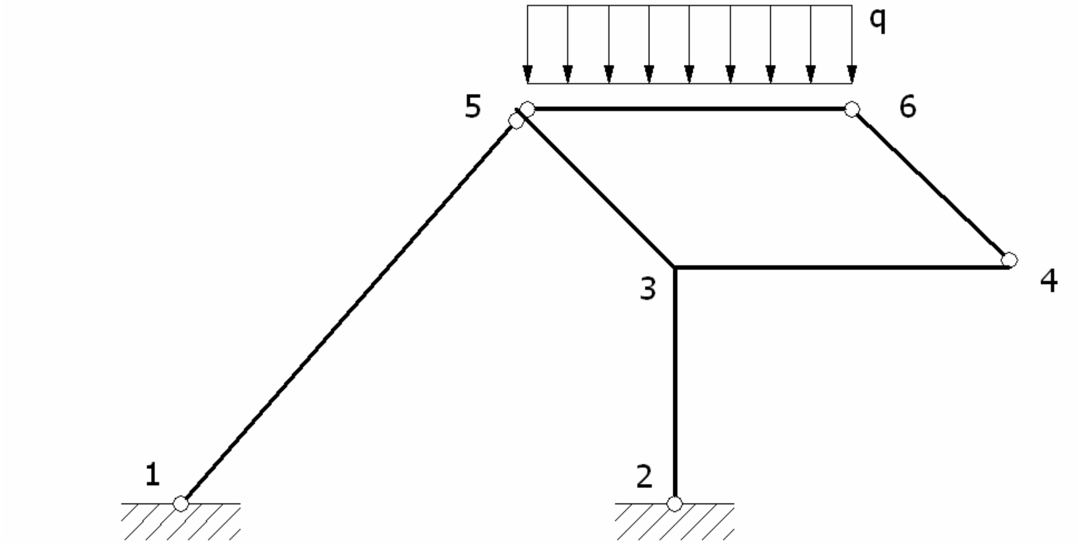


[N]

ΘΕΜΑ 2

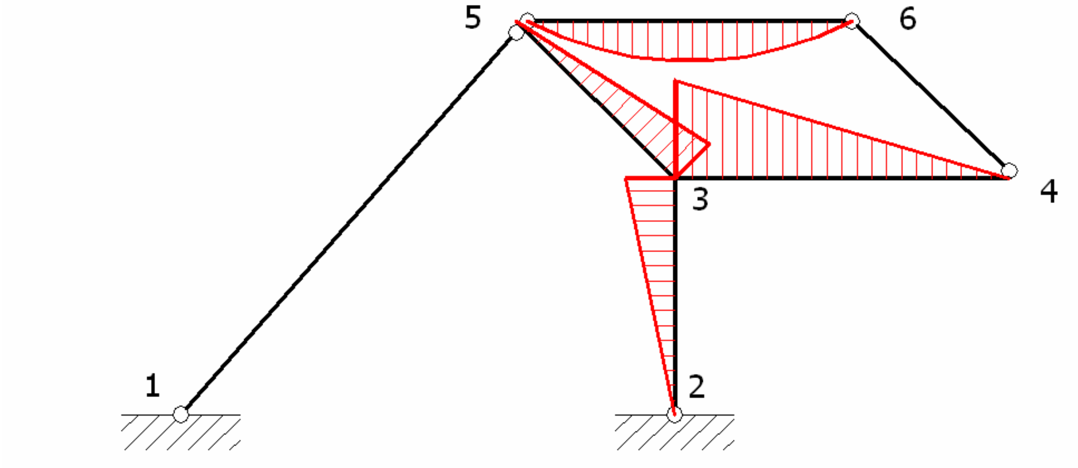
ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Στο φορέα του σχήματος ζητείται η χάραξη των διαγραμμάτων M, Q, N χωρίς απολύτων κανέναν υπολογισμό. (2 μονάδες)

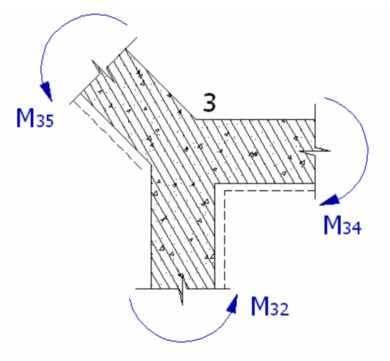


ΕΠΙΛΥΣΗ:

Μόρφωση Διαγραμμάτων Εντατικών Μεγεθών

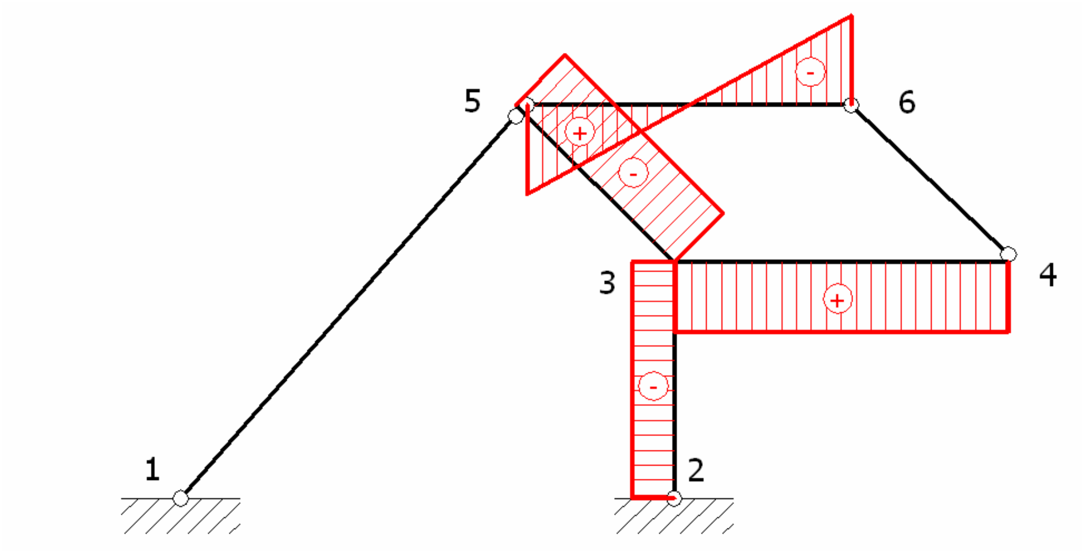


[M]

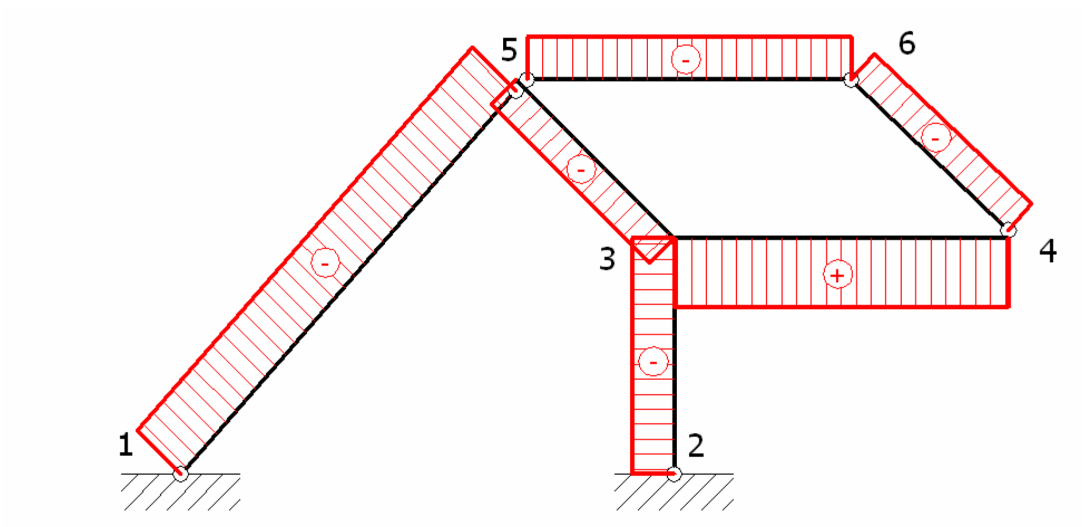


Κόμβος #3:

Πρέπει να ισχύει: $M_{32} + M_{35} = M_{34}$



[Q]

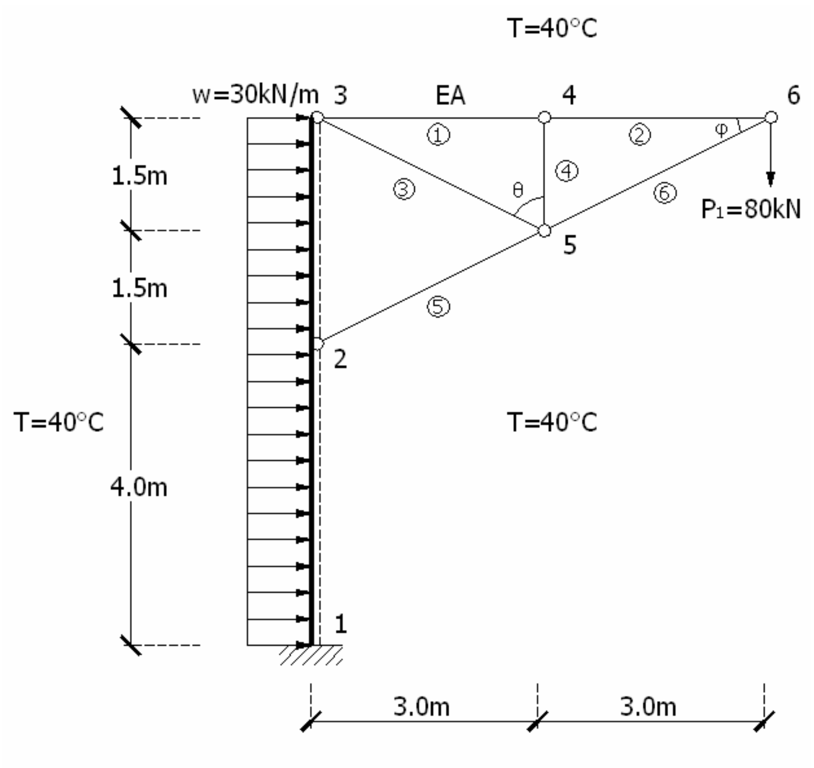


[N]

ΘΕΜΑ 3

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

Στο φορέα του σχήματος ζητείται η οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 5 για τη φόρτιση και τις υφιστάμενες θερμοκρασίες. (2 μονάδες)



Δίνονται:

$E = 2\times10^8\, kN/m^2$

$I = 80000 cm^4$

$A = 5cm^2$

$h = 0.50m$

$a_T = 10^{-5}\,/\,^oC$

$T_0 = 15^oC$

ΕΠΙΛΥΣΗ:

$$\tan\phi = \frac{1.5}{3.0} \Rightarrow \phi = 26.565^o$$

$$\tan\theta = \frac{3.0}{1.5} \Rightarrow \theta = 63.435^o$$

$$E = 2\times10^8\, kN/m^2 \;,\; I = 80000cm^4 = 0.8\times10^{-3}m^4 \,,\; EI = 160000kNm^2$$

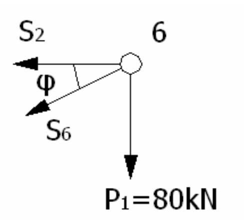
$$A = 5cm^2 = 5\times10^{-4}m^2 \,,\; EA = 100000\,kNm^2/m^2$$

$$\Delta T = T_{\varepsilon\sigma} - T_{\varepsilon\xi} = 40 - 40 = 0^oC$$

$$\delta T = \frac{T_{\varepsilon\sigma} + T_{\varepsilon\xi}}{2} - T_0 = \frac{40+40}{2} - 15 = 25^oC$$

$$dT = T_{\varepsilon\sigma} - T_0 = 40 - 15 = 25^oC$$

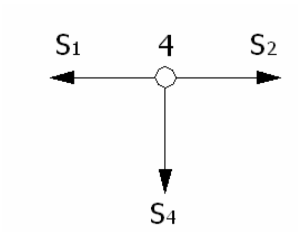
<u>Κόμβος #6:</u>



$$\sum F_y = 0 \rightarrow -S_6 \sin\phi - 80 = 0 \Rightarrow \boxed{S_6 = -178.89kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow -S_2 - S_6 \cos\phi = 0 \Rightarrow \boxed{S_2 = 160kN}$$

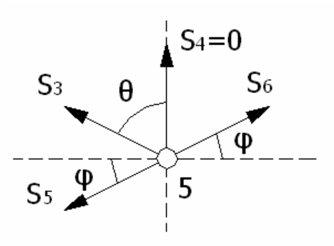
<u>Κόμβος #4:</u>



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{S_4 = 0}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_1 = S_2 \Rightarrow \boxed{S_1 = 160kN}$$

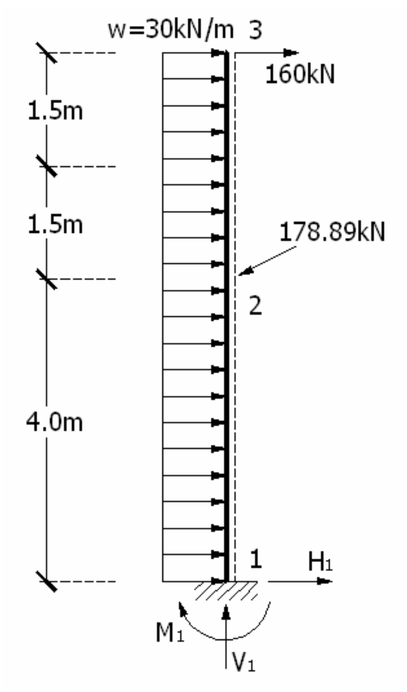
<u>Κόμβος #5:</u>



$$\sum F_x = 0 \rightarrow S_3 \sin\theta + S_5 \cos\phi = S_6 \cos\phi \Rightarrow$$
$$\boxed{S_3 \sin\theta + S_5 \cos\phi = -160} \ (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow S_3 \cos\theta + S_6 \sin\phi = S_5 \sin\phi \Rightarrow$$
$$\boxed{S_3 \cos\theta - S_5 \sin\phi = 80} \ (2)$$

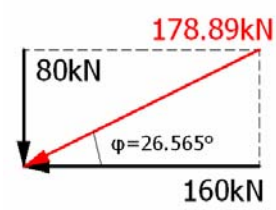
Η λύση του συστήματος εξισώσεων (1) και (2) είναι: $\boxed{S_3 \cong 0}$ και $\boxed{S_5 = -178.89kN}$

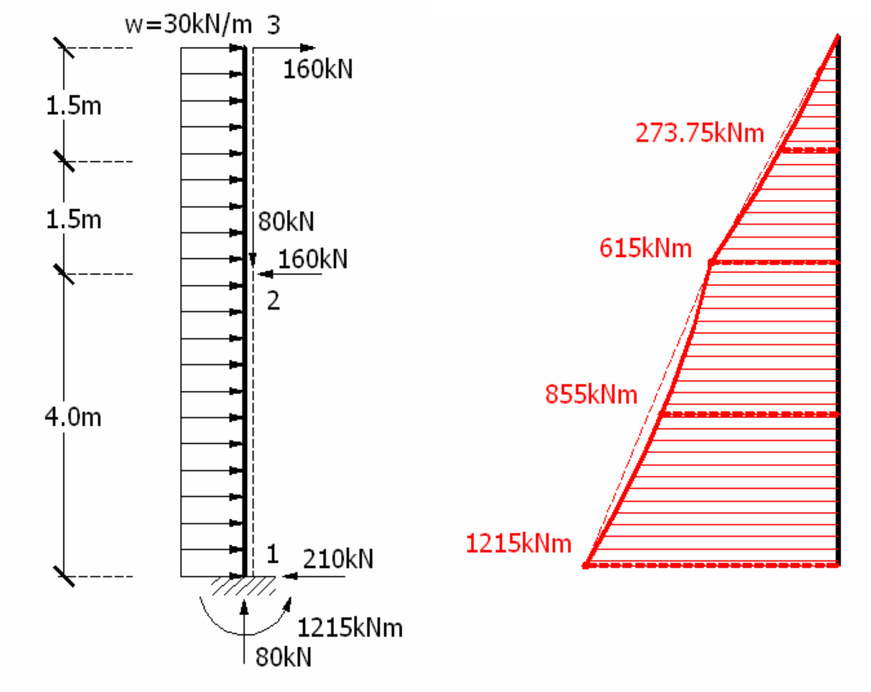


$$\sum F_x = 0 \rightarrow 30 \cdot 7 + 160 - 160 + H_1 = 0 \Rightarrow \boxed{H_1 = 210kN}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow V_1 - 80 = 0 \Rightarrow \boxed{V_1 = 80kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow M_1 + 30 \cdot 7 \cdot 3.5 + 160 \cdot 7 - 160 \cdot 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\boxed{M_1 = -1215kNm}$$

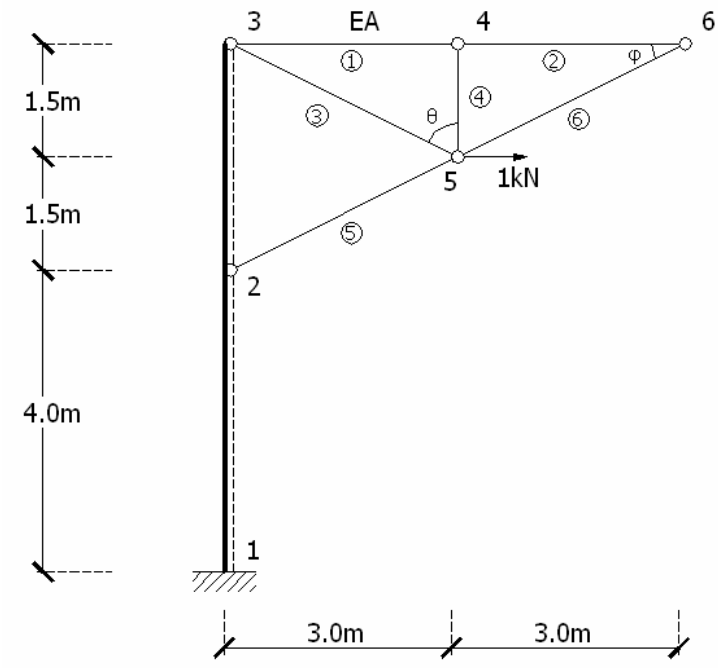




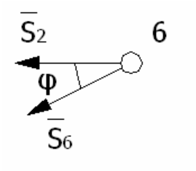
[M]

Τμήμα (23): $w \cdot l_{23}^2 / 8 = 30 \cdot 3^2 / 8 = 33.75 kNm$

Τμήμα (12): $w \cdot l_{12}^2 / 8 = 30 \cdot 4^2 / 8 = 60 kNm$



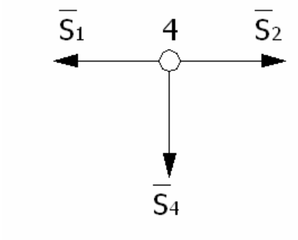
Κόμβος #6:



$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{\overline{S}_6 = 0}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{\overline{S}_2 = 0}$$

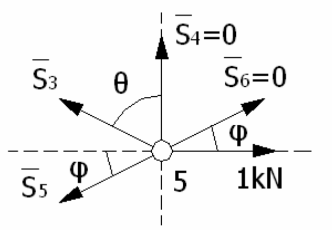
Κόμβος #4:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{\overline{S}_1 = 0}$$

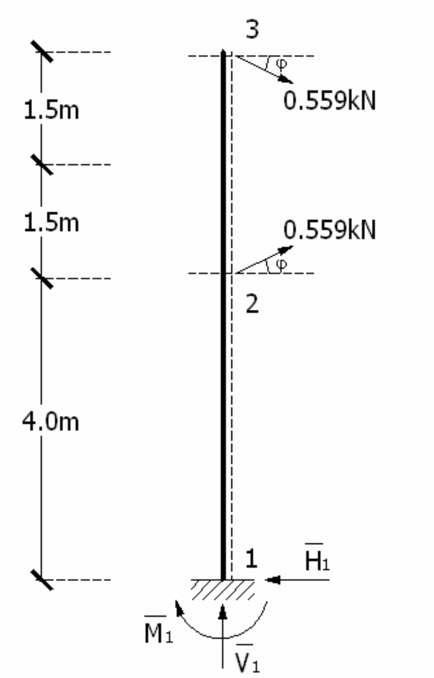
$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{\overline{S}_4 = 0}$$

Κόμβος #5:



$$\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{\overline{S}_3 \sin\theta + \overline{S}_5 \cos\phi = 1}\ (3)$$
$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{\overline{S}_3 \cos\theta - \overline{S}_5 \sin\phi = 0}\ (4)$$

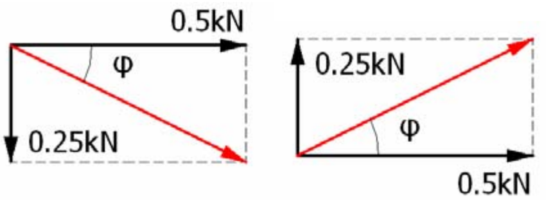
Η λύση του συστήματος εξισώσεων (3) και (4) είναι:
$\boxed{\overline{S}_3 = \overline{S}_5 = 0.559kN}$

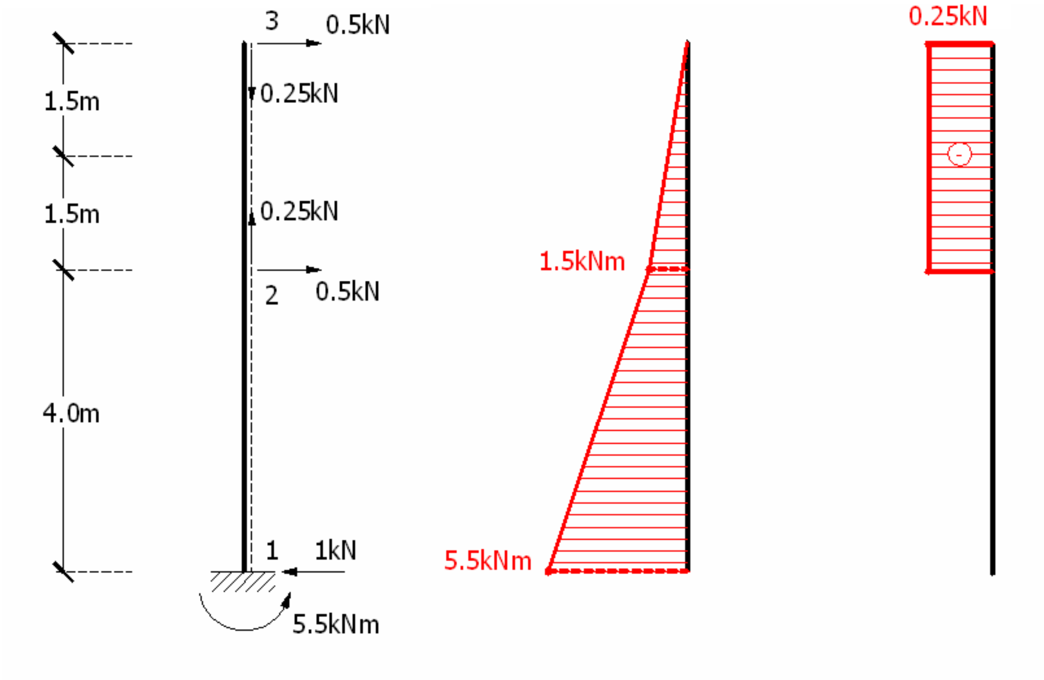


$$\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{\overline{V}_1 = 210kN}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \overline{H}_1 = (0.559\cos\phi)\cdot 2 \Rightarrow \boxed{\overline{H}_1 = 1kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow \overline{M}_1 + (0.559\cdot 7 + 0.559\cdot 4)\cdot\cos\phi = 0 \Rightarrow$$
$$\boxed{\overline{M}_1 = -5.5kNm}$$





$[\overline{M}]$ $[\overline{N}]$

$$1\cdot\delta_5+\sum\overline{R}_i\cdot\Delta_i=\int\overline{M}\frac{M}{EI}dx+\int\overline{M}a_T\frac{\Delta T}{h}dx+\int\overline{N}a_T\delta T dx+\sum_{i=1}^{6}\overline{S}_i\frac{S_i}{E_iA_i}l_i+\sum_{i=1}^{6}\overline{S}_i a_T dTl_i$$

$$\int\overline{M}\frac{M}{EI}dx=\frac{1}{EI}\cdot\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{6}\cdot\left[(-615)\cdot(-1.5)+2\cdot(-855)\cdot(-1.5-5.5)+(-1215)\cdot(-5.5)\right]\cdot 4\\+\frac{1}{6}\cdot(-1.5)\cdot(-2\cdot 273.75-615)\cdot 3\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{EI}\cdot\{13050+871.875\}=\frac{13921.875}{160000}=0.08701171875$$

$\int\overline{M}a_T\frac{\Delta T}{h}dx=0$, αφού $\Delta T=0^oC$, $\int\overline{N}a_T\delta T dx=(-0.25)\cdot 3\cdot 10^{-5}\cdot 25=-18.75\times 10^{-5}$

$\sum_{i=1}^{6}\overline{S}_i\frac{S_i}{E_iA_i}l_i=-3.35398\times 10^{-3}$, αφού

i	l_i	S_i	$\overline{S}_i$	$S_i\cdot\overline{S}_i$	$S_i\overline{S}_i l_i/(E_iA_i)$
1	3	160	0	0	0
2	3	160	0	0	0
3	3.354	0	0.559	0	0
4	1.5	0	0	0	0
5	3.354	-178.89	0.559	-335.398	-3.35398×10^{-3}
6	3.354	-178.89	0	0	0

$$\sum_{i=1}^{6}\overline{S}_i a_T dTl_i=10^{-5}\cdot 25\cdot(0.559\cdot 3.354+0.559\cdot 3.354)=93.7443\times 10^{-5}$$

Άρα, $1\cdot\delta_5=0.08701171875+0-18.75\times 10^{-5}-3.35398\times 10^{-3}+93.7443\times 10^{-5}\Leftrightarrow$

$$\boxed{\delta_5=0.0837m=8.37cm}$$

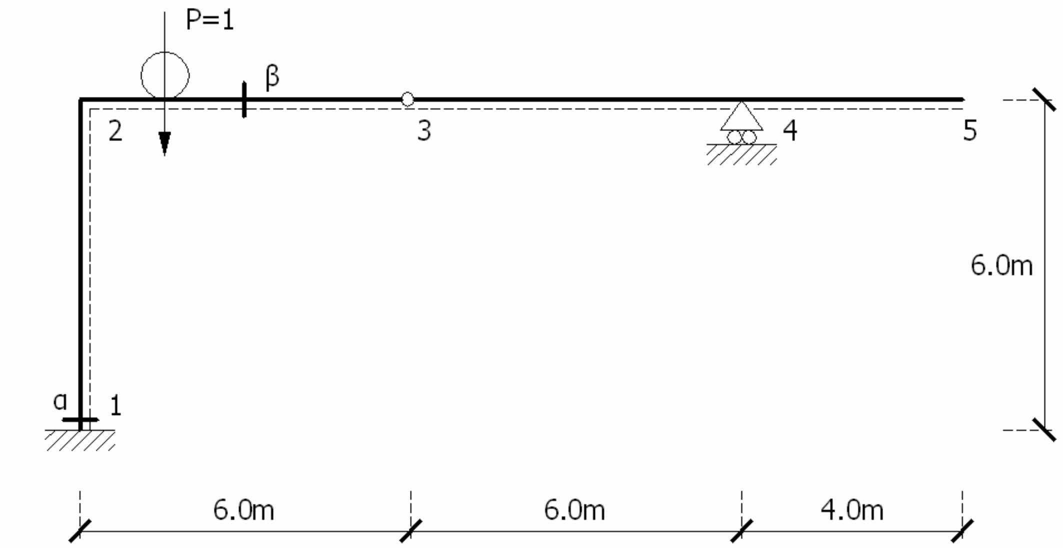
ΘΕΜΑ 4

ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

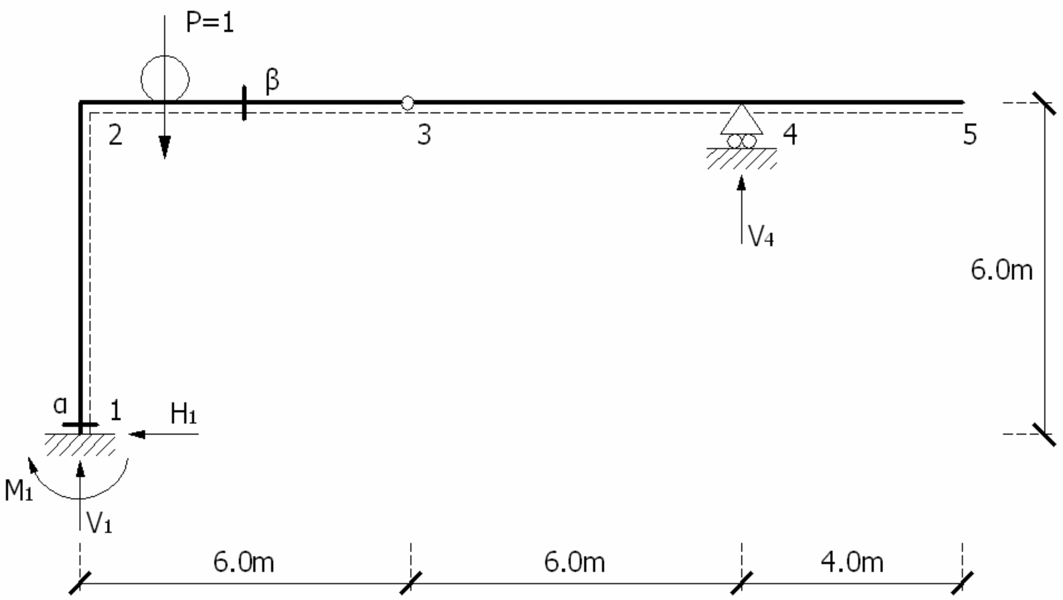
Στο φορέα του σχήματος και για κίνηση του κατακόρυφου μοναδιαίου φορτίου από 2 έως 5 ζητείται η χάραξη των γραμμών επιρροής:

1) της ροπής κάμψεως στη διατομή α της πακτώσεως 1.
2) της ροπής κάμψεως στη διατομή β (μέσο του 2-3)
3) της τέμνουσας στη διατομή β (μέσο του 2-3)

Να υπολογισθούν οι ακραίες τιμές της ροπής κάμψεως στη διατομή α για φορτίο $p = 20\,kN/m$ απεριορίστου μήκους.



ΕΠΙΛΥΣΗ:



<u>Κινητό φορτίο P=1 στον κόμβο #2:</u>

$$\left.\begin{array}{lll} \sum M_3^{\delta\varepsilon\xi}=0 & \rightarrow & V_4=0 \\ \sum F_y=0 & \rightarrow & V_1=0 \\ \sum F_x=0 & \rightarrow & H_1=0 \\ \sum M_1=0 & \rightarrow & M_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_\alpha=0 \\ M_\beta=0 \\ Q_\beta=0 \end{array}$$

<u>Κινητό φορτίο P=1 στο β:</u>

$$\left.\begin{array}{lll} \sum M_3^{\delta\varepsilon\xi}=0 & \rightarrow & V_4=0 \\ \sum F_y=0 & \rightarrow & V_1=1 \\ \sum F_x=0 & \rightarrow & H_1=0 \\ \sum M_1=0 & \rightarrow & M_1=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_\alpha=-3 \\ Q_\beta^{\alpha\rho\iota\sigma\tau}=0 \\ Q_\beta^{\delta\varepsilon\xi}=1 \end{array}$$

<u>Κινητό φορτίο P=1 στον κόμβο #3:</u>

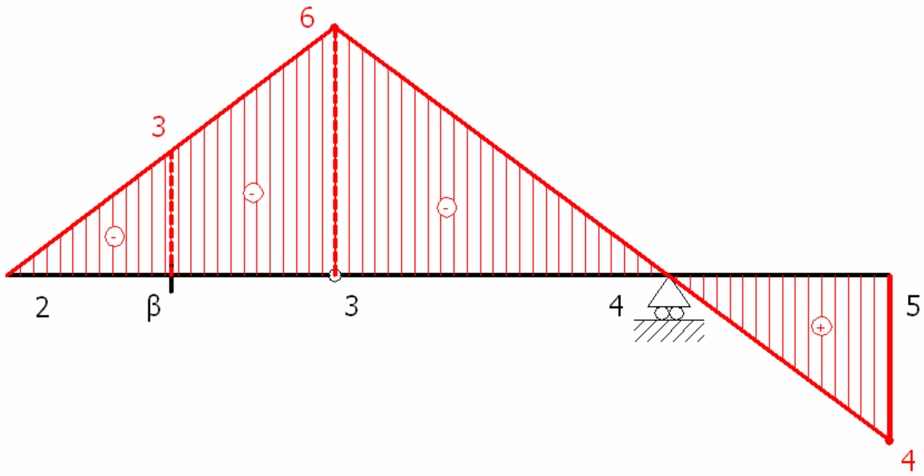
$$\left.\begin{array}{lll} \sum M_3^{\delta\varepsilon\xi}=0 & \rightarrow & V_4=0 \\ \sum F_y=0 & \rightarrow & V_1=1 \\ \sum F_x=0 & \rightarrow & H_1=0 \\ \sum M_1=0 & \rightarrow & M_1=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_\alpha=-6 \\ M_\beta=-3 \\ Q_\beta=1 \end{array}$$

<u>Κινητό φορτίο P=1 στον κόμβο #4:</u>

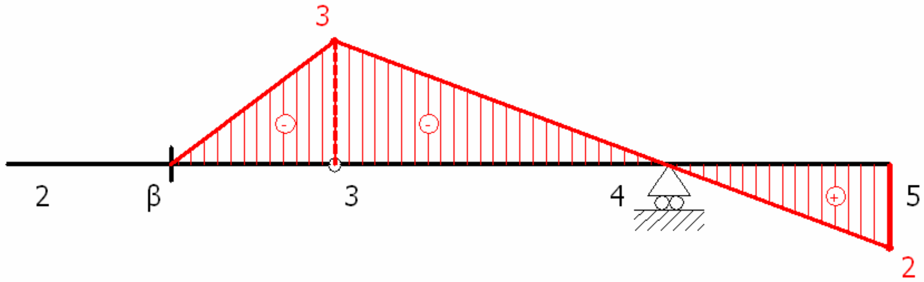
$$\left.\begin{array}{lll} \sum F_x=0 & \rightarrow & H_1=0 \\ \sum M_1=0 & \rightarrow & M_1=0 \\ \sum M_3^{\alpha\rho\iota\sigma\tau}=0 & \rightarrow & V_1=0 \\ \sum F_y=0 & \rightarrow & V_4=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_\alpha=0 \\ M_\beta=0 \\ Q_\beta=0 \end{array}$$

<u>Κινητό φορτίο P=1 στον κόμβο #5:</u>

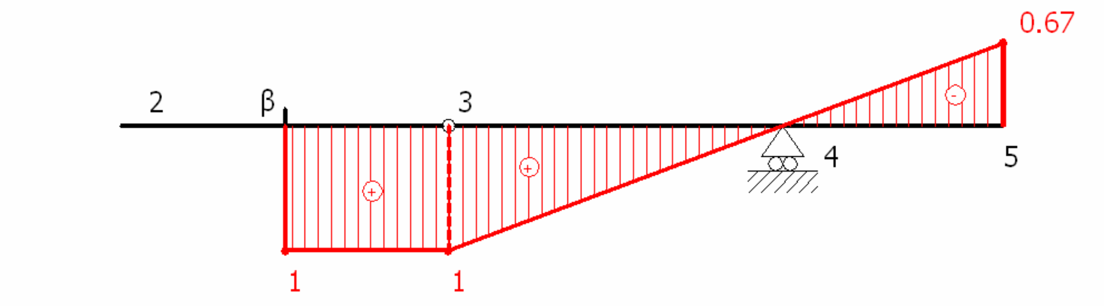
$$\left.\begin{array}{lllll} \sum M_3^{\delta\varepsilon\xi}=0 & \rightarrow & 1\cdot 10-V_4\cdot 6=0 & \Leftrightarrow & V_4=10/6=1.67 \\ \sum F_x=0 & \rightarrow & H_1=0 & & \\ \sum F_y=0 & \rightarrow & V_1+V_4=1 & \Leftrightarrow & V_1=-0.67 \\ \sum M_1=0 & \rightarrow & 1\cdot 16-1.67\cdot 12-M_1=0 & \Leftrightarrow & M_1=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M_\alpha=4 \\ M_\beta=2 \\ Q_\beta=-0.6 \end{array}$$



[M]



[Q]



[N]

Έστω l το μήκος στο οποίο ασκείται το φορτίο, τότε $V_1 + V_4 = 20l$. Από τη γραμμή επιρροής της M_α διαπιστώνεται ότι αυτή μεγιστοποιήθηκε, όταν η V_1 έγινε αρνητική. Συνεπώς, η μέγιστη V_4 προκύπτει για μέγιστη καταπόνηση του τμήματος 4-5, δηλαδή για $l = 4m$.

$$\sum M_3^{\delta\varepsilon\xi} = 0 \to 6 \cdot V_4 - 4 \cdot 20 \cdot (6+2) = 0 \Leftrightarrow V_4 = 106.67kN$$
$$V_1 + V_4 = 20l \Leftrightarrow V_1 = 20l - V_4 = 20 \cdot 4 - 106.67 = -26.67kN$$
$$\sum M_3^{\alpha\rho\iota\sigma\tau} = 0 \to M_1 - 26.67 \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow M_1 = 160.02kNm$$

Ομοίως σκεπτόμενοι, η ελάχιστη τιμή της M_α στη γραμμή επιρροής προκύπτει, όταν το μοναδιαίο φορτίο δεν έχει μοχλοβραχίονα για να μειώσει τη M_1 (σημείο 3) κατά $\sum M_3 = 0$. Εδώ $l = 12m$.

$$\sum M_3^{\delta\varepsilon\xi} = 0 \to 6 \cdot V_4 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow V_4 = 60kN$$
$$\sum F_y = 0 \to V_1 + V_4 = 20l = 240 \Leftrightarrow V_1 = 180kN$$
$$\sum M_3^{\alpha\rho\iota\sigma\tau} = 0 \to M_1 + 180 \cdot 6 = 0 \Leftrightarrow M_1 = -1080kNm$$

Επομένως, $\boxed{\max M_\alpha = 160.02kNm}$ και $\boxed{\min M_\alpha = -1080kNm}$