ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ
ΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

Β. Κουμούσης
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ
ΜΑΡΤΙΟΣ 1998

Εισαγωγή

Ορισμένες αρχές, πού ονομάζονται ενεργειακές αρχές ή παραλλακτικές αρχές (variational principles), παίζουν βασικό ρόλο στη μελέτη των κατασκευών και πιο γενικά στη μελέτη των παραμορφώσιμων σωμάτων. Τέτοιες είναι ή αρχή των δυνατών έργων, η αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας, ή αρχή του Hamilton για τη δυναμική κ.ά.

Το βασικό πλεονέκτημα των ενεργειακών αρχών και μεθόδων είναι ότι ανάγουν το πρόβλημα της στατικής και δυναμικής ισορροπίας των παραμορφώσιμων σωμάτων από διανυσματικό πρόβλήμα (σύνθεση δυνάμεων – ροπών) σε πρόβλημα βαθμωτών μεγεθών – έργο εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων.

Η μαθηματική διατύπωση των αρχών αυτών οδηγεί στην αναζήτηση μίας ή περισσοτέρων αγνώστων συναρτήσεων, μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών πού κάνουν στάσιμη την τιμή (μέγιστο, ελάχιστο ή σαγματικό σημείο) ενός συγκεκριμένου ολοκληρώματος. Το ολοκλήρωμα αυτό γενικά είναι μιά συνάρτηση των αγνώστων συναρτήσεων και των παραγώγων τους και ονομάζεται **συναρτησιακό** ή συναρτησιοειδές, (π.χ. ή δυναμική ενέργεια είναι ένα συναρτησιακό του οποίου η τιμή εξαρτάται από την εκλογή των συναρτήσεων $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $(i = 1,2,3)$) και ανήκει σε μιά οικογένεια αποδεκτών μετατοπίσεων που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Η αρχή της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας ορίζει ότι οι συναρτήσεις εκείνες πού κάνουν ελάχιστη την τιμή του συναρτησιακού αποτελούν τις πραγματικές μετατοπίσεις του σώματος.

Η περιοχή των μαθηματικών πού ασχολείται με την εύρεση των στάσιμων τιμών ενός συναρτησιακού υπό τη μορφή ορισμένου ολοκληρώματος ονομάζεται Λογισμός των Μεταβολών (calculus of variations).

Όπως στη μελέτη των ακρότατων συναρτήσεων μίας ή περισσοτέρων μεταβλητών μας ενδιαφέρει να διατυπώσουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες τις οποίες ικανοποιούν τα σημεία στα οποία οι συναρτήσεις λαμβάνουν τις μέγιστες ή ελάχιστες τιμές τους, έτσι και στο Λογισμό των Μεταβολών επιδιώκουμε να διατυπώσουμε αναγκαίες και ικανές συνθήκες πού πρέπει να πληρούν οι συναρτήσεις γιά να λάβει το συναρτησιακό τις στάσιμες τιμές του. Η φύση του στάσιμου σημείου (μέγιστο, ελάχιστο ή σαγματικό σημείο) καθορίζεται συνήθως από το φυσικό πρόβλημα.

Ο συνήθης τρόπος διατύπωσης των διαφορικών εξισώσεων που διέπουν τη συμπεριφορά ενός φορέα είναι η αποκοπή σε τυχαία θέση ενός απειροστού τμήματος του σώματος επί του οποίου εφαρμόζονται οι εξωτερικές και εσωτερικές δυνάμεις καθώς και η μεταβολή τους για στοιχειώδη επαύξηση. Επί του απειροστού τμήματος εφαρμόζονται οι απαιτήσεις στατικής ή δυναμικής ισορροπίας. Οι εσωτερικές δυνάμεις προσδιορίζονται από ορισμούς αλλά και παραδοχές που αναφέρονται στο πεδίο των μετακινήσεων. Με τον τρόπο αυτό διατυπώνονται οι διαφορικές εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα. Η γενική λύση των διαφορικών εξισώσεων ανάλογα με την τάξη τους περιέχουν και άγνωστες σταθερές ολοκλήρωσης οι οποίες προσδιορίζονται από τις αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες. Με τη μέθοδο αυτή η διατύπωση των συνοριακών συνθηκών προκύπτει από τη φύση του προβλήματος.

Πολλές φορές η διατύπωση των συνοριακών συνθηκών με βάση την φυσική συμπεριφορά συμβαίνει να μην είναι συμβατή με τις παραδοχές του προβλήματος και να ισοδυναμεί με απώλειες ενέργειας. Προκύπτει έτσι η ανάγκη προσφυγής σε μια μεθοδολογία που να παράγει αφενός τις διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος αλλά παράλληλα και το σύνολο των αποδεκτών συνοριακών συνθηκών ή αρχικών συνθηκών που είναι ενεργειακά συμβατές με τις παραδοχές της συγκεκριμένης θεώρησης. Τη μεθοδολογία αυτή προσφέρει ο Λογισμός των Μεταβολών.

Στις απλές θεωρίες της Αντοχής των Υλικών, (όπως η τεχνική θεωρία κάμψεως της δοκού κλπ.) η πρώτη μέθοδος δίδει χωρίς δυσκολίες τα σωστά αποτελέσματα, αλλά σε συνθετότερες θεωρίες της αντοχής των υλικών με αποκορύφωμα τις θεωρίες κελυφών η παραγωγή των συνεπών συνοριακών συνθηκών είναι αδύνατη με βάση την φυσική εποπτεία. Στις περιπτώσεις αυτές ο λογισμός των μεταβολών αποδεικνύεται το αλάνθαστο συστηματικό μέσο για την παραγωγή των διαφορικών εξισώσεων και του συνόλου των αποδεκτών συνοριακών συνθηκών. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ότι από τις περίπου πενήντα θεωρίες κελυφών που είχαν διατυπωθεί στη δεκαετία του 1960 λιγότερες από επτά ήσαν συμβατές με τις παραδοχές τους.

Τέλος οι ενεργειακές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά και στην εύρεση προσεγγιστικών λύσεων. Η μέθοδος Rayleigh-Ritz, Galerkin και η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων είναι δύο πολύ διαδεδομένες ενεργειακές μέθοδοι γιά την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων.

Στάσιμες Τιμές Συναρτήσεως μιας Μεταβλητής

Από την ανάλυση γνωρίζουμε τα παρακάτω. Λέμε ότι. μιά συνάρτηση μίας ανεξάρτητης μεταβλητής $y = f(x)$ έχει σχετικό μέγιστο ένα σημείο $x = c$ όταν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα πού περιέχει το σημείο $x = c$ στο όποίο η $f(x)$ γιά όλες τις τιμές είναι ορισμένη και ισχύει $f(c) \geq f(x)$ για όλες τις τιμές του x στο διάστημα αυτό. Επίσης λέμε ότι μιά συνάρτηση μίας ανεξάρτητης μεταβλητής $y = f(x)$ έχει σχετικό ελάχιστο σ' ένα σημείο $x = b$, όταν υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα πού περιέχει το σημείο $x = b$ στο οποίο η $f(x)$ είναι ορισμένη και ισχύει $f(b) \leq f(x)$ γιά όλες τις τιμές του x στο διάστημα αυτό.

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)$ η όποία έχει συνεχείς παραγώγους οποιασδήποτε τάξεως στη γειτονιά ενός σημείου $x = x_0$ για την οποία θέλουμε να διατυπώσουμε τις συνθήκες για τις οποίες η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο αυτό. Τη συνάρτηση αυτή αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x = x_0$, οπότε έχουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f(x)}{dx^3}|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \dots \tag{1}$$

Τη διαφορά $(x - x_0)$ μπορούμε να τη διαλέξουμε όσο μικρή θέλουμε ώστε η διαφορά των συναρτήσεων να μπορεί να εκφραστεί με επιθυμητή ακρίβεια ως:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0} (x - x_0) \tag{2}$$

Για να είναι η τιμή $f(x_0)$ σχετικό μέγιστο, είναι αναγκαίο η διαφορά $f(x) - f(x_0)$ να είναι ένας μη θετικός αριθμός για όλες τις τιμές του x στη γειτονιά του x_0. Επειδή η διαφορά $(x - x_0)$ μπορεί να είναι οτιδήποτε δηλ. θετική, μηδέν ή αρνητική, προκύπτει ότι η τιμή της πρώτης παραγώγου στο σημείο x_0 θα πρέπει να είναι μηδενική και συνεπώς η αναγκαία συνθήκη για να είναι η τιμή $f(x_0)$ σχετικό μέγιστο είναι:

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0 \tag{3}$$

Με την ίδια λογική προκύπτει ότι η παραπάνω σχέση αποτελεί αναγκαία συνθήκη για να είναι η $f(x_0)$ σχετικό ελάχιστο.

Αντικαθιστώντας την σχέση (3) στην (1) προκύπτει:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0} (x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\Big|_{x=x_0} (x-x_0)^3 + \ldots \tag{4}$$

Μπορούμε επίσης να επιλέξουμε τη διαφορά $(x - x_0)$ αρκετά μικρή ώστε για οποιαδήποτε επιθυμητή ακρίβεια η παραπάνω σχέση να προσεγγίζεται από την ακόλουθη:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2!}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0} (x-x_0)^2 \tag{5}$$

Για να είναι η $f(x_0)$ σχετικό μέγιστο είναι αναγκαίο η διαφορά $f(x) - f(x_0)$ να είναι αρνητική για κάθε σημείο x στη γειτονιά του x_0. Έτσι για να ισχύει η σχέση (5) είναι φανερό ότι η δεύτερη παράγωγος στο σημείο x_0 θα πρέπει να είναι αρνητική καθόσον ο όρος $(x - x_0)^2$ είναι πάντα θετικός, δηλ:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0} < 0 \tag{6}$$

Όμοια από την σχέση (5) γίνεται φανερό ότι για να είναι η τιμή $f(x_0)$ σχετικό ελάχιστο θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\Big|_{x=x_0} > 0 \tag{7}$$

Αν τώρα υπάρχουν τιμές του x_0 που μηδενίζουν την πρώτη και δεύτερη παράγωγο τότε η ανάπτυξη κατά Taylor θα πρέπει να προσεγγιστεί για επιθυμητή ακρίβεια από την τρίτη παράγωγο στο σημείο x_0 από την σχέση:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{3!}\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\Big|_{x=x_0} (x - x_0)^3 \tag{8}$$

Στη περίπτωση αυτή το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - f(x_0)$ είναι διαφορετικό για $x < x_0$ και $x > x_0$. Το σημείο αυτό ονομάζουμε σημείο καμπής ή σαγματικό σημείο.

Βασικό λήμμα του λογισμού των μεταβολών

Αν $G(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα (a,b) και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_a^b G(x)\eta(x)dx = 0 \tag{9}$$

για κάθε συνάρτηση η(x), η οποία είναι συνεχής και μηδενίζεται στα σημεία $x = a$ και $x = b$ τότε στο διάστημα $a < x < b$ θα πρέπει να ισχύει:

$$G(x) = 0 \tag{10}$$

Courant R. and Hilbert D. *"Methods of Mathematical Physics".* Vol. I Interscience Publishers, Inc. New York, 1953, pg 185.

Στάσιμη Τιμή Συναρτησιακού μιας Συναρτήσεως μιας Μεταβλητής

Θα λέμε ότι ένα σύνολο συναρτήσεων μιας μεταβλητής $\widetilde{u}(x)$ είναι αποδεκτό στο διάστημα $a < x < b$ όταν οι συναρτήσεις αυτές έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Έχουν συνεχείς παραγώγους δευτέρας τάξεως στο ανοικτό διάστημα (a,b)

b) Λαμβάνουν δεδομένες τιμές στα σημεία $x = a$ και $x = b$

Δηλαδή

$$\widetilde{u}(a) = \widetilde{u}_a \qquad \text{και} \qquad \widetilde{u}(b) = \widetilde{u}_b \tag{11}$$

Ένας απλός τρόπος να παράγουμε ένα αποδεκτό σύνολο συναρτήσεων $\widetilde{u}(x)$ είναι να προσθέσουμε σε μια αποδεκτή συνάρτηση $u(x)$ ένα μικρό πολλαπλάσιο μιας αυθαίρετης συναρτήσεως $\eta(x)$ στο διάστημα $a < x < b$ η οποία έχει συνεχείς παραγώγους δευτέρας τάξεως σ' αυτό και μηδενίζεται στα σημεία $x = a$ και $x = b$.

Δηλαδή

$$\widetilde{u}(x) = u(x) + \varepsilon\eta(x) \tag{12a}$$

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \tag{12b}$$

Είναι φανερό ότι για μιά δεδομένη συνάρτηση $\eta(x)$ στη σχέση (12) η συνάρτηση $\widetilde{u}(x)$ αντιπροσωπεύει μια μονοπαραμετρική οικογένεια αποδεκτών συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Οι αποδεκτές συναρτήσεις $\widetilde{u}(x)$ που λαμβάνονται από την σχέση (12) για διάφορες απειροστές τιμές του ε ονομάζονται μεταβολές της συναρτήσεως $u(x)$. Επομένως σε κάθε σημείο x οι μεταβολές της συναρτήσεως διαφέρουν κατά ένα απειροστό μέγεθος.

Στη παράγραφο αυτή θα θεωρήσουμε συναρτησιακά μιας μόνο συναρτήσεως μιας ανεξάρτητης μεταβλητής με δεδομένες τιμές στα άκρα που έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$I = \int_a^b F(x, \tilde{u}, \tilde{u}')dx \tag{13}$$

όπου $\tilde{u}$ είναι μιά συνάρτηση του x πού ανήκει σε ένα σύνολο αποδεκτών συναρτήσεων και $\tilde{u}'$ η παράγωγός της. Η συνάρτηση των συναρτήσεων F έχει συνεχείς δεύτερες παραγώγους ως προς τις τρεις μεταβλητές $x, \tilde{u}, \tilde{u}'$. Είναι φανερό ότι η τιμή του I εξαρτάται από την εκλογή της συνάρτησης $\tilde{u}(x)$. Θα δεχθούμε ότι μέσα στο σύνολο των αποδεκτών συναρτήσεων υπάρχει μία συνάρτηση η οποία κάνει τη τιμή του I στάσιμη και ότι η συνάρτηση αυτή, χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα, είναι η $u(x)$. Έτσι για οποιαδήποτε δεδομένη συνάρτηση $\eta(x)$ που κάνει στάσιμη την τιμή του συναρτησιακού I λαμβάνεται από το σύνολο των συναρτήσεων (12a) θέτοντας το ε ίσο με μηδέν.

Εάν δηλώσουμε με $\tilde{I}$ την τιμή του I που αντιστοιχεί σε μιά συνάρτηση $\tilde{u}(x)$ και χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (12a) λαμβάνουμε:

$$\tilde{I}(\varepsilon) = \int_a^b F(x, \tilde{u}, \tilde{u}')dx = \int_a^b F(x, u + \varepsilon\eta, u' + \varepsilon\eta')dx \tag{14}$$

Για μια δεδομένη συνάρτηση η και την ζητούμενη συνάρτηση u, το ολοκλήρωμα στη σχέση (14) μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση της παραμέτρου ε. Με την παραδοχή ότι η συνάρτηση $\tilde{I}(\varepsilon)$ έχει συνεχείς παραγώγους οποιασδήποτε τάξεως, μπορούμε να την αναπτύξουμε σε σειρά Taylor ως προς ε, γύρω από τη θέση ε=0. Κατά τον τρόπο αυτό προκύπτει:

$$\tilde{I}(\varepsilon) - \tilde{I}(0) = \frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{I}}{d\varepsilon^2}\Big|_{\varepsilon=0} + \ldots \tag{15}$$

Με βάση τα όσα αναπτύχθηκαν για τα ακρότατα μιας συναρτήσεως μίας μεταβλητής, η συνάρτηση $\tilde{I}(\varepsilon)$ λαμβάνει στάσιμη τιμή όταν:

$$\frac{d\widetilde{I}}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{16}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για να έχει το συναρτησιακό $\widetilde{I}(\varepsilon)$ μέγιστη ή ελάχιστη τιμή σχετικά με τις τιμές που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $\widetilde{u}(x)$ οι οποίες παράγονται με βάση την σχέση (12) για μικρές τιμές του ε.

Αντικείμενο του λογισμού των μεταβολών είναι η εύρεση των συνθηκών κάτω από τις οποίες το συναρτησιακό $\widetilde{I}(\varepsilon)$ λαμβάνει στάσιμη τιμή. Αυτό μπορεί να προκύψει ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία:

Αντικαθιστώντας τη σχέση (l4) στην (16) λαμβάνουμε:

$$\frac{d\widetilde{I}}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \frac{dF}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}\, dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \widetilde{u}}\frac{d\widetilde{u}}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{u}'}\frac{d\widetilde{u}'}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} dx = 0 \tag{17}$$

Από την σχέση (12) παραγωγίζοντας ως προς ε λαμβάνουμε:

$$\frac{d\widetilde{u}}{d\varepsilon} = \eta, \qquad \frac{d\widetilde{u}'}{d\varepsilon} = \eta' \tag{18}$$

Επίσης διαπιστώνοντας ότι για ε=0 η συνάρτηση $\widetilde{u} = u$ και η $\widetilde{u}' = u'$ έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial \widetilde{u}}|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F}{\partial \widetilde{u}'}|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial F}{\partial u'} \tag{19}$$

Έτσι η σχέση (17) μπορεί να γραφεί:

$$\frac{d\widetilde{I}}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial \widetilde{u}}\eta + \frac{\partial F}{\partial \widetilde{u}'}\eta'\right] dx = 0 \tag{20}$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες τον δεύτερο όρο του ολοκληρώματος της σχέσης (20) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (18) λαμβάνουμε:

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\right]_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right]\eta(x)dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right]\eta(x)dx = 0$$

(21)

Με τη βοήθεια του βασικού λήμματος του λογισμού των μεταβολών προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0 \qquad (22)$$

Για συγκεκριμένο συναρτησιακό $F(x,u,u')$ η σχέση (22) παράγει μιά διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ως προς την άγνωστη συνάρτηση $u(x)$. Η εξίσωση (22) ονομάζεται εξίσωση Euler-Lagrange.

Στάσιμη Τιμή Συναρτησιακού μιας Συναρτήσεως μιας Μεταβλητής - μη προκαθορισμένες τιμές στα Συνοριακά Σημεία

Στην προηγούμενη παράγραφο ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα της ευρέσεως της διαφορικής εξισώσεως, την οποία ικανοποιεί η συνάρτηση $u(x)$ που κάνει την τιμή του συναρτησιακού $I=\int_a^b F(x,\tilde{u},\tilde{u}')dx$ στάσιμη, όταν οι τιμές $u(a)$ και $u(b)$ είναι δεδομένες στα ακραία σημεία του διαστήματος $a<x<b$.

Οι συνθήκες που και ορίζονται για την συνάρτηση $u(x)$ στα ακραία σημεία $x=a$ και $x=b$ ονομάζονται κινηματικές συνοριακές συνθήκες. Στην παράγραφο αυτή θα επεκτείνουμε την εφαρμογή του λογισμού των μεταβολών στο πρόβλημα της ευρέσεως διαφορικής εξισώσεως για τη συνάρτηση $u(x)$ που κάνει στάσιμη την τιμή ενός συναρτησιακού της μορφής (13) με την διαφορά ότι η $u(x)$ μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή στο ένα ή και στα δύο ακραία σημεία $x=a$ και $x=b$.

Θεωρούμε ένα σύνολο αποδεκτών συναρτήσεων με την ακόλουθη μορφή:

$$\tilde{u}(x)=u(x)+\varepsilon\eta(x) \tag{23}$$

όπου $\eta(x)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξεως και με τις τιμές $\eta(a)$ και $\eta(b)$ δεδομένες. Αντικαθιστώντας την σχέση (23) στην (13) και ακολουθώντας ανάλογη πορεία με αυτή πού ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο λαμβάνουμε:

$$\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\left[\frac{\partial F}{\partial u'}\eta(x)\right]_a^b+\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\right]\eta(x)dx \tag{24}$$

Η σχέση (24) πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε εκλογή της συναρτήσεως $\eta(x)$ κατά συνέπεια για συναρτήσεις $\eta(x)$ οι οποίες μηδενίζονται στα άκρα $x=a$ και $x=b$. Για τέτοια εκλογή της $\eta(x)$ ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της σχέσεως (24) μηδενίζεται, άρα θα πρέπει να είναι:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \eta(x)dx \; = \; 0 \tag{25}$$

Από την τελευταία σχέση, χρησιμοποιώντας το βασικό λήμμα του λογισμού των μεταβολών, λαμβάνουμε την γνωστή εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \; = \; 0 \tag{26}$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην (24) λαμβάνουμε

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} \eta(x) \right]_a^b \; = \; 0 \tag{27}$$

Επειδή η συνάρτηση $\eta(x)$ είναι αυθαίρετη στα άκρα a και b, για να ισχύει πάντοτε η παραπάνω σχέση θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=a} \; = \; 0 \tag{28}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=b} \; = \; 0 \tag{29}$$

Οι συνθήκες (28, 29) στα άκρα ονομάζονται *φυσικές συνοριακές συνθήκες*. Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι για τη περίπτωση αυτή μιά συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ως προς την συνάρτηση $u(x)$ η γενική λύση της οποίας θα περιλαμβάνει δύο σταθερές ολοκληρώσεως οι οποίες θα υπολογίζονται από την ικανοποίηση των δεδομένων συνοριακών συνθηκών.

Σε μερικά προβλήματα οι συνοριακές συνθήκες είναι κινηματικές, δηλαδή οι τιμές της συναρτήσεως $u(x)$ δίδονται στα ακραία σημεία $x = a$ και $x = b$. Σε άλλα προβλήματα οι συνοριακές συνθήκες είναι φυσικές, δηλαδή η λύση της διαφορικής εξίσωσης πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις (28, 29). Τέλος σε άλλα προβλήματα οι συνοριακές συνθήκες μπορεί να είναι μικτές, δηλ. κινηματική συνθήκη στο ένα άκρο και φυσική συνθήκη στο άλλο.

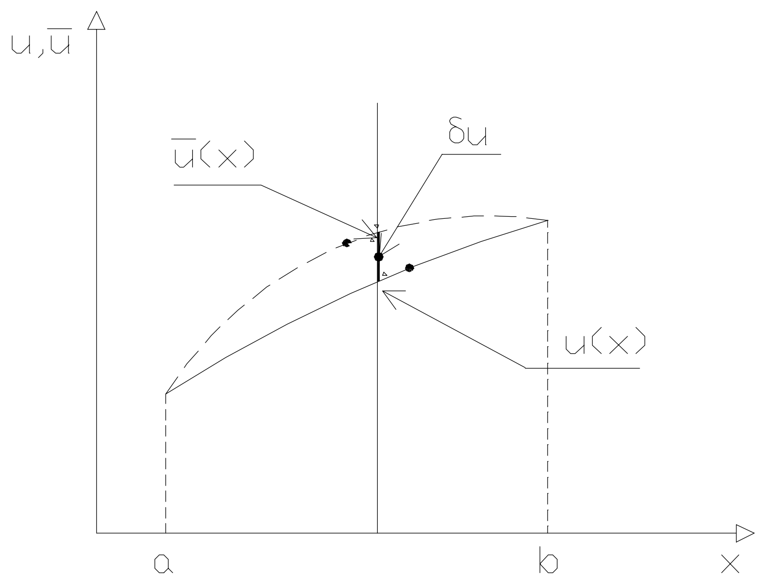
Τελεστής δέλτα

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε ένα πιο συνοπτικό τρόπο διατύπωσης των προβλημάτων εύρεσης των ακραίων τιμών των συναρτησιακών με την εισαγωγή του τελεστή δ .

Ορίζουμε τη μεταβολή δu της συναρτήσεως $u(x)$ ως εξής:

$$\delta u = \widetilde{u}(x) - u(x) = \varepsilon\eta(x) \tag{30}$$

Είναι φανερό ότι ο τελεστής δ παριστάνει μια αυθαίρετη μεταβολή της τιμής της $u(x)$ για μια ορισμένη τιμή του x . Παρατηρούμε ότι σε προβλήματα με κινηματικές συνοριακές συνθήκες; δηλαδή σε προβλήματα που οι συναρτήσεις $\widetilde{u}(x)$ λαμβάνουν δεδομένες τιμές στα ακραία σημεία $x = a$ και $x = b$ η μεταβολή της $u(x)$ πρέπει να μηδενίζεται στα σημεία αυτά. Σε προβλήματα με φυσικές συνοριακές συνθήκες οι συναρτήσεις $\widetilde{u}(x)$ λαμβάνουν αυθαίρετες τιμές στα ακραία σημεία $x = a$ και $x = b$ και κατά συνέπεια η μεταβολή της $u(x)$ δεν μηδενίζεται σε αυτά τα σημεία.



Σχ. 2. Μεταβολή μιας συναρτήσεως

Στο Σχ. 2 βλέπουμε την συνάρτηση $u(x)$ που κάνει ακρότατη την τιμή του συναρτησιακού και μια αποδεκτή συνάρτηση $\widetilde{u}(x)$ που. αντιστοιχούν σε ένα πρόβλημα με κινηματικές συνοριακές συνθήκες. Σε ένα τυχόν σημείο x η μεταβολή δu ορίζεται ως η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των συναρτήσεων $\widetilde{u}(x)$ και $u(x)$. Θα προχωρήσουμε στον ορισμό της μεταβολής της παραγώγου και του ολοκληρώματος μιας συναρτήσεως ως εξής:

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\widetilde{u} - u\right) = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \tag{31}$$

$$\delta\int_a^b u dx = \int_a^b \widetilde{u} dx - \int_a^b u dx = \int_a^b \left(\widetilde{u} - u\right) dx = \int_a^b \delta u dx \tag{32}$$

Είναι φανερό ότι ο τελεστής δ *αντιμετατίθεται* με τον διαφορικό και ολοκληρωτικό τελεστή.

Γενικώς μπορούμε να δείξουμε ότι για αρκετά μικρές μεταβολές ο τελεστής δ συμπεριφέρεται σαν διαφορικός τελεστής για παράδειγμα θεωρούμε την μεταβολή της συναρτήσεως u^n. Εξ ορισμού έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta u^n &= \left(u + \delta u - u\right)^n = \left(u + \delta u\right)^n - u^n = u^n + n u^{n-1}\delta u + n(n-1)u^{n-2}(\delta u)^2 + \ldots - u^n = \\ &= n u^{n-1}\delta u + O(\delta^2)\end{aligned} \tag{33}$$

όπου ο όρος $O(\delta^2)$ αναφέρεται στους όρους που περιέχουν μεταβολές δευτέρας και μεγαλύτερης τάξεως. Έτσι για αρκετά μικρές μεταβολές έχουμε:

$$\delta u^n = n u^{n-1}\delta u \tag{34}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x, \widetilde{u}, \widetilde{u}')$ η οποία έχει συνεχείς παραγώγους δευτέρας τάξεως ως προς τις μεταβλητές $x, \widetilde{u}, \widetilde{u}'$. Χρησιμοποιώντας τον τελεστή δ και αναφερόμενοι στη σχέση (13) μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση αυτή ως εξής:

$$F(x, \widetilde{u}, \widetilde{u}') = F(x, u + \delta u, u' + \delta u') \tag{35}$$

Η μεταβολή της συνάρτησης σ’ ένα σημείο x ορίζεται ως εξής:

$$\delta F = F(x, u + \delta u, u' + \delta u') - F(x, u, u') \tag{35}$$

Σε οποιοδήποτε σημείο x η συνάρτηση $F(x, u + \delta u, u' + \delta u')$ μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor γύρω από την u και u' κατά συνέπεια θα έχουμε:

$$\delta F = F(x, u + \delta u, u' + \delta u') - F(x, u, u') = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' + O(\delta^2) \tag{36}$$

όπου $O(\delta^2)$ περιλαμβάνει όλους τους όρους της σειράς δευτέρας και ανώτερης τάξης.

Για μικρές μεταβολές η μεταβολή της F δίδεται από τη σχέση:

$$\delta F = \delta^{(1)} F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \tag{37}$$

και ονομάζεται πρώτη μεταβολή του F .

Θα επεκτείνουμε τον ορισμό της μεταβολής μιας συναρτήσεως στη μεταβολή ενός συναρτησιακού. Θα ορίσουμε την μεταβολή του συναρτησιακού I μιας συναρτήσεως $u(x)$ και της πρώτης παραγώγου της ως εξής:

$$\delta I = \int_a^b F(x, u + \delta u, u' + \delta u')dx - \int_a^b F(x, u, u')dx \tag{38}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (37) στην (38) λαμβάνουμε:

$$\delta I = \delta^{(1)} I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' + O(\delta^2) \right] dx \tag{39}$$

Για αρκετά μικρές τιμές του δu και $\delta u'$ η μεταβολή του I γίνεται:

$$\delta I = \delta^{(1)} I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' \right] dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\frac{d\delta u}{dx} \right] dx \tag{40}$$

Η σχέση (40) ονομάζεται πρώτη μεταβολή του συναρτησιακού I .

Με παραγοντική ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης προκύπτει:

$$\delta I = \delta^{(1)} I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx + \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u \right]_a^b \tag{41}$$

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $u(x)$ κάνει το συναρτησιακό ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο). Τότε είναι φανερό ότι και οι δύο όροι της σχέσεως θα πρέπει να μηδενίζονται και επιπλέον η τιμή του δεύτερου όρου θα πρέπει να μηδενίζεται και στο σημείο $x = a$ και στο $x = b$. Δηλαδή:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \tag{42}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=a} = 0 \tag{43}$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} \right]_{x=b} = 0 \tag{44}$$

που αποτελούν την εξίσωση Euler-Lagrange και τις φυσικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα.

Προκύπτει έτσι ότι η χρήση του τελεστή δ είναι ισοδύναμη με την ανάπτυξη των προηγούμενων παραγράφων είναι όμως σημαντικά απλούστερη στην διατύπωση και διαχείρισή της.

Γενικεύσεις

Η μεταβολή μιας συναρτήσεως F της u περισσοτέρων μιας παραγώγων της π.χ. και της δευτερης παραγώγου, προκύπτει κατά ανάλογο τρόπο το ολικό διαφορικό της συναρτήσεως ως εξής:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''}\delta u'' \tag{45}$$

Η μεταβολή ενός συναρτησιακού της συναρτήσεως F θα είναι:

$$\delta I = \int_a^b \delta F dx \; = \; \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''}\delta u''\right] dx \; = 0 \tag{46}$$

Η παραγοντική ολοκλήρωση καθενός από τους όρους δίδει:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u}\delta u\right] dx \tag{47}$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'\right] dx \; = \left[\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'\right]_a^b \; + \; \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)\delta u dx \tag{48}$$

και

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u''\right] dx \; = \left[\frac{\partial F}{\partial u''}\delta u'\right]_a^b \; - \; \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u\right]_a^b \; + \; \int_a^b \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right)\delta u dx \tag{49}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\delta I = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' \right] dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u dx +$$
$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_a^b \quad +$$
$$\left[\frac{\partial F}{\partial u''} \delta u' \right]_a^b = 0 \tag{50}$$

Χρησιμοποιώντας το βασικό λήμμα του λογισμού των μεταβολών προκύπτουν αφενός η εξίσωση Euler-Lagrange και αφετέρου οι φυσικές και κινηματικές συνθήκες του προβλήματος ως εξής:

$$\begin{gathered} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0 \\ \left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_a^b = 0 \\ \left[\frac{\partial F}{\partial u''} \delta u' \right]_a^b = 0 \end{gathered} \tag{51}$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι στα σύνορα $x = a$ και $x = b$

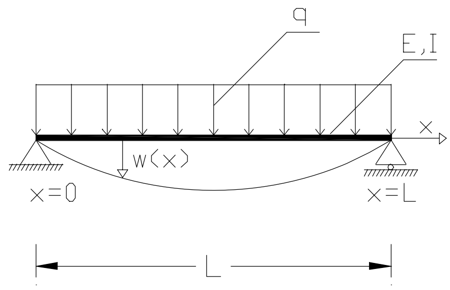
$$x = a \text{ και } x = b \quad \begin{array}{lll} \left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] = 0 & \eta & \delta u = 0 \\ \left[\frac{\partial F}{\partial u''} \right]_a^b = 0 & \eta & \delta u' = 0 \end{array} \tag{52}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΤΕΧΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΨΕΩΣ ΔΟΚΟΥ

Για την ανάπτυξη της θεωρίας κάμψεως της δοκού όπως και για κάθε θεωρία της αντοχής των υλικών, ξεκινάμε με τη θεώρηση ενός πεδίου μετακινήσεων που βασίζεται σε παραδοχές που αποβλέπουν στην ικανοποιητική απόδοση της κύριας καταπόνησης του σώματος. Το πεδίο μετακινήσεων για την δοκό επιλέγεται ως εξής:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x)_s - z\frac{dw(x)}{dx} \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= w(x) \end{aligned} \tag{1}$$

Είναι φανερό ότι όλες οι ελαστικές παραμορφώσεις που αναπτύσσονται με βάση το παραπάνω πεδίο μετακινήσεων είναι μηδενικές εκτός της ε_{xx} . Επιπλέον η καμπτική παραμόρφωση εκφράζεται συναρτήσει του x δηλ. της τεταγμένης του κεντροβαρικού άξονα της δοκού.



Σχ. 3 Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο

Το παραπάνω πεδίο μετακινήσεων δεν είναι απαλλαγμένο λαθών ακόμα και στα πλαίσια της θεωρίας των μικρών παραμορφώσεων. Οι τάσεις στις πλαϊνές πλευρές της δοκού όπου δεν υπάρχουν φορτία αναμένονται μηδενικές, όπως επίσης και στη κάτω παρειά. Αν θεωρήσουμε όμως ένα ομογενές ισότροπο ελαστικό υλικό με καταστατικό νόμο συμπεριφοράς το γενικευμένο νόμο του Hooke τότε από την μαθηματική θεωρία της ελαστικότητας έχουμε:

$$\tau_{yy} = \tau_{zz} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{xx} \tag{2}$$

Για να μηδενίσουμε τις τάσεις αυτές θα πρέπει να θεωρήσουμε ένα υλικό με λόγο Poisson $\nu = 0$. Επιπλέον το παραπάνω πεδίο μετακινήσεων δίνει μηδενική διατμητική τάση τ_{xy} γεγονός που αντίκειται στην ισορροπία κατά τον κάθετο στον κεντροβαρικό άξονα της δοκού.

Η ολική δυναμική ενέργεια της δοκού δίνεται από την σχέση:

$$I = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 - qw \right] dx \tag{3}$$

περιλαμβάνει την ελαστική ενέργεια από ροπές κάμψεως και το έργο του εξωτερικού ομοιόμορφου φορτίου.

Οι εξίσωση Euler-Lagrange για το συγκεκριμένο συναρτησιακό είναι:

$$-\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) - \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \tag{4}$$

όπου $F = \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 - qw \right]$ ή $F = \left[\frac{EI}{2}(w'')^2 - qw \right]$ και άρα η εξίσωση της δοκού προκύπτει ως εξής:

$$-\frac{d^2}{dx^2}(EIw'') + \frac{d}{dx}(0) + q = 0 \tag{4}$$

ή για σταθερό EI

$$EIw^{IV} = q \tag{5}$$

Οι αποδεκτές κινηματικές και φυσικές συνοριακές συνθήκες προκύπτουν ως εξής:

$$w' \quad \text{ή} \quad \frac{\partial F}{\partial w''} = 0 = EIw'' = M \tag{6}$$

$$w \quad \text{ή} \quad -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) + \frac{\partial F}{\partial w'} = 0 = \frac{dM}{dx} = Q \tag{7}$$

Δηλαδή η κλίση της ελαστικής γραμμής ή η ροπή θα πρέπει να είναι μηδενική και η βύθιση ή η τέμνουσα θα πρέπει να μηδενίζεται στα άκρα. Από τους συνδυασμούς των παραπάνω κινηματικών και φυσικών συνοριακών τιμών προκύπτουν τα διάφορα προβλήματα της δοκού.