ΑΝΑΛΥΣΗ ΦΟΡΕΩΝ ΜΕ
ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α

Β. Κουμούσης
Καθηγητής ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ
ΜΑΡΤΙΟΣ 1998

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί σήμερα τη σημαντικότερη μέθοδο της υπολογιστικής μηχανικής. Η ανάπτυξή της μπορεί να θεωρηθεί ως συμβολή τριών βασικών επιστημονικών περιοχών, των ενεργειακών μεθόδων της μηχανικής (energy methods), της θεωρίας προσεγγίσεων των μαθηματικών (approximation theory), αλλά και των πληροφοριακών συστημάτων σχεδιασμού CAD (Computer Aided Design).

Η αξία της μεθόδου έγκειται στη δυνατότητα της να παρουσιάζεται ως ένα ενιαίο εργαλείο για την στατική και δυναμική γραμμική και μη-γραμμική ανάλυση των κατασκευών από ραβδωτούς, επιφανειακούς και χωρικούς φορείς ή συνδυασμό τους, για τυχαία γεωμετρία, φόρτιση και συνοριακές συνθήκες.

Αρχικά, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων αποτέλεσε μια ενεργειακή μέθοδο για την επίλυση διδιάστατων φορέων όπως οι μέθοδοι Rayleigh-Ritz και Galerkin, τις οποίες μετέφερε ουσιαστικά από το χώρο των συνεχών συστημάτων στα διακριτά συστήματα. Στη συνέχεια επεκράτησαν οι αρχές των ισοπαραμετρικών στοιχείων που εξασφαλίζουν ακρίβεια στους υπολογισμούς και βελτιώνουν σημαντικά τον ενιαίο προγραμματισμό της μεθόδου.

Τέλος, η ανάπτυξη των προγραμμάτων προ- και μετά-επεξεργασίας (pre- and post-processing) των δεδομένων και αποτελεσμάτων καθιέρωσαν τη μέθοδο και τα αντίστοιχα προγράμματα που αναπτύχθηκαν. Έτσι σήμερα, χρησιμοποιώντας προγράμματα που στηρίζονται στις αρχές του CAD ο χρήστης είναι σε θέση να μορφώσει, να τροποποιήσει το προσομοίωμα του και να καθορίσει τις επιβαλλόμενες φορτίσεις κατά τρόπο απλό και εύκολα ελέγξιμο. Μετά την επίλυση του προβλήματος, η επεξεργασία των αποτελεσμάτων γίνεται άμεσα και εποπτικά ενώ σε πολλά συστήματα παρέχεται η δυνατότητα αναζήτησης των αποτελεσμάτων με τη μορφή βάσεων δεδομένων (databases).

Η επόμενη γενιά των προγραμμάτων πεπερασμένων στοιχείων αναμένεται να περιλάβει και τη συγκροτημένη διαστασιολόγηση κατασκευών κατά τρόπο που να ενσωματώνει ισχύοντες κανονισμούς αλλά και εμπειρία από το σχεδιασμό διαφόρων κατηγοριών κατασκευών.

Στο 1ο Μέρος των σημειώσεων που ακολουθούν γίνεται η προσπάθεια ανάπτυξης της μεθόδου με έμφαση στις αρχές και τη δομή της μεθόδου για την επίλυση προβλημάτων ανάλυσης κατασκευών. Ιδιαίτερη σημασία δίνεται και στα άλλα χαρακτηριστικά της μεθόδου και κυρίως στη τελική αντιμετώπισή της ως ενιαίου εργαλείου ανάλυσης και σχεδιασμού των κατασκευών.

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων ως προσεγγιστική μέθοδος επιδέχεται βελτιώσεις και προσφέρεται για διαρκή έρευνα με σκοπό τη βελτίωση της. Έτσι παρά τα είκοσι πέντε χρόνια ζωής που διανύει, πολλά θέματα που σχετίζονται με τη μέθοδο δεν έχουν βρει ακόμη ευρύτερα αποδεκτές λύσεις. Έτσι, πληθώρα πεπερασμένων στοιχείων διατίθενται για γενική ή ειδική εφαρμογή, ειδικές φορτίσεις κλπ., ενώ τα θέματα των βασικών κριτηρίων που κάθε αναπτυσσόμενο στοιχείο θα πρέπει να ικανοποιεί δεν είναι ακόμη πλήρως διευκρινισμένα και παραπέμπουν σε σύνθετες μαθηματικές αντιμετωπίσεις. Για την συστηματοποίηση της έρευνας στη περιοχή έχουν θεσπιστεί χαρακτηριστικά παραδείγματα (benchmark tests) που διευκολύνουν και προωθούν σημαντικά την έρευνα για τη συμπεριφορά των στοιχείων.

Σημαντική συμβολή στην ανάπτυξη της μεθόδου αποτελούν και οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση των συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ή προβλημάτων ιδιοτιμών στα οποία καταλήγει η επίλυση στατικών και δυναμικών προβλημάτων. Οι μέθοδοι αυτές, άμεσες ή επαναληπτικές αν και αποτελούν ένα σημαντικό κομμάτι της μεθόδου και εμπλέκονται σε όλες τις φάσεις της ανάπτυξης της, δεν θα αναπτυχθούν στις σημειώσεις αυτές. Ο κάθε ενδιαφερόμενος μπορεί να ανατρέξει για τα προβλήματα αυτά στη πλούσια διεθνή βιβλιογραφία.

Η ανάπτυξη της μεθόδου γίνεται με την εξής σειρά. Στην αρχή παρουσιάζονται στοιχεία του λογισμού των μεταβολών (calculus of variations) για την κατανόηση και μαθηματικό χειρισμό των σχέσεων των παραλλακτικών αρχών (variational principles). Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι ενεργειακές αρχές και οι μέθοδοι των μαθηματικών που απαιτούνται για τη διατύπωση των εξισώσεων και των συνοριακών συνθηκών που περιγράφουν τα διάφορα προβλήματα.. Με βάση τις αρχές αυτές παράγονται οι εξισώσεις ισορροπίας δοκού, επίπεδης ελαστικότητας, θεωρίας πλακών κλπ. Ιδιαίτερη αναφορά γίνεται στις παραδοχές των διαφόρων θεωριών της Αντοχής των Υλικών που αποδίδουν τη συμπεριφορά των μελών των κατασκευών και επισημαίνονται τα ιδιαίτερα στοιχεία που πρέπει να εστιάζεται η προσοχή του χρήστη κατά τη προσομοίωση των κατασκευών με βάση τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Για την ευχερέστερη ανάπτυξη του αναλυτικού μέρους των σχέσεων και μεθόδων που αναπτύσσονται χρησιμοποιείται το πρόγραμμα συμβολικού προγραμματισμού Maple.

Ενεργειακές Αρχές της Μηχανικής

Αρχή των Δυνατών Έργων

Από τη μηχανική του υλικού σημείου γνωρίζουμε ότι το δυνατό έργο ορίζεται ως το έργο που πραγματοποιείται σε ένα υλικό σημείο από όλες τις δυνάμεις που ενεργούν σ' αυτό, καθώς το υλικό σημείο εκτρέπεται κατά μία μικρή υποθετική μετακίνηση «δυνατή μετακίνηση» η οποία είναι συμβατή με τις συνθήκες στήριξης. Όλες οι δυνάμεις θεωρούνται σταθερές κατά τη διάρκεια της μετακίνησης. Η επέκταση της αρχής στα παραμορφώσιμα σώματα γίνεται με την θεώρηση ενός συνεχούς πεδίου μετακινήσεων που ανήκει στη κατηγορία των μικρών μετακινήσεων και το οποίο δεν παραβιάζει τις συνθήκες στήριξης.

Στη γενική περίπτωση ενός σώματος που καταλαμβάνει όγκο V και περιβάλλεται από την επιφάνεια S, διακρίνουμε το έργο των μαζικών δυνάμεων σε όλο τον όγκο του σώματος και το έργο των επιφανειακών δυνάμεων στην επιφάνεια του συνόρου. Στην επιφάνεια μπορούμε να επιβάλλουμε δυνάμεις ή μετακινήσεις. Έτσι στο τμήμα του συνόρου που επιβάλλονται καθορισμένες μετακινήσεις δεν θεωρούμε μεταβολή του πεδίου μετακινήσεων. Το έργο των μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων είναι:

$$\delta W_{virt} = \iiint_v B_i \delta u_i dv + \iint_s T_i^{(\nu)} \delta u_i ds \tag{1}$$

όπου B_i - οι μαζικές δυνάμεις (π.χ. πεδίου βαρύτητας)

T_i - οι επιφανειακές δυνάμεις (που δρουν στο σύνορο S του σώματος

Χρησιμοποιώντας την σχέση του Cauchy και το θεώρημα Gauss το δεύτερο μέρος της σχέσης γράφεται:

$$\begin{aligned}
\iiint_v B_i \delta u_i dv + \iint_s T_i^{(\nu)} \delta u_i ds &= \iiint_v B_i \delta u_i dv + \iint_s \tau_{ij} \nu_j \delta u_i ds \\
&= \iiint_v B_i \delta u_i dv + \iiint_v \left(\tau_{ij} \delta u_i\right)_{,j} dv \\
&= \iiint_v \left(B_i + \tau_{ij,j}\right) \delta u_i dv + \iiint_v \tau_{ij} \left(\delta u_i\right)_{,j} dv
\end{aligned} \tag{2}$$

Στη συνέχεια εισάγουμε ένα κινηματικά αποδεκτό πεδίο παραμορφώσεων (δηλ. ένα πεδίο παραμορφώσεων που προκύπτει από ένα κινηματικά αποδεκτό πεδίο μετακινήσεων) στο τελευταίο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\left(\delta u_i\right)_{,j} = \delta\left(u_{i,j}\right) = \delta\left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\right) = \delta\varepsilon_{ij} + \delta\omega_{ij} \tag{3}$$

Με βάση την αντισυμμετρία του τανυστή των στροφών προκύπτει $\tau_{ij}\delta\omega_{ij} = 0$ και συνεπώς:

$$\tau_{ij}\left(\delta u_i\right)_{,j} = \tau_{ij}\delta\varepsilon_{ij} \tag{4}$$

και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\iiint_v B_i \delta u_i dv + \iint_s T_i^{(\nu)} \delta u_i ds = \iiint_v \left(\tau_{ij,j} + B_i\right)\delta u_i dv + \iiint_v \tau_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dv \tag{5}$$

Οι εξωτερικές δυνάμεις B_i και $T_i^{(\nu)}$ αποτελούν ένα στατικά αποδεκτό σύστημα υπό την έννοια ότι ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας του σώματος θεωρουμένου ως στερεού και ότι σε κάθε σημείο του σώματος $\left(\tau_{ij,j} + B_i\right) = 0$ ώστε ο πρώτος όρος του δευτέρου μέρους της σχέσης να μηδενίζεται, τότε:

$$\iiint_v B_i \delta u_i dv + \iint_s T_i^{(\nu)} \delta u_i ds = \iiint_v \tau_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dv \tag{6}$$

που αποτελεί την αρχή των δυνατών έργων για ένα παραμορφώσιμο σώμα. Με άλλα λόγια η παραπάνω σχέση ερμηνεύεται ως εξής. Το εξωτερικό δυνατό έργο των μαζικών B_i και επιφανειακών T_i στατικά αποδεκτών δυνάμεων για ένα οποιοδήποτε δυνατό πεδίο μετακινήσεων u_i ισούται με το εσωτερικό έργο που αναπτύσσεται από τις τάσεις τ_{ij} και το δυνατό πεδίο παραμορφώσεων ε_{ij} που παράγει το δυνατό πεδίο μετακινήσεων u_i. Η συνθήκη αυτή αποτελεί αναγκαία συνθήκη για ισορροπία. Από μαθηματικής πλευράς αποτελεί μία ολοκληρωτική εξίσωση με άγνωστες τις συνιστώσες του τανυστή της έντασης και δεδομένο το στατικά αποδεκτό σύστημα εξωτερικών δυνάμεων και αυθαίρετη επιλογή του κινηματικά αποδεκτού δυνατού πεδίου μετακινήσεων-παραμορφώσεων. Σημαντικό στοιχείο της αρχής των δυνατών έργων είναι το γεγονός ότι ισχύει για οποιονδήποτε καταστατικό νόμο μεταξύ τάσεων παραμορφώσεων υπό την προϋπόθεση ότι βρισκόμαστε στα όρια της θεωρίας μικρών παραμορφώσεων.

Θεωρώντας ότι η αρχή των δυνατών έργων ισχύει για παραμορφώσιμο σώμα μπορούμε να εκφράσουμε το δεύτερο μέλος ως εξής:

$$\begin{aligned}\iiint_v \tau_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dv = \iiint_v \tau_{ij}\delta\left(\frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}\right)dv = \frac{1}{2}\iiint_v \tau_{ij}(\delta u_i)_{,j} dv + \frac{1}{2}\iiint_v \tau_{ij}(\delta u_j)_{,i} dv \\ = \iiint_v \tau_{ij}(\delta u_i)_{,j} dv\end{aligned} \tag{7}$$

όπου κάναμε χρήση της συμμετρίας του τανυστή της έντασης. Η τελευταία σχέση γράφεται:

$$\iiint_v \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j}\, dv = \iiint_v \left(\tau_{ij}\delta u_i\right)_{,j} dv - \iiint_v \tau_{ij,j}\delta u_i dv \tag{8}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της απόκλισης (divergence theorem) προκύπτει:

$$\begin{aligned}\iiint_v \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j}\, dv &= \iint_s \tau_{ij}\delta u_i \nu_j ds - \iiint_v \tau_{ij,j}\delta u_i dv \\ &= \iint_{s_1} \tau_{ij}\delta u_i \nu_j ds - \iiint_v \tau_{ij,j}\delta u_i dv\end{aligned} \tag{9}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι δεν νοείται μεταβολή του πεδίου των μετακινήσεων στο τμήμα του συνόρου όπου ορίζονται μετακινήσεις. Με βάση τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\iiint_v \left(\tau_{ij,j} + B_i\right)\delta u_i dv + \iint_{s_1} \left(T_i^{(\nu)} - \tau_{ij}\nu_j\right)\delta u_i ds = 0 \tag{10}$$

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση για οποιαδήποτε επιλογή μεταβολής του πεδίου των μετακινήσεων δu_i σύμφωνα με το βασικό λήμμα του λογισμού των μεταβολών πρέπει και τα δύο ολοκληρώματα να μηδενίζονται οπότε θα πρέπει να ισχύει:

$\tau_{ij,j} + B_i = 0$ στον όγκο V και

$T_i^{(\nu)} - \tau_{ij}\nu_j = 0$ ή $T_i^{(\nu)} = \tau_{ij}\nu_j$ στο σύνορο S_1

Δηλαδή ξεκινώντας με την ικανοποίηση της αρχής των δυνατών έργων σε ένα παραμορφώσιμο σώμα προκύπτει η ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας σε κάθε σημείο του σώματος, καθώς και η ικανοποίηση της συνθήκης Cauchy στο σύνορο όπου προσδιορίζονται επιφανειακές δυνάμεις (tractions).

Αρχή της Ελάχιστης Ολικής Δυναμικής Ενέργειας

Η αρχή της ελάχιστης ολικής δυναμικής ενέργειας αποτελεί εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων σε *ελαστικά* και μόνον σώματα που ακολουθούν γραμμικές ή μη-γραμμικές καταστατικές σχέσεις. Από τη θεωρία ελαστικότητας γνωρίζουμε ότι ορίζεται μια συνάρτηση πυκνότητας της ενέργειας παραμορφώσεως U (strain energy density) δηλ. της ενέργειας παραμορφώσεως στη μονάδα του όγκου, μέσω της οποίας ο τανυστής της έντασης ορίζεται ως εξής:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (1)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας της ενέργειας παραμορφώσεως U είναι μία θετικά ορισμένη συνάρτηση (positive definite) δηλ. λαμβάνει πάντοτε θετικές τιμές για οποιαδήποτε παραμόρφωση και μηδέν για μηδενική παραμόρφωση. Αντικαθιστώντας την σχέση (1) στην αρχή των δυνατών έργων λαμβάνουμε:

$$\iiint_v B_i \delta u_i dv + \iint_s T_i^{(v)} \delta u_i ds = \iiint_v \tau_{ij} \delta\varepsilon_{ij} dv \qquad (2)$$

$$\iiint_v B_i \delta u_i dv + \iint_s T_i^{(v)} \delta u_i ds = \iiint_v \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta\varepsilon_{ij} dv = \iiint_v \delta^{(1)} U dv = \delta^{(1)} \iiint_v U dv = \delta^{(1)} U \qquad (3)$$

Η σχέση αυτή εξισώνει το δυνατό έργο των μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων με την μεταβολή της συνολικής ελαστικής ενέργειας στον όγκο του σώματος. Εισάγοντας την έννοια της δυναμικής ενέργειας V των ασκούμενων δυνάμεων ως εξής:

$$V = -\iiint_v B_i u_i dv - \iint_{s_1} T_i^{(v)} u_i ds \qquad (4)$$

Θεωρώντας την πρώτη μεταβολή της δυναμικής ενέργειας έχουμε:

$$\delta^{(1)} V = -\iiint_v B_i \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \delta u_j dv - \iint_{s_1} T_i^{(v)} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} \delta u_j ds$$

Παρατηρώντας ότι $\frac{\partial u_i}{\partial u_j} = \delta_{ij}$ (Kronecker delta) στην παραπάνω σχέση παραμένουν οι όροι:

$$\delta^{(1)} V = -\iiint_v B_i \delta u_i dv - \iint_{s_1} T_i^{(v)} \delta u_i ds$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3) λαμβάνουμε:

$$\delta^{(1)} (U + V) = 0 \qquad (5)$$

η οποία αποτελεί την διατύπωση της αρχής της ελάχιστης δυναμικής ενέργειας. Εισάγοντας ως ποσότητα $U + V$ την ολική δυναμική ενέργεια π η αρχή της ελάχιστης ολικής δυναμικής ενέργειας διατυπώνεται συνοπτικά ως εξής:

$$\delta^{(1)}\pi = 0 \qquad (6)$$

Η αρχή της ελάχιστης ολικής δυναμικής ενέργειας αποτελεί αναγκαία συνθήκη για το πεδίο των τάσεων που αντιστοιχεί σε ένα σύνολο στατικά αποδεκτών δυνάμεων δηλ. από όλα τα πεδία τάσεων το πραγματικό που αντιστοιχεί σε ένα σύνολο στατικά αποδεκτών δυνάμεων καθιστά την ολική δυναμική ενέργεια ελάχιστη. Αποδεικνύεται ότι αν ικανοποιείται η σχέση (6) οι σχέσεις Euler-Lagrange αντιστοιχούν στις εξισώσεις ισορροπίας ενώ οι συνοριακές συνθήκες περιλαμβάνουν τη συνθήκη Cauchy.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Shames I.H, Dym C.L. “Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics” Hemisphere Pub. Co. 1985.

Courant, R., and Hilbert, D., “*Methods of Mathematical Physics*”, vol. 1, Interscience, New York, 1953.

Mikhlin, S. G., *“Variational Methods in Mathematical Physics”*, Macmillan, New York, 1964.

Kantorovich, L. V., and Krylov, V. I., *“Approximate Methods of Higher Analysis”*, Interscience, New York, 1964.

Παραμόρφωση

Σε ένα απολύτως στερεό σώμα κατά την μετακίνησή του από θέση σε θέση λόγω της επιβολής φορτίων, η απόσταση δύο τυχαίων σημείων του δεν μεταβάλλεται. Σε ένα παραμορφώσιμο σώμα υπό την δράση μαζικών και επιφανειακών δυνάμεων προκαλείται παραμόρφωση. Για να μετρηθεί η παραμόρφωση παρακολουθούμε ένα στοιχειώδες τμήμα του σώματος πριν και μετά την παραμόρφωση.

Το αρχικό μήκος του στοιχειώδους τμήματος σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς δηλ. πριν την παραμόρφωση, δίδεται από τη σχέση:

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \tag{1}$$

όπου ισχύει ή σύμβαση της άθροισης για επαναλαμβανόμενους δείκτες.

Αν θεωρήσουμε την παραμόρφωση ως ένα μετασχηματισμό των συντεταγμένων x_i των σημείων του σώματος στις συντεταγμένες ξ_i τότε μπορούμε να γράψουμε:

$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3)$ ή αντίστροφα $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ θεωρώντας την απεικόνιση αμφιμονοσήμαντη.

Με βάση τις σχέσεις αυτές τα διαφορικά εκφράζονται ως εξής:

$$dx_i = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}\right) d\xi_j \qquad d\xi_i = \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right) dx_j \tag{2}$$

το δε τετράγωνο του μήκους αντίστοιχα εκφράζεται ως εξής:

$$(ds)^2 = dx_i dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_m}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_m d\xi_k \tag{3}$$

όπου οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται σε όλο το πεδίο τους δηλ. i, m, k=1,2,3.

Το παραμορφωμένο τμήμα αντίστοιχα θα έχει μήκος υψωμένο στο τετράγωνο το εξής:

$$(ds^*)^2 = d\xi_i d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_m}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_m dx_k \tag{4}$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε ως μέτρο της παραμόρφωσης την διαφορά των τετραγώνων των δύο μηκών πριν και μετά την παραμόρφωση. Μπορούμε δε να εκφράσουμε το μέγεθος αυτό είτε ως προς την απαραμόρφωτη είτε την παραμορφωμένη κατάσταση ως εξής:

$$\left(ds^*\right)^2-\left(ds\right)^2=\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\delta_{ij}\right)dx_i dx_j \tag{5}$$

$$\left(ds^*\right)^2-\left(ds\right)^2=\left(\delta_{ij}-\frac{\partial x_i}{\partial\xi_i}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_j}\right)d\xi_i d\xi_j \tag{6}$$

Οι σχέσεις αυτές γράφονται αντίστοιχα:

$$\left(ds^*\right)^2-\left(ds\right)^2=2\varepsilon_{ij}dx_i dx_j \tag{7}$$

$$\left(ds^*\right)^2-\left(ds\right)^2=2\eta_{ij}dx_i dx_j \tag{8}$$

όπου εισάγαμε τους όρους της παραμόρφωσης

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_i}\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}-\delta_{ij}\right) \tag{9}$$

$$\eta_{ij}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ij}-\frac{\partial x_i}{\partial\xi_i}\frac{\partial x_i}{\partial\xi_j}\right) \tag{10}$$

Οι όροι της παραμόρφωσης ε_{ij} συμπεριφέρονται ως στοιχεία τανυστή δευτέρας τάξεως ο οποίος καλείται τανυστής της παραμόρφωσης κατά Green και αναφέρεται στην απαραμόρφωτη κατάσταση ή στη διατύπωση κατά Lagrange. Οι όροι η_{ij} συμπεριφέρονται και αυτοί ως στοιχεία τανυστή δευτέρας τάξεως ο οποίος καλείται τανυστής της παραμόρφωσης κατά Almansi αναφέρεται δε στην παραμορφωμένη κατάσταση ή σε περιγραφή κατά Euler.

Εισάγουμε το πεδίο των μετακινήσεων ως εξής:

$$u_i=\xi_i-x_i \tag{11}$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις εκφράσεις των τανυστών της παραμόρφωσης τους εκφράζουμε συναρτήσει του πεδίου των μετακινήσεων ως εξής:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (14)$$

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i}\frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right) \quad (15)$$

Θεωρούμε ότι κινούμαστε στη περιοχή των μικρών παραμορφώσεων οπότε οι παράγωγοι των μετακινήσεων είναι πολύ μικρές συγκρινόμενες με τη μονάδα

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} << 1 \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} << 1 \quad (16)$$

τα δε διαφορικά ανωτέρας τάξεως θα είναι αμελητέα. Με την παραδοχή αυτή ο τανυστής της παραμόρφωσης γίνεται:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \quad (17)$$

που αποτελεί την γραμμικοποιημένη έκφραση του τανυστή της παραμόρφωσης.

Μέθοδος Rayleigh-Ritz

Η αρχή της ελάχιστης ολικής δυναμικής ενέργειας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων προβλημάτων της μηχανικής του παραμορφώσιμου σώματος. Σύμφωνα με τη μέθοδο απαιτείται ο προσδιορισμός ενός πεδίου μετατοπίσεων u_i, $(i = 1,2,3)$, με τη μορφή σειρών απείρων όρων οι οποίες συγκλίνουν με ικανοποιητική ακρίβεια για ένα αριθμό πεπερασμένων όρων ως εξής:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \phi_i (x_1, x_2, x_3) \\ u_2 &= \sum_{j=l+1}^{m} \alpha_j \phi_j (x_1, x_2, x_3) \\ u_3 &= \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k \phi_k (x_1, x_2, x_3) \qquad n > m > l \end{aligned} \tag{1}$$

οι συναρτήσεις ϕ επιλέγονται κατάλληλα ώστε το πεδίο μετατοπίσεων να είναι κινηματικά αποδεκτό δηλ. να είναι αρκούντως συνεχές και να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Χρησιμοποιώντας το πεδίο μετατοπίσεων στην έκφραση της ολικής δυναμικής ενέργειας ενός συγκεκριμένου συστήματος η ολική δυναμική ενέργεια γενικά εκφράζεται ως εξής:

$$\pi = \pi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_r) \tag{2}$$

δηλ. ως συνάρτηση των αγνώστων συντελεστών α_i, $i = 1,2,...,r$ οι οποίοι καλούνται και γενικευμένες συντεταγμένες του προβλήματος, καθόσον ελέγχουν την προσαρμογή των μετατοπίσεων στις απαιτήσεις του προβλήματος. Θέτοντας της μεταβολή της ολικής δυναμικής ενέργειας ίση με μηδέν προκύπτει το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων:

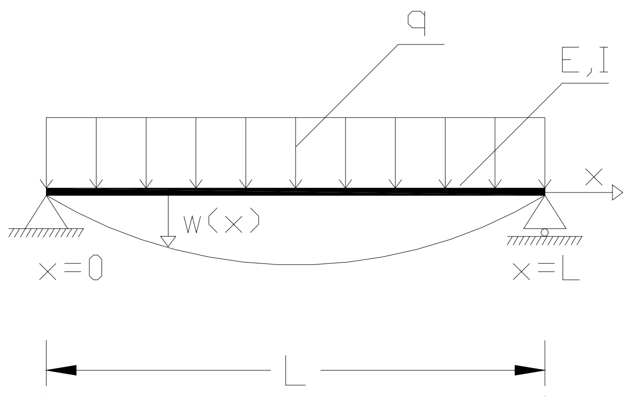
$$\frac{\partial \pi}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i = 1,2,...,r \tag{3}$$

από την επίλυση του οποίου προκύπτουν οι τιμές των αγνώστων συντελεστών. Αντικαθιστώντας τους συντελεστές αυτούς στις αρχικές εκφράσεις του πεδίου των μετακινήσεων λαμβάνουμε τις προσεγγιστικές εκφράσεις των μετατοπίσεων του προβλήματος σε αναλυτική μορφή. Οι παραμορφώσεις προκύπτουν αναλυτικά με βάση τις σχέσεις μετατοπίσεων-παραμορφώσεων, οι δε τάσεις από τις σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων. Η αναλυτική-προσεγγιστική διατύπωση της λύσης του προβλήματος επιτρέπει την εύρεση των ζητούμενων στοιχείων σε οποιαδήποτε θέση του συστήματος.

Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου έγκειται στην επιλογή των συναρτήσεων ϕ. Συνήθως επιλέγονται πλήρη πολυώνυμα κάποιας τάξεως ορισμένοι συντελεστές των οποίων απαλείφονται με χρήση των συνοριακών συνθηκών οι δε υπόλοιποι προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων της σχέσεως (2).

Εφαρμογή: Αμφιέρειστη δοκός με ομοιόμορφο φορτίο q

Δίδεται η δοκός του σχήματος και ζητείται η επίλυσή της με βάση τη μέθοδο Rayleigh-Ritz για μία δεδομένη επιλογή συναρτήσεως της βύθισης.



Σχ. 8. Αμφιέρειστη Δοκός με Ομοιόμορφο Φορτίο

Η ολική δυναμική ενέργεια μιας αμφιέρειστης δοκού με ομοιόμορφο φορτίο όπου συμμετέχουν μόνο τα έργα από ροπές κάμψεως δίδεται από την έκφραση:

$$\pi = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 - q w(x) \right] dx \tag{4}$$

οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\begin{aligned} w(0) &= w''(0) = 0 \\ w(L) &= w''(L) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Αν επιλέξουμε ως λύση την έκφραση:

$$w(x) = \alpha_o + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \tag{6}$$

Η καμπυλότητα εκφράζεται προσεγγιστικά ως εξής:

$$w''(x) = 2\alpha_2 + 3\alpha_3 x + 4\alpha_4 x^2 \tag{7}$$

Εφαρμόζοντας τις δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες προκύπτει:

$$w(0) = \alpha_o = 0$$

$$w''(0) = 2\alpha_2 = 0 \tag{8}$$

Άρα η βύθιση και η καμπυλότητά της εκφράζονται ως εξής:

$$w(x) = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 \tag{9}$$

$$w''(x) = 6\alpha_3 x + 12\alpha_4 x^2 \tag{10}$$

Εκφράζοντας τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες προκύπτει:

$$w(L) = \alpha_1 L + \alpha_3 L^3 + \alpha_4 L^4 = 0$$

$$w''(L) = 6\alpha_3 L + 12\alpha_4 L^2 = 0 \tag{11}$$

από τις οποίες οι συντελεστές α_3 και α_4 εκφράζονται συναρτήσει του συντελεστή α_1 ως εξής:

$$\alpha_4 = -\frac{\alpha_3}{2L} = \frac{\alpha_1}{L^3}$$

$$\alpha_3 = -\frac{2\alpha_1}{L^2} \tag{12}$$

Έτσι η βύθιση εκφράζεται συναρτήσει μίας γενικευμένης συντεταγμένης από την σχέση:

$$w(x) = \alpha_1 \left(x - \frac{2}{L^2} x^3 + \frac{1}{L^3} x^4 \right) \tag{13}$$

Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα συμβολικού προγραμματισμού Maple, λαμβάνουμε τις παρακάτω εκφράσεις:

```
> w(x)=a1*L*(x/L-2*(x/L)^3+(x/L)^4);

                              /          3      4 \
                              |         x      x  |
                 w(x) = a1 L |x/L - 2 ---- + ----|
                              |          3      4 |
                              \         L      L  /
```

```
> diff(",x,x);

                 2              /                2 \
                d               |     x        x   |
                --- w(x) = a1 L |-12 ---- + 12 ----|
                  2             |     3        4   |
                dx              \     L        L   /

> int(0.5*E*II*(a1*L*(-12*x/L^3+12*x^2/L^4))^2-q*a1*L*(x/L-
2*x^3/L^3+x^4/L^4),x=0..L);

                                                      3
                           a1 (12. E II a1 - 1. q L )
               .2000000000 --------------------------
                                        L

> diff(",a1);


                                          3
                 12. E II a1 - 1. q L                a1 E II
       .2000000000 --------------------- + 2.400000000 -------
                            L                              L



> simplify(");

                                                    3
                             24. E II a1 - 1. q L
                 .2000000000 ---------------------
                                        L

> solve(", a1);

                                           3
                                         q L
                         .04166666667 ----
                                         E II
```

Τα εισαγωγικά (“) στις εντολές του προγράμματος αναφέρονται στην προηγούμενη έκφραση, η εντολή diff εκτελεί την παραγώγιση, ενώ η εντολή int την ολοκλήρωση της παράστασης. Επειδή το I είναι δεσμευμένο από το πρόγραμμα για την φανταστική μονάδα χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο II για την ροπή αδράνειας.

Προκύπτει έτσι η παρακάτω έκφραση για την ελαστική γραμμή της αμφιέρειστης δοκού που αποτελεί και την ακριβή λύση του προβλήματος.

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI}\left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4}\right) \qquad (13)$$

ή

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI}\left(\xi - 2\xi^2 + \xi^4\right) \qquad \xi = \frac{x}{L} \tag{14}$$

Ενδιαφέρον έχει να δούμε την έκφραση της βύθισης της αμφιέρειστης δοκού με ομοιόμορφο φορτίο θεωρώντας αρχικά ένα πολυώνυμο με έξι όρους δηλ.

$$w(x) = \alpha_o + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \tag{15}$$

Η εφαρμογή των δύο πρώτων συνοριακών συνθηκών μηδενίζει πάλι τους όρους α_0 και α_2, ενώ η εφαρμογή των δύο άλλων δίδει τις παρακάτω εξισώσεις:

$$w(L) = \alpha_1 L + \alpha_3 L^3 + \alpha_4 L^4 + \alpha_5 L^5 = 0$$

$$w''(L) = 6\alpha_3 L + 12\alpha_4 L^2 + 20\alpha_5 L^3 = 0 \tag{16}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι το πρόγραμμα συμβολικού προγραμματισμού Maple επιλύουμε τις δύο εξισώσεις ως προς α_4 και α_5 συναρτήσει των α_1 και α_3 ως εξής:

```
> eq1:=a1*L+a3*L^3+a4*L^4+a5*L^5;

                                 3       4       5
                 eq1 := a1 L + a3 L  + a4 L  + a5 L

> eq2:=6*a3*L+12*a4*L^2+20*a5*L^3;

                                        2          3
                 eq2 := 6 a3 L + 12 a4 L  + 20 a5 L

> solve({eq1, eq2}, {a4,a5});

                          2                             2
                 7 a3 L  + 10 a1             2 a1 + a3 L
        {a4 = - 1/4 ---------------, a5 = 3/4 ------------}
                           3                          4
                          L                          L
```

Δηλαδή:

$$\alpha_4 = -\frac{7\alpha_3 L^2 + 10\alpha_1}{4L^3}, \qquad \alpha_5 = \frac{3\left(2\alpha_1 + \alpha_3 L^2\right)}{4L^4} \tag{17}$$

Έτσι η βύθιση εκφράζεται ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες α_1 και α_3 ως εξής:

```
>w(x):=a1*x+a3*x^3+(-
1/4*(7*a3*L^2+10*a1)/L^3)*x^4+(3/4*(2*a1+a3*L^2)/L^4)*x^5;

w(x) :=

                              2            4                    2   5
               3       (7 a3 L  + 10 a1) x        (2 a1 + a3 L ) x
    a1 x + a3 x  - 1/4 -------------------- + 3/4 -----------------
                                 3                         4
                                L                         L
```

Στη συνέχεια παραγωγίζουμε δύο φορές την βύθιση ως προς x και λαμβάνουμε την έκφραση της καμπυλότητας ως εξής:

```
> diff(",x,x);

                          2            2                   2   3
                 (7 a3 L  + 10 a1) x       (2 a1 + a3 L ) x
        6 a3 x - 3 -------------------- + 15 -----------------
                              3                        4
                             L                        L
```

Εισάγοντας την βύθιση και την καμπυλότητα στην ολοκληρωτική έκφραση της ολικής δυναμικής ενέργειας (4) λαμβάνουμε:

```
> int(0.5*E*II*(6*a3*x-
3*(7*a3*L^2+10*a1)/L^3*x^2+15*(2*a1+a3*L^2)/L^4*x^3)^2-q*(a1*x+a3*x^3-
1/4*(7*a3*L^2+10*a1)/L^3*x^4+3/4*(2*a1+a3*L^2)/L^4*x^5),x=0..L);

                            2                     2               2  4
.003571428571 (1200. E II a1  + 360. E II a1 a3 L  + 48. E II a3  L

              3             5
     - 70. q L  a1 - 7. q L  a3)/L
```

Δηλαδή η ολική δυναμική ενέργεια της δοκού δίδεται συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων ως εξής:

```
                                 2                     2
p := .003571428571 (1200. E II a1  + 360. E II a1 a3 L

                  2  4           3            5
     + 48. E II a3  L  - 70. q L  a1 - 7. q L  a3)/L
```

Παραγωγίζοντας την ολική δυναμική ενέργεια ως προς τις δύο γενικευμένες συντεταγμένες λαμβάνουμε το παρακάτω σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

```
> equa1:=diff(p,a1);

                                                              2          3
```

```
                          2400. E II a1 + 360. E II a3 L  - 70. q L
  equa1 := .003571428571 ------------------------------------------
                                              L

> equa2:=diff(p,a3);

                                       2                 4         5
                          360. E II a1 L  + 96. E II a3 L  - 7. q L
  equa2 := .003571428571 ------------------------------------------
                                              L
```

Τέλος η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων μας δίδει τις τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων που ελαχιστοποιούν την ολική δυναμική ενέργεια ως εξής:

```
> solve({equa1,equa2},{a1,a3});

                                                          3
                               q L                        L  q
        {a3 = -.08333333333 ----, a1 = .04166666667 ----}
                               E II                       E II
```

Προκύπτει έτσι ότι:

$$\alpha_1 = \frac{qL^3}{24EI}, \qquad \alpha_3 = -\frac{2qL}{24EI} \tag{18}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση (17) προκύπτει:

$$\alpha_4 = -\frac{7\alpha_3 L^2 + 10\alpha_1}{4L^3} = \frac{q}{24EI}, \qquad \alpha_5 = \frac{3\left(2\alpha_1 + \alpha_3 L^2\right)}{4L^4} = 0 \tag{19}$$

Δηλαδή η βύθιση προκύπτει η ίδια και για αυτή την επιλογή συναρτήσεως.

$$w(x) = \frac{qL^4}{24EI}\left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4}\right) \tag{20}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η επιλογή συναρτήσεων που βρίσκονται στον δρόμο της ακριβούς λύσης δίδει με την μέθοδο Rayleigh-Ritz τα ακριβή αποτελέσματα. Όπως φάνηκε δε από την παραπάνω λύση εφόσον η μέθοδος βρει την ακριβή λύση, με κάποιο αριθμόν όρων, εμμένει στην διατήρηση της, ανεξάρτητα από την μεγαλύτερη ελευθερία που προσδίδουμε στην αρχική μας επιλογή εισάγοντας περισσότερες γενικευμένες συντεταγμένες.

Μέθοδος Galerkin

Η μέθοδος Galerkin αποτελεί μία μέθοδο εύρεσης προσεγγιστικών λύσεων διαφορικών εξισώσεων ή συστημάτων διαφορικών εξισώσεων σε κάποιο πεδίο. Η μέθοδος επενεργεί επί της διαφορικής εξίσωσης και όχι επί κάποιου συναρτησιακού όπως π.χ. η ολική δυναμική ενέργεια ενός συστήματος και από την άποψη αυτή προσφέρεται για την λύση προβλημάτων στα οποία δεν διατυπώνονται αντίστοιχα συναρτησιακά-ενεργειακές αρχές.

Θεωρούμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση,

$$Lu = f \tag{1}$$

της οποίας οι συνοριακές συνθήκες είναι ομογενείς. Ο τελεστής L αντιπροσωπεύει έναν οποιονδήποτε γραμμικό διαφορικό τελεστή (π.χ. $L = EI\dfrac{d^4}{dx^4}(\ \ )$ για μια δοκό).

Αν εκφράσουμε την προσέγγιση της λύσης με τη μορφή μίας σειράς όρων που βασίζονται στην επιλογή κάποιας βάσης συναρτήσεων, δηλ:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i \tag{2}$$

τότε η αντικατάσταση της προσεγγιστικής λύσης στην διαφορική εξίσωση θα ικανοποιεί την εξίσωση αφήνοντας κάποιο υπόλοιπο δηλ.

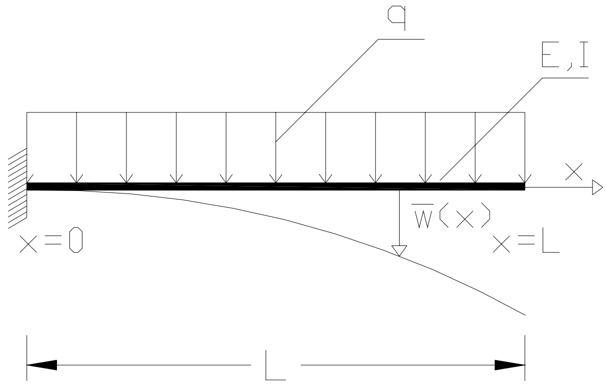
$$L\tilde{u} - f = \varepsilon \tag{3}$$

Η απαίτηση περιορισμού του υπολοίπου είναι να το θεωρήσουμε ορθογώνιο ως προς την βάση των επιλεγμένων συναρτήσεων ϕ_i δηλ. να απαιτήσουμε τον μηδενισμό της νοητής προβολής του στο χώρο των n διαστάσεων που δομούν οι n το πλήθος συναρτήσεις ϕ_i. Η συνθήκη ορθογωνικότητας αναλυτικά διατυπώνεται ως εξής:

$$\iiint_v \varepsilon \phi_i dv = \iiint_v (L\tilde{u} - f)\phi_i dv = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{4}$$

Οι σχέση (4) παρέχει n αλγεβρικές εξισώσεις ως προς τις n άγνωστες γενικευμένες συντεταγμένες α_i, η επίλυση των οποίων δίδει τις τιμές των α_i, $i = 1,2,\ldots,n$ που εξασφαλίζουν την καλύτερη προσέγγιση στο χώρο που καθορίζει η επιλογή των συναρτήσεων ϕ_i. Αν το πλήθος των συναρτήσεων αυτών μεγαλώσει, τότε η προσέγγιση βελτιώνεται και θεωρητικά αν το πλήθος γίνει άπειρο επιτυγχάνεται η σύγκλιση της προσεγγιστικής λύσης με την ακριβή. Οι αποδείξεις των ισχυρισμών αυτών υπάρχουν αλλά είναι αρκετά πολύπλοκες και για τον λόγο αυτό δεν παρατίθενται στις σημειώσεις αυτές.

Εφαρμογή: Πρόβολος με ομοιόμορφο φορτίο q



Σχ. 8 Πρόβολος με ομοιόμορφο φορτίο

Η διαφορική εξίσωση της δοκού είναι:

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = \frac{q}{EI} \tag{5}$$

Η προσεγγιστική λύση μπορεί να ληφθεί υπό πολυωνυμική μορφή ως εξής:

$$\tilde{w}(x) = \alpha_o + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \tag{6}$$

Η λύση αυτή για να ικανοποιεί τις κινηματικές συνοριακές συνθήκες στην πάκτωση του προβόλου, δηλ:

$$\begin{aligned} \tilde{w}(0) &= 0 \\ \tilde{w}'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

πρέπει $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ και άρα ως λύση θεωρείται η παρακάτω έκφραση:

$$\tilde{w}(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \tag{8}$$

Σύμφωνα με τη μέθοδο Galerkin θα πρέπει να απαιτήσουμε την ορθογωνικότητα του λάθους για την επιλογή των συναρτήσεων βάσεως x^2, x^3, x^4, x^5 άρα:

$$\int_0^L \left(L\widetilde{w}(x) - f\right)\phi_i dx = 0 \qquad\qquad i = 1,2$$

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left(24\alpha_4 + 120\alpha_5 x - \frac{q}{EI}\right)x^2 dx = 0 \\ &\int_0^L \left(24\alpha_4 + 120\alpha_5 x - \frac{q}{EI}\right)x^3 dx = 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

Χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα συμβολικού προγραμματισμού όπως το πρόγραμμα Maple οι παραπάνω δύο εξισώσεις.

```
> w(x):=a2*x^2+a3*x^3+a4*x^4+a5*x^5;

                            2        3        4        5
                w(x) := a2 x  + a3 x  + a4 x  + a5 x

> diff(",x,x,x,x);

                           24 a4 + 120 a5 x

> int(((24*a4+120*a5*x-q/E/II)*x^2),x=0..L);

                      3
                     L  (90 a5 L E II + 24 a4 E II - q)
                1/3 ----------------------------------
                                  E II

> eq1:="=0;

                       3
                      L  (90 a5 L E II + 24 a4 E II - q)
          eq1 := 1/3 ---------------------------------- = 0
                                   E II

> int(((24*a4+120*a5*x-q/E/II)*x^3),x=0..L);

                      4
                     L  (96 a5 L E II + 24 a4 E II - q)
                1/4 ----------------------------------
                                  E II

> eq2:="=0;

                       4
                      L  (96 a5 L E II + 24 a4 E II - q)
          eq2 := 1/4 ---------------------------------- = 0
                                   E II

> solve({eq1,eq2},{a4,a5});

                                           q
                       {a5 = 0, a4 = 1/24 ----}
                                          E II
```

Προκύπτει λοιπόν ότι η λύση γίνεται:

$$\tilde{w}(x) = \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \frac{q}{24EI} x^4 \tag{10}$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές καθορίζονται από τις φυσικές συνοριακές συνθήκες στο άκρο του προβόλου.

```
                                                  4
                      2       3          q x
      w(x) := a2 x  + a3 x  + 1/24 ----
                                         E II

> diff(",x,x);

                                          2
                                       q x
                 2 a2 + 6 a3 x + 1/2 ----
                                       E II

> diff(",x);

                               q x
                        6 a3 + ----
                               E II

> equa1:=2*a2+6*a3*L+1/2*q/E/II*L^2=0;

                                                2
                                             q L
          equa1 := 2 a2 + 6 a3 L + 1/2 ---- = 0
                                             E II

> equa2:=6*a3+q/E/II*L=0;

                                     q L
                 equa2 := 6 a3 + ---- = 0
                                     E II

> solve({equa1,equa2},{a2,a3});

                                                2
                           q L            q L
         {a3 = - 1/6 ----, a2 = 1/4 ----}
                           E II           E II
```

Άρα:

$$\begin{aligned}\tilde{w}(x) &= \frac{qL^2}{4EI}x^2 - \frac{qL}{6EI}x^3 + \frac{q}{24EI}x^4 \\ \tilde{w}(x) &= \frac{qL^4}{24EI}\left(6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4\right)\end{aligned} \tag{11}$$

όπου $\xi = \dfrac{x}{L}$

Η παραπάνω λύση αποτελεί την ακριβή λύση του προβλήματος.

Μετάβαση από την κλασική μέθοδο Rayleigh-Ritz στα Πεπερασμένα στοιχεία

Βήμα 1ο: Επιλογή Τμηματικών Συναρτήσεων

Η κλασική μέθοδος Rayleigh-Ritz επιδιώκει να προσεγγίσει το πεδίο μετακινήσεων ενός προβλήματος σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού του, π.χ. για μία δοκό μήκους L προσπαθεί να εκτιμήσει την ελαστική γραμμή από την αρχή $x = 0$ μέχρι το τέλος $x = L$. Με δεδομένη την ικανοποίηση των συνοριακών τιμών του προβλήματος στα άκρα προκύπτει ότι η προσεγγιστική λύση είναι ακριβής στα άκρα. Για όλα τα ενδιάμεσα σημεία όμως υπάρχει κάποια απόκλιση, μικρή ή μεγάλη ανάλογα με την επιτυχία της επιλογής του προσεγγιστικού πεδίου μετακινήσεων. Επειδή στη γενικότερη περίπτωση δεν έχουμε κάποιο μέτρο για τις αποκλίσεις αυτές η ιδέα είναι να εκφράσουμε το πεδίο μετακινήσεων τμηματικά διαχωρίζοντας το πεδίο ορισμού του προβλήματος σε επιμέρους τμήματα.

Για ένα μονοδιάστατο πρόβλημα αξονικής έντασης μιας ράβδου μπορούμε να θεωρήσουμε ως ενιαίο πεδίο μετατοπίσεων από το παρακάτω:

$$u(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \qquad 0 \le x \le L \tag{1}$$

το οποίο ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $u(0) = 0$ και άρα είναι αποδεκτό πεδίο μετακινήσεων για το πρόβλημα της αξονικής έντασης της ράβδου με σταθερό το άκρο $x = 0$.

Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε ως αποδεκτό πεδίο μετατοπίσεων την σύνδεση τριών διαδοχικών γραμμικών πεδίων μετατοπίσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} u(x) &= a_0 + a_1 x && 0 \le x \le x_2 \\ u(x) &= a_2 + a_3 x && x_2 \le x \le x_3 \\ u(x) &= a_4 + a_5 x && x_3 \le x \le L \end{aligned} \tag{2}$$

Το πεδίο μετακινήσεων αυτό για να θεωρηθεί αποδεκτό θα πρέπει αφενός να ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $u(0) = 0$ και να είναι αρκούντως συνεχές δηλ. να είναι για την συγκεκριμένη επιλογή πεδίο μετακινήσεων C^0. Θα πρέπει λοιπόν να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} u(0) &= a_0 = 0 \\ u(x_2) &= a_0 + a_1 x_2 = a_2 + a_3 x_2 \\ u(x_3) &= a_2 + a_3 x_3 = a_4 + a_5 x_3 \end{aligned} \tag{3}$$

Οι τρεις παραπάνω σχέσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απαλοιφή τριών συντελεστών $a_0 = 0,\ a_2 = (a_1 - a_3)x_2,\ a_4 = (a_1 - a_3)x_2 + (a_3 - a_5)x_3$ ώστε να προκύψει τελικά το παρακάτω πεδίο μετατοπίσεων:

$$\begin{aligned}
u(x) &= a_1 x && 0 \le x \le x_2 \\
u(x) &= a_1 x_2 + a_3 (x - x_2) && x_2 \le x \le x_3 \\
u(x) &= a_1 x_2 + a_3 (x_3 - x_2) + a_5 (x - x_3) && x_3 \le x \le L
\end{aligned} \tag{4}$$

Η ολική δυναμική ενέργεια του προβλήματος για γραμμικά μεταβαλλόμενο αξονικό φορτίο $q = cx$ είναι:

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA\varepsilon_x^2 dx - \int_0^L qu(x)dx \tag{5}$$

ακολουθώντας τα βήματα της μεθόδου Rayleigh-Ritz για τα δύο πεδία μετατοπίσεων και χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα συμβολικού προγραμματισμού Maple έχουμε:

Πεδίο Μετατοπίσεων (1)

```
> u:=a1*x+a2*x^2+a3*x^3;

                                      2       3
                      u := a1 x + a2 x  + a3 x
```

Η παραμόρφωση προκύπτει παραγωγίζοντας το πεδίο μετατοπίσεων

```
> ex:=diff(u,x);

                                                2
                     ex := a1 + 2 a2 x + 3 a3 x
```

Η ολική δυναμική ενέργεια προκύπτει με βάση τη σχέση (5) ως εξής:

```
> p:=int((0.5*E*A*ex^2-c*x*u),x=0..L);

                       2  5                             4        3
p := .9000000000 E A a3  L  + 1.500000000 E A a2 a3 L  + E A L  a1 a3

                        3   2               2                     2
     + .6666666667 E A L  a2  + E A a1 a2 L  + .5000000000 E A a1  L

                          5                       4
     - .2000000000 c a3 L  - .2500000000 c a2 L

                          3
     - .3333333333 c a1 L
```

Με βάση την έκφραση της ολικής ενέργεια παραγωγίζοντας διαδοχικά ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες λαμβάνουμε τις παρακάτω αλγεβρικές εξισώσεις:

```
> equa1:=diff(p,a1);

equa1 :=

           3               2                                          3
    E A L  a3 + E A a2 L  + 1.000000000 E A a1 L - .3333333333 c L

>
> equa2:=diff(p,a2);

                                    4                    3              2
equa2 := 1.500000000 E A a3 L  + 1.333333333 E A L  a2 + E A a1 L

                       4
     - .2500000000 c L

> equa3:=diff(p,a3);

                                    5                       4        3
equa3 := 1.800000000 E A a3 L  + 1.500000000 E A a2 L  + E A L  a1

                       5
     - .2000000000 c L
```

Τέλος επιλύουμε το σύστημα των τριών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες και λαμβάνουμε:

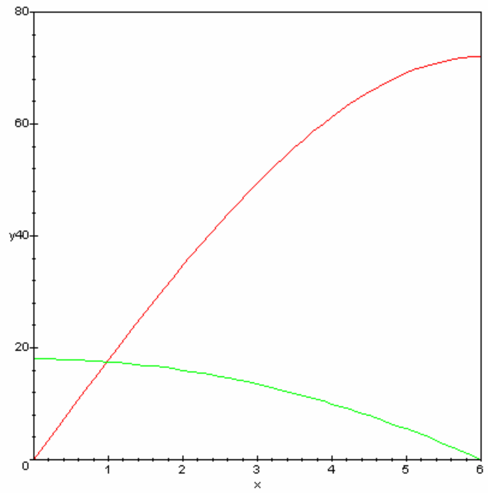
```
> solve({equa1,equa2,equa3},{a1,a2,a3});

                     c                          -9 L c
{a3 = -.1666666670 ---, a2 = .6000000096 10    ---,
                   E A                          E A

                       2
                     L  c
    a1 = .4999999997 ----}
                     E A
```

Δηλαδή $a_2 = 0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων εκφράζουμε το πεδίο μετατοπίσεων ως εξής:

$$u(x) = \frac{c}{6EA}\left(3L^2 x - x^3\right) \qquad (3)$$

ενώ οι παραμόρφωση δίδεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{cL^2}{2EA} - \frac{c}{2EA}x^2 = \frac{c}{EA}\left(\frac{L^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \qquad (4)$$



Απεικόνιση πεδίου μετατοπίσεων - παραμορφώσεων

Πεδίο Μετατοπίσεων (2)

```
> u1:=a1*x;
                              u1 := a1 x
> u2:=a1*L/3+a3*(x-L/3);
                    u2 := 1/3 a1 L + a3 (x - 1/3 L)
> u3:=a1*L/3+a3*L/3+a5*(x-2*L/3);
               u3 := 1/3 a1 L + 1/3 a3 L + a5 (x - 2/3 L)
```

Παραγωγίζοντας αντίστοιχα τις παραπάνω σχέσεις λαμβάνουμε τις εκφράσεις των παραμορφώσεων για κάθε επιμέρους τμήμα ως εξής:

```
> e1:=diff(u1,x);
                               e1 := a1
> e2:=diff(u2,x);
                               e2 := a3
> e3:=diff(u3,x);
                               e3 := a5
```

Αντίστοιχα η ολική δυναμική ενέργεια υπολογίζεται κατά τμήματα ως εξής:

```
> p1:=int(0.5*E*A*e1^2-c*x*u1,x=0..L/3);
                                  2                      3
          p1 := .1666666667 E A a1  L - .01234567901 c L  a1
```

```
> p2:=int(0.5*E*A*e2^2-c*x*u2,x=L/3..2*L/3);

p2 :=

                      2                         3
    .1666666667 E A a3  L - .03086419753 c a3 L

                       3
     - .05555555556 c L  a1

> p3:=int(0.5*E*A*e3^2-c*x*u3,x=2*L/3..L);

                        2                     3
p3 := .1666666667 E A a5  L - .09259259259 c L  a1

                          3                       3
     - .09259259259 c a3 L  - .04938271605 c a5 L
```

Παραγωγίζοντας την ολική δυναμική ενέργεια ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες λαμβάνουμε:

```
> eq1:=diff(p1+p2+p3,a1);

                                                        3
            eq1 := .3333333334 E A a1 L - .1604938272 c L

> eq2:=diff(p1+p2+p3,a3);

                                                        3
            eq2 := .3333333334 E A a3 L - .1234567901 c L

> eq3:=diff(p1+p2+p3,a5);

                                                        3
           eq3 := .3333333334 E A a5 L - .04938271605 c L
```

Τέλος από την επίλυση του συστήματος των τριών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες λαμβάνουμε:

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{a1,a3,a5});

                     2                       2                       2
                  c L                     c L                     c L
{a1 = .4814814815 ----, a5 = .1481481481 ----, a3 = .3703703702 ----}
                  E A                     E A                     E A
```

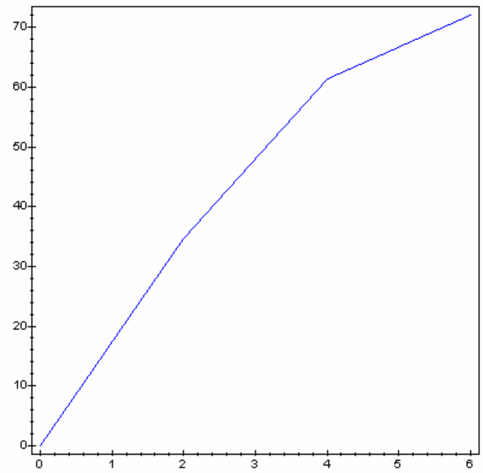
Δηλ. το πεδίο των μετατοπίσεων εκφράζεται από τις παρακάτω εκφράσεις για κάθε τμήμα:

$$u(x) = 0.4814814815\frac{cL^2}{EA}x \qquad 0 \le x \le L/3$$

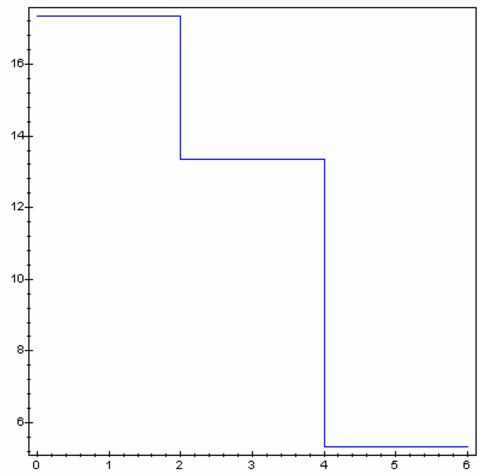
$$u(x) = 0.4814814815\frac{cL^3}{3EA} + 0.3703703702\frac{cL^2}{EA}(x - \frac{L}{3}) \qquad L/3 \le x \le 2L/3 \, (2)$$

$$u(x) = 0.8518518517\frac{cL^3}{3EA} + 0.1481481481\frac{cL^2}{EA}(x - \frac{2L}{3}) \qquad 2L/3 \le x \le L$$

Για μήκος $L = 6$ προκύπτουν οι παρακάτω απεικονίσεις των πεδίων μετατοπίσεων και παραμορφώσεων διαιρεμένες με $\frac{c}{EA}$.



Απεικόνιση πεδίου μετατοπίσεων



Απεικόνιση πεδίου παραμορφώσεων

Από τη σύγκριση των δύο πεδίων μετατοπίσεων προκύπτει ότι αν και το πλήθος των γενικευμένων συντεταγμένων και για τις δύο περιπτώσεις είναι τρία, τα πεδία μετατοπίσεων είναι τελείως διαφορετικά. Το πρώτο που είναι και το ακριβές, όπως προκύπτει από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης του προβλήματος, ανήκει στην κατηγορία συνέχειας C^2, ενώ το δεύτερο στην κατηγορία C^0 γι αυτό και οι παραμορφώσεις που ορίζει είναι βαθμιδωτές.

Για να προκύψουν ταυτόσημες λύσεις είναι φανερό ότι για κάθε τμήμα απαιτείται ένα κυβικό πολυώνυμο γεγονός που σημαίνει 3x4-3=9 γενικευμένες συντεταγμένες για το πρόβλημα.

Η μέθοδος αυτή επιτυγχάνει τον επιμερισμό του πεδίου δίδοντας την δυνατότητα καλύτερης προσέγγισης των μετατοπίσεων στα σημεία διαχωρισμού. Αυτό όμως δεν σημαίνει και καλύτερη προσέγγιση των παραμορφώσεων που μάλλον επιτυγχάνεται περί το μέσον των τμημάτων. Το πλεονέκτημα που υπάρχει με την μεθοδολογία αυτή είναι ότι επειδή η ολική δυναμική ενέργεια είναι βαθμωτό μέγεθος η άθροιση της συμβολής κάθε τμήματος μπορεί να γίνει και σε επίπεδο τμήματος εκφράζοντας αφενός το πεδίο μετατοπίσεων ως προς την τοπική μεταβλητή του τμήματος s, και αφετέρου την φόρτιση ως προς την ίδια μεταβλητή. Προκύπτει τότε το παρακάτω πεδίο μετατοπίσεων:

$$\begin{aligned} &u_1(s) = a_1 s && 0 \le s \le L/3 \\ &u_2(s) = a_1 L/3 + a_3 s && 0 \le s \le L/3 \\ &u_3(s) = (a_1 + a_3)L/3 + a_5 s && 0 \le s \le L/3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Η δε φόρτιση εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} &q_1(s) = cs && 0 \le s \le L/3 \\ &q_2(s) = cL/3 + cs && 0 \le s \le L/3 \\ &q_3(s) = 2cL/3 + cs && 0 \le s \le L/3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω στοιχεία στη γλώσσα συμβολικού προγραμματισμού Maple έχουμε τις παρακάτω εκφράσεις των μετατοπίσεων:

```
> u1:=a1*s;
                              u1 := a1 s

> u2:=a1*L/3+a3*s;
>
                        u2 := 1/3 a1 L + a3 s

> u3:=(a1+a3)*L/3+a5*s;
                     u3 := 1/3 (a1 + a3) L + a5 s
```

Η φόρτιση εκφράζεται τώρα τοπικά σε κάθε τμήμα του χωρίου ως εξής:

```
> q1:=c*s;
                              q1 := c s
> q2:=c*L/3+c*s;
                         q2 := 1/3 c L + c s
> q3:=2*c*L/3+c*s;
                         q3 := 2/3 c L + c s
```

Οι παραμορφώσεις εκφράζονται με τις παρακάτω εκφράσεις για κάθε τμήμα:

```
> e1:=diff(u1,s);
                               e1 := a1
> e2:=diff(u2,s);
                               e2 := a3
> e3:=diff(u3,s);
                               e3 := a5
```

Αντίστοιχα για κάθε τμήμα υπολογίζεται η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος:

```
> p1:=int(0.5*E*A*e1^2-q1*u1,s=0..L/3);
                                   2                      3
          p1 := .1666666667 E A a1  L - .01234567901 c L  a1
> p2:=int(0.5*E*A*e2^2-q2*u2,s=0..L/3);
p2 :=
                       2                         3
    .1666666667 E A a3  L - .03086419753 c a3 L
                        3
     - .05555555556 c L  a1
> p3:=int(0.5*E*A*e3^2-q3*u3,s=0..L/3);
                         2                         3
p3 := .1666666667 E A a5  L - .04938271605 c a5 L
                        3                          3
     - .09259259259 c L  a1 - .09259259259 c a3 L
```

Παραγωγίζοντας την ολική δυναμική ενέργεια ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες λαμβάνουμε το παρακάτω σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις γενικευμένες συντεταγμένες:

```
> eq1:=diff(p1+p2+p3,a1);

                                                          3
            eq1 := .3333333334 E A a1 L - .1604938272 c L

> eq2:=diff(p1+p2+p3,a3);

                                                          3
            eq2 := .3333333334 E A a3 L - .1234567901 c L

> eq3:=diff(p1+p2+p3,a5);

                                                          3
           eq3 := .3333333334 E A a5 L - .04938271605 c L
```

Τέλος από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι τιμές των γενικευμένων συντεταγμένων που ελαχιστοποιούν την ολική δυναμική ενέργεια.

```
> solve({eq1,eq2,eq3},{a1,a3,a5});

                     2                       2                      2
                  c L                     c L                    c L
{a5 = .1481481481 ----, a1 = .4814814815 ----, a3 = .3703703702 ----}
                  E A                     E A                    E A
```

Προκύπτουν έτσι οι ίδιες τιμές για τις γενικευμένες συντεταγμένες με την επίλυση που έγινε με την ενιαία μεταβλητή x.

Η χρήση των γενικευμένων συντεταγμένων μειονεκτεί σε φυσική εποπτεία δηλ. ενώ αυτές προσδίδουν ελευθερία ενεργειακής προσαρμογής στο πεδίο μετατοπίσεων που εκφράζουν, δεν αποτελούν στη γενικότητά τους συγκροτημένες φυσικές ποσότητες ελέγχου. Βέβαια στη συγκεκριμένη εφαρμογή εκφράζουν την κλίση κάθε γραμμικού πεδίου ή την σταθερή παραμόρφωση σε κάθε τμήμα. Γενικότερα όμως σε ένα μεγαλύτερης τάξης πεδίο η φυσική εποπτεία κάθε γενικευμένης συντεταγμένης δεν μπορεί εύκολα να συστηματοποιηθεί. Η πρόσθετη δυσκολία που συνεπάγεται η χρήση των γενικευμένων συντεταγμένων είναι ότι απαιτούν την απαλοιφή ορισμένων από αυτές με βάση τις εξισώσεις συνέχειας του πεδίου των μετατοπίσεων. Η επιλογή αυτών που θα απαλειφθούν δεν είναι μονοσήμαντη γεγονός που για το ίδιο πεδίο μετακινήσεων μπορούν να προκύπτουν διάφορες αλγεβρικές εκφράσεις.

Βήμα 2ο - Συναρτήσεις Σχήματος

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων σημαντικό βήμα στην πορεία ανάπτυξης της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί η έκφραση του πεδίου των μετακινήσεων ως προς τις ακραίες μετακινήσεις των τμημάτων του προβλήματος. Με τον τρόπο αυτό προσδίδεται ενιαία εποπτεία στο πεδίο μετακινήσεων η δε απαίτηση της συνέχειας του πεδίου και της ικανοποίησης των συνοριακών συνθηκών παραπέμπεται σε καθολικό επίπεδο συνδέοντας τις ακραίες μετακινήσεις των στοιχείων με τις καθολικές μετακινήσεις του φορέα.

Για κάθε τμήμα του προβλήματος αξονικής έντασης της ράβδου που θεωρήσαμε επιθυμούμε να εκφράσουμε το πεδίο μετατοπίσεων ως προς τις μετατοπίσεις u_i, u_j των άκρων του τμήματος. Αυτό γίνεται με τον εξής συστηματικό τρόπο. Εφόσον το πεδίο μετατοπίσεων είναι γραμμικό για κάθε τμήμα θα ισχύει:

$$u(s) = a_1 + a_2 s \quad \text{ή σε μητρωική γραφή} \quad u(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

Με διαδοχική εφαρμογή της παραπάνω σχέσης σε όλα τα ακραία χαρακτηριστικά σημεία του τμήματος και ειδικότερα για την περίπτωσή μας για $s = 0$ και $s = L$ θα προκύψουν οι ακραίες τιμές u_i, u_j ως εξής:

$$\begin{aligned} u_i &= a_1 + a_2 \cdot 0 \\ u_j &= a_1 + a_2 \cdot L \end{aligned} \qquad \text{ή} \qquad \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{ή} \qquad \{d\} = [A]\{a\} \tag{11}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει:

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\} \qquad \text{ή} \qquad \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{12}$$

αντικαθιστώντας στην σχέση (11) εκφράζουμε το πεδίο μετατοπίσεων συναρτήσει των ακραίων μετακινήσεων του τμήματος ως εξής:

$$u(s) = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix}\{a\} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix}[A]^{-1}\{d\} = \begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L-s}{L} & \dfrac{s}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{13}$$

$$u(s) = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \qquad \text{ή} \qquad u(s) = [N] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \tag{14}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μετασχηματίζουν ένα πεδίο μετακινήσεων από την μορφή των γενικευμένων συντεταγμένων στη μορφή των πεπερασμένων στοιχείων προδίδοντας τον έλεγχο της συμπεριφοράς κάθε τμήματος του πεδίου στις ακραίες μετακινήσεις.

Τα παραπάνω βήματα μπορούν να εκτελεστούν και σε συμβολική γλώσσα ως εξής:

```
> S:=matrix(1,2,[1,s]);

                            S := [1    s]

> a:=matrix(2,1,[a1,a2]);

                                   [a1]
                              a := [  ]
                                   [a2]

> u(s):=multiply(S,a);

                         u(s) := [a1 + s a2]

> A:=matrix(2,2,[1,0,1,L]);

                                [1    0]
                           A := [      ]
                                [1    L]

> A1:=inverse(A);

                              [  1       0 ]
                        A1 := [            ]
                              [- 1/L    1/L]

> N:=multiply(S,A1);

                        N := [1 - s/L    s/L]
```

Αντίστοιχα αν επιλεγεί για κάθε στοιχείο ένα πεδίο μετακινήσεων τρίτου βαθμού κατά τον ίδιο συστηματικό τρόπο θα έχουμε:

$u(s) = a_1 + a_2 s + a_3 s^2 + a_4 s^3$ ή σε μητρωική γραφή

$$u(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (15)$$

Για το πεδίο αυτό είναι φανερό ότι απαιτούνται ακόμη δύο εσωτερικοί κόμβοι σε κάθε στοιχείο για την προσαρμογή της τριτοβάθμιας καμπύλης, έστω στα τρίτα του μήκους. Με διαδοχική εφαρμογή της παραπάνω σχέσης σε όλα τα χαρακτηριστικά σημεία του τμήματος και ειδικότερα για την περίπτωσή μας για $s=0$, $s=L/3$, $s=2L/3$ και $s=L$ θα προκύψουν οι ακραίες τιμές u_i, u_k u_l, u_j ως εξής:

$$\begin{aligned}
u_i &= a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + a_4 \cdot 0 \\
u_k &= a_1 + a_2 \cdot L/3 + a_3 \cdot (L/3)^2 + a_4 \cdot (L/3)^3 \\
u_l &= a_1 + a_2 \cdot 2L/3 + a_3 \cdot (2L/3)^2 + a_4 \cdot (2L/3)^3 \\
u_j &= a_1 + a_2 \cdot L + a_3 \cdot (L)^2 + a_4 \cdot (L)^3
\end{aligned} \tag{16}$$

Χρησιμοποιώντας συμβολική γλώσσα έχουμε:

```
> with(linalg);
> S:=matrix(1,4,[1,s,s^2,s^3]);


                      S := [           2     3]
                           [1    s    s     s ]

> a:=matrix(4,1,[a1,a2,a3,a4]);

                                [a1]
                                [  ]
                                [a2]
                           a := [  ]
                                [a3]
                                [  ]
                                [a4]

> u(s):=multiply(S,a);

                 u(s) := [             2       3   ]
                         [a1 + s a2 + s  a3 + s  a4]

>
A:=matrix(4,4,[1,0,0,0,1,L/3,L^2/9,L^3/27,1,2*L/3,4*L^2/9,8*L^3/27,1,L,L^
2,L^3]);

                     [1      0        0          0   ]
                     [                               ]
                     [                  2           3]
                     [1    1/3 L    1/9 L     1/27 L ]
                A := [                               ]
                     [                  2           3]
                     [1    2/3 L    4/9 L     8/27 L ]
                     [                               ]
                     [                2          3   ]
                     [1      L        L          L   ]




> A1:=inverse(A);
```

```
          [    1             0              0             0     ]
          [                                                     ]
          [- 11/2 1/L       9 1/L        - 9/2 1/L        1/L    ]
          [                                                     ]
          [     1                1            1                1  ]
          [  9 ----       - 45/2 ----      18 ----      - 9/2 ----]
    A1 := [      2                2            2                2 ]
          [     L                L            L                L  ]
          [                                                     ]
          [       1             1                1             1   ]
          [- 9/2 ----     27/2 ----     - 27/2 ----     9/2 ---- ]
          [        3             3                3             3  ]
          [       L             L                L             L   ]
```

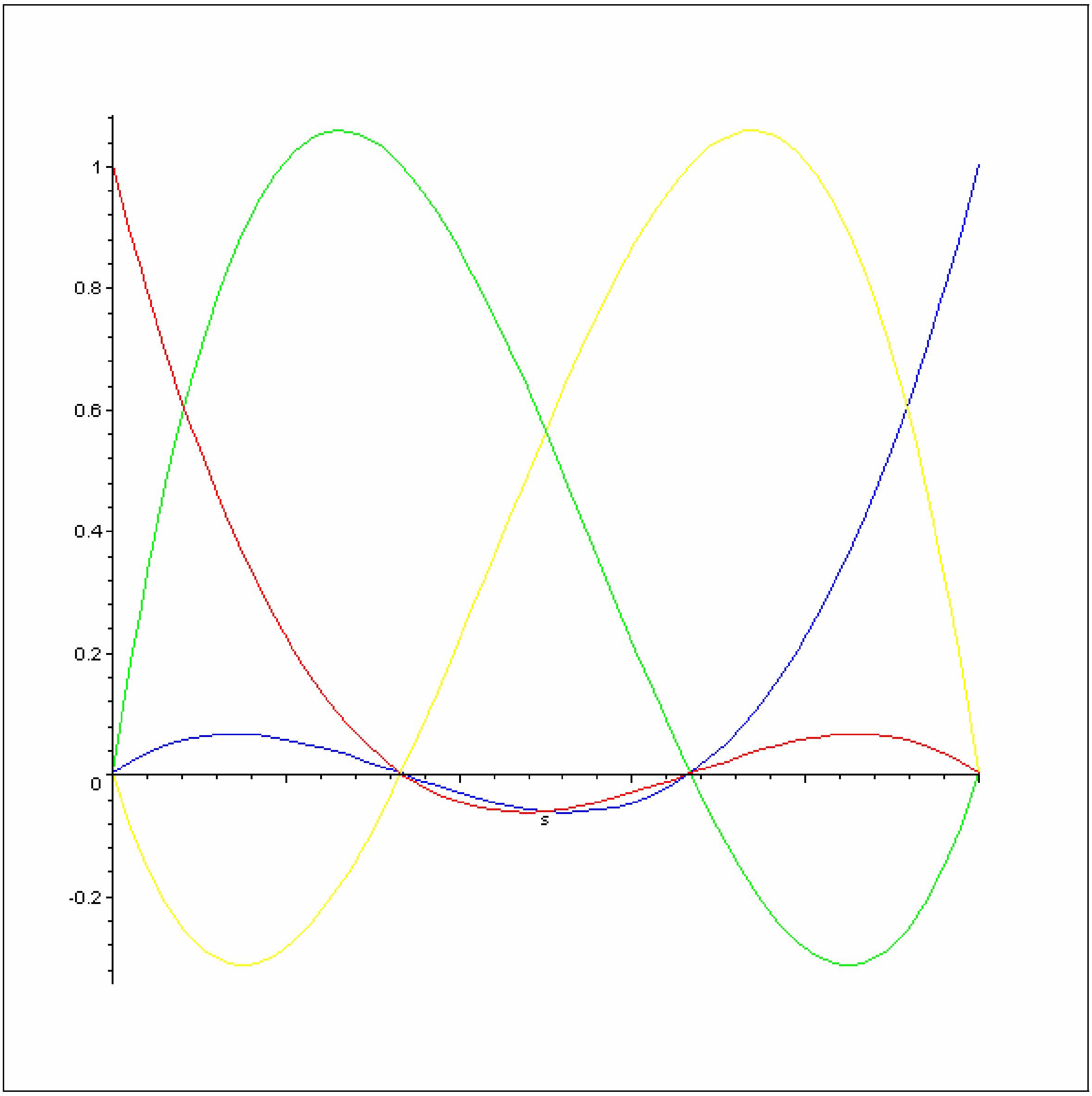
```
> N:=multiply(S,A1);
```

```
  N :=

        [                  2          3
        [                 s          s
        [1 - 11/2 s/L + 9 ---- - 9/2 ---- ,
        [                  2          3
        [                 L          L

                      2           3
                     s           s
        9 s/L - 45/2 ---- + 27/2 ---- ,
                      2           3
                     L           L

                        2           3                 2          3 ]
                       s           s                 s          s  ]
        - 9/2 s/L + 18 ---- - 27/2 ---- , s/L - 9/2 ---- + 9/2 ----]
                        2           3                 2          3 ]
                       L           L                 L          L  ]
```

Όπου το μητρώο N αποτελεί το μητρώο των συναρτήσεων σχήματος που αντιστοιχεί στην επιλογή του τριτοβάθμιου πολυωνύμου. Για μήκος στοιχείου 5 μονάδες έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση των τεσσάρων συναρτήσεων σχήματος.

```
> L=5:evalm(N);

        [                  2          3
        [                 s          s
        [1 - 11/2 s/L + 9 ---- - 9/2 ---- ,
        [                  2          3
        [                 L          L

                      2           3
                     s           s
        9 s/L - 45/2 ---- + 27/2 ---- ,
                      2           3
                     L           L

                        2           3                 2          3 ]
                       s           s                 s          s  ]
        - 9/2 s/L + 18 ---- - 27/2 ---- , s/L - 9/2 ---- + 9/2 ----]
                        2           3                 2          3 ]
                       L           L                 L          L  ]
```

```
> N;plot([1-11/2*s/5+9*s^2/5^2-9/2*s^3/5^3, 9*s/5-
45/2*s^2/5^2+27/2*s^3/5^3, -9/2*s/5+18*s^2/5^2-27/2*s^3/5^3, s/5-
9/2*s^2/5^2+9/2*s^3/5^3], s=0..5);
```



Γραφική παράσταση συναρτήσεων σχήματος

Παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση σχήματος είναι μονάδα σε ένα κόμβο και σε όλους τους άλλους μηδέν με εσωτερικούς κόμβους στα L/3 και 2L/3. Επίσης η κόκκινη και μπλε συναρτήσεις είναι συμμετρικές όπως και η πράσινη με την κίτρινη. Σε κάθε κόμβο το άθροισμα είναι μηδέν, καθώς και σε κάθε άλλο σημείο, όπως διαπιστώνεται με γραφική αλγεβρική παράθεση των τμημάτων κάθε καμπύλης.

Μητρωική Διατύπωση της Αρχής της Ελάχιστης Ολικής Δυναμικής Ενέργειας

Με την τελευταία επιλογή προκύπτει ότι το ρόλο των γενικευμένων συντεταγμένων αναλαμβάνουν πλέον οι ακραίες μετακινήσεις των τμημάτων του χωρίου του προβλήματος. Σκόπιμη λοιπόν είναι η διατύπωση της αρχής της ελάχιστης ολικής δυναμικής ενέργειας σε μητρωική μορφή ώστε κατά ενιαίο τρόπο για κάθε φυσικό πρόβλημα να προσφέρεται η λύση. Επιπλέον εφόσον οι παράμετροι αυτές αφορούν μετακινήσεις ενδιαφερόμαστε για την διατύπωση της αρχής με βάση τις μετακινήσεις.

Η ολική δυναμική ενέργεια ενός ελαστικού συστήματος στη γενικότητά της εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\Pi_p &= \iiint_V \left(\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T [E]\{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [E]\{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} \right) dv \\ &- \iiint_V \{u\}^T \{B_i\} dv - \iint_S \{u\}^T \{T\} ds - \{D\}^T \{P\}\end{aligned} \tag{1}$$

όπου

$\{u\} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T$, συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων

$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}$, το πεδίο παραμορφώσεων

$[E] =$ το μητρώο ιδιοτήτων υλικού

$\{\varepsilon_0\}, \{\sigma_0\} =$ αρχικές παραμορφώσεις και τάσεις

$\{B_i\} = \begin{bmatrix} B_x \, B_y \, B_z \end{bmatrix}^T$, μαζικές δυνάμεις

$\{T_i\} = \begin{bmatrix} T_x \, T_y \, T_z \end{bmatrix}^T$, επιφανειακές δυνάμεις

$\{D\} =$ μετακινήσεις κατά τους βαθμούς ελευθερίας του φορέα

$\{P\} =$ δράσεις κατά τους βαθμούς ελευθερίας του φορέα

Διατύπωση του Μητρώου Ακαμψίας και Φόρτισης Στοιχείου

Οι μετακινήσεις εντός του στοιχείου εκφράζονται συναρτήσει των ακραίων μετακινήσεων $\{d\}$,

$$\{u\}=[N]\{d\} \tag{2}$$

όπου $[N]$είναι το μητρώο των συναρτήσεων σχήματος.

Ανάλογα με την συμπεριφορά του στοιχείου και των κινηματικών σχέσεων οι παραμορφώσεις προκύπτουν από παραγώγους των μετακινήσεων.

$\{\varepsilon\}=[\partial]\{u\}$, $\{\varepsilon\}=[B]\{d\}$, όπου $[B]=[\partial][N]$.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην σχέση (1) προκύπτει:

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\{d\}_n^T[k]_n\{d\}_n \;-\; \sum_{n=1}^{N}\{d\}_n^T\{r_e\}_n \;-\; \{D\}^T\{P\} \tag{3}$$

όπου το μητρώο $[k]$και το διάνυσμα φόρτισης ορίζονται ως εξής:

$$[k]=\int_{Ve}[B]^T[E][B]dV \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\{r_e\}=&\int_{Ve}[B]^T[E]\{\varepsilon_0\}dV-\int_{Ve}[B]^T\{\sigma_0\}dV+\\&\int_{Ve}[N]^T\{B_i\}dV+\int_{Se}[N]^T\{T_i\}dS\end{aligned} \tag{5}$$

Θεωρώντας όλους τους βαθμούς ελευθερίας της κατασκευής $\{D\}$ σε κάποιες θέσεις αντιστοιχούν οι βαθμοί ελευθερίας κάθε στοιχείου. Αν διευρύνουμε το μητρώο ακαμψίας και φόρτισης στις διαστάσεις ολόκληρης της κατασκευής λαμβάνουμε:

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\{D\}^T[K]\{D\}-\{D\}^T\{R\} \tag{6}$$

όπου

$$[K]=\sum_{n=1}^{N}[k]_n \qquad \text{και} \qquad \{R\}=\{P\}+\sum_{n=1}^{N}\{r_e\}_n \tag{7}$$

όπου η άθροιση των επιμέρους μητρώων ακαμψίας και φόρτισης θεωρείται στις αντίστοιχες θέσεις.

Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης ολικής δυναμικής ενέργειας η πρώτη μεταβολή της για μικρές μεταβολές των μετακινήσεων θα πρέπει να είναι μηδέν, δηλ.

$$\left\{\frac{\partial \Pi_p}{\partial \{D\}}\right\} = \{0\} \tag{8}$$

η οποία καταλήγει στη σχέση:

$$[K]\{D\} = \{R\} \tag{9}$$

που αποτελεί τις εξισώσεις ισορροπίας κατά τη διεύθυνση των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής.

Στοιχείο επίπεδης δοκού χωρίς αξονικές παραμορφώσεις

Για το στοιχείο της δοκού στο επίπεδο η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι:

```
> X:=matrix(1,4,[1,x,x^2,x^3]);

                      X := [           2     3]
                           [1    x    x     x ]


> a:=matrix(4,1,[a1,a2,a3,a4]);

                                    [a1]
                                    [  ]
                                    [a2]
                               a := [  ]
                                    [a3]
                                    [  ]
                                    [a4]

> w(x):=multiply(X,a);


                 w(x) := [             2       3   ]
                         [a1 + x a2 + x  a3 + x  a4]
```

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στα χαρακτηριστικά σημεία προκύπτει το μητρώο A ως εξής:

```
> A:=matrix(4,4,[1,0,0,0,0,1,0,0,1,L,L^2,L^3,0,1,2*L,3*L^2]);


                         [1     0     0      0  ]
                         [                      ]
                         [0     1     0      0  ]
                         [                      ]
                    A := [            2       3 ]
                         [1     L    L       L  ]
                         [                      ]
                         [                     2]
                         [0     1    2 L    3 L ]

> A-1:=inverse(A);
                   [  1        0        0         0  ]
                   [                                 ]
                   [  0        1        0         0  ]
                   [                                 ]
                   [   3                3            ]
                   [- ----    - 2/L    ----     - 1/L]
             A1 := [    2                2           ]
                   [   L                L            ]
                   [                                 ]
                   [  2       1         2       1    ]
                   [ ----    ----    - ----    ----  ]
                   [   3       2         3       2   ]
                   [  L       L         L       L    ]
```

Τέλος πολλαπλασιάζοντας το μητρώο X με το αντίστροφο του μητρώου A προκύπτει το μητρώο των συναρτήσεων σχήματος N:

```
> N:=multiply(X,A1);


N :=

    [        2        3            2      3        2        3
    [       x        x            x      x        x        x
    [1 - 3 ---- + 2 ---- , x - 2 ---- + ---- , 3 ---- - 2 ---- ,
    [        2        3            L      2        2        3
    [       L        L                   L        L        L

         2      3 ]
        x      x  ]
    - ---- + ----]
        L       2 ]
               L  ]
```

Το μητρώο B για την δοκό προκύπτει από τις συναρτήσεις σχήματος παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς x οπότε προκύπτει:

```
> B:=map(diff,N,x,x);


B :=

    [   6         x                 x      6         x
    [- ---- + 12 ---- , - 4/L + 6 ---- , ---- - 12 ---- ,
    [    2         3                 2      2         3
    [   L         L                 L      L         L

                 x   ]
    - 2/L + 6 ----]
                  2 ]
                 L   ]
```

Αντικαθιστώντας στην γενική έκφραση του μητρώου ακαμψίας του στοιχείου και ολοκληρώνοντας στο μήκος L λαμβάνουμε:

```
> K:=EI*map(int,multiply(transpose(B),B),x=0..L);

                    [  12        6         12       6    ]
                    [ ----      ----     - ----     ---- ]
                    [   3         2          3        2  ]
                    [  L         L          L        L   ]
                    [                                    ]
                    [  6                    6            ]
                    [ ----      4/L      - ----     2/L  ]
                    [   2                    2           ]
                    [  L                    L            ]
            K := EI [                                    ]
                    [   12        6        12         6  ]
                    [- ----    - ----     ----     - ----]
                    [    3         2        3          2 ]
                    [   L         L        L          L  ]
                    [                                    ]
                    [  6                    6            ]
                    [ ----      2/L      - ----     4/L  ]
                    [   2                    2           ]
                    [  L                    L            ]
```

Το μητρώο αυτό αποτελεί το ακριβές μητρώο ακαμψίας δοκού όπως το γνωρίζουμε από τη Μητρωική Στατική.

ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ

Το πεδίο των μετακινήσεων για την επίπεδη ελαστικότητα καθορίζεται από τις μετατοπίσεις u και v των κόμβων του στοιχείου. Θεωρώντας γραμμική μεταβολή των μετακινήσεων έχουμε:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v(x,y) &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \tag{1}$$

```
> u:=a1+a2*x+a3*y;

                        u := a1 + a2 x + a3 y

> v:=a3+a4*x+a5*y;

                        v := a3 + a4 x + a5 y

> a:=matrix(6,1,[a1,a2,a3,a4,a5,a6]);

                                   [a1]
                                   [  ]
                                   [a2]
                                   [  ]
                                   [a3]
                              a := [  ]
                                   [a4]
                                   [  ]
                                   [a5]
                                   [  ]
                                   [a6]
```

Το μητρώο που εκφράζει τις μετατοπίσεις σε κάθε σημείο με συντεταγμένες x και y δίδεται σε μητρωική μορφή ως εξής:

```
> XY:=matrix(2,6,[1,x,y,0,0,0,0,0,0,1,x,y]);

                        [1    x    y    0    0    0]
                  XY := [                           ]
                        [0    0    0    1    x    y]
```

Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή για τους κόμβους του στοιχείου λαμβάνουμε:

```
>A:=matrix(6,6,[1,x1,y1,0,0,0,0,0,0,1,x1,y1,1,x2,y2,0,0,0,0,0,0,1,x2,y2,1
,x3,y3,0,0,0,0,0,0,1,x3,y3]);
                     [1    x1    y1    0    0     0 ]
                     [                              ]
                     [0    0     0     1    x1    y1]
                     [                              ]
                     [1    x2    y2    0    0     0 ]
                A := [                              ]
                     [0    0     0     1    x2    y2]
                     [                              ]
                     [1    x3    y3    0    0     0 ]
                     [                              ]
                     [0    0     0     1    x3    y3]
```

Το αντίστροφο μητρώο του A προκύπτει συμβολικά ως εξής:

```
> A^-1:=inverse(A);

A^-1 :=

    [  x2 y3 - x3 y2       x1 y3 - x3 y1         x1 y2 - y1 x2    ]
    [- ------------- , 0 , ------------- , 0 , - ------------- , 0]
    [       %1                   %1                    %1         ]

    [y3 - y2         y3 - y1       -y1 + y2    ]
    [------- , 0 , - ------- , 0 , -------- , 0]
    [  %1              %1             %1       ]

    [  x3 - x2         x1 - x3       x1 - x2    ]
    [- ------- , 0 , - ------- , 0 , ------- , 0]
    [    %1              %1            %1       ]

    [      x2 y3 - x3 y2       x1 y3 - x3 y1         x1 y2 - y1 x2]
    [0 , - ------------- , 0 , ------------- , 0 , - -------------]
    [           %1                  %1                    %1      ]

    [    y3 - y2         y3 - y1       -y1 + y2]
    [0 , ------- , 0 , - ------- , 0 , --------]
    [      %1              %1              %1   ]

    [      x3 - x2         x1 - x3       x1 - x2]
```

```
    [0 , - ------- , 0 , - ------- , 0 , -------]
    [        %1              %1            %1   ]

%1 := -x2 y3 + y1 x2 + x1 y3 + x3 y2 - x3 y1 - x1 y2
```

Οι δε συναρτήσεις σχήματος για το τριγωνικό στοιχείο προκύπτουν εφαρμόζοντας τη γενική σχέση ως εξής:

```
> N:=multiply(XY,A1);


N :=

    [  x2 y3 - x3 y2   x (y3 - y2)   y (x3 - x2)
    [- ------------- + ----------- - ----------- , 0 ,
    [       %1              %1           %1

    x1 y3 - x3 y1   x (y3 - y1)   y (x1 - x3)
    ------------- - ----------- - ----------- , 0 ,
         %1              %1           %1

      x1 y2 - y1 x2   x (-y1 + y2)   y (x1 - x2)    ]
    - ------------- + ------------ + ----------- , 0]
           %1              %1            %1         ]

    [      x2 y3 - x3 y2   x (y3 - y2)   y (x3 - x2)
    [0 , - ------------- + ----------- - ----------- , 0 ,
    [           %1              %1           %1

    x1 y3 - x3 y1   x (y3 - y1)   y (x1 - x3)
    ------------- - ----------- - ----------- , 0 ,
         %1              %1           %1

      x1 y2 - y1 x2   x (-y1 + y2)   y (x1 - x2)]
    - ------------- + ------------ + -----------]
           %1              %1            %1     ]

%1 := -x2 y3 + y1 x2 + x1 y3 + x3 y2 - x3 y1 - x1 y2
```

Για τον προσδιορισμό του μητρώου B που συνδέει τις παραμορφώσεις σε κάθε σημείο του χωρίου συναρτήσει των ακραίων μετατοπίσεων, με βάση τον ορισμό των παραμορφώσεων προκύπτει ως εξής:

```
> dN:=matrix(3,6,[0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,0]);

                        [0    1    0    0    0    0]
                        [                          ]
                  dN := [0    0    0    0    0    1]
                        [                          ]
                        [0    0    1    0    1    0]


> B:=multiply(dN,A1);
```

```
B :=

    [y3 - y2          y3 - y1        -y1 + y2    ]
    [------- , 0 , - ------- , 0 , -------- , 0]
    [  %1              %1              %1       ]

    [      x3 - x2          x1 - x3        x1 - x2]
    [0 , - ------- , 0 , - ------- , 0 , -------]
    [        %1               %1             %1   ]

    [  x3 - x2   y3 - y2     x1 - x3     y3 - y1   x1 - x2   -y1 + y2
    [- ------- , ------- , - ------- , - ------- , ------- , --------
    [    %1        %1          %1          %1        %1         %1

    ]
    ]
    ]
```

όπου

```
%1 := -x2 y3 + y1 x2 + x1 y3 + x3 y2 - x3 y1 - x1 y2
```

Το δε μητρώο ελαστικότητας για την επίπεδη ένταση προκύπτει με βάση την θεωρία ελαστικότητας ως εξής:

```
> EL:(E/(1-p^2))*matrix(3,3,[1,p,0,p,1,0,0,0,0.5-p]);
                           [1    p      0   ]
                           [                ]
                         E [p    1      0   ]
                           [                ]
                           [0    0    .5 - p]
                         --------------------
                                     2
                                1 - p
```

όπου E το μέτρο ελαστικότητας του Young και p ο λόγος Poisson.

Παρατηρούμε ότι το μητρώο B και το μητρώο ελαστικότητας είναι σταθερά δηλαδή ανεξάρτητα των μεταβλητών x και y. Αυτό σημαίνει ότι κατά την ολοκλήρωση του γινομένου $B^T EB$ επάνω στην επιφάνεια του τριγώνου η παραπάνω ποσότητα βγαίνει εκτός του ολοκληρώματος το οποίο ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου. Άρα η ποσότητα $B^T EB$ προκύπτει ως εξής:

```
> k:=multiply(transpose(B),EL,B);

k :=

    [         2              2
    [(y2 - y3)  E   (x2 - x3)  E (.5 - p)
    [------------ + -------------------- ,
    [  2       2          2       2
    [%1  (1 - p )       %1  (1 - p )

      (y2 - y3) E p (x2 - x3)   (x2 - x3) E (.5 - p) (y2 - y3)
    - ---------------------- - ---------------------------- ,
              2       2                    2       2
            %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

      (y2 - y3) E (y1 - y3)   (x2 - x3) E (.5 - p) (x1 - x3)
    - -------------------- - ---------------------------- ,
             2       2                    2       2
           %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

    (y2 - y3) E p (x1 - x3)   (x2 - x3) E (.5 - p) (y1 - y3)
    ---------------------- + ---------------------------- ,
           2       2                    2       2
         %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

    (y2 - y3) E (y1 - y2)   (x2 - x3) E (.5 - p) (x2 - x1)
    -------------------- - ---------------------------- ,
          2       2                    2       2
        %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

                                                          ]
    (y2 - y3) E p (x2 - x1)   (x2 - x3) E (.5 - p) (y1 - y2)]
    ---------------------- - ------------------------------]
           2       2                    2       2          ]
         %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )         ]

    [
    [  (y2 - y3) E p (x2 - x3)   (x2 - x3) E (.5 - p) (y2 - y3)
    [- ---------------------- - ---------------------------- ,
    [          2       2                    2       2
    [        %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

              2              2
    (x2 - x3)  E   (y2 - y3)  E (.5 - p)
    ------------ + -------------------- ,
      2       2          2       2
    %1  (1 - p )       %1  (1 - p )

    (x2 - x3) E p (y1 - y3)   (y2 - y3) E (.5 - p) (x1 - x3)
    ---------------------- + ---------------------------- ,
           2       2                    2       2
         %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

      (x2 - x3) E (x1 - x3)   (y2 - y3) E (.5 - p) (y1 - y3)
    - -------------------- - ---------------------------- ,
             2       2                    2       2
           %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

      (x2 - x3) E p (y1 - y2)   (y2 - y3) E (.5 - p) (x2 - x1)
    - ---------------------- + ---------------------------- ,
              2       2                    2       2
```

```
       %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

                                                          ]
  (x2 - x3) E (x2 - x1)   (y2 - y3) E (.5 - p) (y1 - y2)]
- --------------------- + ------------------------------]
        2       2                    2       2           ]
      %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )         ]

[
[  (y2 - y3) E (y1 - y3)   (x2 - x3) E (.5 - p) (x1 - x3)
[- --------------------- - ------------------------------ ,
[        2       2                    2       2
[      %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

(x2 - x3) E p (y1 - y3)   (y2 - y3) E (.5 - p) (x1 - x3)
----------------------- + ------------------------------ ,
       2       2                    2       2
     %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

         2              2
(y1 - y3)  E   (x1 - x3)  E (.5 - p)
------------ + -------------------- ,
  2       2           2       2
%1  (1 - p )        %1  (1 - p )

  (y1 - y3) E p (x1 - x3)   (x1 - x3) E (.5 - p) (y1 - y3)
- ----------------------- - ------------------------------ ,
         2       2                    2       2
       %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

  (y1 - y3) E (y1 - y2)   (x1 - x3) E (.5 - p) (x2 - x1)
- --------------------- + ------------------------------ ,
        2       2                    2       2
      %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

                                                            ]
  (y1 - y3) E p (x2 - x1)   (x1 - x3) E (.5 - p) (y1 - y2)]
- ----------------------- + ------------------------------]
         2       2                    2       2            ]
       %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )          ]

[
[(y2 - y3) E p (x1 - x3)   (x2 - x3) E (.5 - p) (y1 - y3)
[----------------------- + ------------------------------ ,
[       2       2                    2       2
[     %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

  (x2 - x3) E (x1 - x3)   (y2 - y3) E (.5 - p) (y1 - y3)
- --------------------- - ------------------------------ ,
        2       2                    2       2
      %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

  (y1 - y3) E p (x1 - x3)   (x1 - x3) E (.5 - p) (y1 - y3)
- ----------------------- - ------------------------------ ,
         2       2                    2       2
       %1  (1 - p )                 %1  (1 - p )

         2              2
(x1 - x3)  E   (y1 - y3)  E (.5 - p)
------------ + -------------------- ,
  2       2           2       2
```

```
%1  (1 - p )       %1  (1 - p )

(x1 - x3) E p (y1 - y2)   (y1 - y3) E (.5 - p) (x2 - x1)
----------------------- - ------------------------------ ,
       2       2                     2       2
     %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

                                                       ]
(x1 - x3) E (x2 - x1)   (y1 - y3) E (.5 - p) (y1 - y2)]
--------------------- - ------------------------------]
      2       2                     2       2         ]
    %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )        ]

[
[(y2 - y3) E (y1 - y2)   (x2 - x3) E (.5 - p) (x2 - x1)
[--------------------- - ------------------------------ ,
[      2       2                     2       2
[    %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

  (x2 - x3) E p (y1 - y2)   (y2 - y3) E (.5 - p) (x2 - x1)
- ----------------------- + ------------------------------ ,
         2       2                     2       2
       %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

  (y1 - y3) E (y1 - y2)   (x1 - x3) E (.5 - p) (x2 - x1)
- --------------------- + ------------------------------ ,
        2       2                     2       2
      %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

(x1 - x3) E p (y1 - y2)   (y1 - y3) E (.5 - p) (x2 - x1)
----------------------- - ------------------------------ ,
       2       2                     2       2
     %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

          2              2
(y1 - y2)  E   (x2 - x1)  E (.5 - p)
------------ + --------------------- ,
  2       2          2       2
%1  (1 - p )       %1  (1 - p )

                                                         ]
(y1 - y2) E p (x2 - x1)   (x2 - x1) E (.5 - p) (y1 - y2)]
----------------------- + ------------------------------]
       2       2                     2       2          ]
     %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )         ]

[
[(y2 - y3) E p (x2 - x1)   (x2 - x3) E (.5 - p) (y1 - y2)
[----------------------- - ------------------------------ ,
[       2       2                     2       2
[     %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

  (x2 - x3) E (x2 - x1)   (y2 - y3) E (.5 - p) (y1 - y2)
- --------------------- + ------------------------------ ,
        2       2                     2       2
      %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

  (y1 - y3) E p (x2 - x1)   (x1 - x3) E (.5 - p) (y1 - y2)
- ----------------------- + ------------------------------ ,
         2       2                     2       2
       %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )
```

```
    (x1 - x3) E (x2 - x1)   (y1 - y3) E (.5 - p) (y1 - y2)
    -------------------- - ----------------------------- ,
          2       2                     2       2
        %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

    (y1 - y2) E p (x2 - x1)   (x2 - x1) E (.5 - p) (y1 - y2)
    ---------------------- + ----------------------------- ,
           2       2                     2       2
         %1  (1 - p )                  %1  (1 - p )

              2              2             ]
    (x2 - x1)  E    (y1 - y2)  E (.5 - p)]
    ------------ + --------------------]
      2       2          2       2      ]
    %1  (1 - p )       %1  (1 - p )     ]
```

όπου

```
%1 := y1 x2 - y2 x1 - x2 y3 + x1 y3 - y1 x3 + x3 y2
```

το παραπάνω μητρώο πολλαπλασιασμένο με τον όγκο του στοιχείου ή το σταθερό πάχος t επί το εμβαδόν του τριγώνου, αποτελεί το μητρώο ακαμψίας του τριγωνικού στοιχείου σταθερής παραμόρφωσης και είναι διαστάσεων (6x6). Οι αλγεβρικές εκφράσεις μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω με την εισαγωγή κατάλληλων παραμέτρων όπως π.χ. $y_{ij}=y_i-y_j$,

Λόγω της πολυπλοκότητας των εκφράσεων και του κινδύνου λαθών μπορούμε να μορφώσουμε απ' ευθείας το μητρώο ακαμψίας σε γλώσσα FORTRAN χρησιμοποιώντας την εξής εντολή:

```
> fortran(k);
      k(1,1) = (y2-y3)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)+(x2-x3)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(0.5E0-p)
      k(1,2) = -(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*p*(x2-x3)-(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(
     #1-p**2)*(0.5E0-p)*(y2-y3)
      k(1,3) = -(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*(y1-y3)-(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)*(0.5E0-p)*(x1-x3)
      k(1,4) = (y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(x1-x3)+(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y3)
      k(1,5) = (y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(y1-y2)-(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p
     #**2)*(0.5E0-p)*(x2-x1)
      k(1,6) = (y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(x2-x1)-(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(2,1) = -(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*p*(x2-x3)-(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(
     #1-p**2)*(0.5E0-p)*(y2-y3)
      k(2,2) = (x2-x3)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)+(y2-y3)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(0.5E0-p)
```

```
      k(2,3) = (x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(y1-y3)+(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(x1-x3)
      k(2,4) = -(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*(x1-x3)-(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y3)
      k(2,5) = -(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*p*(y1-y2)+(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(
     #1-p**2)*(0.5E0-p)*(x2-x1)
      k(2,6) = -(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*(x2-x1)+(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(3,1) = -(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*(y1-y3)-(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)*(0.5E0-p)*(x1-x3)
      k(3,2) = (x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(y1-y3)+(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(x1-x3)
      k(3,3) = (y1-y3)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)+(x1-x3)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(0.5E0-p)
      k(3,4) = -(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*p*(x1-x3)-(x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(
     #1-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y3)
      k(3,5) = -(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*(y1-y2)+(x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)*(0.5E0-p)*(x2-x1)
      k(3,6) = -(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*p*(x2-x1)+(x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(
     #1-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(4,1) = (y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(x1-x3)+(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y3)
      k(4,2) = -(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*(x1-x3)-(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y3)
      k(4,3) = -(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*p*(x1-x3)-(x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(
     #1-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y3)
      k(4,4) = (x1-x3)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)+(y1-y3)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(0.5E0-p)
      k(4,5) = (x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(y1-y2)-(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(x2-x1)
      k(4,6) = (x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(x2-x1)-(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p
     #**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(5,1) = (y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(y1-y2)-(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p
     #**2)*(0.5E0-p)*(x2-x1)
      k(5,2) = -(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*p*(y1-y2)+(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(
     #1-p**2)*(0.5E0-p)*(x2-x1)
      k(5,3) = -(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*(y1-y2)+(x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)*(0.5E0-p)*(x2-x1)
      k(5,4) = (x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(y1-y2)-(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(x2-x1)
      k(5,5) = (y1-y2)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
```

```
     #p**2)+(x2-x1)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(0.5E0-p)
      k(5,6) = (y1-y2)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(x2-x1)+(x2-x1)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(6,1) = (y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(x2-x1)-(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(6,2) = -(x2-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*(x2-x1)+(y2-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(6,3) = -(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p*
     #*2)*p*(x2-x1)+(x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(
     #1-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(6,4) = (x1-x3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(x2-x1)-(y1-y3)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p
     #**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(6,5) = (y1-y2)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*p*(x2-x1)+(x2-x1)/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1
     #-p**2)*(0.5E0-p)*(y1-y2)
      k(6,6) = (x2-x1)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-
     #p**2)+(y1-y2)**2/(y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2*E/(1-p**
     #2)*(0.5E0-p)
```

Μπορούμε επίσης να βελτιστοποιήσουμε τον κώδικα χρησιμοποιώντας βοηθητικές παραμέτρους χρησιμοποιώντας την παρακάτω εντολή:

```
> fortran(k,optimized);
      t1 = y2-y3
      t2 = t1**2
      t10 = (y1*x2-y2*x1-x2*y3+x1*y3-y1*x3+x3*y2)**2
      t11 = 1/t10
      t12 = t2*t11
      t13 = p**2
      t15 = 1/(1-t13)
      t16 = E*t15
      t18 = x2-x3
      t19 = t18**2
      t20 = t19*t11
      t21 = 0.5E0-p
      t22 = t16*t21
      t25 = t1*t11
      t26 = t25*E
      t27 = t15*p
      t30 = t18*t11
      t31 = t30*E
      t32 = t15*t21
      t35 = -t26*t27*t18-t31*t32*t1
      t36 = y1-y3
      t39 = x1-x3
      t40 = t32*t39
      t42 = -t25*t16*t36-t31*t40
      t43 = t27*t39
      t45 = t32*t36
      t47 = t26*t43+t31*t45
      t48 = y1-y2
      t49 = t16*t48
      t51 = x2-x1
      t52 = t32*t51
      t54 = t25*t49-t31*t52
```

```
      t55 = t27*t51
      t57 = t32*t48
      t59 = t26*t55-t31*t57
      t66 = t31*t27*t36+t26*t40
      t70 = -t30*t16*t39-t26*t45
      t71 = t27*t48
      t74 = -t31*t71+t26*t52
      t75 = t16*t51
      t78 = -t30*t75+t26*t57
      t79 = t36**2
      t80 = t79*t11
      t82 = t39**2
      t83 = t82*t11
      t86 = t36*t11
      t87 = t86*E
      t89 = t39*t11
      t90 = t89*E
      t92 = -t87*t43-t90*t45
      t95 = -t86*t49+t90*t52
      t98 = -t87*t55+t90*t57
      t104 = t90*t71-t87*t52
      t107 = t89*t75-t87*t57
      t108 = t48**2
      t109 = t108*t11
      t111 = t51**2
      t112 = t111*t11
      t121 = t48*t11*E*t55+t51*t11*E*t57

      k(1,1) = t12*t16+t20*t22
      k(1,2) = t35
      k(1,3) = t42
      k(1,4) = t47
      k(1,5) = t54
      k(1,6) = t59
      k(2,1) = t35
      k(2,2) = t20*t16+t12*t22
      k(2,3) = t66
      k(2,4) = t70
      k(2,5) = t74
      k(2,6) = t78
      k(3,1) = t42
      k(3,2) = t66
      k(3,3) = t80*t16+t83*t22
      k(3,4) = t92
      k(3,5) = t95
      k(3,6) = t98
      k(4,1) = t47
      k(4,2) = t70
      k(4,3) = t92
      k(4,4) = t83*t16+t80*t22
      k(4,5) = t104
      k(4,6) = t107
      k(5,1) = t54
      k(5,2) = t74
      k(5,3) = t95
      k(5,4) = t104
      k(5,5) = t109*t16+t112*t22
      k(5,6) = t121
      k(6,1) = t59
      k(6,2) = t78
      k(6,3) = t98
```

```
      k(6,4) = t107
      k(6,5) = t121
      k(6,6) = t112*t16+t109*t22
```

Παρατηρούμε ότι η αναλυτική έκφραση του μητρώου ακαμψίας ενός στοιχείου, ακόμη και στη περίπτωση που η προς ολοκλήρωση ποσότητα είναι σταθερή είναι ιδιαίτερα μακροσκελής, ενώ στη πράξη μας ενδιαφέρει η αριθμητική τιμή του μητρώου ακαμψίας για δεδομένες τιμές των συντεταγμένων των κορυφών του τριγωνικού στοιχείου.

Για ένα τριγωνικό στοιχείο με E=2.1E8 kN/m^2 και λόγο Poisson p=0.3 και συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου αυτές του παρακάτω πίνακα έχουμε:

#	x_i	y_i
1	.5	.5
2	.7	.9
3	.6	1.1

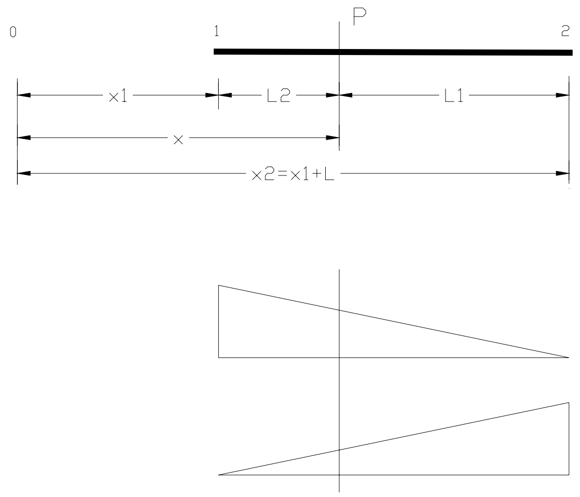
```
k :=t*A/10*

    [  7.211, 1.717, -20.260, -1.030, 13.049,  -.686]

    [  1.717, 3.090,  -2.403, -2.403,   .686,  -.686]

    [ -20.26,-2.403,  62.156, -5.151,-41.895,  7.554]

    [ -1.030,-2.403,  -5.151, 14.079,  6.181,-11.675]

    [ 13.049,  .686, -41.895,  6.181, 28.846, -6.868]

    [  -.686, -.686,   7.554,-11.675, -6.868, 12.362]
```

Το παραπάνω μητρώο ακαμψίας του τριγωνικού στοιχείου είναι συμμετρικό και όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του θετικά. Πληροί δηλαδή όλες τις ιδιότητες των μητρώων ακαμψίας.

ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Θεμελιώδη σημασία στην ανάπτυξη της θεωρίας των πεπερασμένων στοιχείων έχει η εισαγωγή των φυσικών συντεταγμένων ως συναρτήσεων παρεμβολής σε ένα χωρίο ή ένα πεδίο. Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν τρόποι παρεμβολής μόνο του πεδίου των μετακινήσεων. Χρήσιμο είναι να αναπτυχθούν και τρόποι παρεμβολής της γεωμετρίας του στοιχείου.

Για ένα μονοδιάστατο πρόβλημα όπως οι ράβδοι και οι δοκοί θεωρούμε τα παρακάτω:



Ορίζουμε τις μεταβλητές:

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L}, \qquad \xi_2 = \frac{L_2}{L} \tag{1}$$

Παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές ξ_1 και ξ_2 ικανοποιούν τη σχέση:

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \tag{2}$$

Επίσης ένα σημείο με τετμημένη x ορίζεται ως εξής:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι μεταβλητές ξ_1 και ξ_2 λειτουργούν ως συναρτήσεις σχήματος και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παρεμβολή ενός πεδίου. Επίσης μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Αντιστρέφοντας την σχέση (4) λαμβάνουμε:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \end{Bmatrix} \tag{5}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τις φυσικές συντεταγμένες ενός σημείου με τετμημένη x.

Εκτός από την παραπάνω γραμμική παρεμβολή μπορούμε να ορίσουμε παρεμβολές ανώτερης τάξεως ορίζοντας και επιπλέον ενδιάμεσα σημεία στο χωρίο που παρεμβάλλουμε. Για δευτεροβάθμια παρεμβολή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω σχέσεις.

$$\phi = a_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + a_3\xi_1\xi_2 \tag{6}$$

και τις εφαρμόσουμε στα σημεία $\xi_1 = 1,\ \xi_2 = 0$, $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 1$ καθώς και $\xi_1 = 1/2,\ \xi_2 = 1/2$.

Προκύπτει έτσι:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= a_1 \\ \phi_2 &= a_2 \\ \phi_3 &= a_1\frac{1}{4} + a_2\frac{1}{4} + a_3\frac{1}{4} \end{aligned} \tag{7}$$

$$a_3 = 4\phi_3 - \phi_1 - \phi_2 \tag{8}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (6) λαμβάνουμε:

$$\phi = \phi_1\xi_1^2 + \phi_2\xi_2^2 + (4\phi_3 - \phi_1 - \phi_2)\xi_1\xi_2 \tag{9}$$

ή

$$\phi = \xi_1(\xi_1 - \xi_2)\phi_1 + \xi_2(\xi_2 - \xi_1)\phi_2 + 4\xi_1\xi_2\phi_3 \tag{10}$$

Αντικαθιστώντας μία από τις μεταβλητές από τη σχέση (2) λαμβάνουμε:

$$\phi = \xi_1(2\xi_1 - 1)\phi_1 + \xi_2(2\xi_2 - 1)\phi_2 + 4\xi_1\xi_2\phi_3 \tag{11}$$

η οποία σε μητρωική γραφή γίνεται:

$$\phi = \begin{bmatrix} \xi_1(2\xi_1 - 1) & \xi_2(2\xi_2 - 1) & 4\xi_1\xi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \tag{12}$$

η οποία εκφράζει την συνάρτηση ϕ ως συνάρτηση των ακραίων τιμών ϕ_1, ϕ_2 και ϕ_3.

Εφαρμογή: Στοιχείο ράβδου

Θεωρώντας ένα γραμμικό πεδίο παρεμβολής για την συμπεριφορά ενός στοιχείου ράβδου σε αξονική ένταση έχουμε για το πεδίο των μετατοπίσεων:

$$u(\xi_1, \xi_2) = \xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 \tag{13}$$

Οι παραμορφώσεις ορίζονται ως:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \tag{14}$$

Παραγωγίζοντας αντίστοιχα τις σχέσεις (11) και (5) λαμβάνουμε:

$$\varepsilon_x = u_1\left(-\frac{1}{L}\right) + u_2\left(\frac{1}{L}\right) \tag{15}$$

$$\varepsilon_x = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B]\{d\} \tag{16}$$

Το μητρώο ακαμψίας της ράβδου προκύπτει με βάση τη βασική σχέση των πεπερασμένων στοιχείων ως εξής:

```
> B:=matrix(1,2,[-1/L,1/L]);
                         B := [- 1/L    1/L]
> k:=AE*map(int,multiply(transpose(B),B),x=0..L);
                                [ 1/L     - 1/L]
                        k := AE [              ]
                                [- 1/L     1/L ]
```

Σημαντικό στοιχείο της χρήσης των φυσικών συντεταγμένων είναι το γεγονός ότι τα ολοκληρώματα που προκύπτουν είναι τέτοιας μορφής που επιδέχονται αναλυτική έκφραση με βάση τον κλειστό τύπο:

$$\int_0^L \xi_1^k \xi_2^l dL = L\frac{k!l!}{(1+k+l)!} \tag{17}$$

Οι φυσικές συντεταγμένες είναι σημαντικές όχι τόσο για την κλειστού τύπου ολοκλήρωση που προσφέρουν αλλά διότι όπως θα φανεί σε επόμενα κεφάλαια, χρησιμοποιούνται αποτελεσματικά στα ισοπαραμετρικά πεπερασμένα στοιχεία σε γενικότερες καμπυλόγραμμες γεωμετρίες.

ΦΥΣΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Κατ΄ αναλογία προς τον ορισμό των φυσικών συντεταγμένων σε μονοδιάστατα προβλήματα ορίζουμε τις φυσικές συντεταγμένες σε τρίγωνα και τετράεδρα ως τον λόγο εμβαδών και όγκων αντίστοιχα, το άθροισμα των οποίων δίδει το αρχικό χωρίο.

Έτσι για επίπεδα τρίγωνα ως φυσικές συντεταγμένες ορίζουμε τους λόγους:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A}, \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A}, \quad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \tag{1}$$

Οι φυσικές συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{2}$$

Χρησιμοποιώντας τις φυσικές συντεταγμένες εκφράζουμε το τυχαίο σημείο του χωρίου με συντεταγμένες x και y ως εξής:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$

$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \tag{3}$$

και σε μητρωική μορφή:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση εκφράζουμε τις φυσικέ συντεταγμένες ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου του τριγώνου ως εξής:

```
> A:=matrix(3,3,[1,1,1,x1,x2,x3,y1,y2,y3]);
                                          [1     1     1 ]
                                          [              ]
                                   A := [x1    x2    x3]
                                          [              ]
                                          [y1    y2    y3]



> A-1:=inverse(A);
```

```
             [  x2 y3 - x3 y2      -y3 + y2     -x3 + x2 ]
             [- -------------    - --------     -------- ]
             [       %1              %1            %1    ]
             [                                           ]
             [ x1 y3 - y1 x3      -y3 + y1       -x3 + x1]
      A-1:= [ -------------      --------     - --------]
             [      %1              %1             %1    ]
             [                                           ]
             [-x1 y2 + y1 x2       -y2 + y1      x2 - x1 ]
             [--------------     - --------    - ------- ]
             [      %1               %1            %1    ]

      %1 := -x2 y3 + x3 y2 + x1 y3 - x1 y2 - y1 x3 + y1 x2
```

Η παράσταση %1 προκύπτει ίση με το διπλάσιο εμβαδόν του τριγώνου για αντι-ωρολογιακή φορά των κόμβων 1,2,3 του τριγώνου. Επιπλέον η παραπάνω σχέση μπορεί να απλοποιηθεί εισάγοντας τις διαφορές των συντεταγμένων ως εξής:

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad i, j = 1,2,3 \tag{5}$$

$$y_{ij} = y_i - y_j, \quad i, j = 1,2,3 \tag{6}$$

Για την έκφραση ενός πεδίου $\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ με βάση τις φυσικές συντεταγμένες θα ισχύει:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x} \tag{7α}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial y} \tag{7β}$$