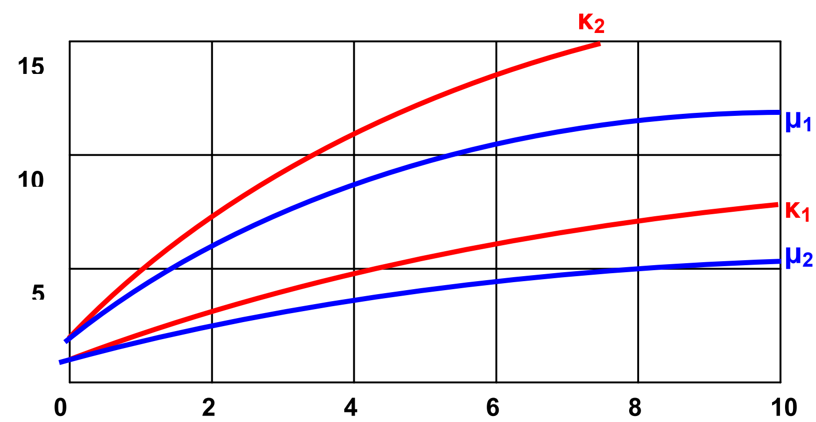
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

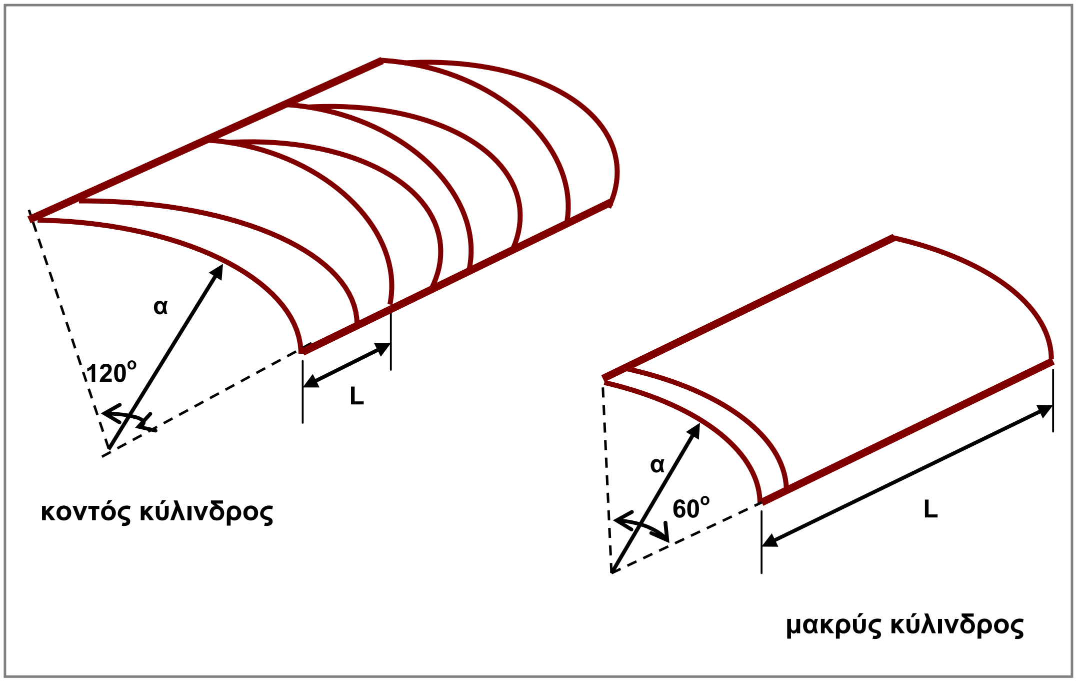
ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

Καθ. Βλάσης Κουμούσης

Η καμπτική επιρροή αναμένεται να φθίνει σε κάποια κοντινή απόσταση από το σύνορο, δημιουργώντας μία τοπική ένταση. Αυτό μπορεί να φανεί και από την χαρακτηριστική εξίσωση για $\kappa / (1-v^2) = 2x10^{-6}$ που αντιστοιχεί σε $t/\alpha = 4.76x10^{-3}$ για $\nu = 0.3$ και $t/\alpha = 4.88x10^{-3}$ για $\nu = 0$ που αποτελούν συνήθεις περιπτώσεις.



Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις παρακάτω δύο κυλινδρικές στέγες από σκυρόδεμα.



Τυπικές κυλινδρικές στέγες: (α) κοντός κύλινδρος, (β) μακρύς κύλινδρος

Η πρώτη στέγη αποτελείται από τρία κελύφη μεταξύ των ενισχύσεων, $L/a = 2.6$. Για n=1 προκύπτει λ=5.24 και $\kappa_1 < \kappa_2$, κ_1=5.1. Έτσι η διαταραχή θα ξεκινήσει με τιμή 1 στο άκρο φ=0 και θα μειωθεί στο $e^{-5.1x2.094}=0.23x10^{-4}$ στο άκρο φ=120^o. Για μεγαλύτερες αρμονικές n>1, η μείωση είναι ακόμη πιο απότομη. Για απαίτηση μείωσης στο 0.01 απαιτείται μήκος $L/a \geq 2.6$. Αντίθετα σε μακρά κυλινδρικά κελύφη για L/α=2.5 προκύπτει λ=1.26 για n=1. Έτσι, κ_1=2.23 και για γωνία 60^O=1.047, η διαταραχή από 1 μειώνεται μόλις στο $e^{(-2.23x1.047)}$=0.097 περίπου ίσο με το 10%. Η μείωση αυτή είναι μεγαλύτερη για πιο παχιά κελύφη και για μεγαλύτερες αρμονικές

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΡΟΥ

Στην περίπτωση αυτή η λύση μπορεί να απλοποιηθεί. Με αρχή των γωνιών στο συγκεκριμένο σύνορο φ=0, οι όροι j=5,6,7,8 στις γενικές σχέσεις πρέπει να απομακρυνθούν καθόσον μεγαλώνουν εκθετικά τους όρους μακράν του φ=0. Προκύπτει έτσι:

$$u_n = e^{-\kappa_1 \phi}\left[\left(A_1 + A_2\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) + i\left(A_1 - A_2\right)\sin\left(\mu_1\phi\right)\right] + \\ + e^{-\kappa_2 \phi}\left[\left(A_3 + A_4\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) + i\left(A_3 - A_4\right)\sin\left(\mu_2\phi\right)\right] \tag{9.1}$$

$$\upsilon_n = e^{-\kappa_1 \phi}\left[\left(B_1 + B_2\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) + i\left(B_1 - B_2\right)\sin\left(\mu_1\phi\right)\right] + \\ + e^{-\kappa_2 \phi}\left[\left(B_3 + B_4\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) + i\left(B_3 - B_4\right)\sin\left(\mu_2\phi\right)\right] \tag{9.2}$$

$$w_n = e^{-\kappa_1 \phi}\left[\left(C_1 + C_2\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) + i\left(C_1 - C_2\right)\sin\left(\mu_1\phi\right)\right] + \\ + e^{-\kappa_2 \phi}\left[\left(C_3 + C_4\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) + i\left(C_3 - C_4\right)\sin\left(\mu_2\phi\right)\right] \tag{9.3}$$

Οι τιμές των u_n, υ_n, w_n είναι προφανώς πραγματικές. Έτσι τα ιδιοδιανύσματα A_i, B_i, C_i εν γένει μιγαδικά μπορούν να εκφραστούν με βάση το πραγματικό και φανταστικό μέρος τους και να δώσουν τελικά πραγματικές τιμές για τις μετακινήσεις. Έτσι οι αρμονικές των μετακινήσεων και των εντατικών μεγεθών λαμβάνουν μία ενιαία μορφή ως εξής:

$$f = Ce^{-\kappa_1 \phi}\left[\left(a_1\bar{C}_1 + a_2\bar{C}_2\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) + \left(a_1\bar{C}_2 - a_2\bar{C}_1\right)\sin\left(\mu_1\phi\right)\right]\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{\lambda x}{a}\right) + \\ + ce^{-\kappa_2 \phi}\left[\left(a_3\bar{C}_3 + a_4\bar{C}_4\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) + \left(a_3\bar{C}_4 - a_4\bar{C}_3\right)\sin\left(\mu_2\phi\right)\right]\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{9.4}$$

Οι τιμές των C και α_1, α_2 δίδονται από τον παρακάτω πίνακα. Για τα α_3 και α_4 χρησιμοποιούνται οι ίδιες σχέσεις του πίνακα αντικαθιστώντας τον δείκτη 1 σε 2 για τα κ και μ και τους δείκτες 1, 2 σε 3, 4 για τα $\bar{a}$, $\bar{\beta}$.

f	**C**	**α1**	**α2**	**sym**	**x factor**
u	1	$\bar{a}_1$	$\bar{a}_2$	sym.	cos
υ	1	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_2$	anti.	sin

w	1	1	0	sym.	sin
w^*	1	-κ1	μ1	anti.	sin
N_ϕ	D / α	$1+k-\left(\kappa_1\overline{\beta}_1+\mu_1\overline{\beta}_2\right)-\nu\lambda\overline{a}_1+$ $+k\left(\kappa_1^2-\mu_1^2\right)$	$-\left(\kappa_1\overline{\beta}_2-\mu_1\overline{\beta}_1\right)-\nu\lambda\overline{a}_2-2k\kappa_1\mu_1$	sym.	sin
N_x	D / α	$-\lambda\overline{a}_1+\nu-\nu\left(\kappa_1\overline{\beta}_1+\mu_1\overline{\beta}_2\right)+k\lambda^2$	$-\lambda\overline{a}_2-\nu\left(\kappa_1\overline{\beta}_2-\mu_1\overline{\beta}_1\right)$	sym.	sin
$N_{\phi x}$	D (1-ν) / 2α	$-(1+k)(\kappa_1\overline{a}_1+\mu_1\overline{a}_2)+\lambda\overline{\beta}_1-k\lambda\kappa_1$	$-(1+k)(\kappa_1\overline{a}_2-\mu_1\overline{a}_1)+$ $+\lambda\overline{\beta}_2+k\lambda\mu_1$	anti.	cos
$N_{x\phi}$	D (1-ν) / 2α	$-(\kappa_1\overline{a}_1+\mu_1\overline{a}_2)+(1+k)\lambda\overline{\beta}_1+$ $+k\lambda\kappa_1$	$-(\kappa_1\overline{a}_2-\mu_1\overline{a}_1)+(1+k)\lambda\overline{\beta}_2-$ $-k\lambda\mu_1$	anti.	cos
M_ϕ	K / α^2	$1+\left(\kappa_1^2-\mu_1^2\right)-\nu\lambda^2$	$-2\kappa_1\mu_1$	sym.	sin
M_x	K / α^2	$-\lambda^2+\lambda\overline{a}_1+\nu\left(\kappa_1^2-\mu_1^2\right)+$ $+\nu\left(\kappa_1\overline{\beta}_1+\mu_1\overline{\beta}_2\right)$	$\lambda\overline{a}_2-2\nu\kappa_1\mu_1+\nu\left(\kappa_1\overline{\beta}_2-\mu_1\overline{\beta}_1\right)$	sym.	sin
$M_{\phi x}$	K (1-ν) / 2 α^2	$-2\lambda\kappa_1-(\kappa_1\overline{a}_1+\mu_1\overline{a}_2)-\lambda\overline{\beta}_1$	$2\lambda\mu_1-(\kappa_1\overline{a}_2-\mu_1\overline{a}_1)-\lambda\overline{\beta}_2$	anti.	cos
$M_{x\phi}$	K (1-ν) / 2 α^2	$-\lambda\left(\kappa_1+\overline{\beta}_1\right)$	$\lambda\left(\mu_1-\overline{\beta}_2\right)$	anti.	cos
Q_ϕ	K / α^3	$\kappa_1\left(\lambda^2-1-\kappa_1^2+3\mu_1^2\right)+(1-\nu)\lambda\overline{\beta}_1$	$\mu_1\left(1-\lambda^2+3\kappa_1^2-\mu_1^2\right)+(1-\nu)\lambda$	anti.	sin

Q_x	$K / 2\alpha^3$	$-2\lambda^3 + 2\lambda\left(\kappa_1^2 - \mu_1^2\right) + 2\lambda^2\overline{a}_1$ $+(1-\nu)\left[\left(\kappa_1^2 - \mu_1^2\right)\overline{a}_1 + 2\kappa_1\mu_1\overline{a}_2\right]$ $+(1-\nu)\lambda\left(\kappa_1\overline{\beta}_1 + \mu_1\overline{\beta}_2\right)$	$-4\lambda\kappa_1\mu_1 + 2\lambda^2\overline{a}_2$ $+(1-\nu)\left[\left(\kappa_1^2 - \mu_1^2\right)\overline{a}_2 - 2\kappa_1\mu_1\overline{a}_1\right]$ $+(1+\nu)\lambda\left(\kappa_1\overline{\beta}_2 - \mu_1\overline{\beta}_1\right)$	sym.	cos
S_ϕ	$K / 2\alpha^3$	$2\kappa_1\left[-1 + (2-\nu)\lambda^2 - \kappa_1^2 + 3\mu_1^2\right]$ $+(1-\nu)\lambda\left(\kappa_1\overline{a}_1 + \mu_1\overline{a}_2\right) + 3(1-\nu)\lambda^2$	$2\mu_1\left[1 - (2-\nu)\lambda^2 + 3\kappa_1^2 - \mu_1^2\right]$ $+(1-\nu)\lambda\left(\kappa_1\overline{a}_2 - \mu_1\overline{a}_1\right) +$ $+3(1-\nu)\lambda^2\overline{\beta}_2$	anti.	sin

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΕΝΤΑΣΗ

Όταν οι γενέτειρες διατάσσονται συμμετρικά $\phi = \pm\phi_o$ και η φόρτιση είναι συμμετρική ως προς φ=0, τότε δεν μπορεί να απομακρυνθούν οι λύσεις, j=5, 6, 7, 8, αλλά μπορεί να συνδυαστούν οι εκθετικοί όροι ώστε να προκύψουν cosh και sinh όροι ως εξής:

$$\begin{aligned} w_n = &\left(C_1 + C_2 + C_5 + C_6\right)\cosh\left(\kappa_1\phi\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) + \\ &+ i\left(-C_1 + C_2 + C_5 - C_6\right)\sinh\left(\kappa_1\phi\right)\sin\left(\mu_1\phi\right) + \\ &+ \left(-C_1 - C_2 + C_5 + C_6\right)\sinh\left(\kappa_1\phi\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) + \\ &+ i\left(C_1 - C_2 + C_5 - C_6\right)\cosh\left(\kappa_1\phi\right)\sin\left(\mu_1\phi\right) \end{aligned} \tag{9.5}$$

Λόγω δε συμμετρίας, οι αντισυμμετρικοί όροι μηδενίζονται δηλαδή οι όροι $\cosh(\kappa_1\varphi)\sin(\mu_1\varphi)$ και $\sinh(\kappa_1\varphi)\cos(\mu_1\varphi)$. Από όπου προκύπτει :

$$C_1 = C_6 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; C_2 = C_5 \tag{9.6}$$

Έτσι, διώχνοντας παντού τον συντελεστή 2 έχουμε:

$$\begin{aligned} w_n = &\left(C_1 + C_2\right)\cosh\left(\kappa_1\phi\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) - \\ &- i\left(C_1 - C_2\right)\sinh\left(\kappa_1\phi\right)\sin\left(\mu_1\phi\right) + \\ &+ \left(C_3 + C_4\right)\cosh\left(\kappa_2\phi\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) - \\ &- \left(C_3 - C_4\right)\sinh\left(\kappa_2\phi\right)\sin\left(\mu_2\phi\right) \end{aligned} \tag{9.7}$$

Για την εύρεση των u_n και υ_n οι συντελεστές C_j θα πρέπει να αντικατασταθούν από τους A_j και B_j, αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας δε τα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα προκύπτει:

$$\begin{aligned} u_n = &\left(\bar{a}_1\bar{C}_1 + \bar{a}_2\bar{C}_2\right)\cosh\left(\kappa_1\phi\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) - \left(\bar{a}_1\bar{C}_2 - \bar{a}_2\bar{C}_1\right)\sinh\left(\kappa_1\phi\right)\sin\left(\mu_1\phi\right) + \\ &+ \left(\bar{a}_3\bar{C}_3 + \bar{a}_4\bar{C}_4\right)\cosh\left(\kappa_2\phi\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) - \left(\bar{a}_3\bar{C}_4 - \bar{a}_4\bar{C}_3\right)\sinh\left(\kappa_2\phi\right)\sin\left(\mu_2\phi\right) \end{aligned} \tag{9.8}$$

$$\begin{aligned} \upsilon_n = &-\left(\bar{\beta}_1\bar{C}_1 + \bar{\beta}_2\bar{C}_2\right)\sinh\left(\kappa_1\phi\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) + \left(\bar{\beta}_1\bar{C}_2 - \bar{\beta}_2\bar{C}_1\right)\cosh\left(\kappa_1\phi\right)\sin\left(\mu_1\phi\right) - \\ &- \left(\bar{\beta}_3\bar{C}_3 + \bar{\beta}_4\bar{C}_4\right)\sinh\left(\kappa_2\phi\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) + \left(\bar{\beta}_3\bar{C}_4 - \bar{\beta}_4\bar{C}_3\right)\cosh\left(\kappa_2\phi\right)\sin\left(\mu_2\phi\right) \end{aligned} \tag{9.9}$$

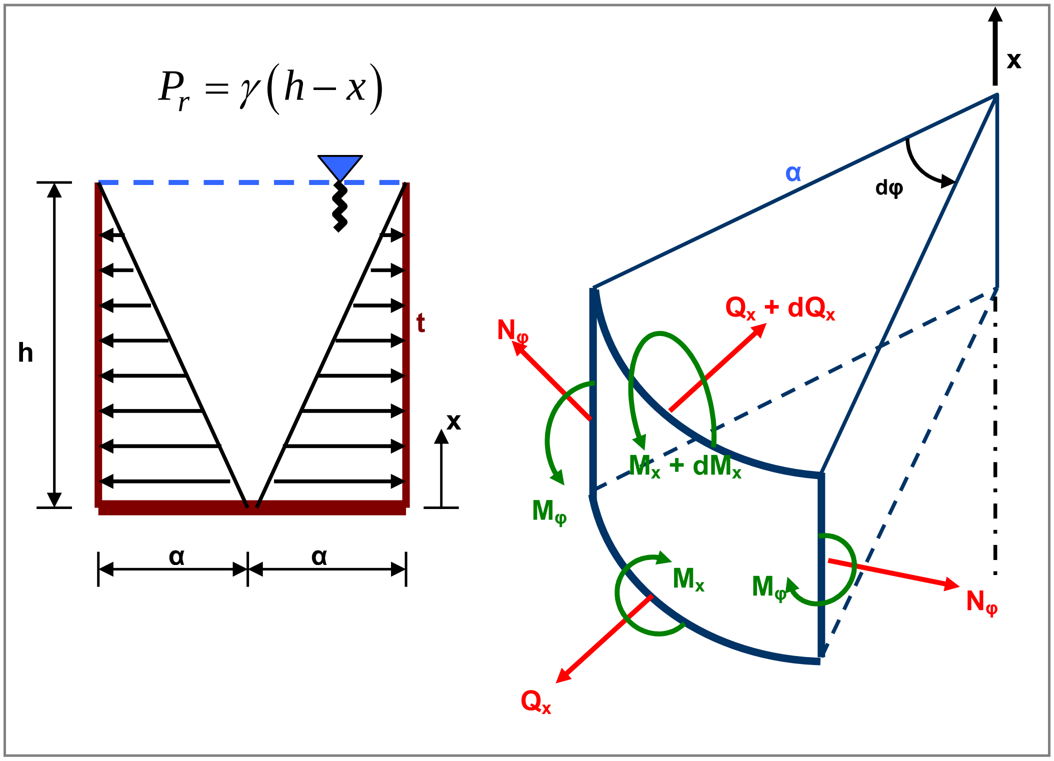
Έτσι διαπιστώνουμε ότι τα συμμετρικά μεγέθη έχουν ενιαία διατύπωση με το u_n και w_n, ενώ τα αντισυμμετρικά αντίστοιχη του υ_n.

$$f_s = C\left[\left(a_1\bar{C}_1 + a_2\bar{C}_2\right)\cosh\left(\kappa_1\phi\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) - \left(a_1\bar{C}_2 - a_2\bar{C}_1\right)\sinh\left(\kappa_1\phi\right)\sin\left(\mu_1\phi\right)\right]\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{\lambda x}{a}\right) +$$
$$+ C\left[\left(a_3\bar{C}_3 + a_4\bar{C}_4\right)\cosh\left(\kappa_2\phi\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) - \left(a_3\bar{C}_4 - a_4\bar{C}_3\right)\sinh\left(\kappa_2\phi\right)\sin\left(\mu_2\phi\right)\right]\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{9.10}$$

$$f_a = -C\left[\left(a_1\bar{C}_1 + a_2\bar{C}_2\right)\sinh\left(\kappa_1\phi\right)\cos\left(\mu_1\phi\right) - \left(a_1\bar{C}_2 - a_2\bar{C}_1\right)\cosh\left(\kappa_1\phi\right)\sin\left(\mu_1\phi\right)\right]\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{\lambda x}{a}\right)$$
$$- C\left[\left(a_3\bar{C}_3 + a_4\bar{C}_4\right)\sinh\left(\kappa_2\phi\right)\cos\left(\mu_2\phi\right) - \left(a_3\bar{C}_4 - a_4\bar{C}_3\right)\cosh\left(\kappa_2\phi\right)\sin\left(\mu_2\phi\right)\right]\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{9.11}$$

Οι συντελεστές από τον προηγούμενο πίνακα.

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ



Για γεμάτη δεξαμενή ισχύει:

$$P_r = \gamma(h-x) \tag{9.12}$$

Η μεμβρανική περιφερειακή δύναμη:

$$N_\phi = \gamma a(h-x) \tag{9.13}$$

η οποία προκαλεί μία ε_φ και τέλος μία ακτινική μετατόπιση:

$$w = \frac{\gamma a^2}{D\left(1-v^2\right)}(h-x) \tag{9.14}$$

Αντί της εφαρμογής της γενικής λύσης μπορεί να δοθεί η παρακάτω ειδική λύση:

Οι δύο μη ταυτοτικές εξισώσεις ισορροπίας είναι:

$$Q_x' + N_\phi = P_r a \tag{9.15}$$

$$M_x' - aQ_x = 0 \tag{9.16}$$

Απομακρύνοντας από τις γενικές σχέσεις τους όρους υ και τις παραγώγους της ως προς φ, καθώς και τους όρους με συντελεστή K στην ορθή δύναμη και τον όρο με u΄ στην M_x, καταλήγουμε:

$$N_\phi = \frac{D}{a}\left(w + \nu u'\right) \tag{9.17}$$

$$N_x = \frac{D}{a}\left(u' + \nu w\right) \tag{9.18}$$

$$M_x = \frac{K}{a^2} w'' \tag{9.19}$$

Επειδή στο πρόβλημά μας $N_x=0$ επιλύουμε την δεύτερη ως προς u΄ και αντικαθιστούμε στην πρώτη:

$$N_\phi = \frac{D\left(1-\nu^2\right)}{a} w \tag{9.20}$$

Προκύπτουν έτσι 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους, τα N_φ, Q_x, M_x και w. Από τις 2 εξισώσεις ισορροπίας προκύπτει:

$$M_x'' + aN_\phi = P_r a^2 \tag{9.21}$$

$$\left(Kw''\right)'' + Da^2\left(1-\nu^2\right)w = P_r a^4 \tag{9.22}$$

Επίλυση για σταθερό πάχος

Η εξίσωση γίνεται

$$Kw^{IV} + Da^2\left(1-v^2\right)w = P_r a^4 \tag{9.23}$$

που επιδέχεται ως γενική λύση της ομογενούς (P_1=0) την

$$w = Ce^{\lambda x/a} \tag{9.24}$$

Εισάγοντας την λύση στην εξίσωση προκύπτει η χαρακτηριστική αλγεβρική εξίσωση:

$$\lambda^4 + 4\kappa^4 = 0 \tag{9.25}$$

όπου:

$$\kappa^4 = \frac{D\left(1-v^2\right)a^2}{4K} = 3\left(1-v^2\right)\frac{a^2}{t^2} \tag{9.26}$$

Οι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι:

$$\lambda = \pm\left(1 \pm i\right)\kappa \tag{9.27}$$

δηλαδή 2 ζεύγη συζυγών μιγαδικών.

Έτσι η γενική λύση γράφεται:

$$w = e^{-\frac{\kappa x}{a}}\left[C_1 \cos\left(\frac{\kappa x}{a}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\kappa x}{a}\right)\right] + e^{\frac{\kappa x}{a}}\left[C_3 \cos\left(\frac{\kappa x}{a}\right) + C_4 \sin\left(\frac{\kappa x}{a}\right)\right] \tag{9.28}$$

Για την συνοριακή συνθήκη στη βάση απαιτείται:

$$w' = -\kappa e^{-\frac{\kappa x}{a}}\left[\left(C_1 - C_2\right)\cos\left(\frac{\kappa x}{a}\right) + \left(C_1 + C_2\right)\sin\left(\frac{\kappa x}{a}\right)\right] + \\ + \kappa e^{\frac{\kappa x}{a}}\left[\left(C_3 + C_4\right)\cos\left(\frac{\kappa x}{a}\right) - \left(C_3 - C_4\right)\sin\left(\frac{\kappa x}{a}\right)\right] \tag{9.29}$$

Αντικαθιστώντας προκύπτουν:

$$M_x = \frac{2K\kappa^2}{a^2} e^{-\frac{\kappa x}{a}}\left(C_1 \sin\frac{\kappa x}{a} - C_2 \cos\frac{\kappa x}{a}\right) - \\ - \frac{2K\kappa^2}{a^2} e^{\frac{\kappa x}{a}}\left(C_3 \sin\frac{\kappa x}{a} - C_4 \cos\frac{\kappa x}{a}\right) \tag{9.30}$$

$$Q_x = \frac{2K\kappa^3}{a^3} e^{-\frac{\kappa x}{a}}\left[\left(C_1 + C_2\right)\cos\frac{\kappa x}{a} - \left(C_1 - C_2\right)\sin\frac{\kappa x}{a}\right] - \\ - \frac{2K\kappa^3}{a^3} e^{\frac{\kappa x}{a}}\left[\left(C_3 - C_4\right)\cos\frac{\kappa x}{a} + \left(C_3 + C_4\right)\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{9.31}$$

Οι όροι με συντελεστές C_1, C_2 μειώνονται αυξανομένου του x, ενώ αντίθετα οι όροι με C_3, C_4 αυξάνουν.

Έτσι, μπορούμε να εκφράσουμε τη λύση με όρους που έχουν συμβολή στα δύο λακρα ως εξής:

$$w = e^{-\kappa x/a}\left(A_1 \cos\frac{\kappa x}{a} + A_2 \sin\frac{\kappa x}{a}\right) + \\ + e^{-\kappa(L-x)/a}\left(B_1 \cos\frac{\kappa(L-x)}{a} + B_2 \sin\frac{\kappa(L-x)}{a}\right) \tag{9.32}$$

καθορίζοντας τα A_1, A_2 από τις συνοριακές συνθήκες στο x=0 και τα B_1, B_2 ανεξάρτητα στο x=L.

Δ Ε Ξ Α Μ Ε Ν Ε Σ

Μία γεμάτη δεξαμενή με νερό εκδηλώνει μία ακτινική μετατόπιση σύμφωνα με τη μεμβρανική θεωρία:

$$w = \frac{\gamma a^2}{D\left(1-\nu^2\right)}\left(h-x\right) \tag{9.33}$$

Η λύση αυτή ικανοποιεί και την εξίσωση της καμπτικής θεωρίας. Επιπλέον, ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες στο ελεύθερο άκρο καθόσον

$$\sigma\tau o \;\; x = h \qquad \begin{aligned} w &= 0 \\ w'' &= 0 \\ w''' &= 0 \end{aligned} \tag{9.34}$$

δηλαδή όλες τις Σ.Σ. όπως επίσης και συνθήκες ελεύθερης έδρασης στο x=0, δηλαδή w=0, w΄΄=0. Μένει να ικανοποιηθούν οι συνοριακές συνθήκες στο άκρο x=0, όπου πρέπει να επιβληθούν δυνάμεις $H=Q_x$ και ροπές $M=M_x$. Στην περίπτωση δε υψηλής δεξαμενής, οι όροι με τους συντελεστές B_1, B_2 μπορούν να θεωρηθούν μικροί, οπότε:

$$w = \frac{\gamma a^2}{D\left(1-\nu^2\right)}\left(h-x\right) + e^{-\frac{\kappa x}{a}}\left(A_1 \cos\frac{\kappa x}{a} + A_2 \sin\frac{\kappa x}{a}\right) \tag{9.35}$$

και

$$w' = -\frac{\gamma a^3}{D\left(1-\nu^2\right)} - \kappa e^{-\frac{\kappa x}{a}}\left[\left(A_1 - A_2\right)\cos\frac{\kappa x}{a} + \left(A_1 + A_2\right)\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{9.36}$$

Στην απλούστερη περίπτωση στο x=0, η πλάκα του πυθμένα μπορεί να θεωρηθεί άκαμπτη, οπότε

$$\sigma\tau o\ x = h \qquad \begin{aligned} w &= 0 \\ w' &= 0 \end{aligned} \tag{9.37}$$

που παρέχουν δύο εξισώσεις για τον προσδιορισμό των A_1 και A_2. Έτσι:

$$w = \frac{\gamma a^2}{Et}\left[h - x - he^{-\kappa x/a}\cos\frac{\kappa x}{a} + \left(\frac{a}{\kappa} - h\right)e^{-\kappa x/a}\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{9.38}$$

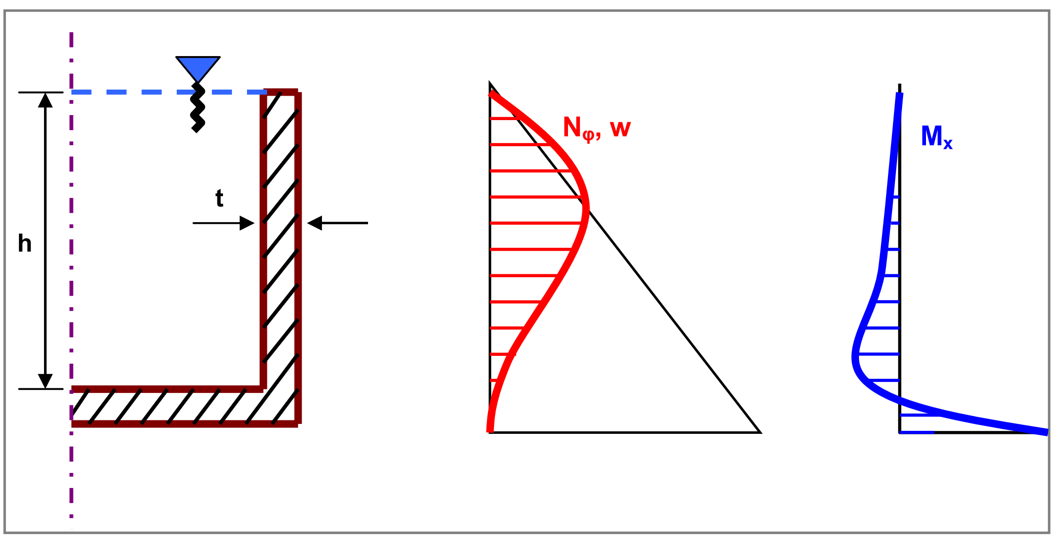
και

$$N_\phi = \gamma a\left[h - x - he^{-\kappa x/a}\cos\frac{\kappa x}{a} + \left(\frac{a}{\kappa} - h\right)e^{-\kappa x/a}\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{9.39}$$

$$M_x = -\frac{\gamma at}{\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}}\left[\left(\frac{a}{\kappa} - h\right)e^{-\kappa x/a}\cos\frac{\kappa x}{a} + he^{-\kappa x/a}\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{9.40}$$

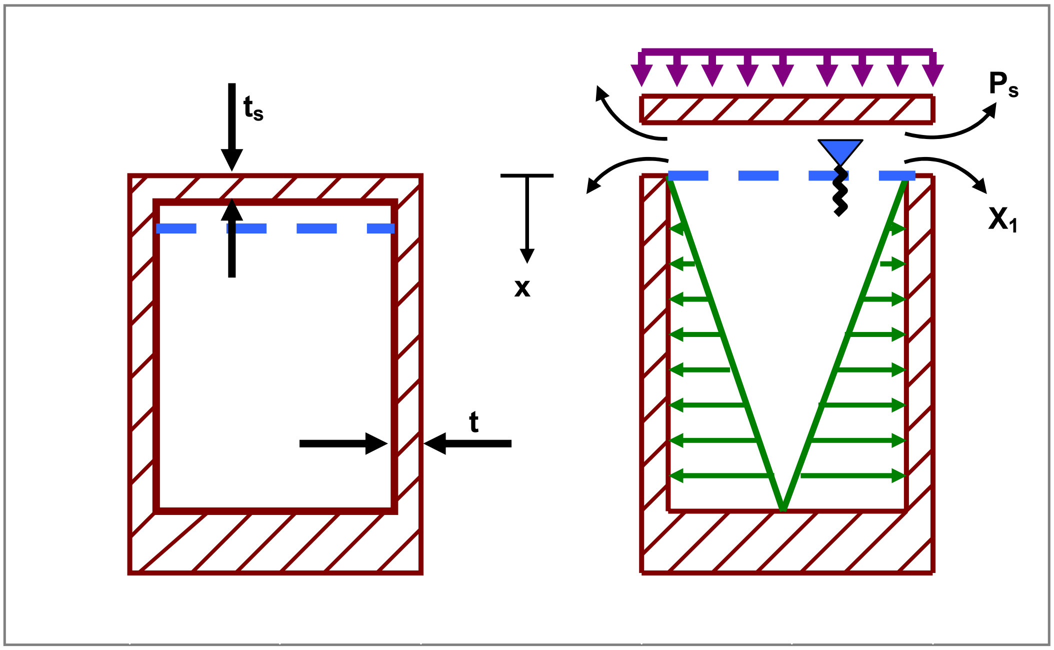
$$Q_x = \frac{\gamma t\kappa}{\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}}\left[\left(\frac{a}{\kappa} - 2h\right)e^{-\kappa x/a}\cos\frac{\kappa x}{a} + \frac{a}{\kappa}e^{-\kappa x/a}\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{9.41}$$

Δεξαμενή πλήρης υγρού



Η καμπύλη της N_{φ} είναι ανάλογη του w.

Στην περίπτωση ελαστικών πλακών στην οροφή ή/και στη βάση η υπερστατικότητα του προβλήματος αίρεται με βάση τη μέθοδο των δυνάμεων.



Αλλάζοντας την αρχή των αξόνων x=0 – άνω – προκύπτει:

$$w = \frac{\gamma a^2}{D\left(1-v^2\right)} x \tag{9.42}$$

$$\Sigma\tau o \ x = 0 \qquad \begin{aligned} & w = 0 \\ & M_x = X_1 \end{aligned} \tag{9.43}$$

οπότε:

$$\frac{w'}{a} = \frac{\gamma a^2}{D\left(1-v^2\right)} - \frac{a}{2K\kappa} X_1 \tag{9.44}$$

Από την επίλυση της πλάκας με ομοιόμορφο φορτίο P_S, η κλίση στο άκρο εκφράζεται από την σχέση:

$$\omega = \frac{P_s a^3}{8K_s(1+\nu)} + \frac{a}{K_s(1+\nu)} X_1 \tag{9.45}$$

όπου:

$$K_s = \frac{Ets^3}{12(1-\nu^2)} \tag{9.46}$$

Η εξίσωση συμβιβαστού της σχετικής στροφής στο άνω άκρο ω - w΄/α γίνεται:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \tag{9.47}$$

όπου:

$$\delta_{10} = -\frac{\gamma a^2}{D(1-\nu^2)} + \frac{P_s a^3}{8K_s(1+\nu)} \tag{9.48}$$

$$\delta_{11} = \frac{a}{2K\kappa} + \frac{a}{K_s(1+\nu)} \tag{9.49}$$

από όπου επιλύεται και βρίσκεται το X_1 και στην συνέχεια τα w, Nφ, Mx, Qx. Ξεχωρίζοντας το υγρό και την ομοιόμορφη φόρτιση Ps έχουμε:

$$w = \frac{\gamma a^3}{D(1-\nu^2)} \left[\frac{x}{a} - \frac{K_s(1+\nu)}{2K\kappa + K_s(1+\nu)} \frac{1}{x} e^{-\frac{\kappa x}{a}} \sin\frac{\kappa x}{a} \right] \tag{9.50}$$

$$M_x = \frac{2\gamma a K K_s \kappa}{D(1-\nu)\left[2K\kappa + K_s(1+\nu)\right]} e^{-\frac{\kappa x}{a}} \cos\frac{\kappa x}{a} \tag{9.51}$$

Λόγω του φορτίου P_S προκύπτει:

$$w = \frac{P_s a^4}{8\kappa\left[2K\kappa + K_s(1+\nu)\right]} e^{-\frac{\kappa x}{a}} \sin\frac{\kappa x}{a} \tag{9.52}$$

$$M_x = -\frac{P_s a^4}{4} \frac{K\kappa}{2K\kappa + K_s(1+\nu)} e^{-\frac{\kappa x}{a}} \cos\frac{\kappa x}{a} \tag{9.53}$$