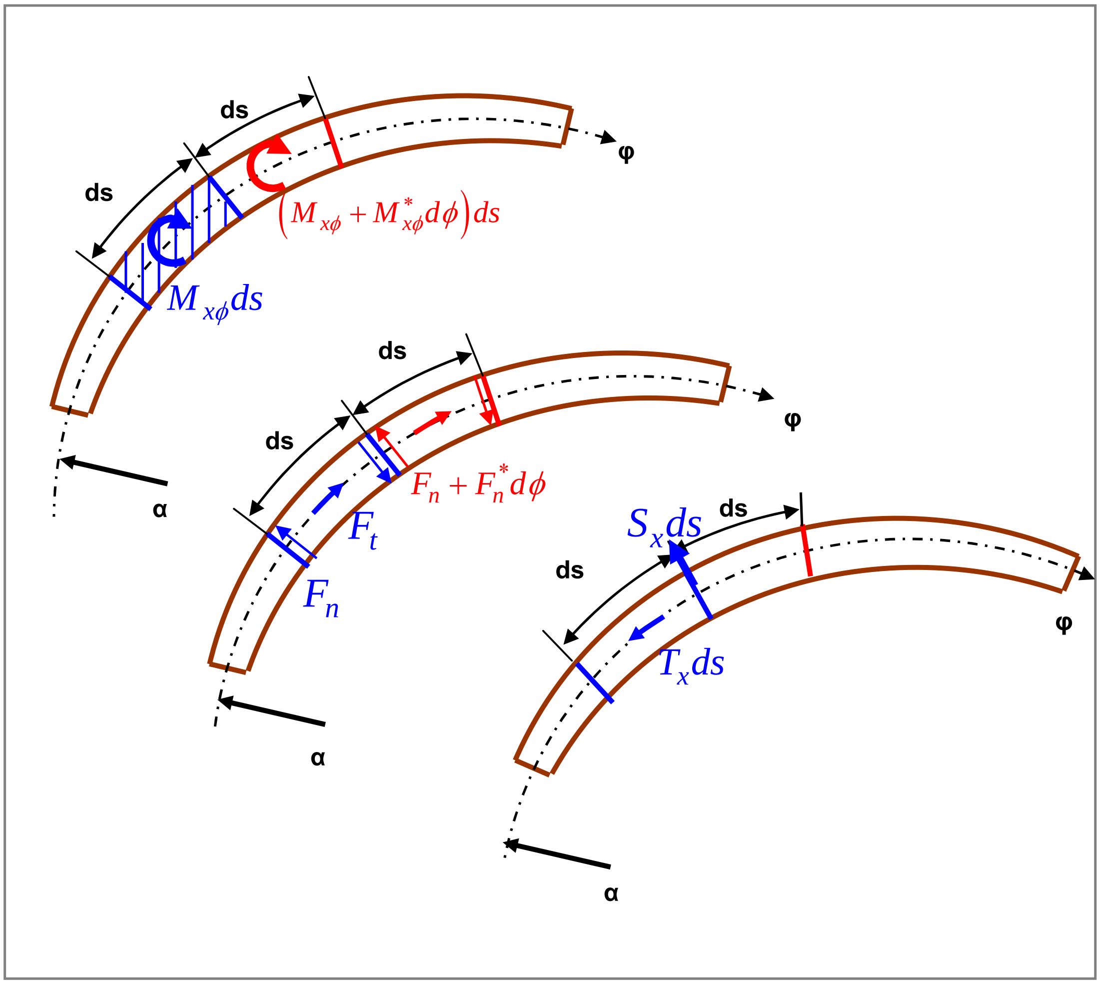
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

Καθ. Βλάσης Κουμούσης

Συνοριακές Συνθήκες

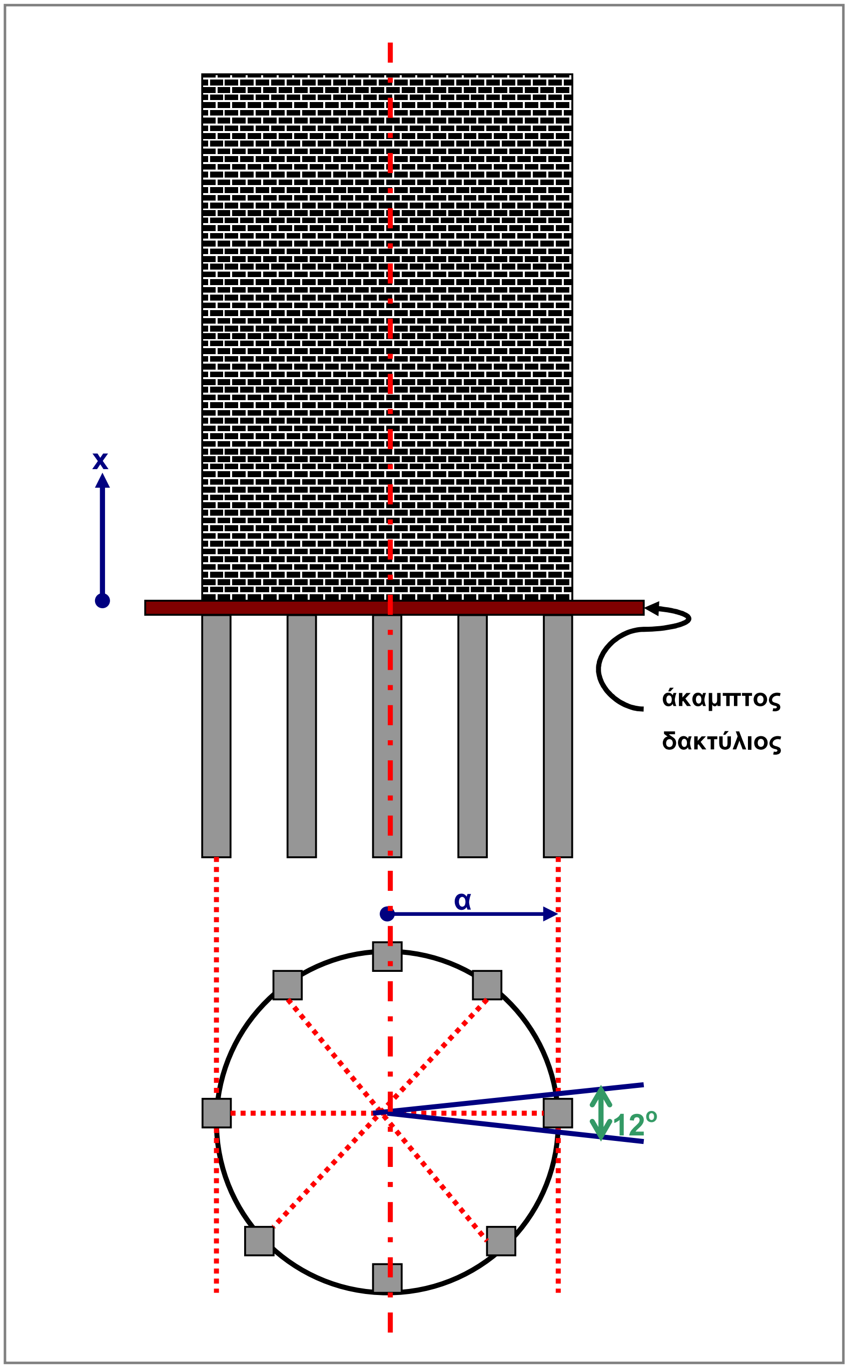


$$T_x = N_{x\phi} + \frac{F_t}{ds} \tag{8.1}$$

$$T_x = N_{x\phi} - \frac{M_{x\phi}}{a} \tag{8.2}$$

$$S_x = Q_x + \frac{M^{*}_{x\phi}}{a} \tag{8.3}$$

Πύργος Ψύξεως – Φόρτιση Ίδιου Βάρους



Αν η έδραση ήταν ομοιόμορφη σε όλη τη βάση, η αξονική δύναμη θα ήταν

$$N_x = -P \tag{8.4}$$

$$(360-8*12)*P+8*12*C=0 \tag{8.5}$$

Άρα:

$$C=2.75P \tag{8.6}$$

Η φόρτιση μπορεί να προσεγγιστεί από σειρά Fourier με όρους με m πολλαπλάσιο του 8, δηλαδή m=8,16, 24, …

Συνοριακές Συνθήκες

Στην περιοχή του ελεύθερου συνόρου στη θέση x=0 ισχύουν τα ακόλουθα:

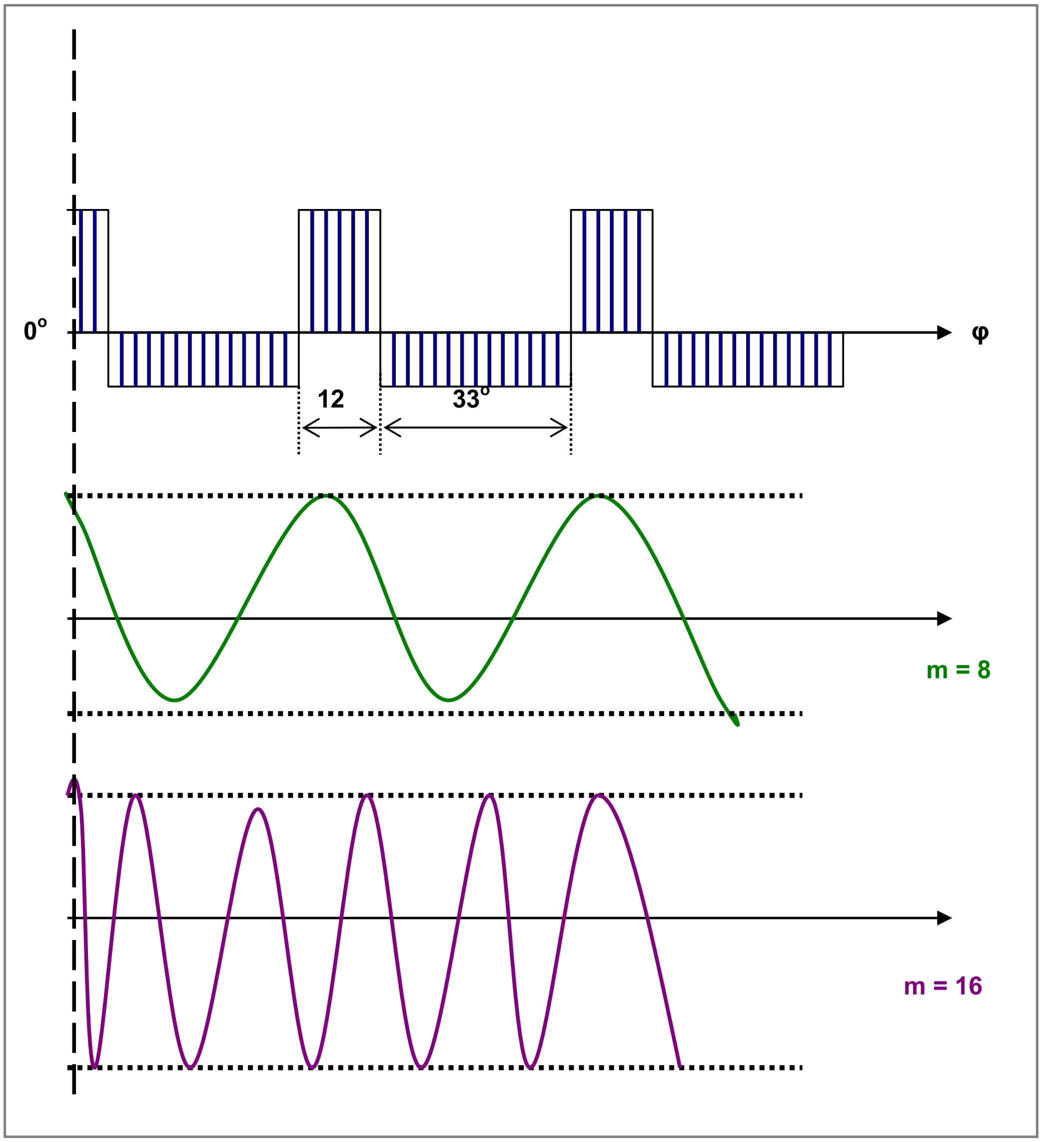
$$M_x=0 \tag{8.7}$$

$$N_x=\sum_{m=8,16,24,\dots} N_{xm}\cos(m\phi) \tag{8.8}$$

και για άκαμπτο δακτύλιο:

$$\upsilon=0 \tag{8.9}$$

$$w=0 \tag{8.10}$$



Για την παραγωγή της λύσης ακολουθούνται τα ακόλουθα βήματα:

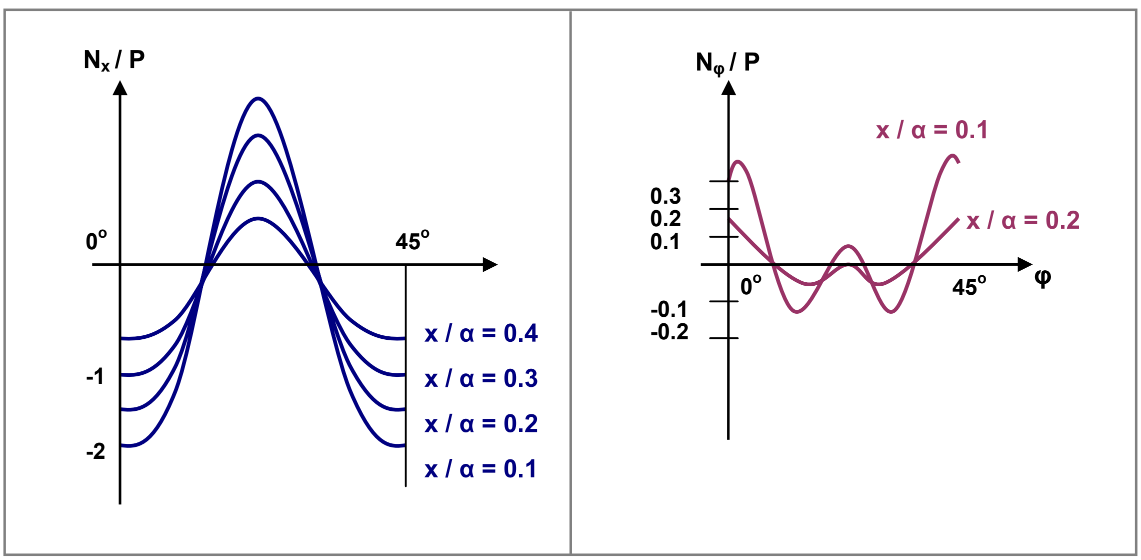
- Για κάθε m = -8, 16, 24, 32, 40 επιλύεται η χαρακτηριστική εξίσωση και με βάση τις 8 τιμές λ_i, i=1,..,8 υπολογίζονται:

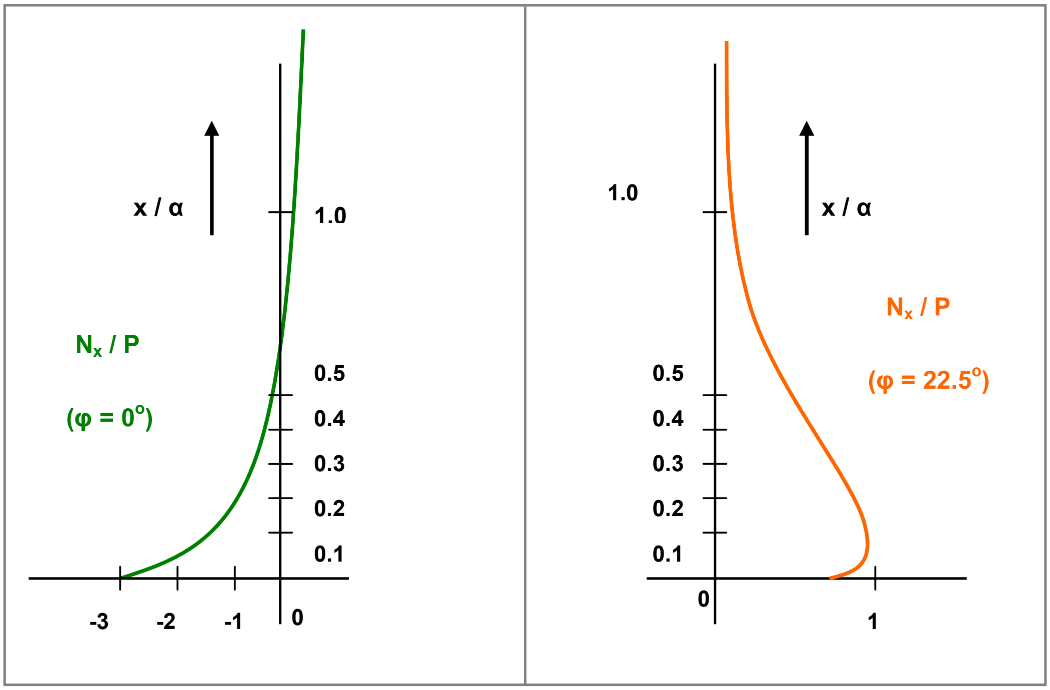
- Υπολογίζονται οι τιμές των κ_1, κ_2, μ_1, μ_2 ως εξής, για α / t = 150:

m	κ_1	κ_2	μ_1	μ_2
8	18.22	2.14	14.42	1.69
16	24.55	8.39	12.00	4.12
24	32.24	16.05	10.76	5.39
32	40.17	23.95	10.12	6.08
40	48.17	31.89	9.74	6.51

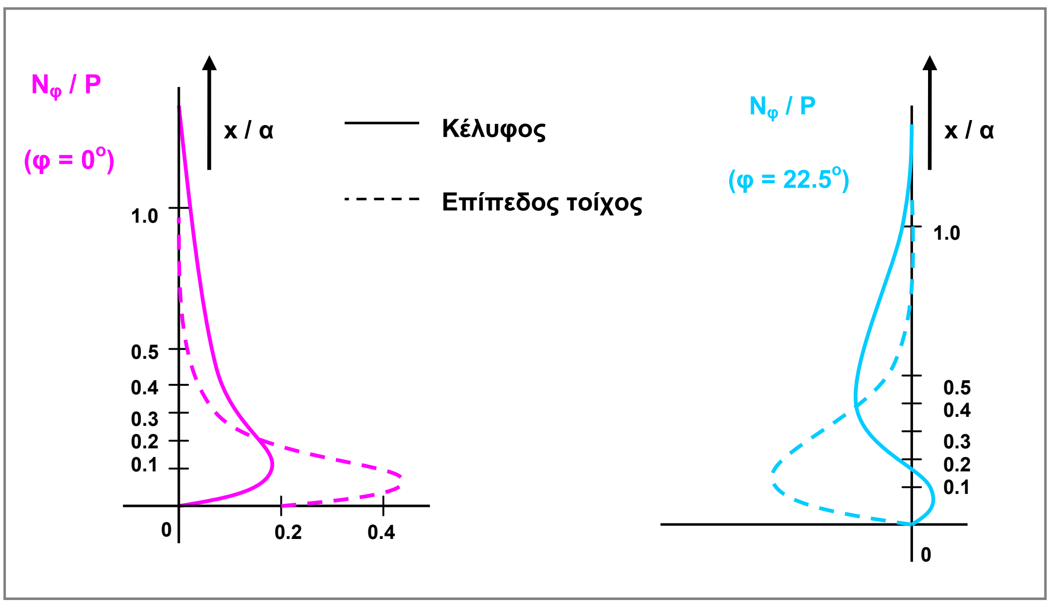
- Για κάθε m υπολογίζονται οι όροι των μετακινήσεων u_m, υ_m και w_m, καθώς και οι εκφράσεις για τα εντατικά μεγέθη χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα A_i, B_i, C_i

- Επιβολή των Σ.Σ. για κάθε m





x / α
1.0
N_x / P
(φ = 0°)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-3
-2
-1
0
1.0
x / α
N_x / P
(φ = 22.5°)
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1



$N_φ$ / P
(φ = 0°)
x / α
Κέλυφος
Επίπεδος τοίχος
1.0
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0.2
0.4
$N_φ$ / P
(φ = 22.5°)
x / α
1.0
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0

ΑΝΟΙΚΤΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΕΛΥΦΗ

Στη γενική περίπτωση δεν είναι εφικτή αναλυτική λύση για οποιαδήποτε Σ.Σ. στο x =0, L και φ=φ_1, φ_2. Αν κατά την διαμήκη διεύθυνση υπάρχουν αυνθήκες απλής έδρασης, τότε:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos\frac{n\pi x}{L},\ \upsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_n \sin\frac{n\pi x}{L},\ w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{8.11}$$

Η λύση αυτή, αν εισαχθεί στις εξισώσεις ισορροπίας θεωρώντας λ = nπα/L, δίδει τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} &-\lambda^2 u_n + \frac{1-v}{2}\ddot{u}_n + \frac{1+v}{2}\lambda\dot{\upsilon}_n + v\lambda w_n + \\ &\quad + \kappa\left[\frac{1-v}{2}\ddot{u}_n + \lambda^3 w_n + \frac{1-v}{2}\lambda\ddot{w}_n\right] = 0 \end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{1+v}{2}\lambda\dot{u}_n + \ddot{\upsilon}_n - \frac{1-v}{2}\lambda^2\upsilon_n + \dot{w}_n + \\ &\quad + \kappa\left[-\frac{3}{2}(1-v)\lambda^2\upsilon_n + \frac{3-v}{2}\lambda^2\dot{w}_n\right] = 0 \end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned} &-v\lambda u_n + \dot{\upsilon}_n + w_n + \kappa\left[-\frac{1-v}{2}\lambda\ddot{u}_n - \lambda^3 u_n + \frac{3-v}{2}\lambda^2\dot{u}_n\right] + \\ &\quad + \kappa\left[\left(\lambda^4+1\right)w_n - 2\left(\lambda^2-1\right)\ddot{w}_n + \dddot{w}_n\right] = 0 \end{aligned} \tag{8.14}$$

όπου $\dot{x} = \dfrac{dx}{d\phi}$. Πρόκειται για ένα σύστημα 3 διαφορικών εξισώσεων ως προς φ.

Η λύση του συστήματος των κανονικών Δ.Σ. με σταθερούς συντελεστές μπορεί να αναζητηθεί με τη μορφή:

$$u_n = Ae^{m\phi},\ \upsilon_n = Be^{m\phi},\ w_n = Ce^{m\phi} \tag{8.15}$$

όπου m άγνωστη ποσότητα – όχι ακέραιη. Εισάγοντας τη λύση στις εξισώσεις προκύπτει ένα σύστημα – ομογενές – ως προς τα A,B και C:

$$\left[\lambda^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 (1+\kappa)\right] A + \left[-\frac{1+\nu}{2}\lambda m\right] B + \\ + \left[-\nu\lambda - \kappa\left(\lambda^3 + \frac{1-\nu}{2}\lambda m^2\right)\right] C = 0 \tag{8.16}$$

$$\left[-\frac{1+\nu}{2}\lambda m\right] A + \left[m^2 - \frac{1-\nu}{2}\lambda^2 - \frac{3}{2}(1-\nu)\kappa\lambda^2\right] B + \\ + \left[m + \frac{3-\nu}{2}\kappa\lambda^2 m\right] C = 0 \tag{8.17}$$

$$\left[-\nu\lambda - \kappa\left(\lambda^3 + \frac{1-\nu}{2}\lambda m^2\right)\right] A + \left[m + \frac{3-\nu}{2}\kappa\lambda^2 m\right] B + \\ + \left[1 + \kappa\left(\lambda^4 - 2\lambda^2 m^2 + m^4 + 2m^2 + 1\right)\right] C = 0 \tag{8.18}$$

Παρόμοιες αλγεβρικές εξισώσεις με το πλήρες κέλυφος. Εδώ η παράμετρος είναι, όμως, το m και όχι το λ.

Η χαρακτηριστική εξίσωση του ομογενούς αλγεβρικού συστήματος ως προς τα A, B, και C είναι αυτή που προκύπτει από το μηδενισμό της ορίζουσας των συντελεστών, δηλαδή:

$$m^8 - 2\left(2\lambda^2 - 1\right)m^6 + \left[6\lambda^4 - 2(4-\nu)\lambda^2 + 1\right]m^4 - \\ -2\lambda^2\left[2\lambda^4 - 3\lambda^2 + (2-\nu)\right]m^2 + \left[\frac{1-\nu^2}{\kappa}\lambda^4 + \lambda^6\left(\lambda^2 - 2\nu\right)\right] = 0 \tag{8.19}$$

από όπου προκύπτουν οκτώ λύσεις από τη μορφή 4 ζευγών συζυγών μιγαδικών λύσεων ως εξής:

$$\begin{aligned} m_1 &= -\kappa_1 + i\mu_1 & m_5 &= +\kappa_1 + i\mu_1 \\ m_2 &= -\kappa_1 - i\mu_1 & m_6 &= +\kappa_1 - i\mu_1 \\ m_3 &= -\kappa_2 + i\mu_2 & m_7 &= +\kappa_2 + i\mu_2 \\ m_4 &= -\kappa_2 - i\mu_2 & m_8 &= +\kappa_2 - i\mu_2 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Για κάθε m_i, i=1,.., 8, προκύπτει ένα ιδιοδιάνυσμα εν γένει μιγαδικής μορφής, οπότε:

$$A_i = a_i C_i \ , \ B_i = \beta_i C_i \tag{8.21}$$

Έτσι η λύση για κάθε συνιστώσα της μετατόπισης μπορεί να εκφραστεί με τη μορφή:

$$\begin{aligned} w_n = e^{-\kappa_1 \phi}\left[C_1 e^{i\mu_1 \phi} + C_2 e^{-i\mu_1 \phi}\right] + \\ +e^{-\kappa_2 \phi}\left[C_3 e^{i\mu_2 \phi} + C_4 e^{-i\mu_2 \phi}\right] + \\ +e^{+\kappa_1 \phi}\left[C_5 e^{i\mu_1 \phi} + C_6 e^{-i\mu_1 \phi}\right] + \\ +e^{+\kappa_2 \phi}\left[C_7 e^{i\mu_2 \phi} + C_8 e^{-i\mu_2 \phi}\right] \end{aligned} \tag{8.22}$$