ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

Καθ. Βλάσης Κουμούσης

Κυλινδρικά Κελύφη – Καμπτική Θεωρία

Οι μεμβρανικές δυνάμεις που προσδιορίζει η μεμβρανική θεωρία αποτελούν πολύ καλή προσέγγιση των ίδιων που καθορίζει η καμπτική θεωρία. Έτσι, κύρια κατεύθυνση της καμπτικής θεωρίας είναι να συμπληρώσει την μεμβρανική θεωρία εκεί που αυτή παρουσιάζει ενγενή προβλήματα. Ανεξάρτητα, όμως, υπάρχουν περιπτώσεις που είναι επιθυμητή η εξεύρεση λύσης των εξισώσεων του κυλινδρικού κελύφους για δεδομένη επιφανειακή φόρτιση.

Αν το φορτίο μπορεί να εκφραστεί από τις σχέσεις:

$$P_x = P_{xmn}\cos(m\phi)\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.1}$$

$$P_\phi = P_{\phi mn}\sin(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.2}$$

$$P_r = P_{rmn}\cos(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.3}$$

όπου $\lambda = \frac{n\pi a}{L}$.Τότε η λύση των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας μπορεί να εκφραστεί ως:

$$u = u_{mn}\cos(m\phi)\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.4}$$

$$\upsilon = \upsilon_{mn}\sin(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.5}$$

$$w = w_{mn}\cos(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.6}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις ισορροπίας και συλλέγοντας τους συντελεστές των γραμμικά ανεξάρτητων τριγωνομετρικών όρων, προκύπτει το παρακάτω σύστημα. Ένα σύστημα τριών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τους άγνωστους συντελεστές u_{mn}, υ_{mn} και w_{mn}.

$$\begin{aligned}&\left[\lambda^2+\frac{1-v}{2}m^2(1+\kappa)\right]u_{mn}+\left[-\frac{1+v}{2}\lambda m\right]\upsilon_{mn}+\\&\qquad+\left[-v\lambda-\kappa\left(\lambda^3-\frac{1-v}{2}\lambda m^2\right)\right]w_{mn}=\frac{a^2}{D}p_{xmn}\end{aligned}\tag{7.7}$$

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{1+v}{2}\lambda m\right]u_{mn}+\left[m^2+\frac{1-v}{2}\lambda^2(1+3\kappa)\right]\upsilon_{mn}+\\&\qquad+\left[m+\frac{3-v}{2}\kappa\lambda^2 m\right]w_{mn}=\frac{a^2}{D}p_{\phi mn}\end{aligned}\tag{7.8}$$

$$\begin{aligned}&\left[-v\lambda-\kappa\left(\lambda^3-\frac{1-v}{2}\lambda m^2\right)\right]u_{mn}+\left[m+\frac{3-v}{2}\kappa\lambda^2 m\right]\upsilon_{mn}+\\&\qquad+\left[1+\kappa\left(\lambda^4+2\lambda^2m^2+m^4-2m^2+1\right)\right]w_{mn}=\frac{a^2}{D}p_{rmn}\end{aligned}\tag{7.9}$$

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι αριθμητικές τιμές των u_{mn}, υ_{mn} και w_{mn}.

Με βάση τις παραπάνω τιμές τα εντατικά μεγέθη προκύπτουν ως εξής:

$$N_\phi=\frac{D}{a}\left[m\upsilon_{mn}+\left(1+\kappa-\kappa m^2\right)w_{mn}-v\lambda u_{mn}\right]\cos(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right)\tag{7.10}$$

$$N_x=\frac{D}{a}\left[-\lambda u_{mn}+vm\upsilon_{mn}+\left(v+\kappa\lambda^2\right)w_{mn}\right]\cos(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right)\tag{7.11}$$

$$N_{\phi x}=\frac{D(1-v)}{2a}\left[-(1+\kappa)mu_{mn}+\lambda\upsilon_{mn}-\kappa\lambda mw_{mn}\right]\sin(m\phi)\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.12}$$

$$N_{x\phi}=\frac{D(1-v)}{2a}\left[-mu_{mn}+(1+\kappa)\lambda\upsilon_{mn}+\kappa\lambda mw_{mn}\right]\sin(m\phi)\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.13}$$

$$M_{\phi}=-\frac{\kappa}{a^2}\left(m^2-1+v\lambda^2\right)w_{mn}\cos(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.14}$$

$$M_{x}=-\frac{\kappa}{a^2}\left[\left(\lambda^2+vm^2\right)w_{mn}-\lambda u_{mn}+vm\upsilon_{mn}\right]\cos(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.15}$$

$$M_{\phi x}=-\frac{\kappa}{a^2}\left[\lambda mw_{mn}+\frac{1}{2}mu_{mn}+\frac{1}{2}\lambda\upsilon_{mn}\right]\sin(m\phi)\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.16}$$

$$M_{x\phi}=-\frac{\kappa(1-v)}{a^2}\left[\lambda mw_{mn}+\lambda\upsilon_{mn}\right]\sin(m\phi)\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.17}$$

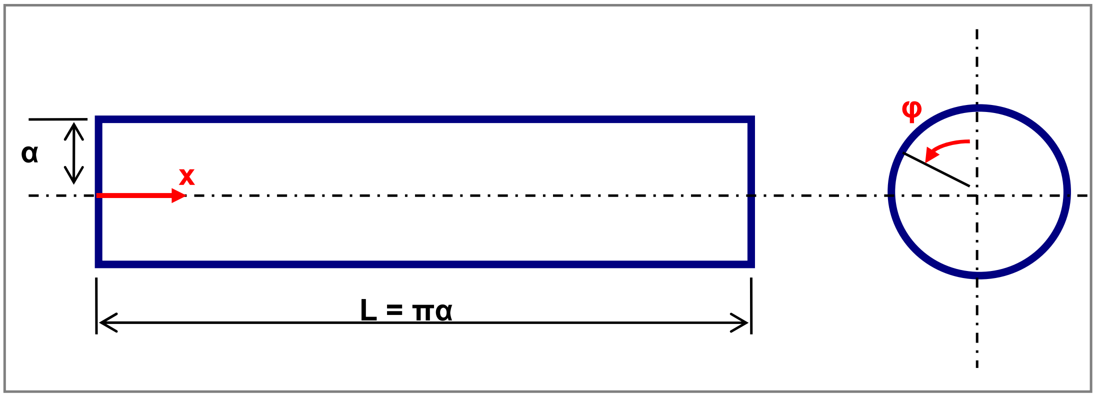
$$Q_{\phi}=+\frac{\kappa}{a^3}\left[m\left(m^2+\lambda^2-1\right)w_{mn}+(1-v)\lambda^2\upsilon_{mn}\right]\sin(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.18}$$

$$Q_{x}=-\frac{\kappa}{a^3}\left[\lambda\left(\lambda^2+m^2\right)w_{mn}+\left(\frac{1-v}{2}m^2-\lambda^2\right)\upsilon_{mn}+\frac{1+v}{2}\lambda m\upsilon_{mn}\right]\cos(m\phi)\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.19}$$

Η παραπάνω λύση αποτελεί ένα ειδικό ολοκλήρωμα και άρα δεν αποτελεί τη γενική λύση, καθόσον δεν περιλαμβάνει σταθερές προς προσδιορισμό από τις συνοριακές συνθήκες. Ικανοποιεί, όμως, κάποιες συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες, και πιο συγκεκριμένα οι μετακινήσεις και εντάσεις που εκφράζονται με τον όρο $\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right)$ μηδενίζονται στο x = 0 και x = L.

Από αυτές είναι και οι υ, w, N_x και M_x που πρέπει να είναι μηδέν στα σύνορα που στηρίζονται σε επίπεδα διαφράγματα, δηλαδή πρόκειται για επίπεδες κατασκευές απαραμόρφωτες στο επίπεδό τους, χωρίς να προβάλλουν αντίσταση σε μετακινήσεις εκτός του επιπέδου τους. Από αυτές η υ και η N_x χρησιμοποιήθηκαν στην μεμβρανική θεωρία.

Εφαρμόζουμε τις παραπάνω σχέσεις στο κυλινδρικό κέλυφος του σχήματος:



Για τη φόρτιση:

$$P_x = 0\,, \quad P_\phi = P_n \sin(\phi)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad P_r = -P_n \cos(\phi)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{7.20}$$

Θεωρούμε αρχικά παχύ κέλυφος με $t/a = 0.10$. Για $n=1$ και $m=1$ προκύπτει:

$$u_{1,1} = 1.987 P_1 \frac{a^2}{D}\,, \quad \upsilon_{1,1} = 5.968 P_1 \frac{a^2}{D}\,, \quad w_{1,1} = -6.957 P_1 \frac{a^2}{D} \tag{7.21}$$

Αντίστοιχα, η μεμβρανική θεωρία έδωσε:

$$u_{1,1} = 2 P_1 \frac{a^2}{D}\,, \quad \upsilon_{1,1} = 6 P_1 \frac{a^2}{D}\,, \quad w_{1,1} = -7 P_1 \frac{a^2}{D} \tag{7.22}$$

τιμές που είναι πολύ κοντά. Αντίστοιχα για τα εντατικά μεγέθη προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$N_{\phi_{1,1}} = -0.989 P_1 a \tag{7.23}$$

$$N_{x_{1,1}} = -1.993 P_1 a \tag{7.24}$$

$$N_{\phi x_{1,1}} = 1.993 P_1 a \tag{7.25}$$

$$N_{x\phi_{1,1}} = 1.990 P_1 a \tag{7.26}$$

για την ακριβή θεωρία, καθώς για την μεμβρανική θεωρία έχουμε:

$$N_{\phi_{1,1}} = -P_1 a \tag{7.27}$$

$$N_{x_{1,1}} = -2 P_1 a \tag{7.28}$$

$$N_{\phi x_{1,1}} = 2 P_1 a = N_{x\phi_{1,1}} \tag{7.29}$$

Η δικαμπτική ένταση προκύπτει πολύ μικρή:

$$M_{\phi_{1,1}} = 0 \tag{7.30}$$

$$M_{x_{1,1}} = 7.44 \times 10^{-3} P_1 a^2 \tag{7.31}$$

$$M_{\phi x_{1,1}} = 2.480 \times 10^{-3} P_1 a^2 \tag{7.32}$$

$$M_{x\phi_{1,1}} = 0.823 \times 10^{-3} P_1 a^2 \tag{7.33}$$

$$Q_{\phi_{1,1}} = -0.823 \times 10^{-3} P_1 a \tag{7.34}$$

$$Q_{x_{1,1}} = 9.93 \times 10^{-3} P_1 a \tag{7.35}$$

Για ένα κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος της ίδιας γεωμετρίας, αλλά μικρού πάχους, επιλέγοντας $\kappa = 10^{-4}$ το οποίο αντιστοιχεί σε $t/a = 3.46 \times 10^{-2}$, προκύπτουν τα ακόλουθα:

- Για $n = 1$ οι ορθές και διατμητικές μεμβρανικές δυνάμεις είναι ίσες με αυτές της μεμβρανικής θεωρίας, οι δε ροπές προκύπτουν μικρότερες από αυτές του παχέως τοιχώματος

- Για n αρκετά μεγαλύτερο του 1 προκύπτουν οι παρακάτω μετακινήσεις:

$$u_{1,10} = 0.980 \times 10^{-3} P_{10}\, a^2 / D \tag{7.36}$$

$$\upsilon_{1,10} = 29.85 \times 10^{-3} P_{10}\, a^2 / D \tag{7.37}$$

$$w_{1,10} = -510 \times 10^{-3} P_{10}\, a^2 / D \tag{7.38}$$

για την καμπτική θεωρία.

$$u_{1,10} = 2 \times 10^{-3} P_{10}\, a^2 / D \tag{7.39}$$

$$\upsilon_{1,10} = 40.2 \times 10^{-3} P_{10}\, a^2 / D \tag{7.40}$$

$$w_{1,10} = -1040 \times 10^{-3} P_{10}\, a^2 / D \tag{7.41}$$

για την μεμβρανική θεωρία. Από την σύγκριση των οποίων διαπιστώνεται η δραστική μείωση των μετακινήσεων λόγω της καμπτικής δυσκαμψίας του κελύφους. Οι ορθές και διατμητικές μεμβρανικές δυνάμεις προκύπτουν:

$$N_{\phi_{1,10}} = -0.480 P_{10} a \tag{7.42}$$

$$N_{x_{1,10}} = -0.00470 P_{10} a \tag{7.43}$$

$$N_{\phi x_{1,10}} = +0.1490 P_{10} a \tag{7.44}$$

$$N_{x\phi_{1,10}} = +0.1458 P_{10} a \tag{7.45}$$

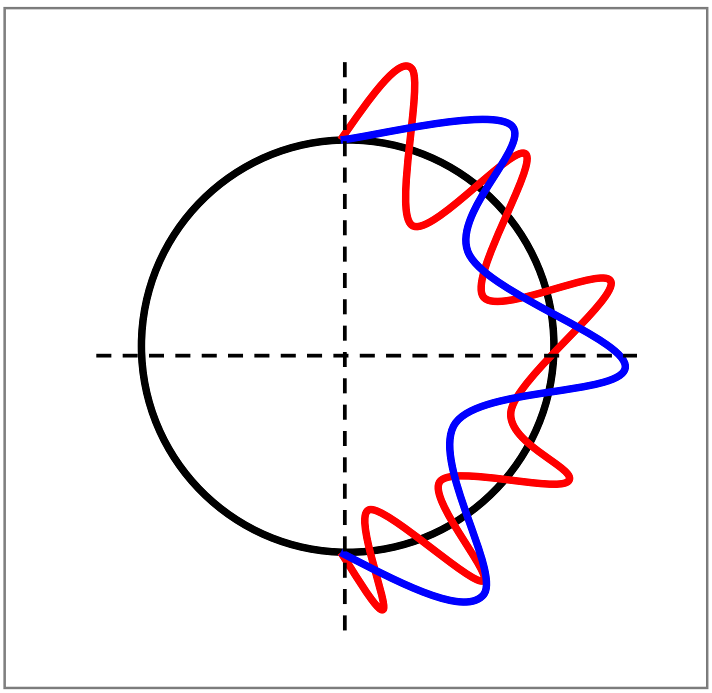
για την καμπτική θεωρία.

$$N_{\phi_{1,10}} = -P_{10} a \tag{7.46}$$

$$N_{x_{1,10}} = -0.02 P_{10} a \tag{7.47}$$

$$N_{\phi x_{1,10}} = 0.20 P_{10} a = N_{x\phi_{1,10}} \tag{7.48}$$

για την μεμβρανική θεωρία.



Η παραμόρφωση για $n=10$ έχει 9 εναλλαγές στην περιφέρεια του κελύφους, οπότε το κάθετο φορτίο δεν αντιλαμβάνεται μόνο από την N_ϕ, αλλά και από την τέμνουσα $Q_x\left(>50\%\right)$ για την παραπάνω περίπτωση.

Οι ροπές αν και το πάχος είναι πολύ μικρότερο από την προηγούμενη περίπτωση, είναι μικρότερες, αλλά της ίδιας τάξης μεγέθους.

$$M_{\phi_{1,10}} = 0 \tag{7.49}$$

$$M_{x_{1,10}} = 5.10 \times 10^{-3} P_1 a^2 \tag{7.50}$$

$$M_{\phi x_{1,10}} = 0.495 \times 10^{-3} P_{10} a^2 \tag{7.51}$$

$$M_{x\phi_{1,10}} = 0.480 \times 10^{-3} P_1 a^2 \tag{7.52}$$

Η εκκεντρότητα κατά την διαμήκη διεύθυνση προκύπτει :

$$M_x \big/ N_x = -31.4t \tag{7.53}$$

που σημαίνει ότι για $n = 1$ και μεγάλο m, ισχυρή κάμψη κατά την περιφερειακή διεύθυνση κυριαρχεί, ενώ για μεγάλο m και n και η κάμψη αλλά και η στρέψη θα είναι σημαντικές.

Η παραπάνω διαπίστωση είναι αυτή που κατά βάση περιορίζει την εφαρμοστικότητα της παραπάνω λύσης, καθόσον σπάνια η φόρτιση εκφράζεται με βάση ένα ζεύγος m και n.

Συνήθως η φόρτιση μπορεί να εκφραστεί ως διπλή σειρά Fourier ως εξής:

$$P_x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{xmn} \cos(m\phi) \cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.54}$$

$$P_\phi = \sum_{m=\phi}^{\infty} \sum_{n=\phi}^{\infty} P_{\phi mn} \sin(m\phi) \sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.55}$$

$$P_r = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{rmn}\cos(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.56}$$

Στην περίπτωση αυτή η λύση μπορεί να βρεθεί με τη μορφή διπλής σειράς Fourier ως εξής:

$$u = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}\cos(m\phi)\cos\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.57}$$

$$\upsilon = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon_{mn}\sin(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.58}$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}\cos(m\phi)\sin\left(\frac{\lambda x}{a}\right) \tag{7.59}$$

για μεγάλους λόγους t/a το απαιτούμενο πλήθος όρων είναι σχετικά μικρό. Τούτο όμως δεν συμβαίνει για μικρά πάχη όπου οι μεμβρανικές δυνάμεις συγκλίνουν σχετικά γρήγορα, ενώ οι καμπτικές ροπές και τέμνουσες δυνάμεις απαιτούν πολύ μεγάλο πλήθος όρων.

Μία πιο αποδοτική πορεία είναι να συνδυάσει κανείς τη μεμβρανική λύση με ομογενείς λύσεις με δράσεις στα άκρα.

Κυκλικό Κυλινδρικό Κέλυφος Με Φορτία Επιβαλλόμενα Στα Άκρα

Το κλειστό κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος πρέπει να έχει περιοδικές λύσεις ως προς φ με περίοδο 2π.

Με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας οι κυκλικοί όροι συνδυάζονται ως εξής:

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}u_m\left(x\right)\cos\left(m\phi\right),\quad \upsilon=\sum_{m=1}^{\infty}\upsilon_m\left(x\right)\sin\left(m\phi\right),\quad w=\sum_{m=0}^{\infty}w_m\left(x\right)\cos\left(m\phi\right) \tag{7.60}$$

Καθόσον το φορτίο ασκείται στα άκρα η ενδιάμεση φόρτιση είναι μηδενική.

Αντικαθιστώντας τα u, υ, w στις εξισώσεις, προκύπτουν ομογενείς εξισώσεις συλλέγοντας κοινούς όρους των τριγωνομετρικών παραγόντων, οι οποίοι λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας θα πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι, Καθορίζεται για κάθε m, ένα σύστημα τριών συζευγμένων κανονικών διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned}&u_m''-\frac{1-\nu}{2}m^2u_m+\frac{1+\nu}{2}m\upsilon_m'+\nu w_m'-\\&\qquad-\kappa\left(\frac{1-\nu}{2}m^2u_m+w_m'''+\frac{1-\nu}{2}m^2w_m'\right)=0\end{aligned} \tag{7.61}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{1+\nu}{2}mu_m'-m^2\upsilon_m+\frac{1-\nu}{2}\upsilon_m''-mw_m+\\&\qquad+\kappa\left(\frac{3}{2}\left(1-\nu\right)\upsilon_m''+\frac{3-\nu}{2}mw_m''\right)=0\end{aligned} \tag{7.62}$$

$$\begin{aligned}&\nu u_m'+m\upsilon_m+w_m+\kappa\left(-\frac{1-\nu}{2}m^2u_m'-u_m'''-\frac{3-\nu}{2}m\upsilon_m''\right)+\\&\qquad+\kappa\left(w_m^{IV}-2m^2w_m''+m^4w_m-2m^2w_m+w_m\right)=0\end{aligned} \tag{7.63}$$

Οι διαφορικές εξισώσεις έχουν σταθερούς συντελεστές και επιδέχονται εκθετικές λύσεις της μορφής:

$$u_m=Ae^{\lambda x/a}\ ,\quad \upsilon_m=Be^{\lambda x/a}\ ,\quad w_m=Ce^{\lambda x/a} \tag{7.64}$$

Αντικαθιστώντας στις διαφορικές εξισώσεις και βγάζοντας κοινό παράγοντα το $e^{\lambda x/a}$ προκύπτει από το μηδενισμό των συντελεστών των ομογενών εξισώσεων το παρακάτω ομογενές σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - \frac{1-\nu}{2} m^2 (1+\kappa) & \frac{1+\nu}{2}\lambda m & \nu\lambda - \kappa\left(\lambda^3 + \frac{1-\nu}{2}\lambda m^2\right) \\ \frac{1+\nu}{2}\lambda m & -\frac{1-\nu}{2}\lambda^2 + m^2 - \frac{3}{2}(1-\nu)\kappa\lambda^2 & m - \frac{3-\nu}{2}\kappa\lambda^2 m \\ \nu\lambda - \kappa\left(\lambda^3 + \frac{1-\nu}{2}\lambda m^2\right) & m - \frac{3-\nu}{2}\kappa\lambda^2 m & 1 + \kappa\left(\lambda^4 - 2\lambda^2 m^2 + m^4 - 2m^2 + 1\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0 \tag{7.65}$$

Οι μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς συστήματος προκύπτουν για τιμές του λ που μηδενίζουν την ορίζουσα των συντελεστών του παρακάτω συστήματος, δηλαδή:

$$\begin{aligned} &\lambda^8 - 2\left(2m^2 - \nu\right)\lambda^6 + \left[\frac{1-\nu}{2} + 6m^2\left(m^2 - 1\right)\right]\lambda^4 - \\ &-2m^2\left[2m^4 - (4-\nu)m^2 + (2-\nu)\right]\lambda^2 + m^4\left(m^2 - 1\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{7.66}$$

που είναι τετάρτου βαθμού ως προς λ^2. Οι οκτώ ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι τέσσερα ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών ως εξής:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\kappa_1 + i\mu_1 & \lambda_5 &= +\kappa_1 + i\mu_1 \\ \lambda_2 &= -\kappa_1 - i\mu_1 & \lambda_6 &= +\kappa_1 - i\mu_1 \\ \lambda_3 &= -\kappa_2 + i\mu_2 & \lambda_7 &= +\kappa_2 + i\mu_2 \\ \lambda_4 &= -\kappa_2 - i\mu_2 & \lambda_8 &= +\kappa_2 - i\mu_2 \end{aligned} \tag{7.67}$$

Η ομογενής λύση περιλαμβάνει και τις οκτώ μερικές λύσεις και είναι:

$$\begin{aligned} u_m = {} & e^{-\kappa_1 x/a}\left(A_1 e^{i\mu_1 x/a} + A_2 e^{-i\mu_1 x/a}\right) + \\ & + e^{-\kappa_2 x/a}\left(A_3 e^{i\mu_2 x/a} + A_4 e^{-i\mu_2 x/a}\right) + \\ & + e^{\kappa_1 x/a}\left(A_5 e^{i\mu_1 x/a} + A_6 e^{-i\mu_1 x/a}\right) + \\ & + e^{\kappa_2 x/a}\left(A_7 e^{i\mu_2 x/a} + A_8 e^{-i\mu_2 x/a}\right) \end{aligned} \tag{7.68}$$

$$\begin{aligned}
\upsilon_m = {} & e^{-\kappa_1 x/a}\left(B_1 e^{i\mu_1 x/a} + B_2 e^{-i\mu_1 x/a}\right) + \\
& + e^{-\kappa_2 x/a}\left(B_3 e^{i\mu_2 x/a} + B_4 e^{-i\mu_2 x/a}\right) + \\
& + e^{\kappa_1 x/a}\left(B_5 e^{i\mu_1 x/a} + B_6 e^{-i\mu_1 x/a}\right) + \\
& + e^{\kappa_2 x/a}\left(B_7 e^{i\mu_2 x/a} + B_8 e^{-i\mu_2 x/a}\right)
\end{aligned} \tag{7.69}$$

$$\begin{aligned}
w_m = {} & e^{-\kappa_1 x/a}\left(C_1 e^{i\mu_1 x/a} + C_2 e^{-i\mu_1 x/a}\right) + \\
& + e^{-\kappa_2 x/a}\left(C_3 e^{i\mu_2 x/a} + C_4 e^{-i\mu_2 x/a}\right) + \\
& + e^{\kappa_1 x/a}\left(C_5 e^{i\mu_1 x/a} + C_6 e^{-i\mu_1 x/a}\right) + \\
& + e^{\kappa_2 x/a}\left(C_7 e^{i\mu_2 x/a} + C_8 e^{-i\mu_2 x/a}\right)
\end{aligned} \tag{7.70}$$

Οι συντελεστές A_j, B_j, C_j για $j = 1,..,8$ αποτελούν ιδιοδιανύσματα του ομογενούς συστήματος για κάθε λ_j, κατά συνέπεια από τις 24 σταθερές μόνο οι οκτώ (8) είναι ανεξάρτητες και προσδιοριστέες από τις συνοριακές συνθήκες.