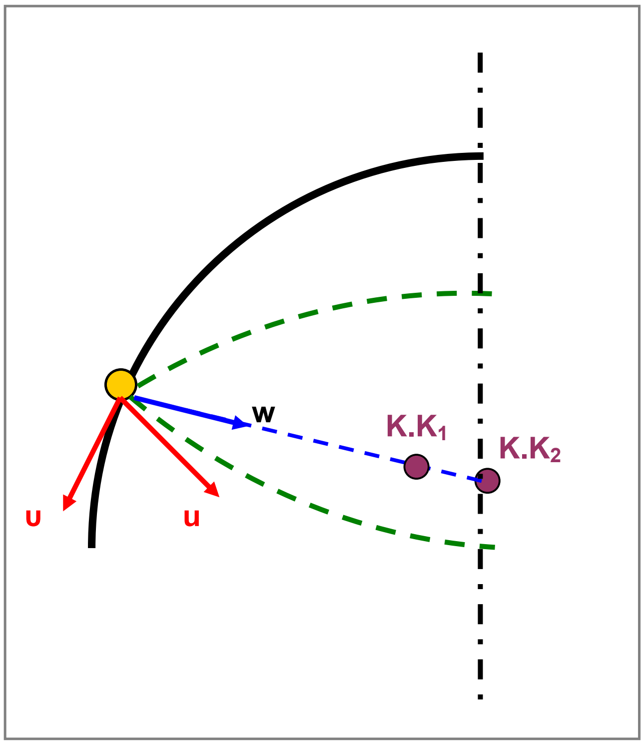
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

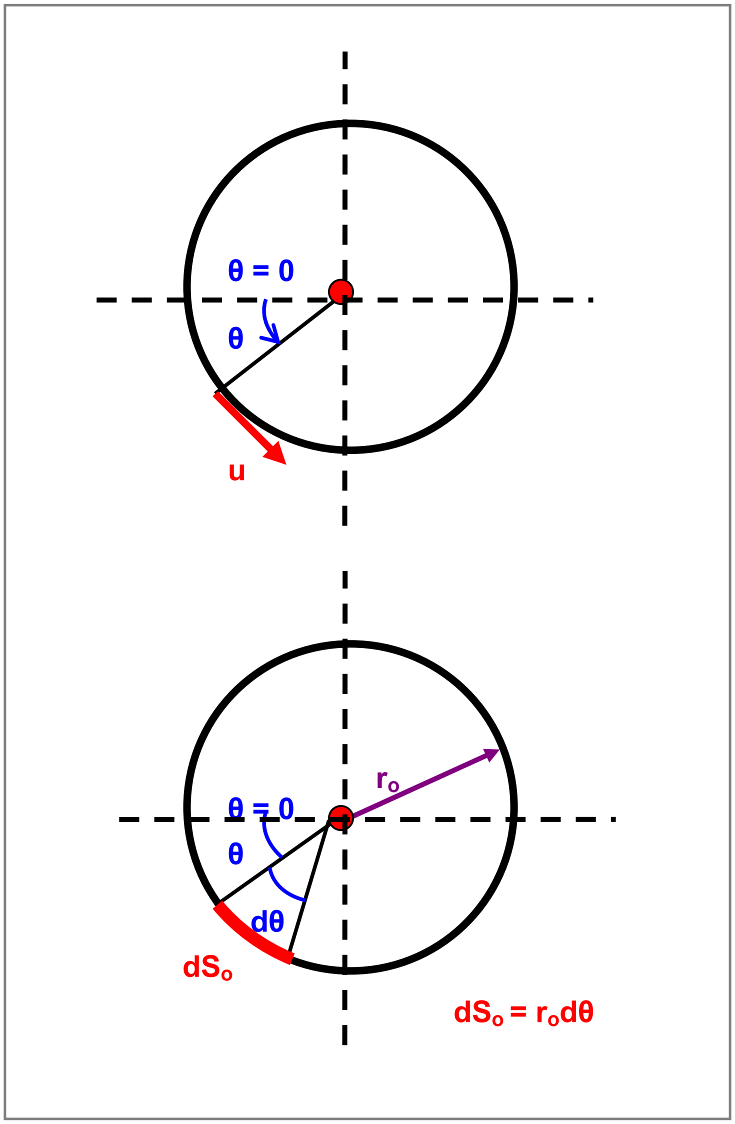
ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

Καθ. Βλάσης Κουμούσης

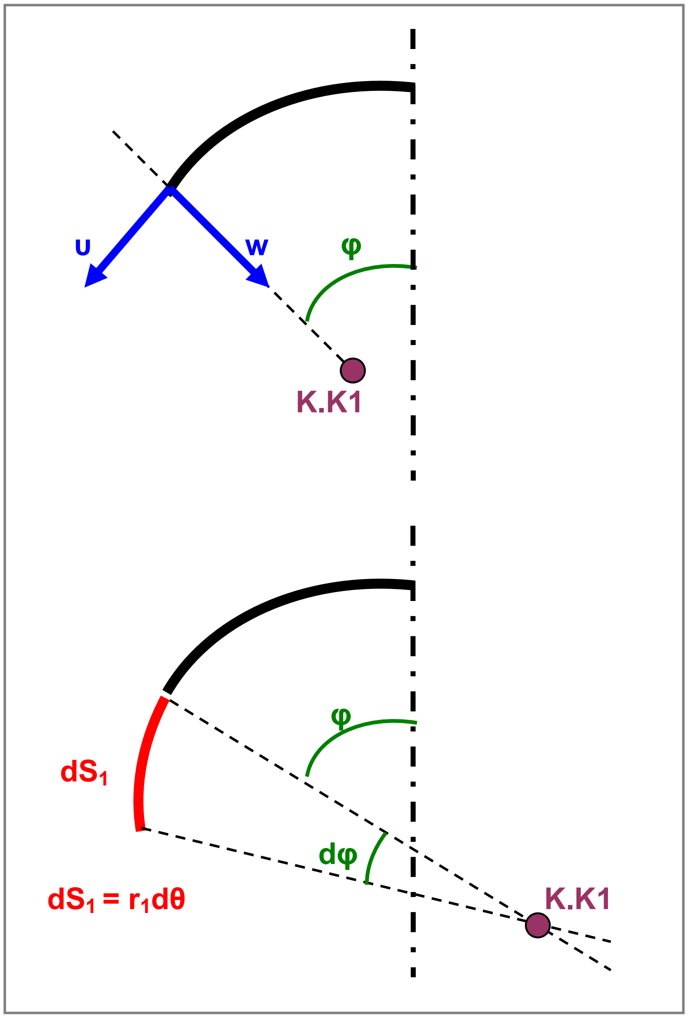
Κελύφη Εκ Περιστροφής – Μεμβρανική Θεωρία Παραμόρφωση



Κάτοψη – Παράλληλος



Τομή - Μεσημβρινός



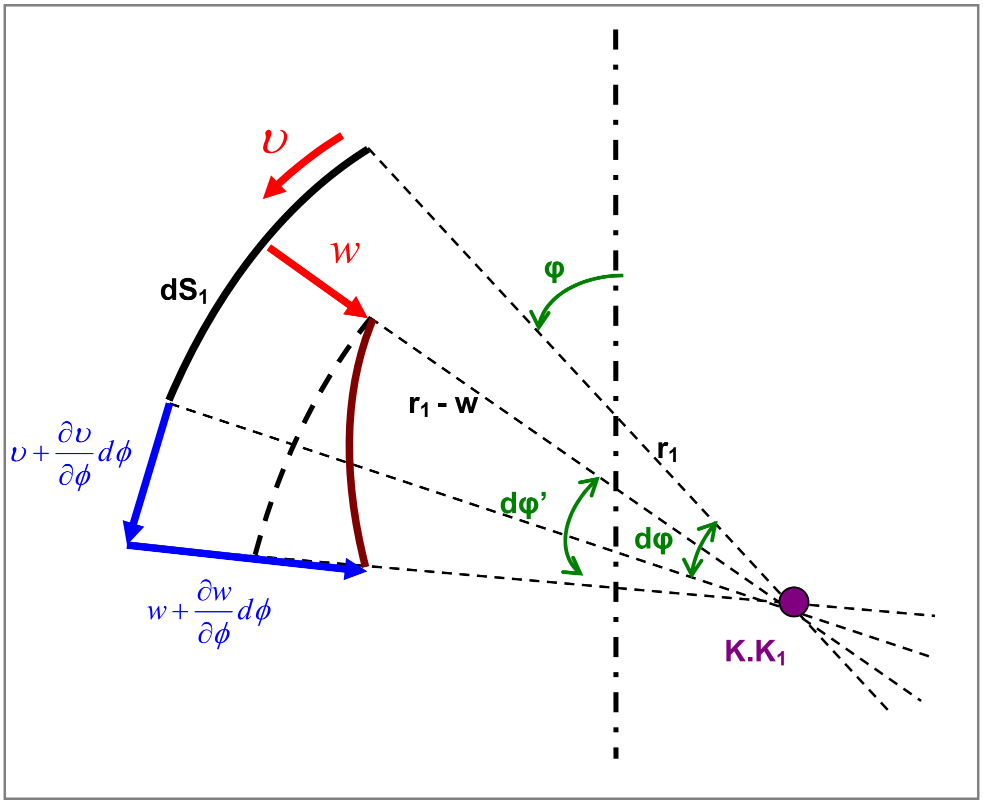
Ορισμοί:

$$\varepsilon_{\phi} = \frac{\Delta\left(ds_1\right)}{ds_1} \tag{6.1}$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\Delta\left(ds_0\right)}{ds_0} \tag{6.2}$$

Η μετατόπιση u συνεισφέρει στην παραμόρφωση ε_{φ} μόνο κατά μη γραμμικό τρόπο.

1. Παραμόρφωση ε_φ



$$d\phi' = \frac{dS_1 + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial \phi} d\phi}{r_1} \Rightarrow$$

$$d\phi' = d\phi + \frac{\partial \upsilon}{r_1 \partial \phi} d\phi \qquad (6.3)$$

Ο όρος $\dfrac{\partial \upsilon}{r_1 \partial \phi} d\phi$ δηλώνει την επαύξηση.

$$\begin{aligned} dS_1' &= dS_1 + \Delta\left(dS_1\right) = \\ &= \left(r_1 - w\right)\left(d\phi + \frac{\partial \upsilon}{r_1 \partial \phi} d\phi\right) \end{aligned} \qquad (6.4)$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{dS_1' - dS_1}{dS_1} = \frac{dS_1 + \Delta\left(dS_1\right) - dS_1}{dS_1} = \frac{r_1 d\phi + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial \phi} d\phi - w d\phi - w \dfrac{\partial \upsilon}{r_1 \partial \phi} d\phi - r_1 d\phi}{r_1 d\phi} \tag{6.5}$$

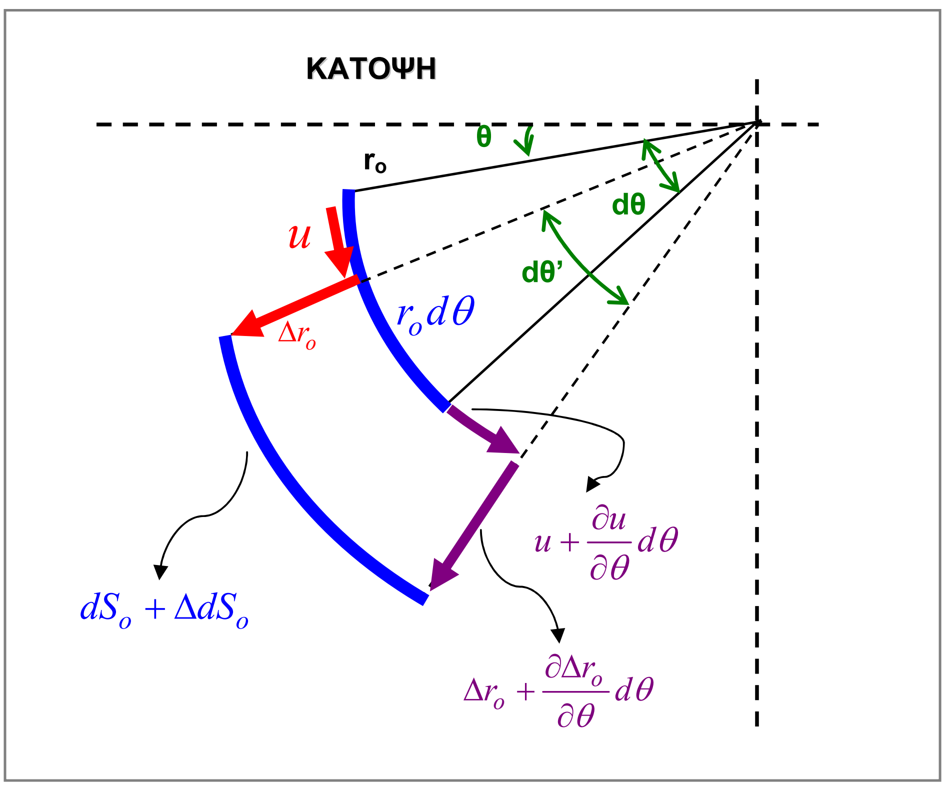
$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{r_1}\frac{\partial \upsilon}{\partial \phi} - \frac{w}{r_1} - w\frac{\partial \upsilon}{r_1^2 \partial \phi} \tag{6.6}$$

Ο όρος $w\dfrac{\partial \upsilon}{r_1^2 \partial \phi}$ είναι συγκριτικά μικρός.

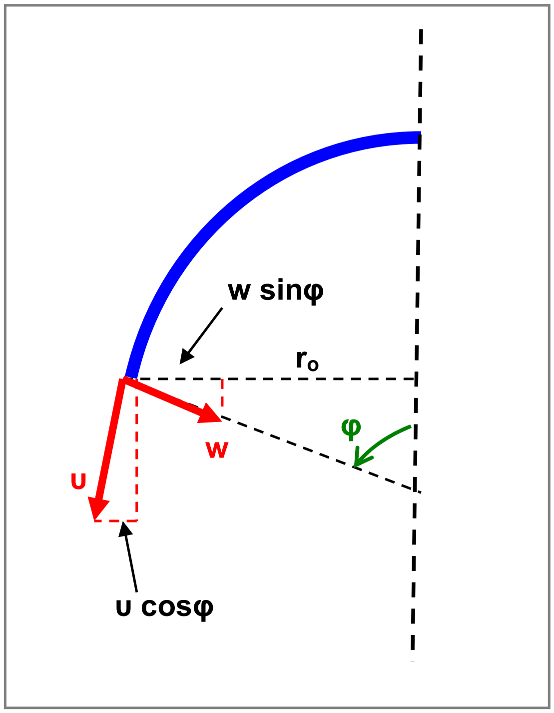
$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{r_1}\frac{\partial \upsilon}{\partial \phi} - \frac{w}{r_1} \tag{6.7}$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε z αντικαθιστώντας το r_1 με το r_1-z.

2. Παραμόρφωση ε_θ



$$d\theta' = d\theta + \frac{\partial u}{r_o \partial \theta} d\theta \tag{6.8}$$



Μεταβολή ακτίνας λόγω μετατόπισης:

$$\Delta r_o = \upsilon \cos\phi - w \sin\phi \tag{6.9}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{dS_o + \Delta(dS_o) - dS_o}{dS_o} = \frac{\left[r_o d\theta + \Delta(dS_o)\right] - r_o d\theta}{r_o d\theta} =$$

$$= \frac{(r_o + \Delta r_o)\left(d\theta + \dfrac{\partial u}{r_o \partial \theta} d\theta\right)}{r_o \partial \theta} - 1 =$$

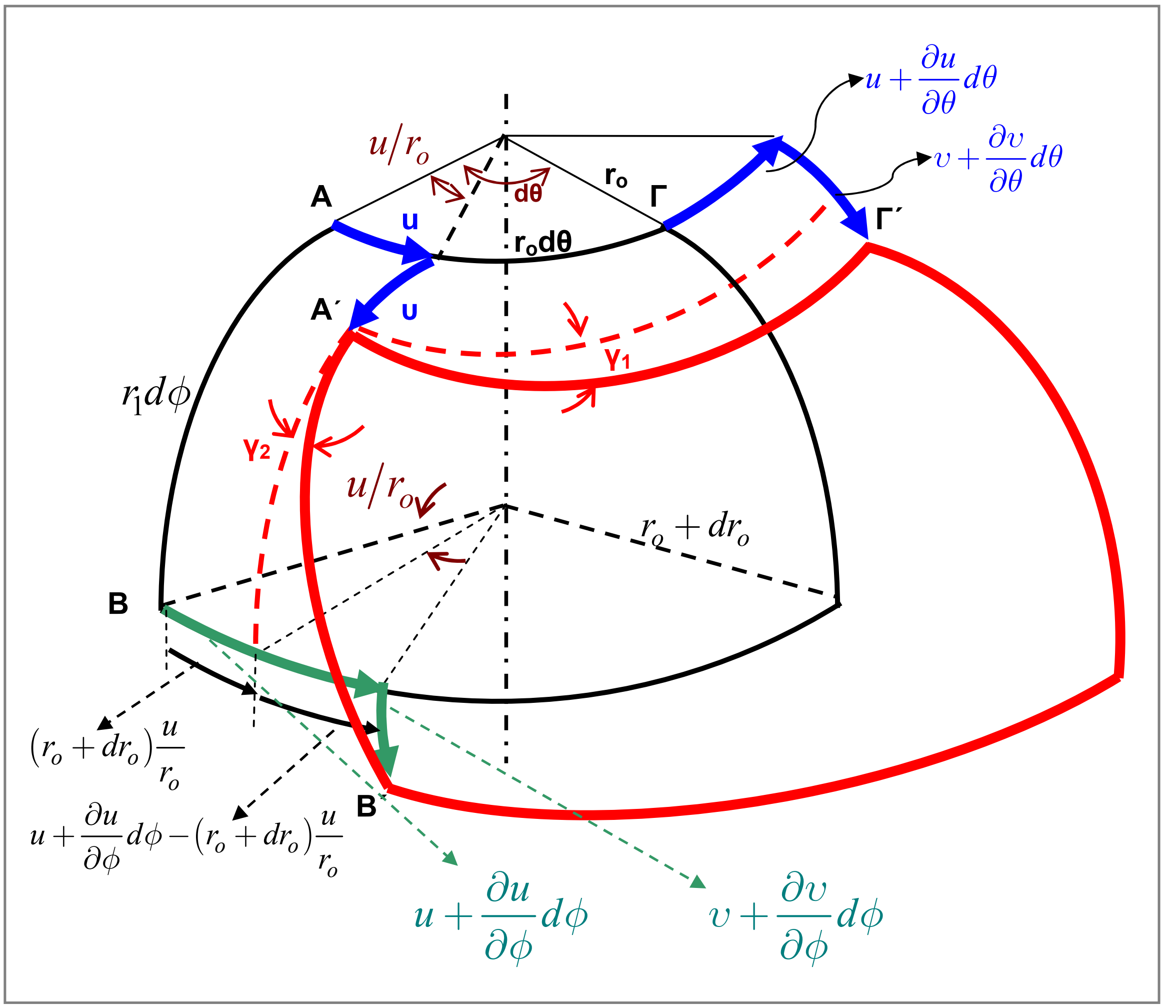
$$= \frac{r_o d\theta + u_{,\theta} d\theta + \Delta r_o d\theta - \Delta r_o \dfrac{u_{,\theta}}{r_o} d\theta}{r_o \partial \theta} - 1 =$$

$$= \frac{u_{,\theta}}{r_o} + \frac{\upsilon\cos\phi - w\sin\phi}{r_o} - \frac{\Delta r_o}{r_o}\frac{u_{,\theta}}{r_o} \tag{6.10}$$

Ο όρος $\frac{\Delta r_o}{r_o}\frac{u_{,\theta}}{r_o}$ είναι συγκριτικά μικρός.

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial u}{r_o \partial\theta} + \frac{\upsilon}{r_o}\cos\phi - \frac{w}{r_o}\sin\phi \tag{6.11}$$

3. Παραμόρφωση $\gamma_{\varphi\theta}$



$$|\mathrm{AB}| = r_1 d\phi \tag{6.12}$$

$$\left|\mathrm{A\Gamma}\right| = r_o d\phi \tag{6.13}$$

Ισχύουν οι ακόλουθες εκφράσεις:

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\partial \upsilon}{\partial \theta} d\theta}{r_o d\theta + \dfrac{\partial u}{\partial \theta} d\theta} \Rightarrow$$

$$\gamma_1 = \frac{\dfrac{\partial \upsilon}{\partial \theta}}{r_o + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}} \Rightarrow$$

$$\gamma_1 \simeq \frac{\partial \upsilon}{r_o \partial \theta} \tag{6.14}$$

και

$$\gamma_2 = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial \phi} d\phi - \dfrac{u}{r_o} dr_o}{r_1 d\phi + \dfrac{\partial \upsilon}{\partial \phi} d\phi} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{u}{r_o r_1}\frac{dr_o}{d\phi} \tag{6.15}$$

Όμως $\frac{dr_o}{d\phi} = r_1 \cos\phi$. Άρα:

$$\gamma_2 = \frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{u}{r_o}\cos\phi \tag{6.16}$$

Επίσης:

$$\gamma_{\phi\theta} = \gamma_{\theta\phi} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{r_o}\frac{\partial \upsilon}{\partial \theta} + \frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{u}{r_o}\cos\phi \tag{6.17}$$

Οπότε τελικά:

$$\gamma_{\phi\theta} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{1}{r_o}\left(u\cos\phi - \frac{\partial \upsilon}{\partial \theta}\right) \tag{6.18}$$

Διατηρώντας όλους τους όρους, έχουμε την ακόλουθη έκφραση:

$$\gamma_{\phi\theta} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{u_{,\theta} d\theta}{r_o d\theta + u_{,\theta} d\theta} + \frac{u_{,\phi} d\phi - \frac{u}{r_o} dr_o}{r_1 d\phi + \upsilon_{,\phi} d\phi} =$$

$$= \frac{u_{,\theta} d\theta\left(r_1 d\phi + \upsilon_{,\phi} d\phi\right) + \left(u_{,\phi} d\phi - \frac{u}{r_o} r_1 \cos\phi d\phi\right)\left(r_o d\theta + u_{,\theta} d\theta\right)}{\left(r_o d\theta + u_{,\theta} d\theta\right)\left(r_1 d\phi + \upsilon_{,\phi} d\phi\right)} =$$

$$= \frac{\left[r_1 \cdot u_{,\theta} + u_{,\theta} \cdot \upsilon_{,\phi} + r_o \cdot u_{,\phi} - u \cdot r_1 \cdot \cos\phi + u_{,\phi} \cdot \upsilon_{,\theta} - \frac{u \cdot u_{,\theta}}{r_o} \cdot r_1 \cdot \cos\phi\right] d\phi d\theta}{\left[r_o \cdot r_1 + r_1 \cdot u_{,\theta} + r_o \cdot u_{,\phi} + u_{,\phi} \cdot \upsilon_{,\theta}\right] d\phi d\theta} \tag{6.19}$$

οπότε:

$$\gamma_{\phi\theta} = \frac{-u \cdot r_1 \cdot \cos\phi + r_1 \cdot u_{,\theta} + r_o \cdot u_{,\phi} - \frac{u \cdot u_{,\theta}}{r_o} \cdot r_1 \cdot \cos\phi + u_{,\theta} \cdot \upsilon_{,\phi} + u_{,\phi} \cdot \upsilon_{,\theta}}{r_o \cdot r_1 + r_1 \cdot u_{,\theta} + r_o \cdot u_{,\phi} + u_{,\phi} \cdot \upsilon_{,\theta}} \tag{6.20}$$

Όταν r_o, $r_1 >> 1$, τότε:

$$\gamma_{\phi\theta} = \frac{u}{r_o}\cos\phi + \frac{u_{,\theta}}{r_o} + \frac{u_{,\phi}}{r_o} \tag{6.21}$$

Όταν r_o, $r_1 < 1$, τότε ποιοι όροι είναι σημαντικοί ?

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑ ΚΕΛΥΦΗ – ΚΑΜΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Από τις γενικές εξισώσεις των κελυφών εκ περιστροφής με την παρακάτω αλλαγή μεταβλητών λαμβάνουμε:

$$dx = r_{\phi} d\phi \tag{6.22}$$

όπου $\phi \to x$ και $\theta \to s$.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} + q_x = 0 \tag{6.23}$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{Q_s}{r} + q_s = 0 \tag{6.24}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_s}{\partial s} - \frac{N_s}{r} - q = 0 \tag{6.25}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{sx}}{\partial s} - Q_x = 0 \tag{6.26}$$

$$\frac{\partial M_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial M_s}{\partial s} - Q_s = 0 \tag{6.27}$$

Επιπλέον ισχύουν οι ακόλουθες κινηματικές σχέσεις:

$$\varepsilon_x^o = \frac{\partial u_x}{\partial x}\,,\;\; \varepsilon_s^o = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{w}{r}\,,\;\; \gamma_{xs}^o = \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial s} \tag{6.28}$$

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}\,,\;\; \beta_s = \frac{u_s}{r} - \frac{\partial w}{\partial s} \tag{6.29}$$

$$k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,,\;\; k_s = \frac{\partial \beta_s}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u_s}{r} - \frac{\partial w}{\partial s}\right) \tag{6.30}$$

$$\tau = \frac{\partial \beta_x}{\partial s} + \frac{\partial \beta_s}{\partial x} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_s}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \tag{6.31}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις και σχέσεις επιδέχονται απλοποιήσεις, οι μέγιστες των οποίων επιτυγχάνονται με βάση τις παραδοχές Donnell.

1. Ο όρος Q_S / r στην $2^η$ εξίσωση αμελείται

Άρα οι εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{sx}}{\partial s} + q_x = 0 \tag{6.32}$$

$$\frac{\partial N_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + q_s = 0 \tag{6.33}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xs}}{\partial x \partial s} + \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} - \frac{N_s}{r} - q = 0 \tag{6.34}$$

2. Καμπυλότητες επηρεάζονται ελάχιστα από την επέκταση κατά u_s

Έτσι:

$$u_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,,\ u_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\,,\ \tau = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \tag{6.35}$$

οι σχέσεις αυτές ισχύουν και στην θεωρία πλακών.

Με βάση τα παραπάνω, σκόπιμη είναι η διατύπωση των εξισώσεων ισορροπίας ως προς τις μετακινήσεις u_x, u_s και w.

$$N_x = K\left[\varepsilon_x^o + \nu\varepsilon_s^o\right] \tag{6.36}$$

$$N_s = K\left[\varepsilon_s^o + \nu\varepsilon_x^o\right] \tag{6.37}$$

$$N_{sx} = N_{xs} = Gh\gamma_{xs}^{o} \tag{6.38}$$

$$M_x = D\left[k_x + \nu k_s\right] \tag{6.39}$$

$$M_s = D\left[k_s + \nu k_x\right] \tag{6.40}$$

$$M_{sx} = M_{xs} = Gh^3\tau/12 \tag{6.41}$$

$$K = \frac{Eh}{\left(1-\nu^2\right)},\ D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{6.42}$$

Αντικαθιστώντας προκύπτουν :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial s} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial x} = P_x \tag{6.43}$$

$$\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial s} + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{w}{r}\right) = Ps \tag{6.44}$$

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4 w + \frac{1}{r}\left(\frac{w}{r} + \frac{\partial u_s}{\partial s} + \nu\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = P \tag{6.45}$$

όπου

$$P_x = \frac{-\left(1-\nu^2\right)}{Eh}q_x \tag{6.46}$$

$$P_s = \frac{-\left(1-\nu^2\right)}{Eh}q_s \tag{6.47}$$

$$P = \frac{-\left(1-\nu^2\right)}{Eh}q \tag{6.48}$$

και

$$\nabla^4 = \nabla^2\left(\nabla^2\right) \tag{6.49}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2(\;)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\;)}{\partial s^2} \tag{6.50}$$

Για την περίπτωση των εξισώσεων Donnell προκύπτει περαιτέρω δυνατότητα αποσύζευξής τους ως εξής:

- Παραγωγίζοντας την 1η δύο φορές ως προς x και μετά ως προς s και επιλύοντας για τους μικτούς όρους λαμβάνουμε αντίστοιχα:

$$\frac{\partial^4 u_s}{\partial x^3 \partial s} = \frac{2}{1+\nu}\left[\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^4} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^4 u_x}{\partial x^2 \partial s^2} - \frac{\nu}{a}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right] \tag{6.51}$$

$$\frac{\partial^4 u_s}{\partial x \partial s^3} = \frac{2}{1+\nu}\left[\frac{\partial^2 P_x}{\partial s^2} - \frac{\partial^4 u_x}{\partial x^2 \partial s^2} - \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^4 u_x}{\partial s^4} - \frac{\nu}{a}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial s^2}\right] \tag{6.52}$$

όπου για κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος $r = \alpha$.

- Παραγωγίζοντας την 2η μία φορά ως προς x και μία ως προς s λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial^4 u_s}{\partial x \partial s^3} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^4 u_s}{\partial x^3 \partial s} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^4 u_x}{\partial x^2 \partial s^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial s^2} - \frac{\partial^2 P_s}{\partial x \partial s} = 0 \tag{6.53}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει :

$$\nabla^4 u_x = \frac{1}{a}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial s^2} - \frac{\nu}{a}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{2}{(1-\nu)}\frac{\partial^2 P_x}{\partial s^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 P_s}{\partial x \partial s} \tag{6.54}$$

Με αντίστοιχη διαδικασία για τη 2η εξίσωση προκύπτει :

$$\nabla^4 u_s = -\frac{2+\nu}{a}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial s} - \frac{1}{a}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \frac{\partial^2 P_s}{\partial s^2} + \frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2 P_s}{\partial x^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2 P_x}{\partial x \partial s} \quad (6.55)$$

Τέλος, παραγωγίζοντας την προτελευταία ως προς x και την τελευταία ως προς s και εφαρμόζοντας τον τελεστή $\nabla^4(\ )$ στην 3η εξίσωση λαμβάνουμε:

$$\frac{h^2}{12}\nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{a^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \nabla^4 P - \frac{1}{a}\left[\frac{\partial^3 P_s}{\partial s^3} + \nu\frac{\partial^3 P_x}{\partial x^3} + (2+\nu)\frac{\partial^3 P_s}{\partial s \partial x^2} - \frac{\partial^3 P_x}{\partial x \partial s^2}\right] \quad (6.56)$$

που αποτελούν τις εξισώσεις Donnell , χαρακτηριστικό των οποίων η αποσύζευξη, δηλαδή επιλύεται η 3η και στην συνέχεια η 2η και 1η.

Οι αποδεκτές συνοριακές συνθήκες σε κάθε μία από τις δύο πλευρές με $x = σταθ$.

$$N_x = \bar{N}_x \quad ή \quad u_x = \bar{u}_x \quad (6.57)$$

$$T_{xs} = \bar{T}_{xs} \quad ή \quad u_s = \bar{u}_s \quad (6.58)$$

$$V_x = \bar{V}_x \quad ή \quad w = \bar{w} \quad (6.59)$$

$$M_x = \bar{M}_x \quad ή \quad \beta_x = \bar{\beta}_x \quad (6.60)$$

και σε δύο πλεύρες με $S = σταθ$.

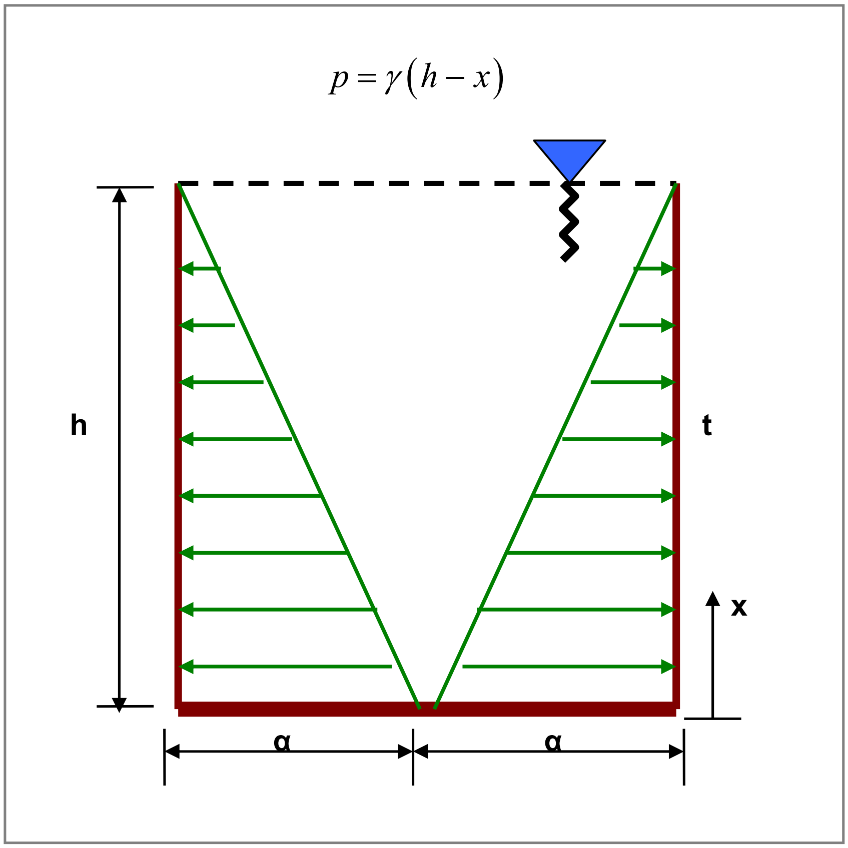
$$N_s = \bar{N}_s \quad ή \quad u_s = \bar{u}_s \quad (6.61)$$

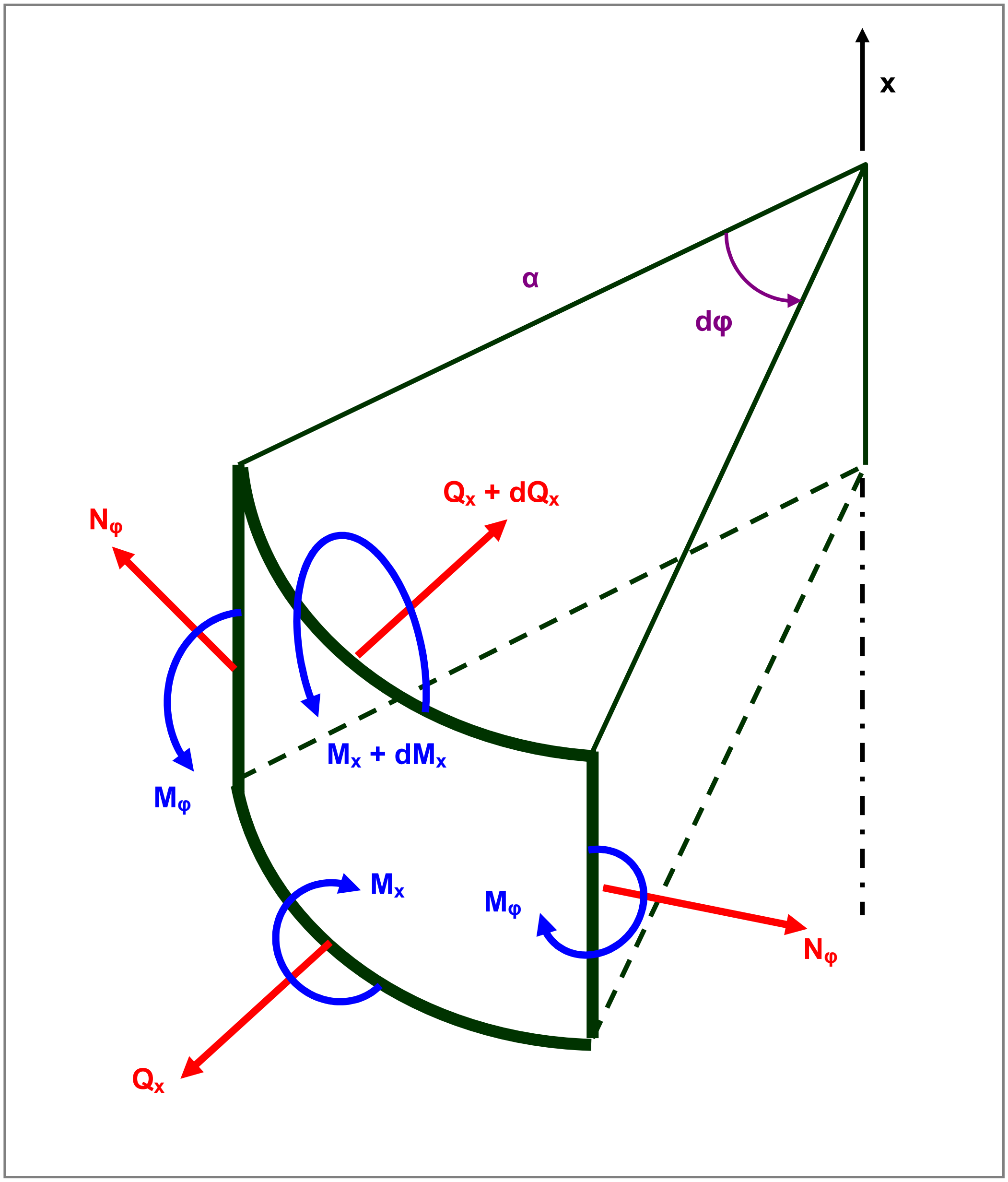
$$N_{sx} = \bar{N}_{sx} \quad ή \quad u_x = \bar{u}_x \quad (6.62)$$

$$V_s = \bar{V}_s \quad ή \quad w = \bar{w} \quad (6.63)$$

$$V_s = \bar{V}_s \quad ή \quad w = \bar{w} \quad (6.64)$$

ΚΥΚΛΙΚΕΣ ΔΕΞΑΜΕΝΕΣ – ΚΑΜΠΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ





$$Q_x' + N_\phi = p \cdot a \tag{6.65}$$

$$M_x' - aQ_x = 0 \tag{6.66}$$

όπου

$$M_x = \frac{K}{a^2} w'' \tag{6.67}$$

$$N_{\phi} = \frac{D\left(1-v^2\right)}{a} w \tag{6.68}$$

και

$$K = \frac{Et^3}{12\left(1-v^2\right)} \tag{6.69}$$

$$D = \frac{Et}{\left(1-v^2\right)} \tag{6.70}$$

δηλαδή 4 εξισώσεις με 4 αγνώστους N_{φ}, Q_X, M_X, w.

$$M_x'' + aN_{\phi} = pa^2 \tag{6.71}$$

$$\left(Kw''\right)'' + Da^2\left(1-v^2\right)w = pa^4 \tag{6.72}$$

Επίλυση για σταθερό πάχος t :

$$Kw'''' + Da^2\left(1-v^2\right)w = pa^4 \tag{6.73}$$

Διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές :

$$w = Ce^{\lambda x / a} \tag{6.74}$$

Εισάγοντας την παράμετρο:

$$\kappa^4 = \frac{D\left(1-v^2\right)a^2}{4K} = 3\left(1-v^2\right)\frac{a^2}{t^2} \tag{6.75}$$

προκύπτει η χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^4 + 4\kappa^4 = 0 \tag{6.76}$$

η οποία έχει 4 λύσεις $\lambda = \pm(1 \pm i)\kappa$, δηλαδή 2 ζεύγη συζυγών μιγαδικών. Η λύση μπορεί να εκφραστεί ως :

$$w = e^{-\frac{\kappa x}{a}}\left[c_1 \cos\frac{\kappa x}{a} + c_2 \sin\frac{\kappa x}{a}\right] + e^{\frac{\kappa x}{a}}\left[c_3 \cos\frac{\kappa x}{a} + c_4 \sin\frac{\kappa x}{a}\right] \quad (6.77)$$

Για τις συνοριακές συνθήκες χρειάζεται:

$$\begin{aligned} w' = &-\kappa e^{-\kappa x/a}\left[\left(c_1 - c_2\right)\cos\frac{\kappa x}{a} + \left(c_1 + c_2\right)\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \\ &+ \kappa e^{+\kappa x/a}\left[\left(c_3 + c_4\right)\cos\frac{\kappa x}{a} - \left(c_3 - c_4\right)\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \end{aligned} \quad (6.78)$$

Επίσης:

$$M_x^c = \frac{2\kappa\kappa^2}{a^2}\left[e^{-\kappa x/a}\left(c_1 \sin\frac{\kappa x}{a} - c_2 \cos\frac{\kappa x}{a}\right) - e^{\kappa x/a}\left(c_3 \sin\frac{\kappa x}{a} - c_4 \cos\frac{\kappa x}{a}\right)\right] \quad (6.79)$$

$$\begin{aligned} Q_x^c = &\frac{2\kappa\kappa^3}{a^3} e^{-\kappa x/a}\left[\left(c_1 + c_2\right)\cos\frac{\kappa x}{a} - \left(c_1 - c_2\right)\sin\frac{\kappa x}{a}\right] - \\ &-\frac{2\kappa\kappa^3}{a^3} e^{\kappa x/a}\left[\left(c_3 - c_4\right)\cos\frac{\kappa x}{a} - \left(c_3 + c_4\right)\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \end{aligned} \quad (6.80)$$

Παρατηρώντας τη συμπεριφορά της λύσης, οι όροι με συντελεστές c_1 και c_2 μειώνονται με το x, ενώ οι c_3, c_4 αντιθέτως αυξάνουν.

Θεωρώντας τον πυθμένα άκαμπτο ισχύει ότι $w = 0$, $w' = 0$ για $x=0$. Τελικά:

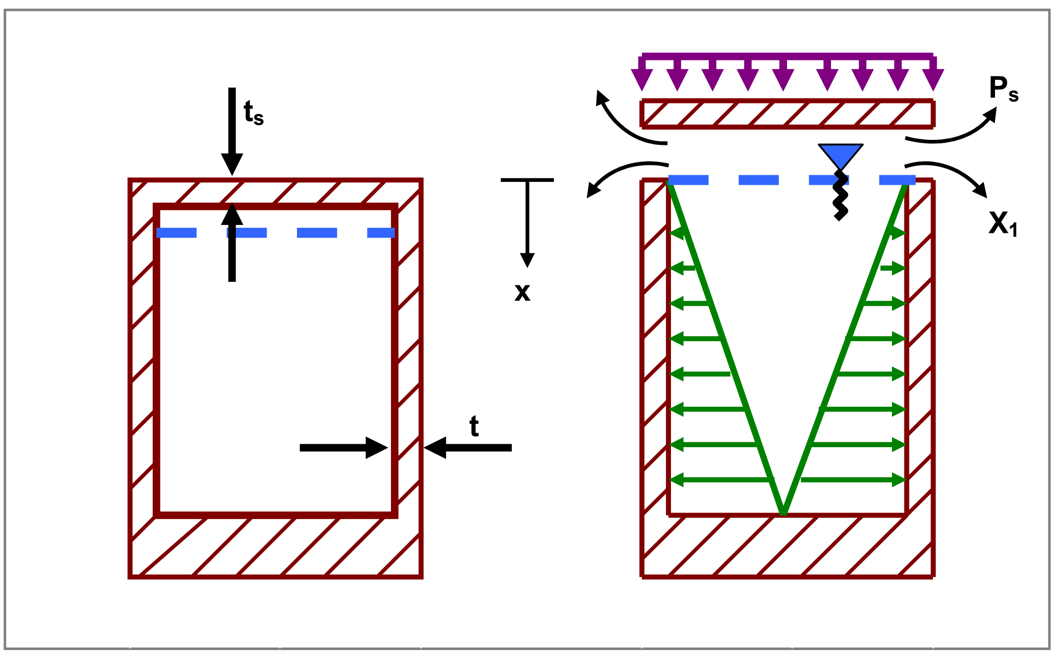
$$w = \frac{\gamma a^2}{Et}\left[h - x - h e^{-\frac{\kappa x}{a}} \cos\frac{\kappa x}{a} + \left(\frac{a}{\kappa} - h\right) e^{-\frac{\kappa x}{a}} \sin\frac{\kappa x}{a}\right] \quad (6.81)$$

$$N_\phi = \gamma a\left[h - x - he^{-\frac{\kappa x}{a}}\cos\frac{\kappa x}{a} + \left(\frac{a}{\kappa} - h\right)e^{-\frac{\kappa x}{a}}\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{6.82}$$

$$M_x = -\frac{\gamma a t}{\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}}\left[\left(\frac{a}{\kappa} - h\right)e^{-\frac{\kappa x}{a}}\cos\frac{\kappa x}{a} + he^{-\frac{\kappa x}{a}}\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{6.83}$$

$$Q_x = -\frac{\gamma t \kappa}{\sqrt{12\left(1-\nu^2\right)}}\left[\left(\frac{a}{\kappa} - 2h\right)e^{-\frac{\kappa x}{a}}\cos\frac{\kappa x}{a} + \frac{a}{\kappa}e^{-\frac{\kappa x}{a}}\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{6.84}$$

Άκαμπτος Πυθμένας – Πλάκα Οροφής



Για $x = 0$ και $w = 0$, ισχύει ότι $M_x = X_1$.

$$\frac{w'}{a} = \frac{\gamma \alpha^2}{D\left(1-\nu^2\right)} - \frac{a}{2K\kappa}X_1 \tag{6.85}$$

Από θεωρία πλακών προκύπτει ότι:

$$\omega = \frac{P_s a^3}{8u_s\left(1+v\right)} + \frac{a}{K_s\left(1+v\right)} X_1 \tag{6.86}$$

όπου

$$K_s = \frac{Et_s^3}{12\left(1-v^2\right)} \tag{6.87}$$

$$\delta_{10} = -\frac{\gamma\alpha^2}{D\left(1-v^2\right)} + \frac{P_s a^3}{8K_s\left(1+v\right)} \tag{6.88}$$

$$\delta_{11} = \frac{\alpha}{2K\kappa} + \frac{a}{K_s\left(1+v\right)} \tag{6.89}$$

και

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0 \tag{6.90}$$

από όπου προκύπτει το υπερστατικό μέγεθος X_1 και μετά τα ω, N_φ, M_x, Q_x.

Αν $P_s = 0$, τότε:

$$w = \frac{\gamma\alpha^3}{D\left(1-v^2\right)}\left[\frac{x}{a} - \frac{K_s\left(1+v\right)}{2K\kappa + u_s\left(1+v\right)}\frac{1}{x}e^{-\frac{\kappa x}{a}}\sin\frac{\kappa x}{a}\right] \tag{6.91}$$

$$M_x = \frac{2\gamma\alpha K K_s \kappa}{D\left(1-v\right)\left[2K\kappa + u_s\left(1+v\right)\right]} e^{-\frac{\kappa x}{a}} \cos\frac{\kappa x}{a} \tag{6.92}$$

Αν $P_s \neq 0$ και η δεξαμενή είναι άδεια, τότε:

$$w = \frac{P_s \alpha^4}{8\kappa\left[2K\kappa + K_s\left(1+v\right)\right]} e^{-\frac{\kappa x}{a}} \sin\frac{\kappa x}{a} \tag{6.93}$$

$$M_x = -\frac{P_s a^2}{4} \frac{K\kappa}{2K\kappa + K_s\left(1+v\right)} e^{-\frac{\kappa x}{a}} \cos\frac{\kappa x}{a} \tag{6.94}$$