ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

Καθ. Βλάσης Κουμούσης

Κελύφη Εκ Περιστροφής – Μεμβρανική Θεωρία

Τυχαία Φόρτιση

Ανάπτυξη φόρτισης σε σειρές Fourier:

$$q_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} q_{\phi n}(\phi)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}_{\phi n}(\phi)\sin(n\theta) \tag{5.1}$$

$$q_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} q_{\theta n}(\phi)\sin(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{q}_{\theta n}(\phi)\cos(n\theta) \tag{5.2}$$

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\phi)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{q}_n(\phi)\sin(n\theta) \tag{5.3}$$

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\phi)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{T}_n(\phi)\sin(n\theta) \tag{5.4}$$

Τα εντατικά μεγέθη θα αναζητηθούν και αυτά με τη μορφή σειρών Fourier ως εξής:

$$N_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} N_{\phi n}(\phi)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{N}_{\phi n}(\phi)\sin(n\theta) \tag{5.5}$$

$$N_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} N_{\theta n}(\phi)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{N}_{\theta n}(\phi)\sin(n\theta) \tag{5.6}$$

$$N_{\phi\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} N_{\phi\theta n}(\phi)\sin(n\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} \overline{N}_{\phi\theta n}(\phi)\cos(n\theta) \tag{5.7}$$

όπου οι πρώτοι όροι αντιστοιχούν στους συμμετρικούς όρους της λύσης και οι δεύτεροι στους αντισυμμετρικούς, όπως τους διαπλέκουν οι εξισώσεις. Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις ισορροπίας μετά τις παραγωγίσεις και την συλλογή των όρων cos(nθ) και sin(nθ) προκύπτουν σχέσεις της παρακάτω μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\ A\ \right]\cos(n\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ B\ \right]\sin(n\theta)=0 \tag{5.8}$$

από τις οποίες λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας προκύπτει ότι:

$$A=0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ B=0 \tag{5.9}$$

Έτσι λαμβάνουμε:

$$\frac{dN_{\phi n}}{d\phi}+\left(1+\frac{r_\phi}{r_\theta}\right)N_{\phi n}\cot\phi+\frac{nr_\phi N_{\phi\theta n}}{r_\theta\sin\phi}=-r_\phi\left(q_{\phi n}+q_n\cot\phi\right) \tag{5.10}$$

$$\frac{dN_{\phi\theta n}}{d\phi}+\frac{2r_\phi}{r_\theta}N_{\phi\theta n}\cot\phi+\frac{nN_{\phi n}}{\sin\phi}=-r_\phi\left(q_{\theta n}+\frac{nq_n}{\sin\phi}\right) \tag{5.11}$$

Από την επίλυση του συστήματος για δεδομένο κέλυφος εκ περιστροφής $\left(r_\phi\,,\,r_\theta\right)$ και φόρτιση $\left(q_\phi\,,\,q_\theta\,,\,q\right)$ προκύπτουν οι συμμετρικοί όροι της λύσης. Ισχύει επίσης από την αλγεβρική εξίσωση ισορροπίας:

$$N_\theta=-qr_\theta-\frac{N_\phi r_\theta}{r_\phi} \tag{5.12}$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν και για τους αντισυμμετρικούς όρους.

Σφαιρικό Κέλυφος – Μεμβρανική Θεωρία

Τυχαία Φόρτιση

Για ένα σφαιρικό κέλυφος ισχύει $r_\phi = r_\theta = R$. Έτσι οι εξισώσεις γίνονται:

$$\frac{dN_{\phi n}}{d\phi} + 2N_{\phi n}\cot\phi + \frac{nN_{\phi\theta n}}{\sin\phi} = -R\left(q_{\phi n} + q_n \cot\phi\right) \tag{5.13}$$

$$\frac{dN_{\phi\theta n}}{d\phi} + 2N_{\phi\theta n}\cot\phi + \frac{uN_{\phi n}}{\sin\phi} = -R\left(q_{\theta n} + \frac{nq_n}{\sin\phi}\right) \tag{5.14}$$

οι οποίες είναι συζευγμένες μεταξύ τους.

Εισάγοντας:

$$S_n = N_{\phi n} + N_{\phi\theta n} \tag{5.15}$$

$$T_n = N_{\phi n} - N_{\phi\theta n} \tag{5.16}$$

Προσθαφαιρώντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$\frac{dS_n}{d\phi} + \left(2\cot\phi + \frac{n}{\sin\phi}\right)S_n = -R\left(q_{\phi n} + q_{\theta n} + \frac{\cos\phi + n}{\sin\phi}q_n\right) \tag{5.17}$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} + \left(2\cot\phi - \frac{n}{\sin\phi}\right)T_n = -R\left(q_{\phi n} - q_{\theta n} + \frac{\cos\phi - n}{\sin\phi}q_n\right) \tag{5.18}$$

οι οποίες είναι της μορφής

$$\frac{du}{d\phi} + p(\phi)u + q(\phi) = 0 \tag{5.19}$$

Πρόκειται δηλαδή για μία γραμμική εξίσωση, η λύση της οποίας είναι η ακόλουθη:

$$u=\left[c-\int q\exp\left(\int p d\phi\right)d\phi\right]\exp\left(-\int p d\phi\right) \tag{5.20}$$

Οι λύσεις εκφράζονται ως εξής:

$$S_n=\frac{\cot^n(\phi/2)}{\sin^2\phi}\left[A_n-R\int\left(q_{\phi n}+q_{\theta n}+\frac{\cos\phi+n}{\sin\phi}q_n\right)\sin^2\phi\tan^n\left(\frac{\phi}{2}\right)d\phi\right] \tag{5.21}$$

$$T_n=\frac{\tan^n(\phi/2)}{\sin^2\phi}\left[B_n-R\int\left(q_{\phi n}-q_{\theta n}+\frac{\cos\phi-n}{\sin\phi}q_n\right)\sin^2\phi\cot^n\left(\frac{\phi}{2}\right)d\phi\right] \tag{5.22}$$

Έτσι τα εντατικά μεγέθη προκύπτουν ως:

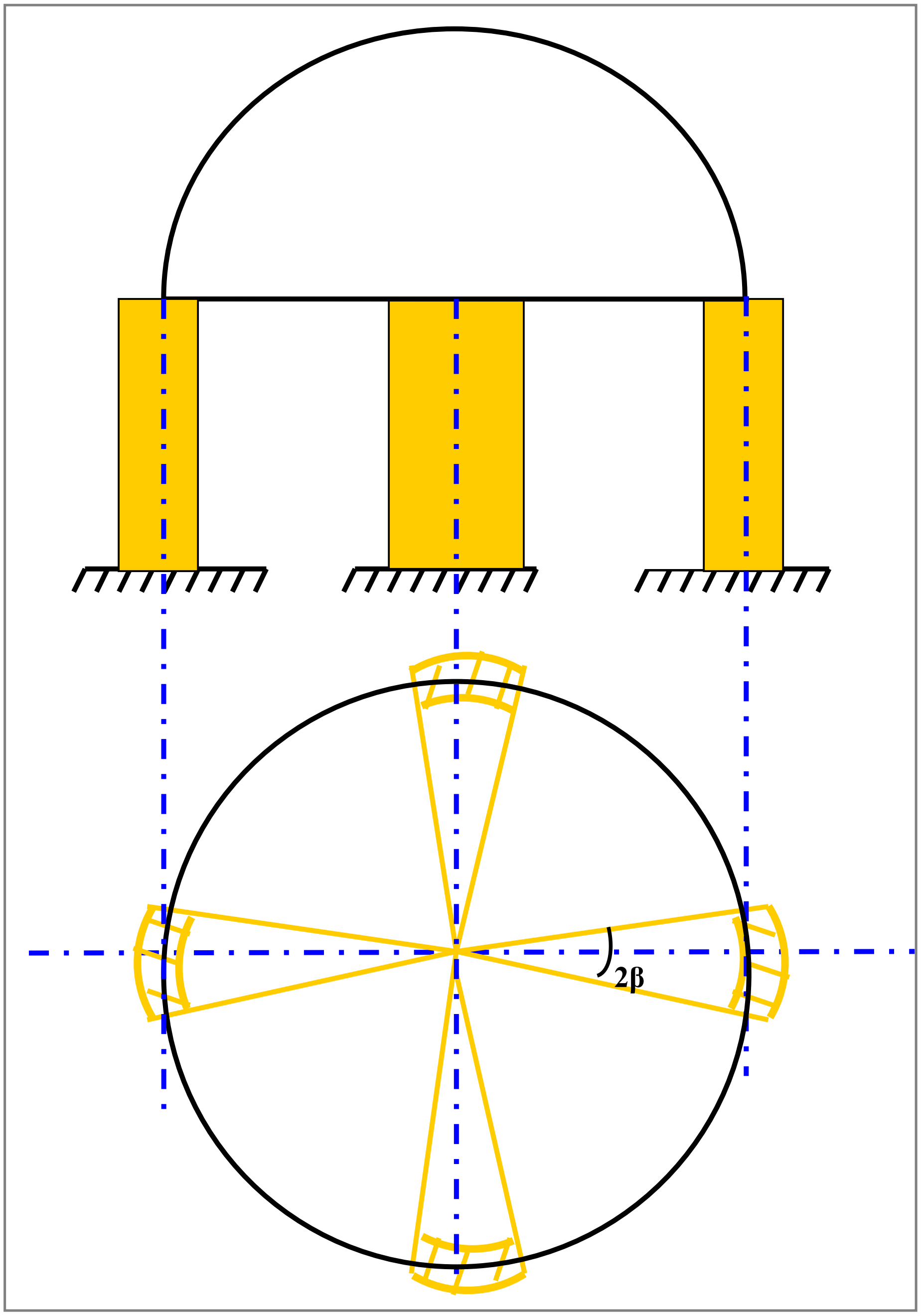
$$\begin{aligned}N_{\phi n}=&\frac{1}{2\sin^2\phi}\left[A_n\cot^n(\phi/2)+B_n\tan^n(\phi/2)\right]-\\&-\frac{\cot^n(\phi/2)}{2\sin^2\phi}R\int\left(q_{\phi n}+q_{\theta n}+\frac{\cos\phi+n}{\sin\phi}q_n\right)\sin^2\phi\tan^n\left(\frac{\phi}{2}\right)d\phi-\\&-\frac{\tan^n(\phi/2)}{2\sin^2\phi}R\int\left(q_{\phi n}-q_{\theta n}+\frac{\cos\phi-n}{\sin\phi}q_n\right)\sin^2\phi\tan^n\left(\frac{\phi}{2}\right)d\phi\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}N_{\phi\theta n}=&\frac{1}{2\sin^2\phi}\left[A_n\cot^n(\phi/2)-B_n\tan^n(\phi/2)\right]-\\&-\frac{\cot^n(\phi/2)}{2\sin^2\phi}R\int\left(q_{\phi n}+q_{\theta n}+\frac{\cos\phi+n}{\sin\phi}q_n\right)\sin^2\phi\tan^n\left(\frac{\phi}{2}\right)d\phi+\\&+\frac{\tan^n(\phi/2)}{2\sin^2\phi}R\int\left(q_{\phi n}-q_{\theta n}+\frac{\cos\phi-n}{\sin\phi}q_n\right)\sin^2\phi\tan^n\left(\frac{\phi}{2}\right)d\phi\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$N_{\theta n} = -r_{\theta} q_n - \frac{r_{\theta}}{r_{\phi}} N_{\phi n} \tag{5.25}$$

Αντίστοιχες σχέσεις προκύπτουν και για τους αντισυμμετρικούς όρους.

Ημισφαιρικό Κέλυφος Στηριζόμενο Περιμετρικά σε Υποστυλώματα υπό το Ίδιο Βάρος



Φόρτιση:

$$q = p\cos\phi \tag{5.26}$$

$$q_\phi = p\sin\phi \tag{5.27}$$

$$q_\theta = 0 \tag{5.28}$$

που είναι ανεξάρτητη του θ, δηλαδή n=0.

Έτσι η ειδική λύση γίνεται:

$$N_{\phi_o} = \frac{-pR}{1+\cos\phi} \tag{5.29}$$

$$N_{\theta_o} = pR\left(\frac{1}{1+\cos\phi} - \cos\phi\right) \tag{5.30}$$

$$N_{\phi\theta_o} = 0 \tag{5.31}$$

Επίσης τίθεται $A_o = B_o = 0$, ώστε να εξαληφθεί ο απειριζόμενος όρος $\left(\sin^2\phi\right)^{-1}$ στην κορυφή φ=0. Για τους υπόλοιπους αρμονικούς όρους ισχύει:

$$q_n = q_{\phi n} = q_{\theta n} = 0 \quad \gamma\iota\alpha \quad n \ge 1 \tag{5.32}$$

οπότε:

$$N_{\phi n} = \frac{B_n \tan^n\left(\phi/2\right)}{2\sin^2\phi} = -N_{\theta n} = -N_{\phi\theta n} \quad , \quad n \ge 1 \tag{5.33}$$

όπου οι όροι $A_n = 0$ για να εξαλείψουν τους όρους που περιέχουν $\cot^n\left(\phi/2\right)$ οι οποίοι απειρίζονται στην κορυφή (φ=0). Έτσι η γενική λύση γίνεται:

$$N_\phi = \frac{-pR}{1+\cos\phi} + \sum_{n=\kappa,2\kappa,\ldots}^{\infty} \frac{B_n}{2}\frac{\tan^n\left(\phi/2\right)}{\sin^2\phi}\cos\left(n\theta\right) \tag{5.34}$$

$$N_{\phi\theta} = -\sum_{n=\kappa,2\kappa,\ldots}^{\infty} \frac{B_n}{2} \frac{\tan^2(\phi/2)}{\sin^2\phi} \sin(n\theta) \tag{5.35}$$

$$N_{\theta} = pR\left(\frac{1}{1+\cos\phi} - \cos\phi\right) - \sum_{n=\kappa,2\kappa,\ldots}^{\infty} \frac{B_n}{2} \frac{\tan^n(\phi/2)}{\sin^2\phi} \cos(n\theta) \tag{5.36}$$

όπου οι συντελεστές B_n προκύπτουν από τις συνοριακές συνθήκες στην στήριξη $\phi = \pi/2$, ενώ η N_ϕ μηδενίζεται εκτός από τις θέσεις των υποστυλωμάτων, όπου ισούται με το αντίστοιχο ποσοστό του συνολικού βάρους του κελύφους.

Συνοριακές Συνθήκες για κ Υποστυλώματα

$$\rho\left(2\pi R^2\right)\Big/\left(2\beta R\right)\kappa = -\,\rho\,\pi R/\beta\kappa \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned} N_\phi &= -\rho\,\pi R/\beta\kappa, && 0 \le \theta \le \beta \\ &= 0, && \beta \le \theta \le \left(2\pi/\kappa - \beta\right) \\ &= -\rho\,\pi R/\beta\kappa, && \left(2\pi/\kappa - \beta\right) \le \theta \le 2\pi/\kappa \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=\kappa,2\kappa,\ldots}^{\infty} \frac{B_n}{2}\cos(n\theta) &= pR\left(1 - \pi/\beta\kappa\right), && 0 \le \theta \le \beta \\ &= pR, && \beta \le \theta \le \left(2\pi/\kappa - \beta\right) \\ &= pR\left(1 - \pi/\beta\kappa\right), && \left(2\pi/\kappa - \beta\right) \le \theta \le 2\pi/\kappa \end{aligned} \tag{5.39}$$

από όπου, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των σειρών Fourier, λαμβάνουμε:

$$\frac{B_n}{2} = -\frac{2\rho R}{\beta}\sin(n\beta) \tag{5.40}$$

οπότε η λύση δίνεται ως :

$$N_{\phi}=\frac{-\rho R}{1+\cos\phi}-\frac{2\rho R}{\beta\sin^{2}\phi}\sum_{n=\kappa,2\kappa,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(n\beta)}{n}\tan^{n}\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos(n\theta) \quad (5.41)$$

$$N_{\theta}=\rho R\left(\frac{1}{1+\cos\phi}-\cos\phi\right)+\frac{2\rho R}{\beta\sin^{2}\phi}\sum_{n=\kappa,2\kappa,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}\tan^{n}\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos(n\theta) \quad (5.42)$$

$$N_{\phi\theta}=\frac{2\rho R}{\beta\sin^{2}\phi}\sum_{n=\kappa,2\kappa,\ldots}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}\tan^{n}\left(\frac{\phi}{2}\right)\sin(n\theta) \quad (5.43)$$

Προκύπτει ότι $N_{\phi\theta}\neq 0$ για $\phi=\pi/2$.

Παραμορφώσεις - Μετακινήσεις

Οι παραμορφώσεις εκφράζονται με τη μορφή σειρών Fourier ως εξής:

$$\varepsilon_{\phi}^{o}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{\phi n}(\phi)\cos(n\theta)\;+\;\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varepsilon}_{\phi n}(\phi)\sin(n\theta) \quad (5.44)$$

$$\varepsilon_{\theta}^{o}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{\theta n}(\phi)\cos(n\theta)\;+\;\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varepsilon}_{\theta n}(\phi)\sin(n\theta) \quad (5.45)$$

$$\varepsilon_{\theta}^{o}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_{\theta n}(\phi)\cos(n\theta)\;+\;\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\varepsilon}_{\theta n}(\phi)\sin(n\theta) \quad (5.46)$$

$$\gamma_{\phi\theta}^{o}=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_{n}(\phi)\sin(n\theta)\;+\;\sum_{n=0}^{\infty}\overline{\gamma}_{n}(\phi)\cos(n\theta) \quad (5.47)$$

Οι συντελεστές Fourier εκφράζονται συναρτήσει των συντελεστών των εντατικών μεγεθών ως εξής:

$$\varepsilon_{\phi n} = \frac{1}{E_{\phi} h}\left(N_{\phi n} - v_{\theta\phi} N_{\theta n}\right) + a_{t\phi} T_n \tag{5.48}$$

$$\varepsilon_{\theta n} = \frac{1}{E_{\theta} h}\left(N_{\theta n} - v_{\phi\theta} N_{\phi n}\right) + a_{t\theta} T_n \tag{5.49}$$

$$\gamma_n = \frac{N_{\phi\theta n}}{G_{\phi\theta} h} \tag{5.50}$$

Αντίστοιχες εκφράσεις ισχύουν και για τους αντισυμμετρικούς όρους

$$u_{\phi} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{\phi n}(\phi)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_{\phi n}(\phi)\sin(n\theta) \tag{5.51}$$

$$u_{\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\theta n}(\phi)\sin(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{u}_{\theta n}(\phi)\cos(n\theta) \tag{5.52}$$

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\phi)\cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{w}_n(\phi)\sin(n\theta) \tag{5.53}$$

Κινηματικές Σχέσεις

Με βάση τις γενικές κινηματικές σχέσεις ισχύει:

$$r_{\phi}\varepsilon_{\phi n} = \frac{du_{\phi n}}{d\phi} + w_n \tag{5.54}$$

$$\varepsilon_{\theta n} r_{\theta} \sin\phi = n u_{\theta n} + u_{\phi n}\cos\phi + w_n \sin\phi \tag{5.55}$$

$$\gamma_n r_{\theta} \sin\phi = \frac{r_{\theta}}{r_{\phi}} \sin\phi \frac{du_{\theta n}}{d\phi} - u_{\theta n}\cos\phi - n u_{\phi n} \tag{5.56}$$

Επιλύοντας τις δύο πρώτες λαμβάνουμε:

$$w_n = r_\phi \varepsilon_{\phi n} - \frac{du_{\phi n}}{d\phi} \tag{5.57}$$

$$u_{\theta n} = \frac{1}{n}\left[\sin\phi \frac{du_{\phi n}}{d\phi} - u_{\phi n}\cos\phi + \left(\varepsilon_{\theta n} r_\theta - \varepsilon_{\phi n} r_\phi\right)\sin\phi\right] \tag{5.58}$$

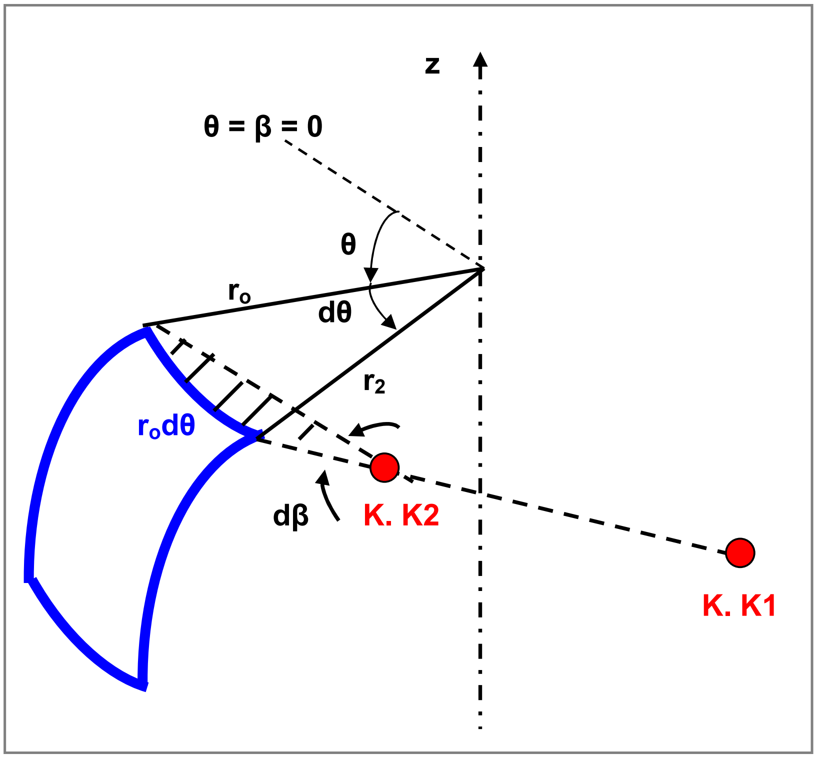
οι οποίες αντικαθίστανται στην τρίτη εξίσωση.

$$\begin{aligned}
&\frac{r_\theta}{r_\phi}\sin^2\phi \frac{d^2 u_{\phi n}}{d\phi^2} - \cos\phi\sin\phi \frac{du_{\phi n}}{d\phi} + \left(\frac{r_\theta}{r_\phi}\sin^2\phi + \cos^2\phi - n^2\right)u_{\phi n} = \\
&\quad = n\gamma_n r_\theta \sin\phi - \frac{r_\theta}{r_\phi}\sin^2\phi \frac{d}{d\phi}\left(r_\theta \varepsilon_{\theta n} - r_\phi \varepsilon_{\phi n}\right) + \\
&\quad + \left(1 - \frac{r_\theta}{r_\phi}\right)\left(r_\theta \varepsilon_{\theta n} - r_\phi \varepsilon_{\phi n}\right)\cos\phi\sin\phi
\end{aligned} \tag{5.59}$$

η οποία είναι μία γραμμική διαφορική εξίσωση, η γενική λύση της οποίας δίδεται από κλειστό τύπο.

ΚΕΛΥΦΗ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΤΟ ΚΕΝΤΡΟ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ Κ2 ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΠΑΝΤΑ ΕΠΙ ΤΟΥ ΑΞΟΝΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ



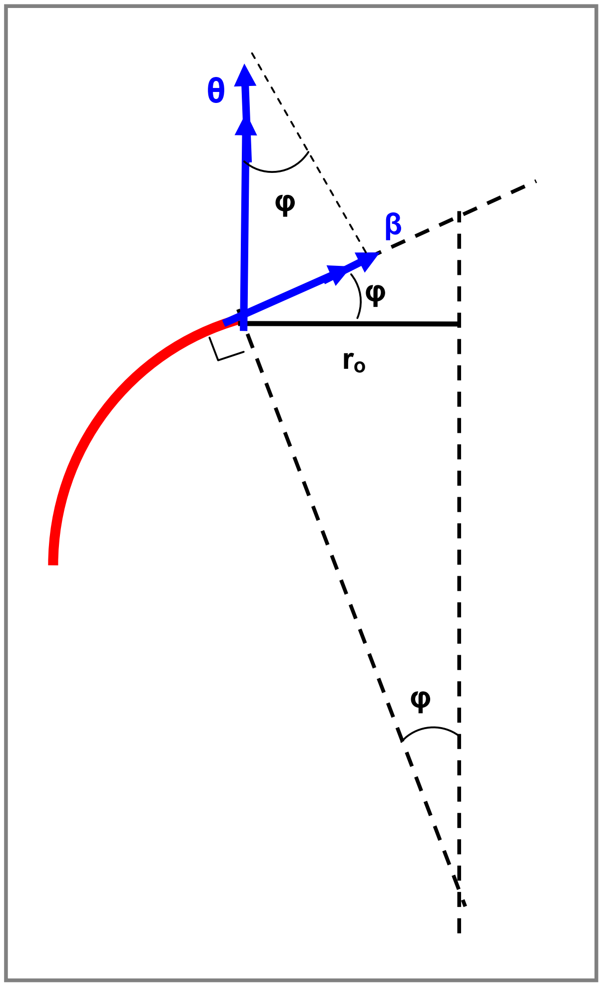
Ισχύει:

$$r_2 d\beta = r_o d\theta \tag{5.60}$$

ή

$$r_2 = r_o \frac{d\theta}{d\beta} \tag{5.61}$$

Ισχύει επίσης:



$$\beta = \theta \sin\phi \tag{5.62}$$

Εφόσον φ=σταθερό, προκύπτει ότι:

$$d\beta = d\theta \sin\phi \tag{5.63}$$

από όπου

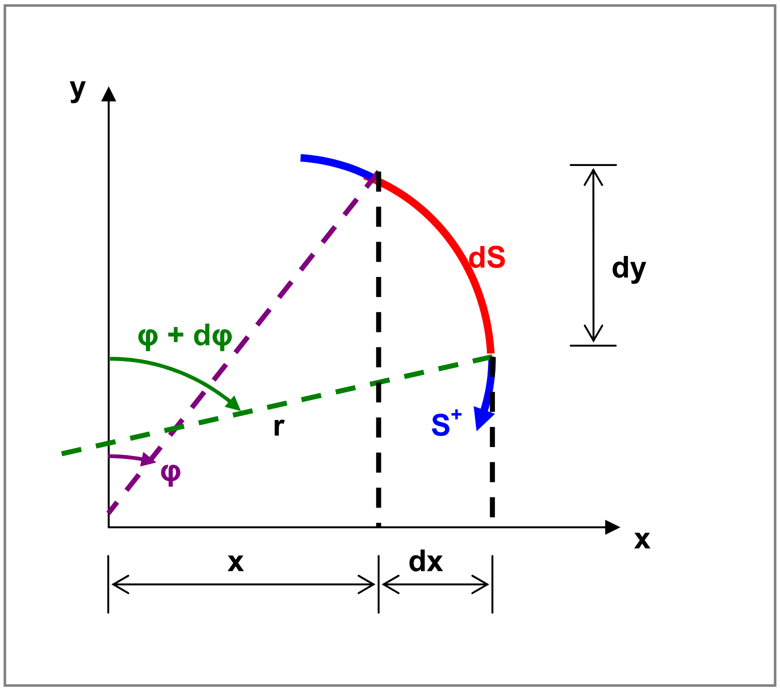
$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{1}{\sin\phi} \tag{5.64}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (5.64) στην (5.61) προκύπτει

$$r_2 = \frac{r_o}{\sin\phi} \tag{5.65}$$

που αποδεικνύει ότι το Κ.Κ2 βρίσκεται επί του άξονα περιστροφής.

Προσδιορισμός Ακτίνας Καμπυλότητας με τη μορφή r=r(φ)



$$r = \pm \frac{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}{y''} \tag{5.66}$$

Ισχύει ότι $ds = r d\phi$, καθώς επίσης ότι $\cos\phi = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{r d\phi}$. Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$r = \frac{1}{\cos\phi}\frac{dx}{d\phi} = \sec\phi \frac{dx}{d\phi} \tag{5.67}$$

Επίσης:

$$\tan\phi = -\frac{dy}{dx} = -y'(x) \tag{5.68}$$

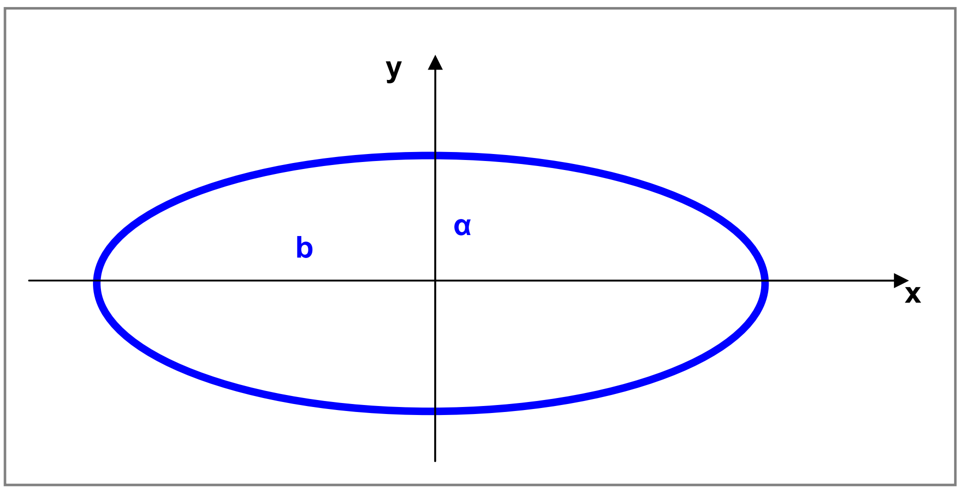
Έτσι:

$$x = f(\tan\phi) = x(\phi) \tag{5.69}$$

και τέλος

$$r = \frac{1}{\cos\phi}\frac{dx(\phi)}{d\phi} \tag{5.70}$$

Παράδειγμα: Έλλειψη



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5.71}$$

$$y(x) = \pm b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} \tag{5.72}$$

$$y'(x) = \pm \frac{b}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2}\left(-\frac{2x}{a^2}\right) \tag{5.73}$$

$$y' = \mp \frac{b}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} x = -\tan\phi \tag{5.74}$$

$$\acute{\eta} \;\; \tan^2\phi = \frac{b}{a^4}\frac{x^2}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} \tag{5.75}$$

από όπου:

$$x^2 = \frac{a^4 \tan^2\phi}{b^2 + a^2 \tan^2\phi} \;\; \acute{\eta} \;\; x = \mp \frac{a^2 \tan\phi}{\left(b^2 + a^2 \tan^2\phi\right)^{1/2}} \tag{5.76}$$

καθώς επίσης

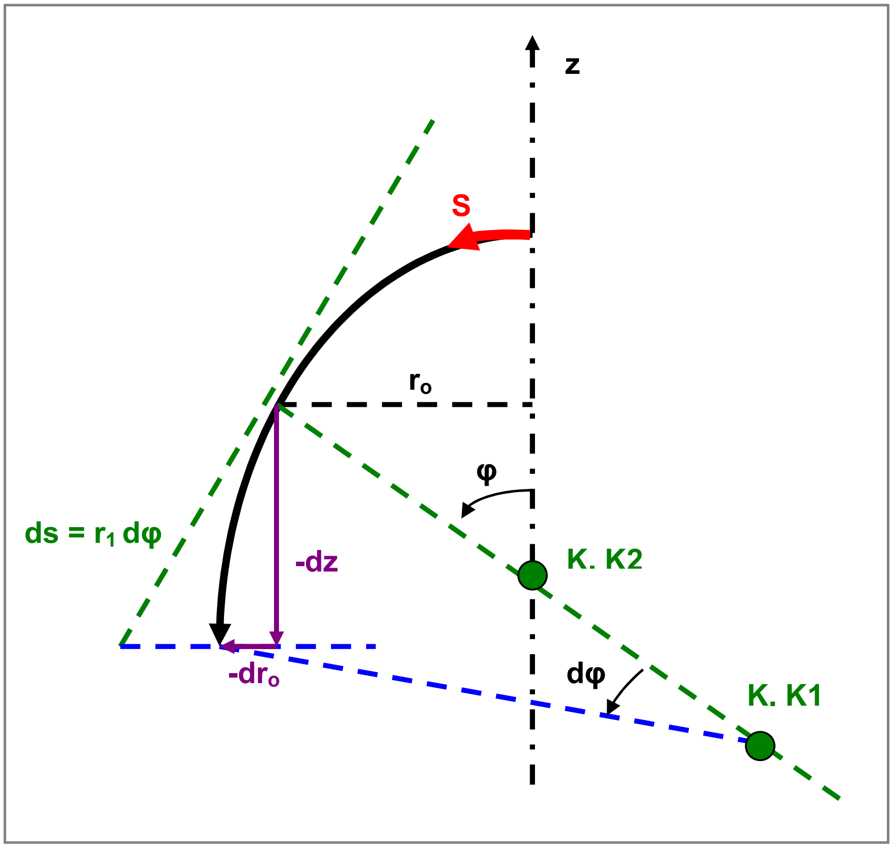
$$x = \pm \frac{a^2 \sin\phi}{\left(a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi\right)^{1/2}} \tag{5.77}$$

Έτσι:

$$\frac{dx}{d\phi} = \pm \frac{a^2 b^2 \cos\phi}{\left(a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi\right)^{3/2}} \tag{5.78}$$

$$r(\phi) = \pm \frac{a^2 b^2}{\left(a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi\right)^{3/2}} \tag{5.79}$$

Κελύφη Εκ Περιστροφής



Ισχύει:

$$dr_o = ds \cdot \cos\phi = r_1 d\phi \cos\phi \tag{5.80}$$

$$-dz = ds \cdot \sin\phi = r_1 d\phi \sin\phi \tag{5.81}$$

Επίσης:

$$\frac{dr_o}{d\phi} = r_1 \cos\phi \tag{5.82}$$

οπότε

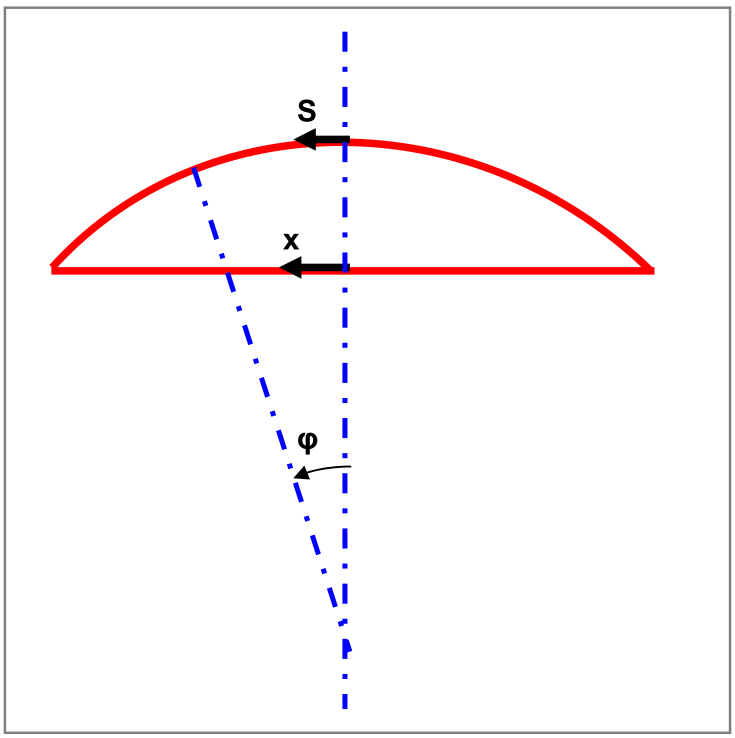
$$r_1 = \sec\phi \frac{dr_o}{d\phi} \tag{5.83}$$

$$\frac{1}{r} = \cos\phi \frac{d\phi}{dr_o} = \frac{d\left(\sin\phi\right)}{dr_o} = \frac{d\cos\phi}{dz} \tag{5.84}$$

$$\frac{dz}{ds} = -\sin\phi \rightarrow \frac{d^2 z}{ds^2} = -\cos\phi \frac{d\phi}{ds} = -\cos\phi \frac{d\phi}{r_1 d\phi} \tag{5.85}$$

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{\cos\phi} \frac{d^2 z}{ds^2} \tag{5.86}$$

Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για την ανάπτυξη της θεωρίας «χθαμαλών κελυφών».



Όταν η γωνία φ κυμαίνεται σε χαμηλές τιμές, τότε:

$$\cos\phi \simeq 1 \tag{5.87}$$

$$ds \simeq dx \tag{5.88}$$

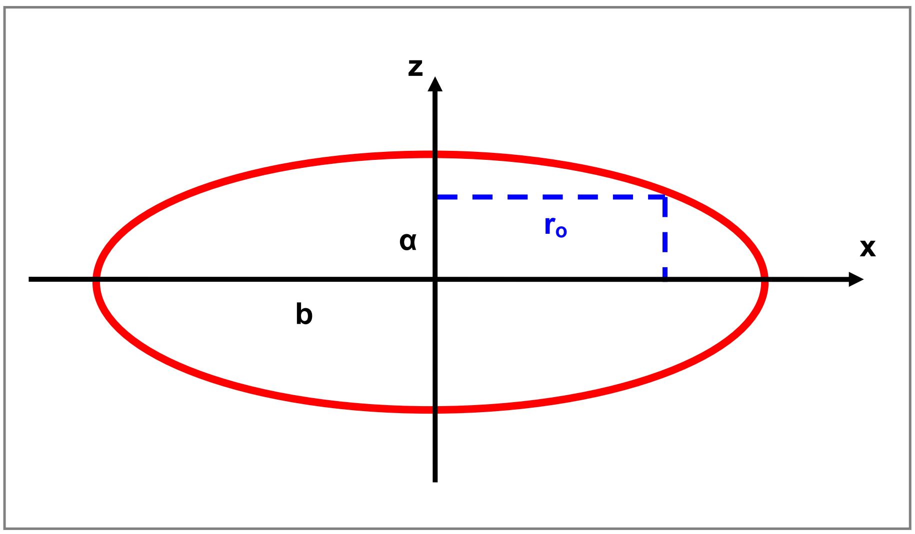
Έτσι:

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{1}{\cos\phi}\frac{d^2 z}{ds^2} \tag{5.89}$$

$$\frac{1}{r_1} \simeq -\frac{d^2 z}{ds^2}$$

$$ή \ \frac{1}{r_1} \simeq -\frac{d^2 z}{dx^2} \tag{5.90}$$

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ



$$x = r_o \tag{5.91}$$

$$\left(\frac{r_o}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \tag{5.92}$$

$$r_o = \pm a^2 \frac{\sin\phi}{\left(a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi\right)^{1/2}} \tag{5.93}$$

Χρησιμοποιούμε το πρόσημο $+$ για $0 \le \phi \le \pi$.

$$\frac{dr_o}{d\phi} = \pm \frac{a^2 b^2 \cos\phi}{\left(a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi\right)^{3/2}} \tag{5.94}$$

$$r_1 = \frac{1}{\cos\phi}\frac{dx(\phi)}{d\phi} \tag{5.95}$$

Άρα:

$$r_1 = \pm \frac{a^2 b^2}{\left(a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi\right)^{3/2}} \tag{5.96}$$

$$r_2 = \pm \frac{a^2}{\left(a^2 \sin^2\phi + b^2 \cos^2\phi\right)^{1/2}} \tag{5.97}$$