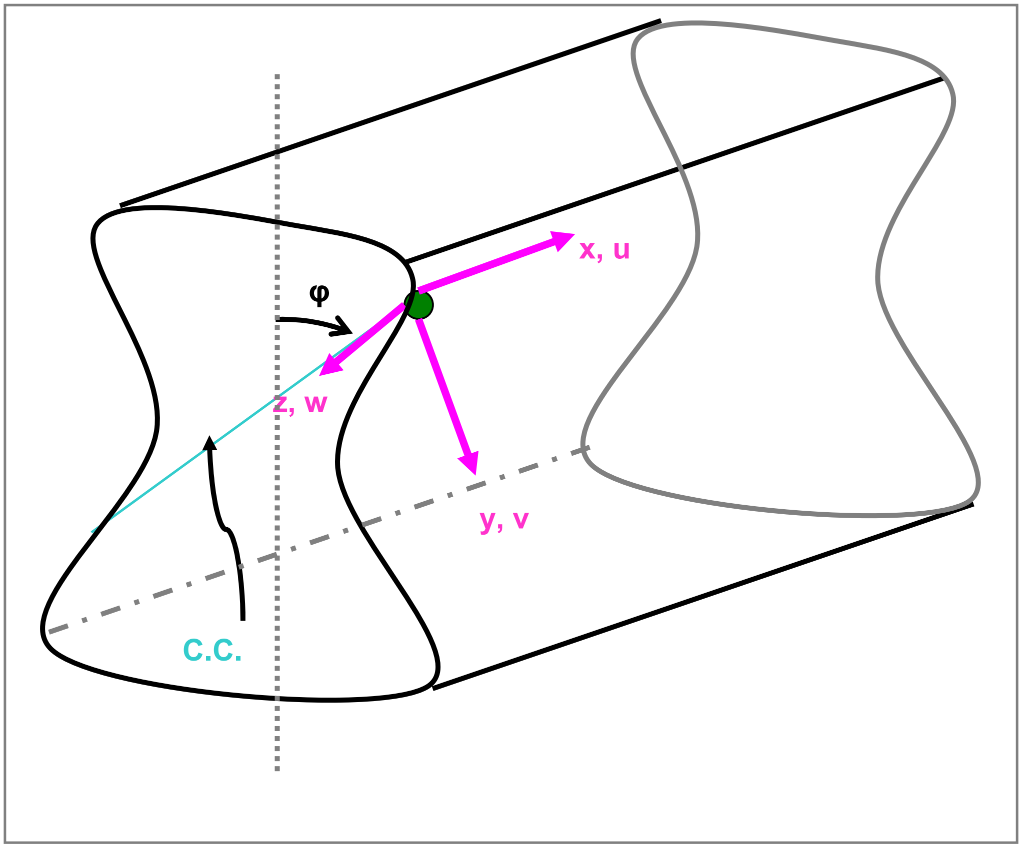
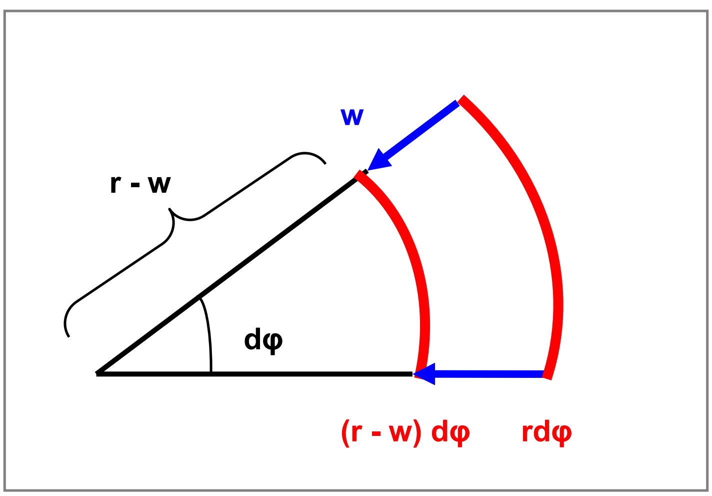
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

Καθ. Βλάσης Κουμούσης

Μεμβρανική Παραμόρφωση -Κυλινδρικά Κελύφη

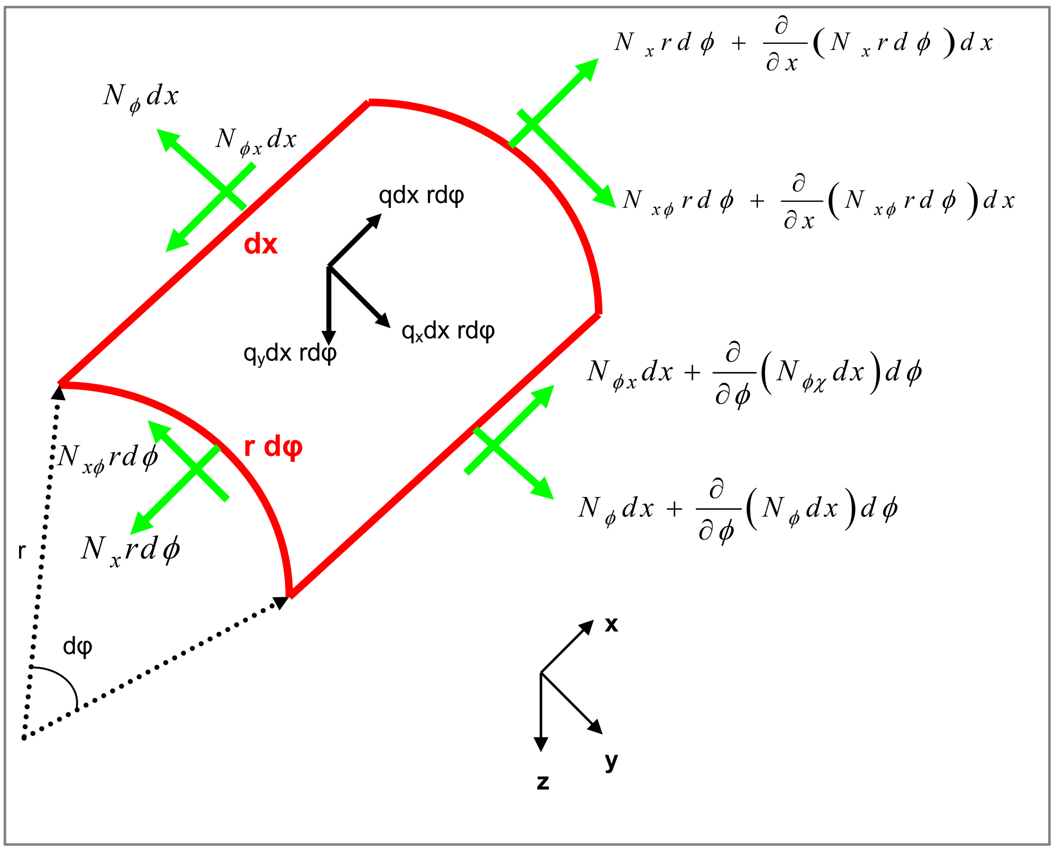




$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{\partial v}{r\partial \phi} - \frac{w}{r} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\phi_w} &= \frac{(r-w)d\phi - rd\phi}{rd\phi} = \\ &= \frac{rd\phi - wd\phi - rd\phi}{rd\phi} = -\frac{w}{r} \end{aligned} \tag{4.3}$$



- Άθροισμα των ροπών περί τον άξονα z:

$$N_{x\phi} = N_{\phi x} \tag{4.4}$$

- Άθροισμα των δυνάμεων κατά x:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} r d\phi dx + \frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} d\phi dx + q_x r d\phi dx = 0 \tag{4.5}$$

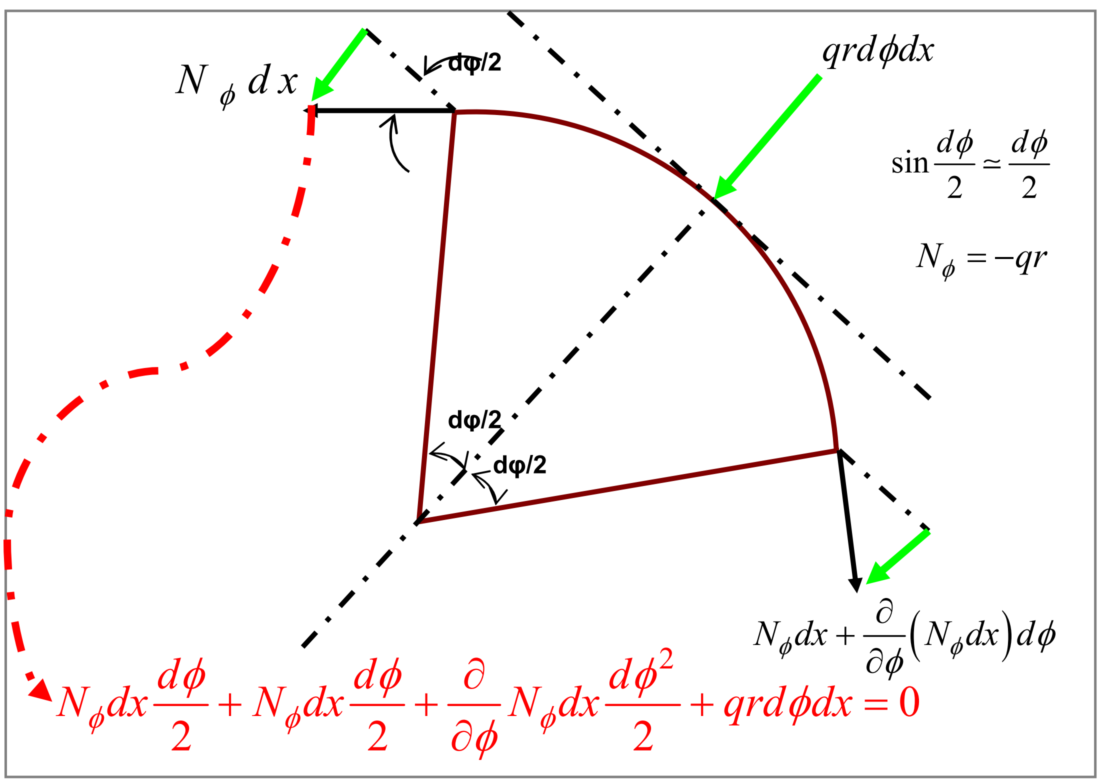
$$ή \quad \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{\phi x}}{\partial \phi} = -q_x \tag{4.6}$$

- Άθροισμα των δυνάμεων κατά y:

$$\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} dx d\phi + \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} r d\phi dx + q_y r d\phi dx = 0 \tag{4.7}$$

$$ή \quad \frac{\partial N_{x\phi}}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\phi}{\partial \phi} = -q_y \tag{4.8}$$

- Άθροισμα των δυνάμεων κατά z



Συνολικά:

$$N_{x,x} + \frac{1}{r} N_{x\phi,\phi} = -q_x \tag{4.9}$$

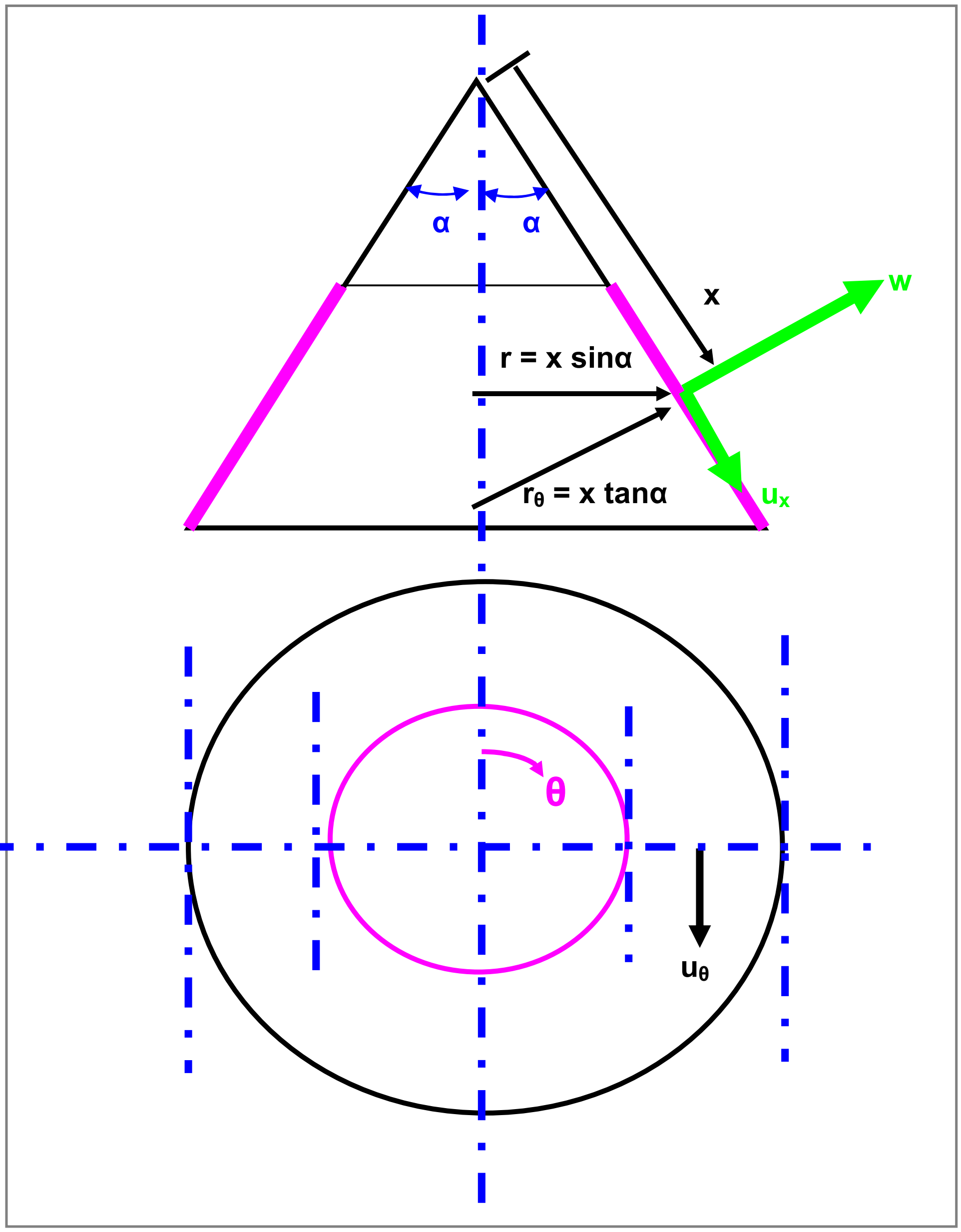
$$N_{x\phi,x} + \frac{1}{r} N_{\phi,\phi} = -q_y \tag{4.10}$$

$$N_{\phi} = -qr \tag{4.11}$$

όπου ( ) $_{,x}$ και ( ) $_{,\varphi}$ δηλώνουν παράγωγο ως προς x και φ, αντίστοιχα

Κωνικά Κελύφη – Μεμβρανική Θεωρία

Το κωνικό κέλυφος δημιουργείται από την περιστροφή ενός ευθύγραμμου τμήματος περί άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό του και σχηματίζουν γωνία α.



Προκύπτει έτσι:

$$r = x \sin a \;\;, \quad r_\theta = x \tan a \tag{4.12}$$

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις ισορροπίας λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial\left(xN_x\right)}{\partial x}+\frac{1}{\sin a}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta}-N_\theta+q_x x \ =0 \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial\left(xN_{x\theta}\right)}{\partial x}+\frac{1}{\sin a}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+N_{x\theta}+q_\theta x=0 \tag{4.14}$$

$$N_\theta+qx\tan a=0 \tag{4.15}$$

Οι σχέσεις παραμορφώσεων – μετακινήσεων γίνονται:

$$\varepsilon_x^o=\frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{4.16}$$

$$\varepsilon_\theta^o=\frac{1}{x\sin a}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+u_x\sin a+w\cos a\right) \tag{4.17}$$

$$\gamma_{x\theta}^o=\frac{\partial u_\theta}{\partial x}-\frac{1}{x\sin a}\left(u_\theta\sin a-\frac{\partial u_x}{\partial\theta}\right) \tag{4.18}$$

Από την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας προκύπτει:

$$N_\theta=-qx\tan a \tag{4.19}$$

Αντικαθιστώντας στην 2^{η} εξίσωση παίρνουμε:

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{2}{x}N_{x\theta}+\left(q_\theta-\frac{1}{\cos a}\frac{\partial q}{\partial\theta}\right)=0 \tag{4.20}$$

η οποία ανήκει στην κατηγορία γραμμικών διαφορικών εξισώσεων $1^{\eta\varsigma}$ τάξης:

$$\frac{dU}{d\phi}+\rho\left(\phi\right)U+g\left(\phi\right)=0 \tag{4.21}$$

η λύση της οποίας δίδεται:

$$U=\left[c-\int q\exp\left(\int\rho d\phi\right)d\phi\right]\exp\left(-\int\rho d\phi\right) \tag{4.22}$$

οπότε:

$$N_{x\theta}=\frac{1}{x^2}\left[g_1(\theta)-\int\left(q_\theta-\frac{1}{\cos a}\frac{dq}{d\theta}\right)x^2dx\right] \tag{4.23}$$

όπου $g_1(\theta)$ αυθαίρετη συνάρτηση. Αντικαθιστώντας στην 1^η εξίσωση ισορροπίας λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{1}{x}N_x+\frac{1}{x\sin a}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta}+q\tan\alpha+q_x=0 \tag{4.24}$$

Η οποία ανήκει στην ίδια κατηγορία διαφορικών εξισώσεων. Η λύση της είναι:

$$N_x=\frac{1}{x}\left[g_2(\theta)-\int\left(\frac{1}{x\sin a}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta}+q\tan a+q_x\right)xdx\right] \tag{4.25}$$

όπου $g_2(\theta)$ αυθαίρετη συνάρτηση.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των εντατικών μεγεθών στις γενικές εκφράσεις των μετακινήσεων λαμβάνουμε:

$$u_x=\int\left[\frac{1}{E_xh}\left(N_x-v_{\theta x}N_\theta\right)+\alpha_{tx}T_o\right]dx+g_3(\theta) \tag{4.26}$$

$$u_\theta=x\left[g_4(\theta)+\int\left(\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial G_{x\theta}h}-\frac{1}{x\sin a}\frac{\partial u_x}{\partial\theta}\right)\frac{dx}{x}\right] \tag{4.27}$$

$$w=\frac{x\tan a}{E_\theta h}\left(N_\theta-v_{x\theta}N_x\right)+xa_{t\theta}T_o\tan a-\frac{1}{\cos a}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}-u_x\tan a \tag{4.28}$$

όπως και στα κυλινδρικά κελύφη οι συναρτήσεις $g_1 - g_4$ μπορούν να καθοριστούν σε πλευρές $x=c_1$ και $x=c_2$

Εφαρμογή 1: *Κωνικό κέλυφος με εσωτερική πίεση και ομοιόμορφη αύξηση της θερμοκρασίας T_o*

Δηλαδή $q = -p$, $q_\theta = q_\phi = 0$.

Αν θεωρήσουμε p, και T_o ανεξάρτητα του θ και x καθώς και συνοριακές συνθήκες ανεξάρτητες του θ, προκύπτει ότι g_1, g_2, g_3 και g_4 σταθερές.

$$N_\theta = px \tan a \tag{4.29}$$

$$N_x = \frac{g_2}{x} + \frac{px}{2}\tan a \tag{4.30}$$

$$N_{x\theta} = 0 \tag{4.31}$$

όπου λόγω συμμετρίας $g_1 = 0$.

Οι μετακινήσεις δίδονται:

$$u_\theta = x g_4 \tag{4.32}$$

$$u_x = \frac{1}{E_x h}\left[g_2 \log x + \frac{px^2}{2}\tan a\left(\frac{1}{2} - v_{\theta x}\right)\right] + a_{tx} x T_o + g_3 \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{x\tan a}{E_\theta h}\left[px\tan a - v_{x\theta}\left(\frac{g_2}{x} + \frac{px}{2}\tan a\right)\right] - g_3 \tan a + \\ & + xT_o\left(a_{t\theta} - a_{tx}\right)\tan a - \frac{\tan a}{E_x h}\left[g_2 \log x + \frac{px^2}{2}\tan a\left(\frac{1}{2} - v_{\theta x}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.34}$$

Εφαρμογή 2: ***Κωνικό κέλυφος κλειστό στο x = 0 $u_x = u_\theta = 0$ στο x = L***

Ισχύει ότι $g_2 = 0$, προκειμένου έτσι να απομακρυνθούν οι εκφράσεις log x και x^{-1}

Επίσης:

$$g_4 = 0 \tag{4.35}$$

$$g_3 = -a_{tx} L T_o - \frac{pL^2}{2E_x h}\tan a\left(\frac{1}{2} - v_{\theta x}\right) \tag{4.36}$$

Με βάση τα προηγούμενα, οι εκφράσεις των εντατικών μεγεθών γίνονται:

$$N_\theta = px\tan a \tag{4.37}$$

$$N_x = \frac{px}{2}\tan a \tag{4.38}$$

$$N_{x\theta} = 0 \tag{4.39}$$

$$u_\theta = 0 \tag{4.40}$$

$$u_x = \frac{p\tan a}{2E_x h}\left(\frac{1}{2} - v_{\theta x}\right)\left(x^2 - L^2\right) + a_{tx} T_o\left(x - L\right) \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} w = {} & \frac{px^2\tan^2 a}{E_{\theta x}}\left(1 - \frac{v_{x\theta}}{2}\right) + \frac{p\left(L^2 - x^2\right)\tan^2 a}{2E_x h}\left(\frac{1}{2} - v_{\theta x}\right) + \\ & + T_o\tan a\left[La_{tx} + x\left(a_{x\theta} - a_{tx}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.42}$$

Μεμβρανική Θεωρία Κελυφών Εκ Περιστροφής με Καμπύλες Γενέτειρες

Η 3η εξίσωση δίδεται ως:

$$N_\theta = -q r_\theta - \frac{N_\phi r_\theta}{r_\phi} \tag{4.43}$$

η οποία χρησιμοποιείται για να απαλειφθεί από τις δύο πρώτες:

$$\frac{\partial\left(rN_\phi\right)}{\partial\phi} + \rho_\phi \frac{\partial N_{\phi\theta}}{\partial\theta} + N_\phi r_\theta \cos\phi + r_\theta r_\phi\left(q_\phi \sin\phi + q\cos\phi\right) = 0 \tag{4.44}$$

$$\frac{\partial\left(rN_{\phi\theta}\right)}{\partial\phi} + \rho_\phi N_{\phi\theta}\cos\phi - r_\theta \frac{\partial N_\phi}{\partial\theta} + r_\theta r_\phi\left(q_\theta \sin\phi - \frac{\partial q}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{4.45}$$

οι οποίες γενικά δεν επιλύονται:

Κατηγορία 1η : Φόρτιση ανεξάρτητη του θ

Κατηγορία 2η: Φορτίσεις τυχαίες συναρτήσει του θ (Λύση με σειρές Fourier ως προς θ)

<u>Κατηγορία 1η</u> : Γενική Λύση

Η 2η εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial\left(rN_{\phi\theta}\right)}{\partial\phi} + r_\phi N_{\phi\theta}\cos\phi + r_\phi r_\theta q_\theta \sin\phi = 0 \tag{4.46}$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί ως προς $N_{\phi\theta}$, αφού καθοριστεί το φορτίο q_θ ως συνάρτηση του φ.

Η 1η εξίσωση γίνεται

$$\frac{d\left(rN_{\phi\theta}\right)}{d\phi}+N_{\phi}r_{\theta}\cos\phi+r_{\theta}r_{\phi}\left(q_{\phi}\sin\phi+q\cos\phi\right)=0 \qquad (4.47)$$

για την περίπτωση $q_{\theta}=0$, προκύπτει $N_{\phi\theta}=0$.

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με sinφ και ολοκληρώνοντας ως προς φ λαμβάνουμε:

$$N_{\phi}=-\frac{1}{r\sin\phi}\left[c_1+\int_{\phi_o}^{\phi}rr_{\phi}\left(q\cos\phi+q_{\phi}\sin\phi\right)d\phi\right] \qquad (4.48)$$

όπου c_1=σταθερά στη πλευρά φ = φ_o

$$N_{\phi}\left(\phi_o\right)=-\frac{c_1}{r\sin\phi} \qquad (4.49)$$

Πολλαπλασιάζοντας με το μήκος της περιφέρειας 2πr λαμβάνουμε:

$$2\pi r\left(\phi_o\right)N_{\phi}\left(\phi_o\right)\sin\phi_o=-2\pi c_1 \qquad (4.50)$$

Οι μετακινήσεις δίδονται ως:

$$u_{\phi}=\sin\phi\left[c_2+\int_{\phi_o}^{\phi}\frac{F\left(\phi\right)d\phi}{\sin\phi}\right] \qquad (4.51)$$

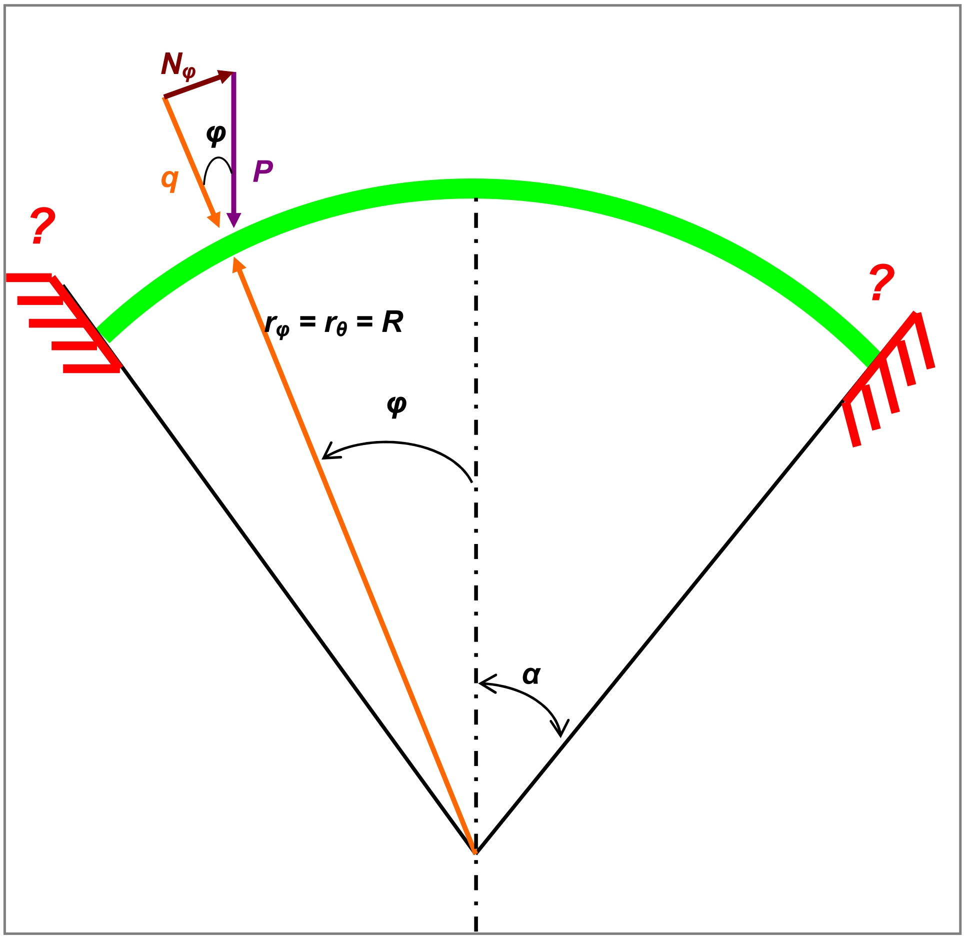
όπου:

$$F\left(\phi\right)=\frac{N_{\phi}}{E_{\phi}h}\left(r_{\phi}+r_{\theta\phi}r_{\theta}\right)-\frac{N_{\theta}}{E_{\theta}h}\left(r_{\theta}+r_{\phi\theta}r_{\phi}\right)+T_o\left(a_{t\phi}r_{\phi}-a_{t\theta}r_{\theta}\right) \qquad (4.52)$$

$$w=\frac{r_{\theta}}{E_{\theta h}}\left(N_{\theta}-r_{\phi\theta}N_{\phi}\right)+r_{\theta}a_{t\theta}T_o-\cos\phi\left[c_2+\int_{\phi_o}^{\phi}\frac{F\left(\phi\right)d\phi}{\sin\phi}\right] \qquad (4.53)$$

Σφαιρικό κέλυφος από το ίδιο βάρος του

Ίδιο βάρος: $q = P\cos\phi$, $q_\phi = P\sin\phi$, $q_\theta = 0$.



$$N_\phi = -\frac{PR}{1+\cos\phi} \tag{4.54}$$

$$N_\phi = PR\left(\frac{1}{1+\cos\phi} - \cos\phi\right) \tag{4.55}$$

$c_1 = 0$, χωρίς θερμοκρασιακές μεταβολές

$$F(\phi) = -\frac{PR^2}{h}\left\{\frac{1+r_{\theta\phi}}{E_\phi(1+\cos\phi)} + \frac{1+r_{\phi\theta}}{E_\theta}\left[\frac{1}{1+\cos\phi} - \cos\phi\right]\right\} \tag{4.56}$$

Με βάση την οποία οι μετακινήσεις γίνονται

$$u_\phi = -\frac{PR^2}{2h}\sin\phi\left[\frac{1+v_{\theta\phi}}{E_\phi}+\frac{1+v_{\phi\theta}}{E_\theta}\right]\left[\frac{1}{1+\cos\phi}+\log\left(\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}\right)\right]+$$
$$+\frac{PR^2}{hE_\theta}\left(1+v_{\phi\theta}\right)\log\left(\sin\phi\right)+c_2\sin\phi$$

(4.57)

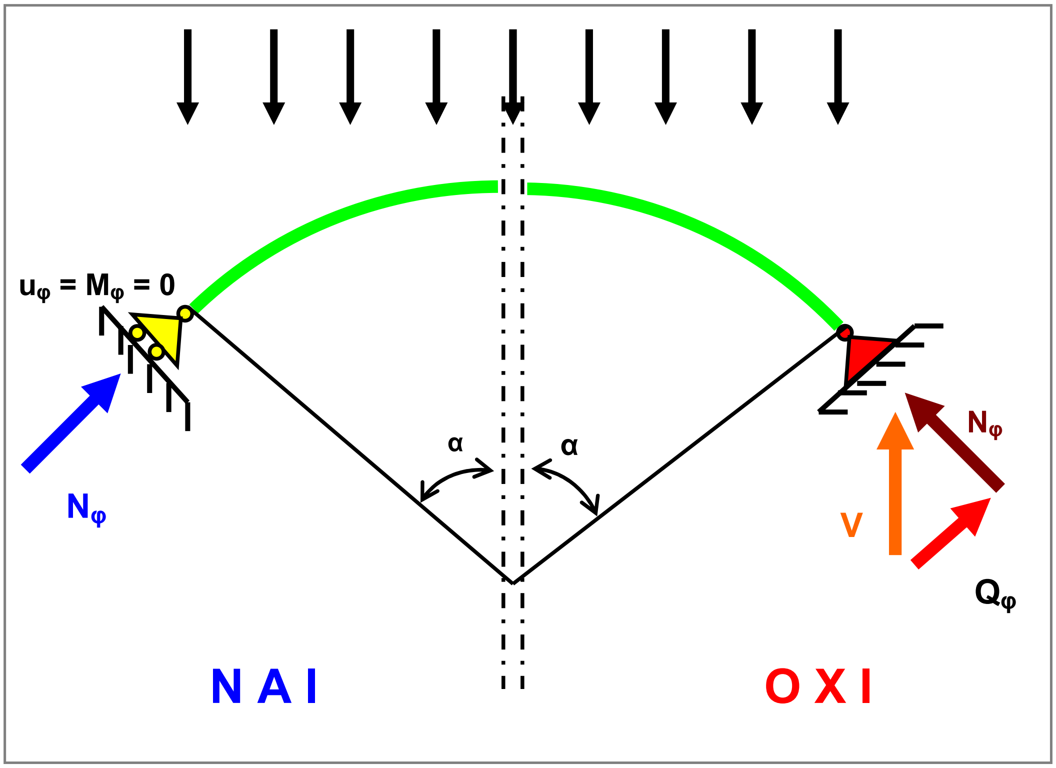
$$w=\frac{PR^2}{2h}\cos\phi\left[\frac{1+v_{\theta\phi}}{E_\phi}+\frac{1+v_{\phi\theta}}{E_\theta}\right]\left[\frac{1}{1+\cos\phi}+\log\left(\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}\right)\right]-$$
$$-\frac{PR^2}{hE_\theta}\left(1+v_{\phi\theta}\right)\log\left(\sin\phi\right)-c_2\cos\phi+ \tag{4.58}$$
$$+\frac{PR^2}{hE_\theta}\left[\frac{1+r_{\phi\theta}}{1+\cos\phi}-\cos\phi\right]$$

Για $q_\phi = 0$ στο $\phi = \alpha$, λαμβάνουμε:

$$c_2=\frac{PR^2}{2h}\left\{\left[\frac{1+v_{\theta\phi}}{E_\phi}+\frac{1+v_{\phi\theta}}{E_\theta}\right]\left[\frac{1}{1+\cos a}+\log\left(\frac{\sin a}{1+\cos a}\right)\right]-\frac{2\left(1+v_{\phi\theta}\right)}{E_\theta}\log\left(\sin a\right)\right\}$$

(4.59)

Περιορισμοί Μεμβρανικής Θεωρίας



Σφαιρικό Κέλυφος – Μεμβρανική Θεωρία

Αξονοσυμμετρική Φόρτιση

$$q = q(\phi),\ \ q_\phi = q_\phi(\phi),\ \ q_\theta = q_\theta(\phi) \tag{4.60}$$

$0 \le \theta \le 2\pi$ Σ.Σ. δεν μεταβάλλονται με θ

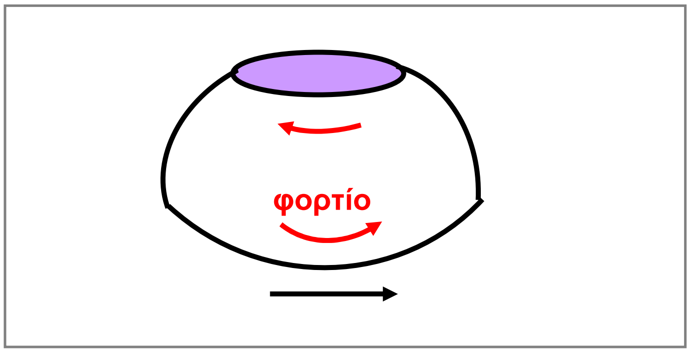
Έτσι $\dfrac{\partial(\ )}{\partial\theta} = 0$ και άρα $\dfrac{\partial(\ )}{\partial\phi} = \dfrac{d(\ )}{d\phi}$, οπότε οι γενικές εξισώσεις γίνονται

$$\frac{dN_\phi}{d\phi} + \left(N_\phi - N_\theta\right)\cot\phi = -\alpha q_\phi \tag{4.61}$$

$$\frac{dN_{\phi\theta}}{d\phi} + 2N_{\phi\theta}\cot\phi = -\alpha q_{\theta} \quad (4.62)$$

$$N_{\phi} + N_{\theta} = -\alpha q \quad (4.63)$$

Η (4.62) είναι ανεξάρτητη εξίσωση στρέψης.



<u>Στην κορυφή</u>

$$\left(N_{\phi}\right)_{\phi=0} = \left(N_{\theta}\right)_{\phi=0} = -\frac{a}{2}q(0) \quad (4.64)$$

Επίσης αν $q_{\theta}=0$, τότε δεν υπάρχει η διατμητική $N_{\phi\theta}=0$, άρα δεν υπάρχει στρέψη. Επιλύοντας την 3η εξίσωση ως προς N_{θ} και αντικαθιστώντας στην 1η παίρνουμε:

$$\frac{dN_{\phi}}{d\phi} + 2N_{\phi}\cot\phi = -a\left(q\cot\phi + q_{\phi}\right) \quad (4.65)$$

η οποία είναι δ.ε. τύπου Bernoulli. Πολλαπλασιάζοντας με sin2φ (intergrating factor) προκύπτει:

$$\sin^2\phi\frac{dN_{\phi}}{d\phi} + 2N_{\phi}\sin\phi\cos\phi = -a\left(q\sin\phi\cos\phi + q_{\phi}\sin^2\phi\right) \quad (4.66)$$

Το πρώτο μέλος είναι το $\dfrac{d\left(N_{\phi}\cdot\sin^2\phi\right)}{d\phi} = -a\left(q\sin\phi\cos\phi + q_{\phi}\sin^2\phi\right)$.

$$N_{\phi} = \frac{a}{\sin^2 \phi}\left[c_1 - \int \left(q \sin\phi \cos\phi + q_{\phi} \sin^2 \phi\right) d\phi\right] \tag{4.67}$$

ομοίως η διατμητική εξίσωση

$$N_{\phi\theta} = \frac{a}{\sin^2 \phi}\left[c_2 - \int q_{\theta} \sin^2 \phi \, d\phi\right] \tag{4.68}$$

και

$$N_{\theta} = -N_{\phi} - qa \tag{4.69}$$

<u>Φόρτιση</u>: ίδιο βάρος $q = p\cos\phi$, $q_{\phi} = p\sin\phi$, $q_{\theta} = 0$

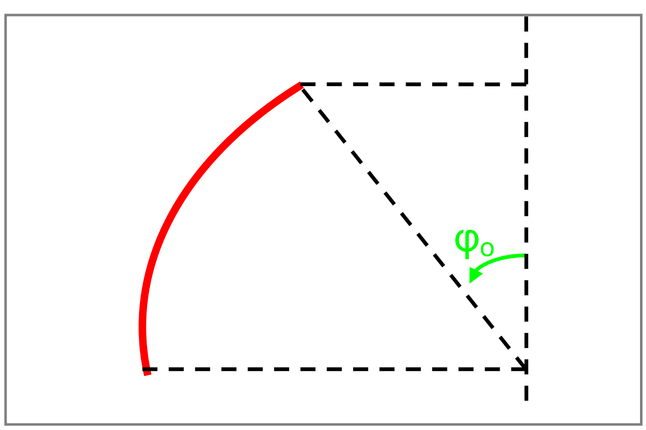
$$N_{\phi} = \frac{a}{\sin^2 \phi}\left[c_1 - \int p\left(\sin\phi \cos^2 \phi + \sin^3 \phi\right) d\phi\right] \tag{4.70}$$

Άρα:

$$N_{\phi} = \frac{a}{\sin^2 \phi}\left[c_1 - p\cos\phi\right] \tag{4.71}$$

$$N_{\theta} = -\frac{a}{\sin^2 \phi}\left(c_1 + p\cos\phi\right) - ap\cos\phi \tag{4.72}$$

α) Ανοικτή κορυφή



Από $\phi=\phi_c\neq 0$ και $N_\phi=0$ προκύπτει ότι $c_1=-p\cos\phi_o$ και γενικά:

$$N_\phi=\frac{ap}{\sin^2\phi}\left(\cos\phi-\cos\phi_o\right) \tag{4.73}$$

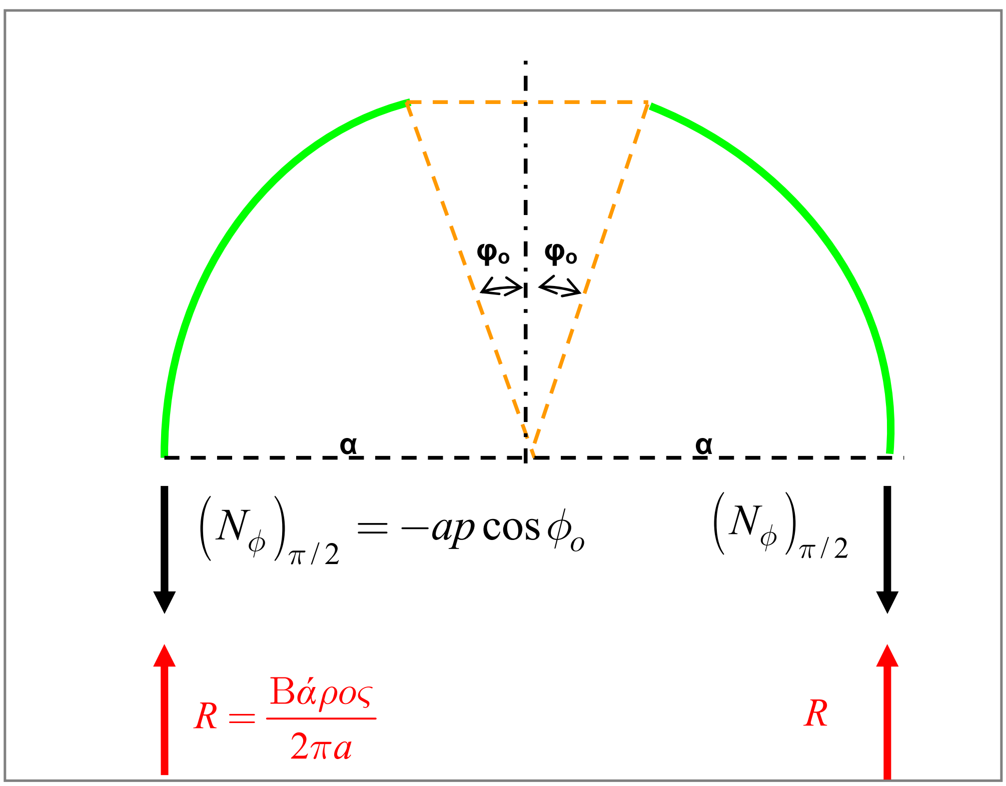
Για $\phi=0$:

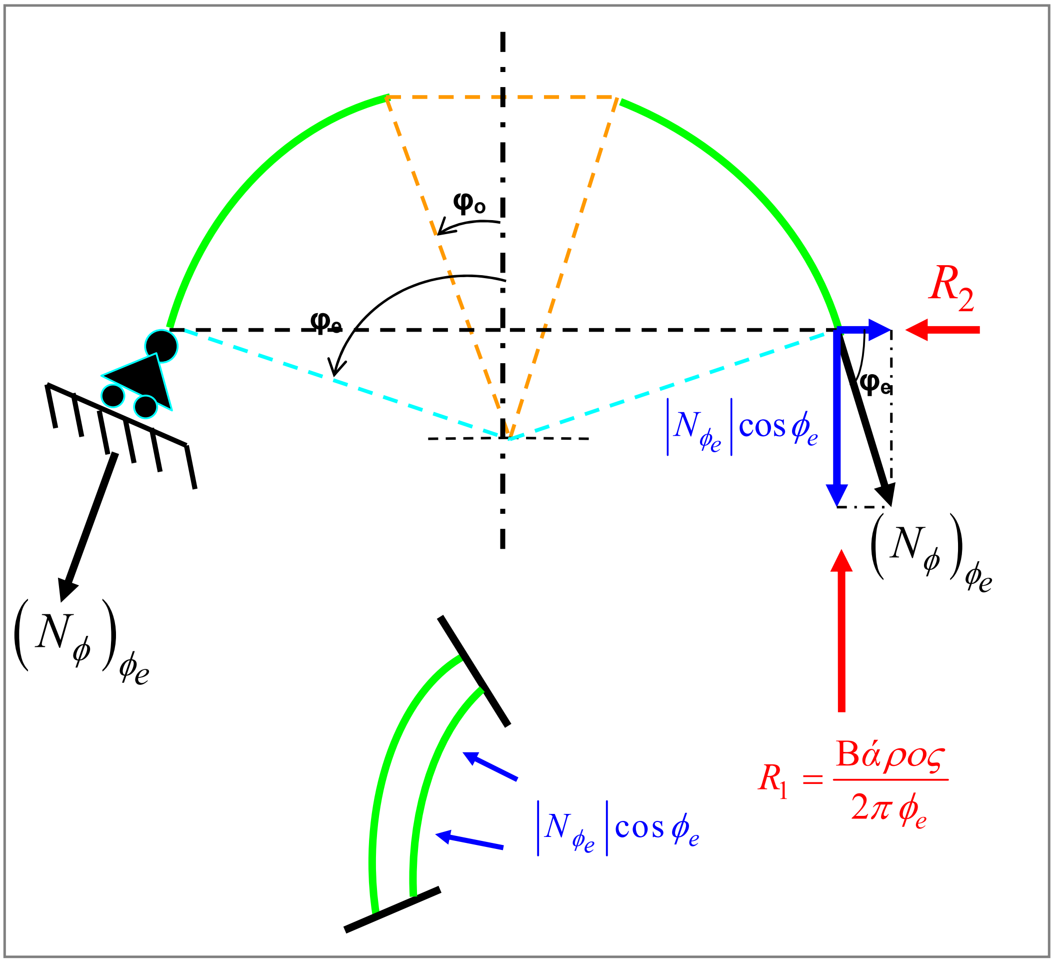
$$N_\phi=\frac{ap}{\sin^2\phi}\left(\cos\phi-1\right) \tag{4.74}$$

Για $\phi\to 0$ έχουμε απροσδιόριστη μορφή 0 / 0 και οπότε:

$$\lim_{\phi\to 0}N_\phi=\lim_{\phi\to 0}ap\frac{-\sin\phi}{2\sin\phi\cos\phi}=-\frac{ap}{2} \tag{4.75}$$

$$\left(N_\theta\right)_{\phi=0}=\frac{ap}{2}-ap=-\frac{ap}{2}=\left(N_\phi\right)_{\phi=0} \tag{4.76}$$





Για να αναληφθεί η R_2 χρειάζεται περιμετρικός δακτύλιος.

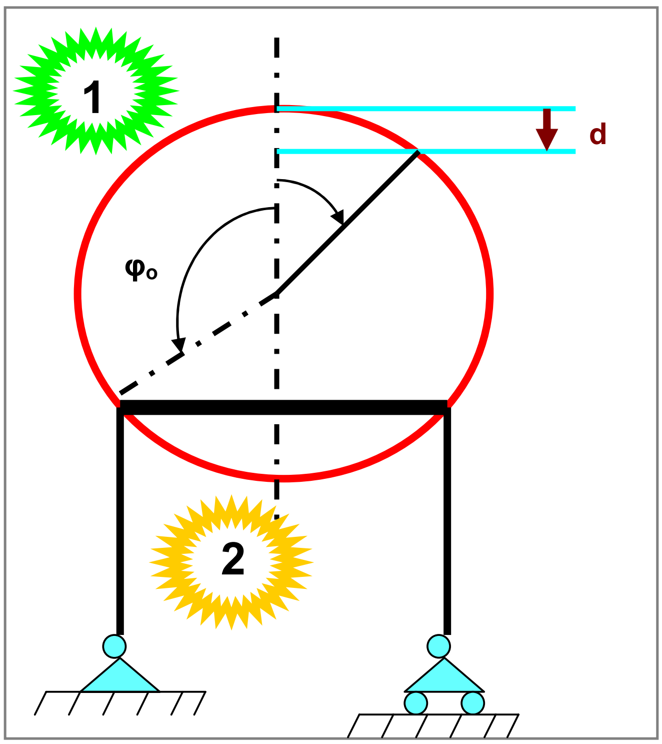
Εφαρμογή: *ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΔΕΞΑΜΕΝΗ*

Παραδοχές:

Α) αμελούμε το ίδιο βάρος

Β) πλήρης υγρού ειδ. βάρους γ

$$q = -\gamma d = -\gamma a\left(1 - \cos\phi\right) \tag{4.77}$$



Περιοχή 1: $0 \le \phi \le \phi_o$

Περιοχή 2: $\phi_o \le \phi \le \pi$

Δεδομένου ότι $q_\varphi = q_\theta = 0$

$$N_\phi = \frac{a}{\sin^2\phi}\left[c_1 + \gamma\alpha\int\left[\sin\phi\,\cos\phi\,(1-\cos\phi)\right]d\phi\right] \tag{4.78}$$

$$N_\phi = \frac{a}{\sin^2\phi}\left[c_1 + \gamma\alpha\left(-\frac{\cos^2\phi}{2} + \frac{\cos^3\phi}{3}\right)\right] \tag{4.79}$$

Περιοχή 1:

$$N_\phi = \frac{a}{\sin^2\phi}\left[c_{11} + \gamma\alpha\left(-\frac{\cos^2\phi}{2} + \frac{\cos^3\phi}{3}\right)\right] \tag{4.80}$$

Περιοχή 2:

$$N_\phi = \frac{a}{\sin^2\phi}\left[c_{12} + \gamma\alpha\left(-\frac{\cos^2\phi}{2} + \frac{\cos^3\phi}{3}\right)\right] \tag{4.81}$$

Για $\varphi = 0$ ισχύει ότι $N_\phi \to \infty$, εκτός αν

$$\left[c_{11} + \gamma\alpha\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] = 0 \;\rightarrow\; c_{11} = \frac{\gamma\alpha}{6} \tag{4.82}$$

Για $\varphi = \pi$ ισχύει ότι $N_\phi \to \infty$, εκτός αν

$$\left[c_{12} + \gamma\alpha\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\right] = 0 \;\rightarrow\; c_{12} = \frac{5}{6}\gamma\alpha \tag{4.83}$$

Άρα:

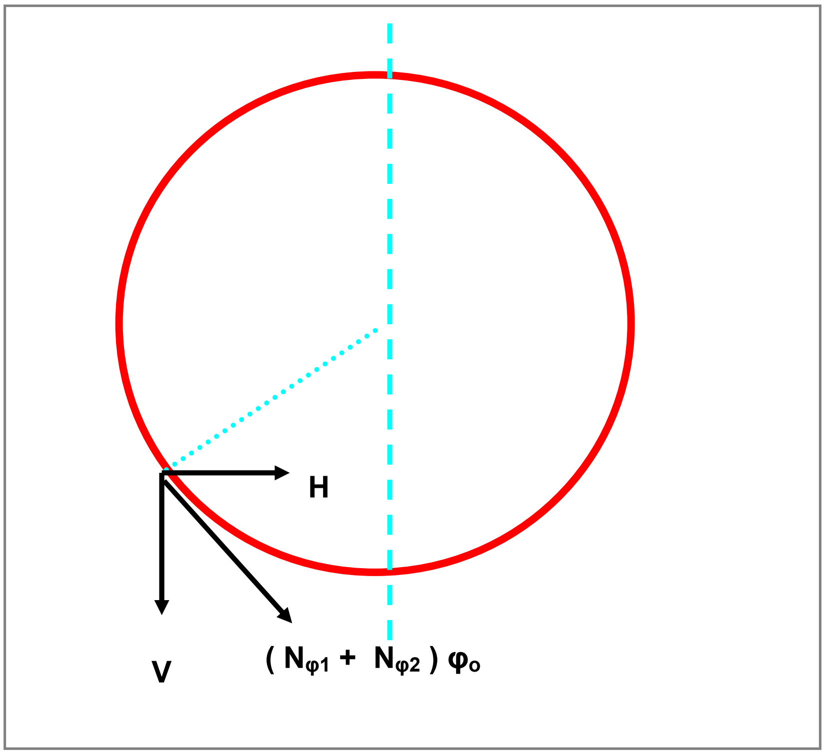
$$N_{\phi 1} = \frac{\gamma\alpha^2}{\sin^2\phi}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos^2\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\right] \tag{4.84}$$

$$N_{\phi 2} = \frac{\gamma\alpha^2}{\sin^2\phi}\left[\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\cos^2\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\right] \tag{4.85}$$

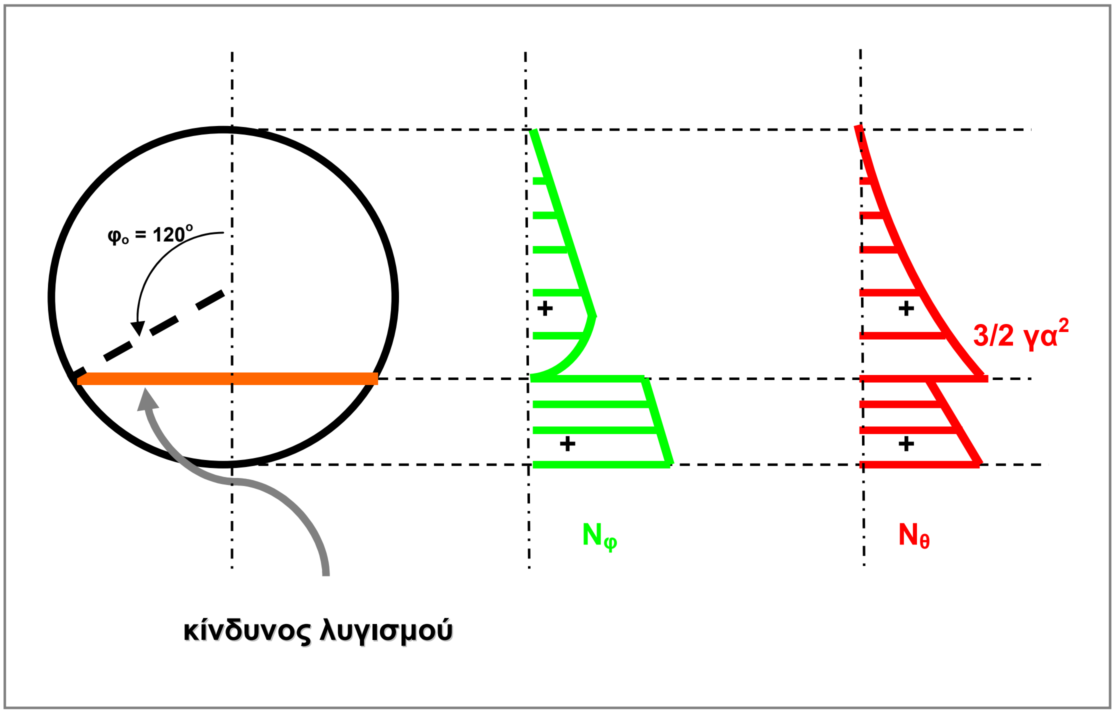
$$\left(N_{\phi_1}\right)_{\phi_o} - \left(N_{\phi_2}\right)_{\phi_o} = -\frac{2}{3}\frac{\gamma\alpha^2}{\sin^2\phi_o} \tag{4.86}$$

Ελάχιστη τιμή εμφανίζεται για $\varphi_o = \pi/2$. Επίσης, $\left(N_{\theta_1} - N_{\theta_2}\right) \neq 0$.

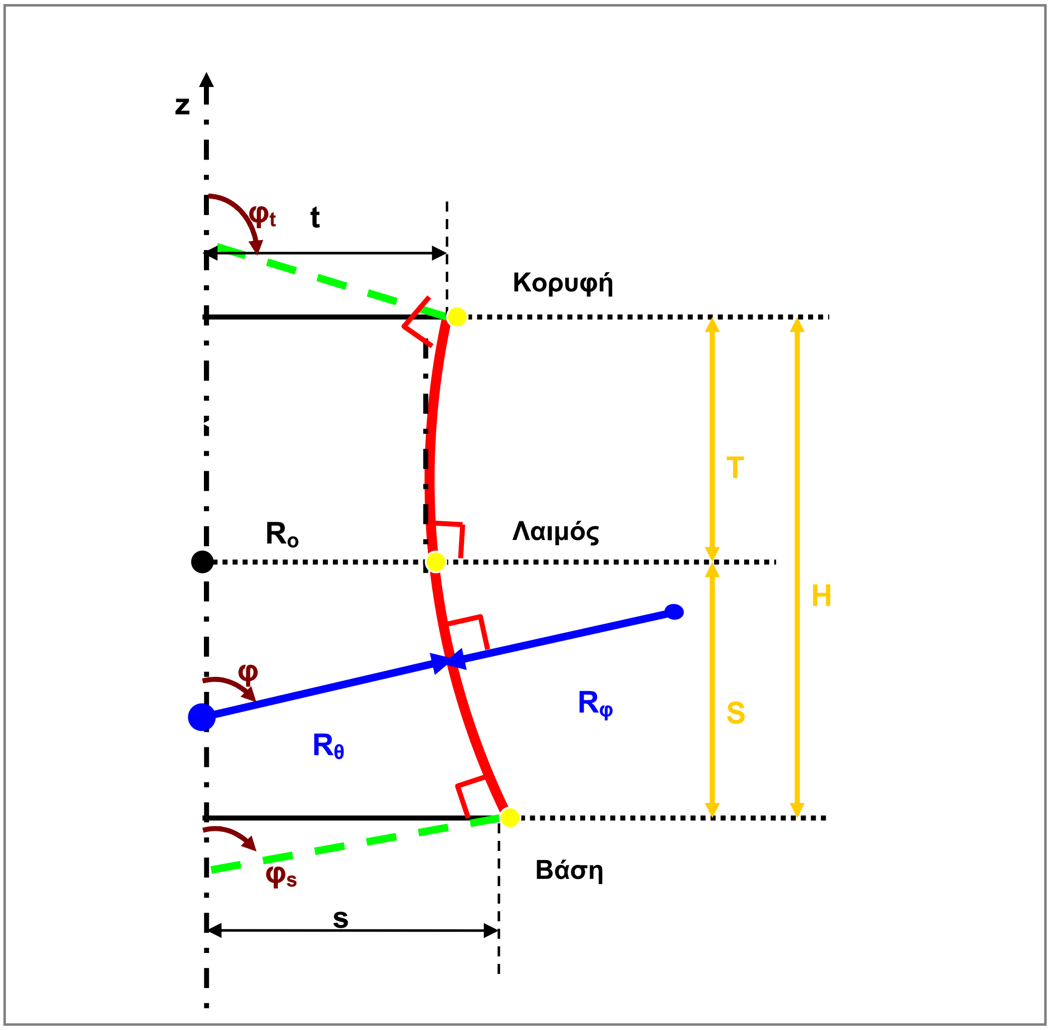
Απαιτείται δακτύλιος:



Τάσεις Σφαιρικού Δοχείου



Υπερβολοειδή Κελύφη – Συμμετρική Φόρτιση



- Εκ περιστροφής υπερβολή
- Καμπυλότητες αντίθετες – καμπυλότητα Gauss αρνητική

Εξίσωση γεννήτριας καμπύλης:

$$\frac{R_o^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (4.87)$$

όπου b χαρακτηριστική διάσταση του κελύφους

$$b = \frac{aT}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \frac{aS}{\sqrt{s^2 - a^2}} \tag{4.88}$$

$$\kappa = \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)} \tag{4.89}$$

Αντικαθιστώντας, η εξίσωση της καμπύλης γίνεται

$$R_o^2 - \left(\kappa^2 - 1\right) z^2 = a^2 \tag{4.90}$$

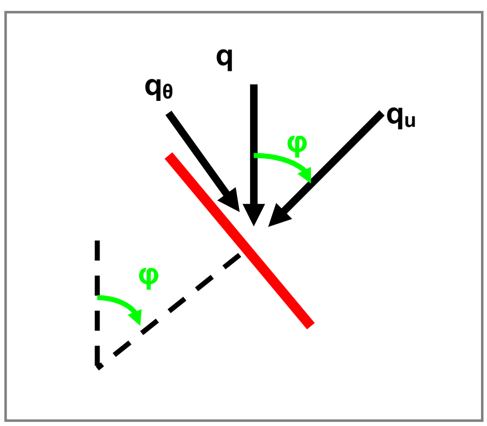
Προκύπτει ότι:

$$R_\theta = \frac{R_o}{\sin\phi} = \frac{a\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\left[\kappa^2 \sin^2\phi - 1\right]^{1/2}} \tag{4.91}$$

$$\kappa\alpha\iota \qquad R_\phi = \frac{-a\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\left[\kappa^2 \sin^2\phi - 1\right]^{3/2}} \tag{4.92}$$

<u>Φόρτιση</u>: Ίδιο Βάρος

$$q_\theta = q\sin\phi, \;\; q_u = -q\cos\phi \tag{4.93}$$



Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας και εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στη θέση $\varphi = \varphi_t$ λαμβάνουμε:

$$\begin{gathered}
N_\phi(\phi) = N_\phi(\phi_t)\frac{\sin^2\phi_t\left[\kappa^2\sin^2\phi - 1\right]^{1/2}}{\sin^2\phi\left[\kappa^2\sin^2\phi_t - 1\right]^{1/2}} - \frac{\left[\kappa^2\sin^2\phi - 1\right]^{1/2}}{a\sin^2\phi\sqrt{\kappa^2 - 1}}\times \\
\times\int_{\phi_t}^{\phi}\left(-q\cos^2\phi - q\sin^2\phi\right)\frac{a^2\left(\kappa^2 - 1\right)\sin\phi}{\left[\kappa^2\sin^2\phi - 1\right]^2}d\phi
\end{gathered} \tag{4.94}$$

Θεωρώντας στην κορυφή ότι $N_\varphi(\varphi_t) = 0$ και ομοιόμορφο q η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$N_\phi(\phi) = \frac{qa\left[\kappa^2\sin^2\phi - 1\right]^{1/2}}{\sin^2\phi\sqrt{\kappa^2 - 1}}\left[\zeta_1(\phi) - \zeta_1(\phi_t)\right] \tag{4.95}$$

όπου

$$\zeta_1(\phi) = \frac{-\cos\phi}{2\left[\kappa^2\sin^2\phi - 1\right]} + \frac{1}{4\kappa\sqrt{\kappa^2 - 1}}\ln\left(\frac{\sqrt{\kappa^2 - 1} - \kappa\cos\phi}{\sqrt{\kappa^2 - 1} + \kappa\cos\phi}\right) \tag{4.96}$$

Επίσης:

$$N_\theta(\phi) = \frac{a\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\left[\kappa^2\sin^2\phi - 1\right]}\left[-q\cos\phi + \frac{N_\phi(\phi)\left[\kappa^2\sin^2\phi - 1\right]^{3/2}}{a\sqrt{\kappa^2 - 1}}\right] \tag{4.97}$$