ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

Καθ. Βλάσης Κουμούσης

Μεμβρανική Θεωρία Κελυφών

Ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες:

$$M_1 = M_2 = M_{12} = M_{21} = 0\ , \quad \ddot{u}_1 = \ddot{u}_2 = \ddot{w} = 0 \tag{3.1}$$

Άρα οι εξισώσεις ισορροπίας γίνονται:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1 A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial N_{21} A_1}{\partial a_2} + N_{12}\frac{\partial A_1}{\partial a_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial a_1} + q_1 A_1 A_2 = 0 \\
&\frac{\partial N_{12} A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial N_2 A_1}{\partial a_2} + N_{21}\frac{\partial A_2}{\partial a_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial a_2} + q_2 A_1 A_2 = 0 \\
&\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} + q = 0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Τότε οι σχέσεις παραμορφώσεων-μετακινήσεων γίνονται:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^o &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2} + \frac{w}{R_1} \\
\varepsilon_2^o &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a_1} + \frac{w}{R_2} \\
\gamma_{12} &= \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

και οι συνοριακές συνθήκες είναι:

$$\begin{aligned}
N_n &= N_n^* \qquad ή \qquad u_n = u_n^* \\
N_{nt} &= N_{nt}^* \qquad ή \qquad u_t = u_t^*
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Εξισώσεις Για Κελύφη Εκ Περιστροφής

Η 1η θεμελιώδης μορφή δίνεται ως εξής:

$$\left(ds\right)^2 = r_\phi^2\left(d\phi\right)^2 + r^2\left(d\theta\right)^2 \tag{3.5}$$

όπου $R_1 \to r_\phi$, $R_o \to r$, $R_2 \to r_\theta$ και $r = r_\theta \sin\phi$.

$$A_1 = R_1 = r_\phi \ , \ \ A_2 = R_o = r \ , \ \ a_1 = \phi \ , \ \ a_2 = \theta \tag{3.6}$$

Συνθήκη Gauss:

$$\frac{dr}{d\phi} = r_\phi \cos\phi \tag{3.7}$$

Αντικαθιστώντας και παρατηρώντας ότι r, r_φ και r_θ είναι ανεξάρτητα του θ, προκύπτουν τα εξής:

$$\frac{r\partial N_\phi}{\partial\phi} + r_\phi\frac{\partial N_{\phi\theta}}{\partial\theta} - N_\theta r_\phi \cos\phi + q_\phi r r_\phi = 0 \tag{3.8}$$

$$\frac{r\partial N_{\phi\theta}}{\partial\phi} + r_\phi\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta} + N_{\phi\theta} r_\phi \cos\phi + q_\theta r r_\phi = 0 \tag{3.9}$$

$$\frac{N_\phi}{r_\phi} + \frac{N_\theta}{r_\theta} + q = 0 \tag{3.10}$$

και

$$\varepsilon_\phi^o = \frac{1}{r_\phi}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi} + w\right) \tag{3.11}$$

$$\varepsilon_\theta^o = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\phi \cos\phi + w \sin\phi\right) \tag{3.12}$$

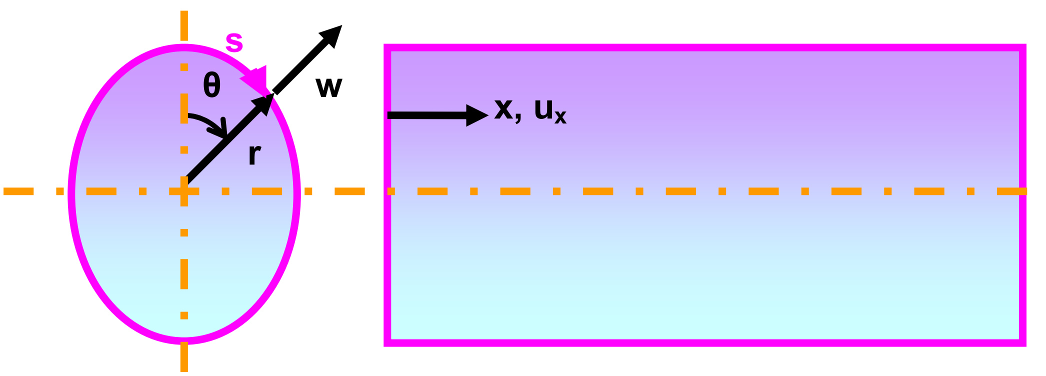
$$\gamma_{\phi\theta}^o = \frac{1}{r_\phi}\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\left(u_\theta \cos\phi - \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta}\right) \tag{3.13}$$

Μεμβρανική Ανάλυση Κελυφών Με Ευθύγραμμες Γεννήτριες (Κυλινδρικά – Κωνικά)

Ισχύει:

$$\lim_{r_\phi \to \infty}\left(r_\phi d\phi\right) = dx \tag{3.14}$$

Στην περίπτωση των κυλινδρικών κελυφών ισχύουν οι ακόλουθες εξισώσεις ισορροπίας για $\phi \to x$, $\theta \to s$:



$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} + q_x = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_s}{\partial s} + q_s = 0 \tag{3.16}$$

$$N_s + q_r = 0 \tag{3.17}$$

καθώς και

$$\varepsilon_x^o = \frac{\partial u_x}{\partial x},\ \varepsilon_s^o = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{w}{r},\ \gamma_{xs}^o = \frac{\partial u_x}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial x} \tag{3.18}$$

Οι εξισώσεις επιλύονται ως προς τα εντατικά μεγέθη (ισοστατικό πρόβλημα) ως εξής:

$$N_s = -qr \tag{3.19}$$

$$N_{xs} = -\int \left(q_s + \frac{\partial N_s}{\partial s} \right) dx + f_1(s) \tag{3.20}$$

$$N_x = -\int \left(q_x + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} \right) dx + f_2(s) \tag{3.21}$$

όπου *$f_1(s)$, $f_2(s)$* αυθαίρετες συναρτήσεις που θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες. Επίσης:

$$\varepsilon_x^o = \frac{1}{E_x h}\left(N_x - v_{sx} N_s \right) + a t_x T_o \tag{3.22}$$

$$\varepsilon_s^o = \frac{1}{E_s h}\left(N_s - v_{xs} N_x \right) + a t_s T_o \tag{3.23}$$

$$\gamma_{xs}^o = \frac{N_{xs}}{G_{xs} h} \tag{3.24}$$

Τέλος:

$$u_x = \int \left[\frac{1}{E_x h}\left(N_x - v_{sx} N_s \right) + a t_x T_o \right] dx + f_3(s) \tag{3.25}$$

$$u_s = \int\left[\frac{1}{G_{xs}h}N_{xs}\right]dx - \int\frac{\partial u_x}{\partial s}dx + f_4\left(s\right) \tag{3.26}$$

$$w = r\left[\frac{1}{E_s h}\left(N_s - v_{xs}N_x\right) + at_s T_o - \frac{\partial u_s}{\partial s}\right] \tag{3.27}$$

όπου $f_2(s)$, $f_4(s)$ επίσης αυθαίρετες συναρτήσεις.

Οι f_i είναι συναρτήσεις μόνο του s και άρα οι Σ.Σ. μπορούν να επιβληθούν μόνο σε θέσεις όπου $x = c$. Έτσι επιλύονται μόνο τα κλειστά κελύφη.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Έστω $q_X = 0$, ενώ q_S, q και T θεωρούνται ως συναρτήσεις μόνο του s, τότε:

$$N_s = -qr \tag{3.28}$$

$$N_{xs} = -\left(q_s + \frac{dN_s}{ds}\right)x + f_1\left(s\right) \tag{3.29}$$

$$N_x = -\left(\frac{dN_{xs}}{ds}\right)x + f_2\left(s\right) \tag{3.30}$$

Εισάγοντας:

$$F\left(s\right) = \left(q_s + \frac{dN_s}{ds}\right) \tag{3.31}$$

οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$N_s = -qr \tag{3.32}$$

$$N_{xs} = -xF\left(s\right) + f_1\left(s\right) \tag{3.33}$$

$$N_x = \frac{x^2}{2}\frac{dF}{ds} - x\frac{df_1(s)}{ds} + f_2(s) \tag{3.34}$$

ενώ και

$$u_x = \frac{1}{E_x h}\left[\frac{x^3}{6}\frac{dF}{ds} - v_{sx} x N_s - \frac{x^2}{2}\frac{df_1(s)}{ds} + x f_2(s)\right] + a_{tx} T_o + f_3(s) \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} u_s = & -\frac{x^2}{2}\left(a_{tx}\frac{dT_o}{ds} + \frac{F}{G_{xs}h}\right) + x\left(\frac{f_1}{G_{xs}h} - \frac{df_3}{ds}\right) + f_4 - \\ & -\frac{1}{E_x h}\left[\frac{x^4}{24}\frac{d^2F}{ds^2} - \frac{x^3}{6}\frac{d^2 f_1}{ds^2} + \frac{x^2}{2}\left(\frac{df_2}{ds} - v_{sx}\frac{dN_s}{ds}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.36}$$

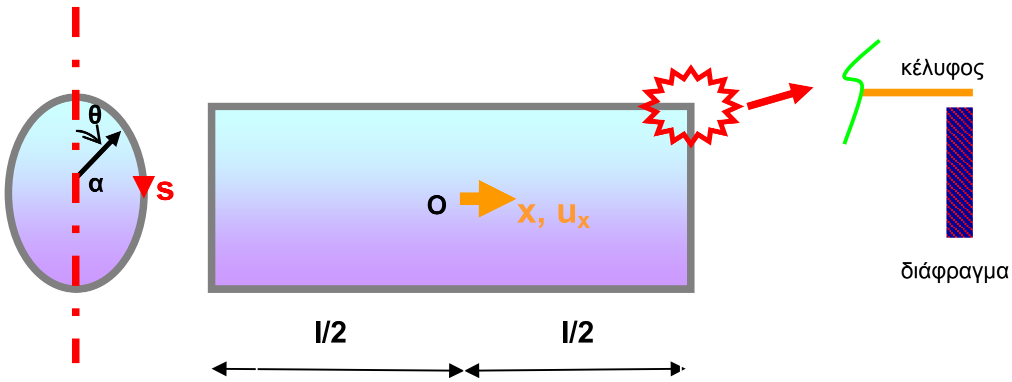
$$w = \frac{r}{E_s h}\left(N_s - \frac{v_{sx} x^2}{2}\frac{dF}{ds} + v_{xs} x \frac{df_1}{ds} - v_{xs} f_2\right) + a_{t1} r T_o - r\frac{du_s}{ds} \tag{3.37}$$

Παράδειγμα

Το ακόλουθο κυκλικό κυλινδρικό κέλυφος είναι οριζόντια τοποθετημένο γεμάτο με υγρό πυκνότητας ρ. Θεωρούμε p_o την πίεση στη μέση γραμμή.

Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} & S = a\theta \\ & q = -\left(p_o - \rho a \cos\theta\right) \\ & T_o = q_x = q_s = 0 \end{aligned} \tag{3.38}$$



Οι συνοριακές συνθήκες που εφαρμόζονται δίνονται ως εξής:

$$u_s = N_x = 0 \text{ στα } x = +(-)\ l/2 \tag{3.39}$$

Προκύπτουν έτσι τα ακόλουθα:

$$N_s = p_o a - \rho a^2 \cos\theta \tag{3.40}$$

$$F(\theta) = \rho\alpha \sin\theta \tag{3.41}$$

$$N_x = -\frac{\rho}{8}\left(l^2 - 4x^2\right)\cos\theta \tag{3.42}$$

$$N_{xs} = -x\rho\alpha \sin\theta \tag{3.43}$$

καθώς και

$$E_x h u_x = -v_{sx} p_o a x + \rho x \cos\theta \left[\frac{4x^2 - 3l^2}{24} + v_{sx} a^2\right] \tag{3.44}$$

$$E_x h u_s = \frac{\rho}{8}\left(l^2 - 4x^2\right)\sin\theta\left[\left(\frac{E_x}{G_{xs}} - v_{sx}\right)a + \frac{5l^2 - 4x^2}{48a}\right] \quad (3.45)$$

$$\begin{gathered} E_s h w = p_o a^2 - \rho a^3 \cos\theta - \frac{a}{8}\left(l^2 - 4x^2\right)\rho\cos\theta\left[\frac{E_s}{G_{xs}} - v_{xs}\right] - \\ -\frac{\rho}{8}\cos\theta\left[\frac{5l^2 - 4x^2}{48a} - v_{sx}a\right]\frac{E_s}{E_x}\left(l^2 - 4x^2\right) \end{gathered} \quad (3.46)$$

<u>Παρατηρήσεις</u>: η N_s είναι ανεξάρτητη του x, ενώ οι N_x, N_{xs} μεταβάλλονται στα M, Q της δοκού.

- Περίπτωση μόνο σταθερής εσωτερικής πίεσης p_o

$$\begin{gathered} N_s = p_o a \,,\ N_x = N_{xs} = 0 \\ E_s h w = p_o a^2 \,,\ E_x h u_x = -v_{sx} p_o a x \,,\ u_s = 0 \end{gathered} \quad (3.47)$$

δηλαδή μόνο περιφερειακή ένταση, ομοιόμορφη αύξηση ακτίνας s και γραμμική εκτόνωση κατά μήκος.

- Στην περίπτωση που υπάρχουν πώματα στις άκρες, αυτά δέχονται την δύναμη:

$$P = p_o \pi a^2 - \rho a \cos\theta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - r^2}\, dr = p_o \pi a^2 - \rho a^3 \pi \cos\theta \quad (3.48)$$

Άρα:

$$N_x = \frac{P}{2\pi a} = \frac{P_o a}{2} - \frac{\rho a^2}{4}\cos\theta \quad \sigma\tau o\ x = \pm l/2 \tag{3.49}$$

Οι δυνάμεις αυτές δεν επηρεάζουν τις N_S και M_{XS}, αλλάζουν όμως τη N_X μέσω της f_2.

$$f_2 = \frac{p_o a}{2} - \frac{\rho}{8}\cos\theta\left(2a^2 + l^2\right) \tag{3.50}$$

οπότε

$$N_x = \frac{p_o \alpha}{2} + \frac{\rho}{8}\cos\theta\left(4x^2 - l^2 - 2a^2\right) \tag{3.51}$$

Οι μετακινήσεις επηρεάζονται μέσω της f_2 και f_4.

$$E_x h u_x = p_o a x\left(\frac{1}{2} - v_{sx}\right) + \rho x\cos\theta\left[\frac{4x^2 - 3l^2}{24} - a^2\left(v_{sx} - \frac{1}{4}\right)\right] \tag{3.52}$$

$$E_x h u_s = \frac{\rho}{8}\sin\theta\left\{\left(l^2 - 4x^2\right)\left[\left(\frac{E_x}{G_{sx}} - v_{sx}\right)a + \frac{2a^2 + l^2}{8a}\right] - \frac{l^4 - 16x^4}{48a}\right\} \tag{3.53}$$

$$E_s h w = p_o a^2\left(1 - \frac{v_{xs}}{2}\right) - \rho\alpha^3\cos\theta - \frac{al}{8}v_{xs}\cos\theta\left(ax^2 - 2a^2 - l^2\right) - \\ - \frac{E_s}{E_x}\frac{\rho\cos\theta}{8}\left\{\left(l^2 - 4x^2\right)\left[\left(\frac{E_x}{G_{sx}} - v_{sx}\right)a + \frac{2a^2 + l^2}{8a}\right] - \frac{l^4 - 16x^4}{48a}\right\} \tag{3.54}$$

- Περίπτωση σταθερής εσωτερικής πίεσης p_o

$$
\begin{aligned}
&N_s = p_o a \ , \quad N_x = \frac{p_o a}{2} \ , \ N_{sx} = 0 \\
&E_s h w = p_o a^2 \left(1 - \frac{v_{xs}}{2} \right) , \ E_x h u_x = p_o a x \left(\frac{1}{2} - v_{sx} \right) , \ u_s = 0
\end{aligned} \tag{3.55}
$$

Οι παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιούνται στον υπολογισμό δοχείων πιέσεως σε διατομές μακράν των άκρων, όπου εμφανίζονται και καμπτικές καταπονήσεις.