ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

Καθ. Βλάσης Κουμούσης

Θεμελιώδες Θεώρημα Θεωρίας Επιφανειών

- Αφορά στην ανάπτυξη τριών διαφορετικών εξισώσεων (Gauss-Codazzi) που συνδέουν τις ποσότητες A_1, A_2, R_1και R_2 μίας επιφάνειας. Καθορίζουν το κατά πόσο η αυθαίρετη επιλογή τους συνιστά μία επιφάνεια.

$$A_1 = \sqrt{E} \ , \ A_2 = \sqrt{G} \tag{2.1}$$

- Ξεκινώντας από τη σχέση $n_{,12} = n_{,21}$ καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\frac{1}{R_2} A_{1,2} = \left(\frac{A_1}{R_1} \right)_{,2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{1}{R_1} A_{2,1} = \left(\frac{A_2}{R_2} \right)_{,1} \tag{2.2}$$

γνωστές και ως συνθήκες Codazzi.

- Ξεκινώντας από τη σχέση $t_{1,12} = t_{1,21}$, όπου:

$$t_1 = \frac{r_{,1}}{|r_{,1}|} = \frac{r_{,1}}{A_1} \tag{2.3}$$

καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\left(\frac{1}{A_1} A_{2,1} \right)_{,1} + \left(\frac{1}{A_2} A_{2,1} \right) = -\frac{A_1 A_2}{R_1 R_2} \tag{2.4}$$

γνωστές και ως συνθήκες Gauss.

Συνθήκες Gauss - Codazzi

Αν E, G, L και N είναι δεδομένες συναρτήσεις πραγματικών καμπυλόγραμμων συντεταγμένων α_1 και α_2 και είναι αρκούντως συνεχείς και ικανοποιούν τις συνθήκες Gauss-Codazzi ενώ E>0 και G>0, τότε υπάρχει μία πραγματική επιφάνεια, η οποία έχει ως 1^{η} και 2^{η} θεμελιώδη ιδιομορφή:

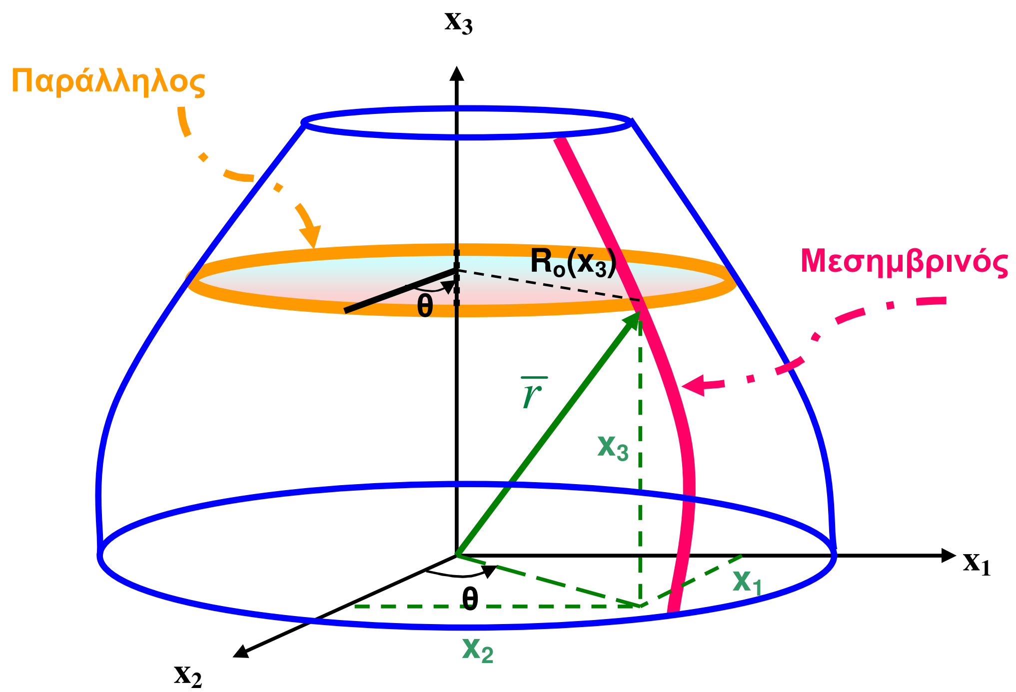
$$I = E\left(da_1\right)^2 + G\left(da_2\right)^2 \ , \quad II = L\left(da_1\right)^2 + N\left(da_2\right)^2 \qquad (2.5)$$

και η επιφάνεια αυτή είναι μονοσήμαντα καθορισμένη εντός της θέσης της στο χώρο. Δηλαδή οι συνθήκες Gauss-Codazzi αντιστοιχούν στις συνθήκες συμβιβαστού για την θεωρία επιφανειών. Αναφέρονται μόνο σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες κύριας καμπυλότητας (F=M=0).

Υπάρχουν για γενικές παραμετρικές καμπύλες αντίστοιχες συνθήκες οι οποίες, όμως, είναι ιδιαίτερα πεπλεγμένες.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Η επιφάνεια εκ περιστροφής μορφώνεται από την περιστροφή μίας επίπεδης καμπύλης περί άξονα που βρίσκεται στο επίπεδό της. Διακρίνονται σε μεσημβρινές και παράλληλες καμπύλες.



$$\bar{r}\left(x_3,\theta\right)=R_o\left(x_3\right)\cos\theta\,\bar{e}_1+R_o\left(x_3\right)\sin\theta\,\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3 \tag{2.6}$$

δηλαδή $a_1 \to x_3$, $a_2 \to \theta$.

$$\begin{aligned} r_{,1} &= R_o'\cos\theta\,\bar{e}_1+R_o'\sin\theta\,\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3 \\ r_{,2} &= -R_o\sin\theta\,\bar{e}_1+R_o\cos\theta\,\bar{e}_2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

όπου ( )' δηλώνει παράγωγο ως προς x3.

$$\begin{aligned} E &= r_{,1}\cdot r_{,1}=1+\left(R_o'\right)^2 \\ F &= 0 \\ G &= r_{,2}\cdot r_{,2}=R_o^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Επίσης:

$$H=\sqrt{EG-F^2}=R_o\sqrt{1+\left(R_o'\right)^2} \tag{2.9}$$

$$A_1=\sqrt{E}=\sqrt{1+\left(R_o'\right)^2}\ ,\quad A_2=\sqrt{G}=R_o \tag{2.10}$$

Η πρώτη θεμελιώδης μορφή της επιφάνειας εκ περιστροφής είναι:

$$\left(ds\right)^2=\left[1+\left(R_o'\right)^2\right]\left(dx_3\right)^2+R_o^2\left(d\theta\right)^2 \tag{2.11}$$

Το κάθετο διάνυσμα στην εκ περιστροφής επιφάνεια είναι:

$$\bar{n}=\left(\frac{r_{,1}\times r_{,2}}{H}\right)=-\frac{R_o}{H}\left[\cos\theta\,\bar{e}_1+\sin\theta\,\bar{e}_2-R_o'\bar{e}_3\right] \tag{2.12}$$

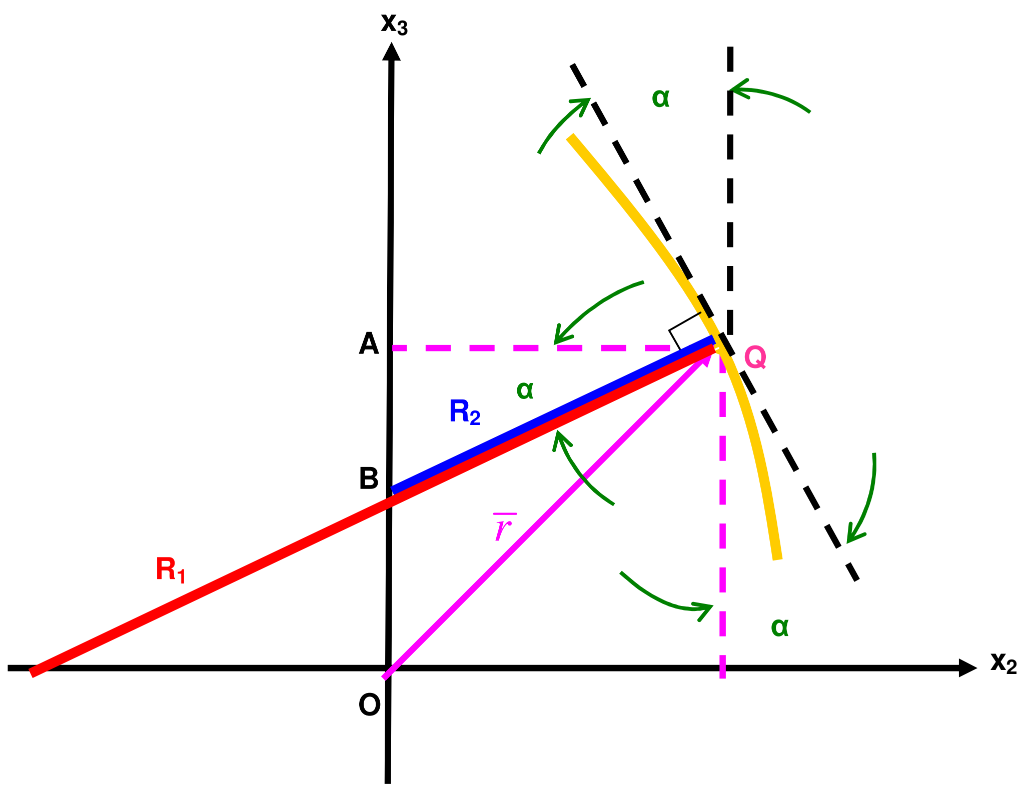
Η δεύτερη θεμελιώδης μορφή δίδεται ως:

$$
\begin{aligned}
L &= -R_o R_o'' / H \\
M &= 0 \\
N &= R_o^2 / H
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Οι ακτίνες κύριας καμπυλότητας είναι:

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{E}{L} = -\frac{\left[1+\left(R_o'\right)^2\right]^{3/2}}{R_o''} \\
R_2 &= \frac{G}{N} = R_o\sqrt{1+\left(R_o'\right)^2}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Παρατηρούμε ότι η R_1 είναι η έκφραση της καμπυλότητας της γεννήτριας καμπύλης.



$$\tan a = R_o'\left(x_3\right)$$
$$AB = AQ\tan a = R_o R_o' \tag{2.15}$$
$$BQ = \sqrt{AQ^2 + AB^2} = R_o\sqrt{1+\left(R'\right)^2} = R_2$$

Για έλεγχο του κατά πόσο ο παραπάνω συνδυασμός των A_1, A_2, R_1, R_2 ορίζουν μία επιφάνεια, γίνεται με βάση την ικανοποίηση των συνθηκών Gauss-Codazzi.

Εναλλακτική Περιγραφή Επιφάνειας εκ Περιστροφής

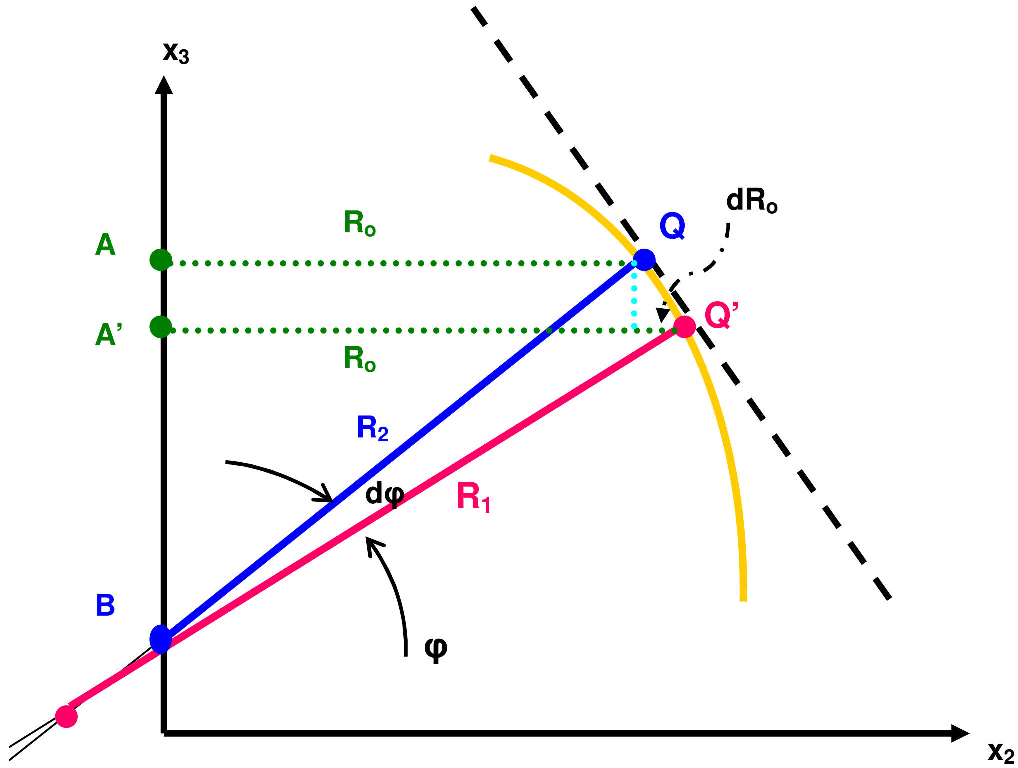
Αυτή μπορεί να γίνει με τη θεώρηση των δύο ανεξάρτητων γωνιών φ και θ, όπου φ η γωνία μεταξύ του άξονα περιστροφής και της κάθετης στην επιφάνεια στο σημείο. Η πρώτη θεμελιώδης μορφή δίδεται:

$$\left(ds\right)^2 = R_1^2\left(d\phi\right)^2 + R_o^2\left(d\theta\right)^2 \tag{2.16}$$

δηλαδή $a_1 \to \phi$, $a_2 \to \theta$, A_1 και A_2.

$$Codazzi: \quad \frac{1}{R_2}A_{1,2} = \left(\frac{A_1}{R_1}\right)_{,2}, \quad \frac{1}{R_1}A_{2,1} = \left(\frac{A_2}{A_2}\right)_{,1} \tag{2.17}$$

$$Gauss \quad : \left(\frac{1}{A_1}A_{2,1}\right)_{,1} + \left(\frac{1}{A_2}A_{1,2}\right)_{,1} = -\frac{A_1A_2}{R_1R_2} \tag{2.18}$$



Η συνθήκη Gauss παρέχει:

$$\begin{aligned}
&\frac{dR_o}{d\phi} = R_1 \cos\phi \\
&BQ = R_2\,,\ \ AQ = R_o = R_2 \sin\phi,\ \ A'Q' - AQ = dR_o \\
&dR_o = QQ' \cos\phi = R_1 d\phi \cos\phi
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Άρα $\dfrac{dR_o}{d\phi} = R_1 \cos\phi$, δηλαδή η συνθήκη Gauss ικανοποιείται.

Βασικές Εξισώσεις Θεωρίας Λεπτών Κελυφών

Παραδοχές (Love):

(1) Λεπτό κέλυφος

(2) Μικρές παραμορφώσεις

(3) Εγκάρσια τάση (κάθετη στη μέση επιφάνεια) αμελητέα

(4) Κάθετες στην επιφάνεια αναφοράς παραμένουν κάθετες και μετά την παραμόρφωση με αμετάβλητο μήκος

Νόμος Hooke: Ελαστικά υλικά – Γενικές σχέσεις

Κατά τις γραμμές κύριας καμπυλότητας ισχύει:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{1n}}{E_n}\sigma_n + a_{t1}T \\
\varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{2n}}{E_n}\sigma_n + a_{t2}T \\
\varepsilon_n &= \frac{\sigma_n}{E_n} - \frac{\nu_{n1}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{2n}}{E_2}\sigma_2 + a_{tn}T \\
\gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}},\ \ \gamma_{1n} = \frac{\tau_{1n}}{G_{1n}},\ \ \gamma_{2n} = \frac{\tau_{2n}}{G_{2n}}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

- σ_1, σ_2, σ_n είναι οι ορθές τάσεις κατά τις τρεις κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις και ε_1, ε_2, ε_n οι αντίστοιχες παραμορφώσεις
- τ_{1n}, τ_{2n}, τ_{12} είναι οι διατμητικές τάσεις και γ_{12}, γ_{1n}, γ_{2n} οι παραμορφώσεις
- T η θερμοκρασία και α_{t1}, α_{t2}, α_{tn} οι συντελεστές γραμμικής διαστολής ανά διεύθυνση
- E, G, ν οι ελαστικές σταθερές ανά διεύθυνση

Ισχύει:

$$\frac{\nu_{1n}}{E_n} = \frac{\nu_{n1}}{E_1},\ \ \frac{\nu_{2n}}{E_n} = \frac{\nu_{n2}}{E_1},\ \ \frac{\nu_{12}}{E_2} = \frac{\nu_{21}}{E_1} \tag{2.21}$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει η παρακάτω έκφραση:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E_n}\left[\sigma_n - v_{2n}\sigma_2 - v_{1n}\sigma_1\right] + a_{tn}T \tag{2.22}$$

Η 4η παραδοχή συνεπάγεται:

$$\varepsilon_n = \gamma_{1n} = \gamma_{2n} = 0 \;\; \acute{\alpha}\rho\alpha \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \tau_{1n} = \tau_{2n} = 0 \tag{2.23}$$

Η 3η παραδοχή συνεπάγεται:

$$\sigma_n = 0 \tag{2.24}$$

Με βάση τα παραπάνω οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων καταλήγουν στις εξής:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_2 + a_{t1}T \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_1 + a_{t2}T \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Η 4η παραδοχή επιβάλλει τη γραμμική κατανομή των τάσεων κατά το πάχος του κελύφους. Επιτρέπει, επίσης, όπως και στις δοκούς, την συσχέτιση με μια επιφάνεια αναφοράς που συνήθως είναι η μέση επιφάνεια. Έτσι, η θέση κάθε σημείου στο χώρο που καταλαμβάνει το κέλυφος καθορίζεται με βάση το παρακάτω διάνυσμα θέσης $\overline{R}$ ως εξής:

$$\overline{R}\left(a_1, a_2, \xi\right) = \overline{r}\left(a_1, a_2\right) + \xi\overline{n}\left(a_1, a_2\right) \tag{2.26}$$

όπου τα α_1 και α_2 κείνται εντός ορίων:

$$a_1^o \le \alpha_1 \le a_1^1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; a_2^o \le \alpha_2 \le a_2^1 \tag{2.27}$$

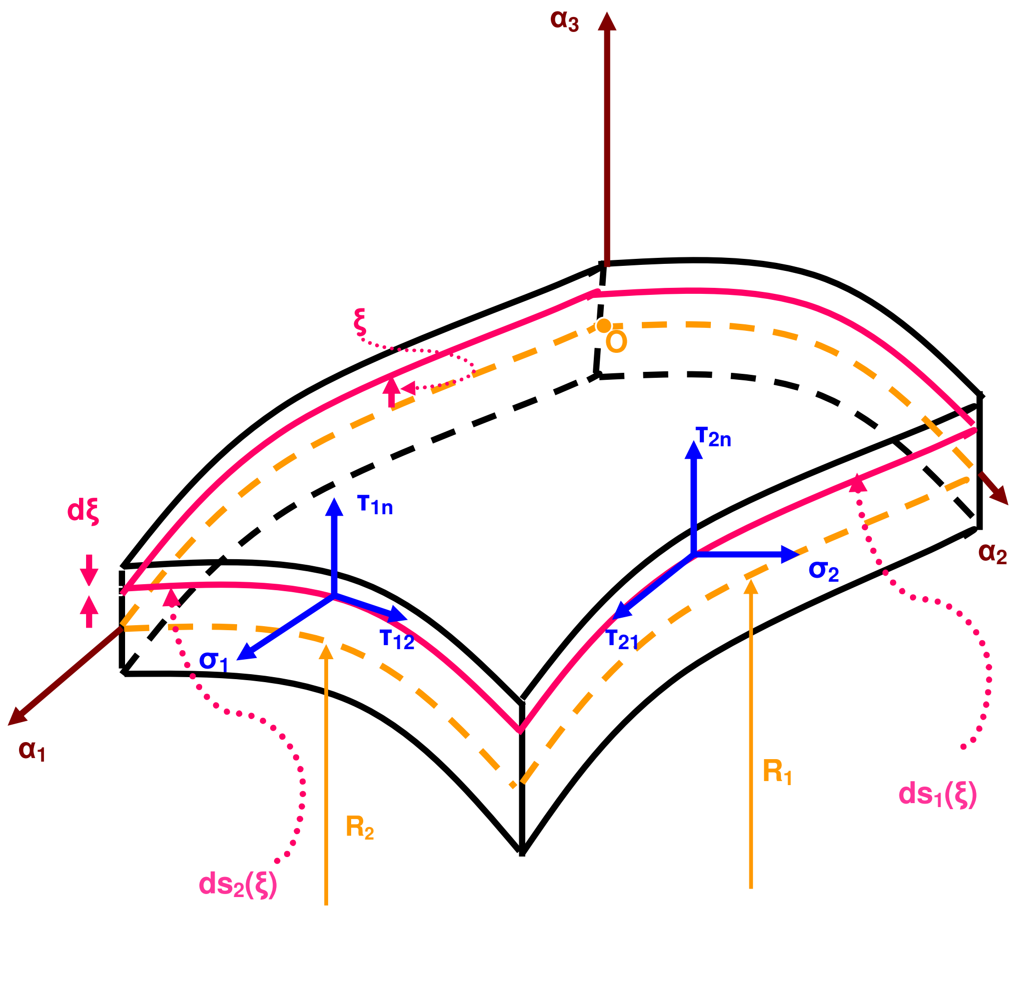
όπου $\overline{r}$ το διάνυσμα θέσης στη μέση επιφάνεια αναφοράς και $\overline{n}$ το κάθετο διάνυσμα στο σημείο αναφοράς και του σημείου από το αντίστοιχο σημείο στην επιφάνεια αναφοράς.

Το μέγεθος ενός διαφορετικού μήκους ορίζεται ως:

$$\left(ds\right)^2 = dR \cdot dR = \left(dr + \xi dn + nd\xi\right) \cdot \left(dr + \xi dn + nd\xi\right) \qquad (2.28)$$

από όπου προκύπτει :

$$\left(ds\right)^2 = A_1^2 \left(1 + \frac{\xi}{R_1}\right)^2 \left(da_1\right)^2 + A_2^2 \left(1 + \frac{\xi}{R_2}\right)^2 \left(da_2\right)^2 \qquad (2.29)$$



Οι συνθήκες Codazzi για μία τέτοια επιφάνεια είναι:

$$
\begin{aligned}
\left[A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)\right]_{,2} &= \left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)A_{1,2} \\
\left[A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)\right]_{,1} &= \left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)A_{2,1}
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

Ισχύει:

$$
\begin{aligned}
ds_1(\xi) &= A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)da_1 \\
ds_2(\xi) &= A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)da_2
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

και

$$
\begin{aligned}
dF_1(\xi) &= A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)da_1 d\xi \\
dF_2(\xi) &= A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)da_2 d\xi
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

Σχέσεις Παραμορφώσεων-Μετακινήσεων

Το διάνυσμα των μετακινήσεων ορίζεται ως:

$$
\overline{U}(a_1,a_2,\xi) = U_1(a_1,a_2,\xi)\overline{t_1} + U_2(a_1,a_2,\xi)\overline{t_2} + W(a_1,a_2,\xi)\overline{n}
\tag{2.33}
$$

Από την Μαθηματική Θεωρία Ελαστικότητας (*Socolnikoff, I.S. “Mathematical Theory of Elasticity”, Mc Graw Hill*) προκύπτει:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}}\right) + \frac{1}{2g_i}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial g_i}{\partial a_k}\frac{u_k}{\sqrt{g_k}}, \quad i = 1,2,3$$
$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}}\left[g_i \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}}\right) + g_i \frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{u_j}{\sqrt{g_j}}\right)\right] \tag{2.34}$$

Γενικά για τα κελύφη ισχύει:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1,\ a_2 = a_2,\ a_3 = \xi \\ u_1 &= U_1,\ u_2 = U_2,\ u_3 = W \end{aligned} \tag{2.35}$$

και

$$g_1 = A_1^2\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)^2 \quad g_2 = A_2^2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)^2 \quad g_3 = 1 \tag{2.36}$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)}\left(\frac{\partial U_1}{\partial a_1} + \frac{U_2}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2} + \frac{A_1 W}{R_1}\right) \tag{2.37}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)}\left(\frac{\partial U_2}{\partial a_2} + \frac{U_1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial a_1} + \frac{A_2 W}{R_2}\right) \tag{2.38}$$

$$\varepsilon_n = \frac{\partial W}{\partial \xi} \tag{2.39}$$

$$\gamma_{1n} = \frac{1}{A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)}\frac{\partial W}{\partial a_1} + A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{U_1}{A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)}\right] \tag{2.40}$$

$$\gamma_{2n} = \frac{1}{A_1\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)}\frac{\partial W}{\partial a_2} + A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{U_2}{A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)}\right] \tag{2.41}$$

$$\gamma_{12} = \frac{A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)}{A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)}\frac{\partial}{\partial a_1}\left[\frac{U_2}{A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)}\right] + \frac{A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)}{A_2\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)}\frac{\partial}{\partial a_2}\left[\frac{U_1}{A_1\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)}\right] \tag{2.42}$$

Οι γενικές σχέσεις μετά από τη θεώρηση των παραδοχών Love γίνονται:

$$\begin{aligned} U_1\left(a_1,a_2,\xi\right) &= u_1\left(a_1,a_2\right) + \xi u_1'\left(a_1,a_2,0\right) \\ U_2\left(a_1,a_2,\xi\right) &= u_2\left(a_1,a_2\right) + \xi u_2'\left(a_1,a_2,0\right) \\ W\left(a_1,a_2,\xi\right) &= W\left(a_1,a_2\right) \end{aligned} \tag{2.43}$$

όπου ( )' δηλώνει παράγωγο ως προς ξ. Σημειώνεται ότι:

$$\varepsilon_n = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \gamma_{1n} = \gamma_{2n} = 0 \tag{2.44}$$

Αντικαθιστώντας στις εκφράσεις των διατμητικών παραμορφώσεων προκύπτει:

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{u_1}{R_1} - \frac{1}{A_1}\frac{\partial W}{\partial a_1} \\ u_2' &= \frac{u_2}{R_2} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial W}{\partial a_2} \end{aligned} \tag{2.45}$$

Τέλος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ξ/R << 1 και να αμελήσουμε τον όρο από τις εκφράσεις. Προκύπτει έτσι:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial a_1}\left(u_1 + \xi u_1'\right) + \frac{u_2 + \xi u_2'}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2} + \frac{W}{R_1} \\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial a_2}\left(u_2 + \xi u_2'\right) + \frac{u_1 + \xi u_1'}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a_1} + \frac{W}{R_2} \\
\gamma_{12} &= \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{u_2 + \xi u_2'}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{u_1 + \xi u_1'}{A_1}\right)
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν εναλλακτικά να εκφραστούν:

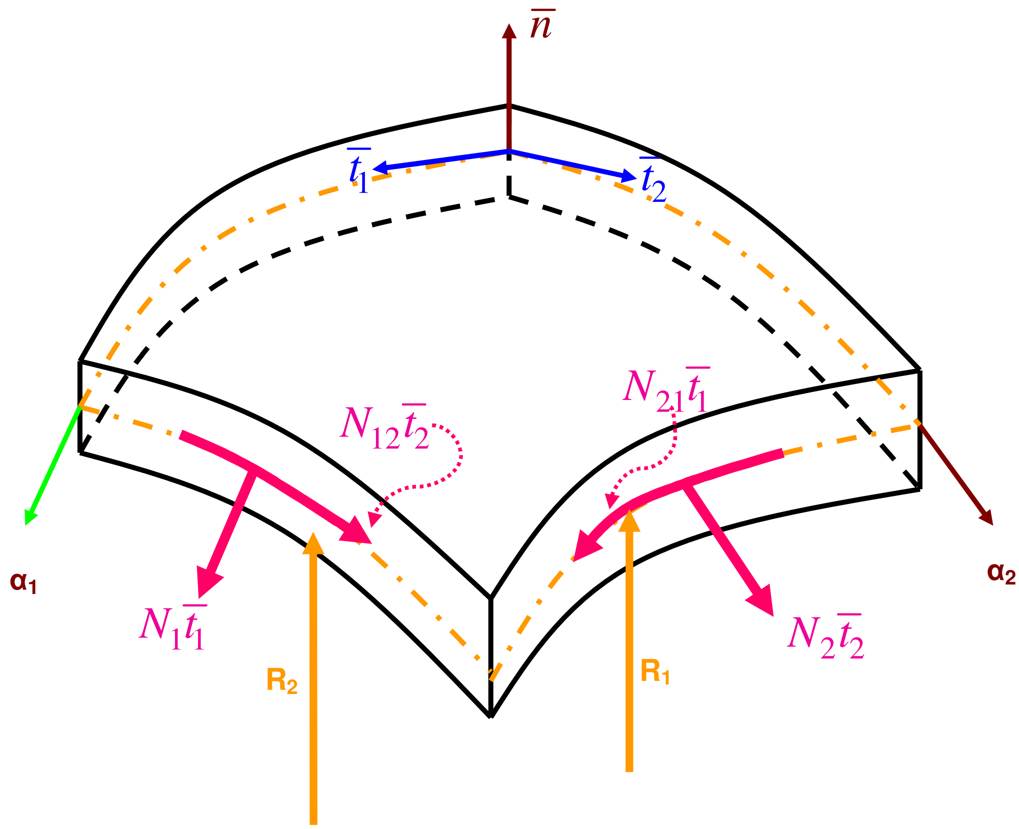
$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^o + \xi\kappa_1 \\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_2^o + \xi\kappa_2 \\
\gamma_{12} &= \gamma_{12}^o + \xi\tau
\end{aligned} \tag{2.47}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^o &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial a_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2} + \frac{W}{R_1} \\
\varepsilon_2^o &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial a_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a_1} + \frac{W}{R_2} \\
\gamma_{12}^o &= \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) \\
\kappa_1 &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1'}{\partial a_1} + \frac{u_2'}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial a_2} \\
\kappa_2 &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2'}{\partial a_2} + \frac{u_1'}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial a_1} \\
\tau &= \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{u_2'}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{u_1'}{A_1}\right)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Εντατικά Μεγέθη – Γενικές Σχέσεις

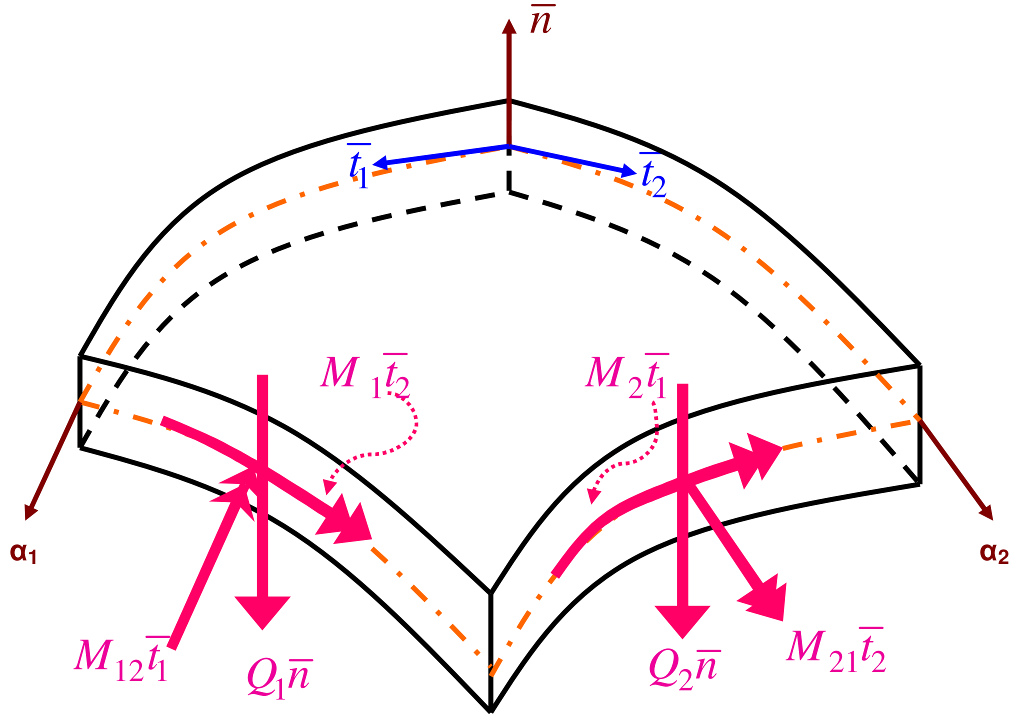
Μεμβρανικά



$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \int_\xi \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \left(1 + \xi / R_2\right) d\xi \tag{2.49}$$

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ N_{21} \end{Bmatrix} = \int_\xi \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} \left(1 + \xi / R_1\right) d\xi \tag{2.50}$$

Καμπτικά



$$Q_1 = \int_\xi \tau_{1n}\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)d\xi \tag{2.51}$$

$$Q_2 = \int_\xi \tau_{2n}\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)d\xi \tag{2.52}$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \int_\xi \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}\left(1+\frac{\xi}{R_2}\right)\xi d\xi \tag{2.53}$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \int_\xi \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}\left(1+\frac{\xi}{R_1}\right)\xi d\xi \tag{2.54}$$

Εξισώσεις Κίνησης - Γενικές

$$\frac{\partial N_1 A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial N_{21} A_1}{\partial a_2} + N_{12}\frac{\partial A_1}{\partial a_2} - N_2\frac{\partial A_2}{\partial a_1} + A_1 A_2\left(\frac{Q_1}{R_1} + q_1\right) = A_1 A_2 \rho h \ddot{U}_1$$

$$\frac{\partial N_{12} A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial N_2 A_1}{\partial a_2} + N_{21}\frac{\partial A_2}{\partial a_1} - N_1\frac{\partial A_1}{\partial a_2} + A_1 A_2\left(\frac{Q_2}{R_2} + q_2\right) = A_1 A_2 \rho h \ddot{U}_2$$

$$\frac{\partial Q_1 A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial Q_2 A_1}{\partial a_2} - \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2}\right) A_1 A_2 - q_n A_1 A_2 = A_1 A_2 \rho h \ddot{W} \qquad (2.55)$$

$$\frac{\partial M_1 A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial M_{21} A_1}{\partial a_2} + M_{12}\frac{\partial A_1}{\partial a_2} - M_2\frac{\partial A_2}{\partial a_1} - Q_1 A_1 A_2 = 0$$

$$\frac{\partial M_{12} A_2}{\partial a_1} + \frac{\partial M_2 A_1}{\partial a_2} + M_{21}\frac{\partial A_2}{\partial a_1} - M_1\frac{\partial A_1}{\partial a_2} - Q_2 A_1 A_2 = 0$$

Οι συνοριακές συνθήκες προκύπτουν με βάση το Λογισμό των μεταβολών.