ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ & ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΕΛΥΦΩΝ

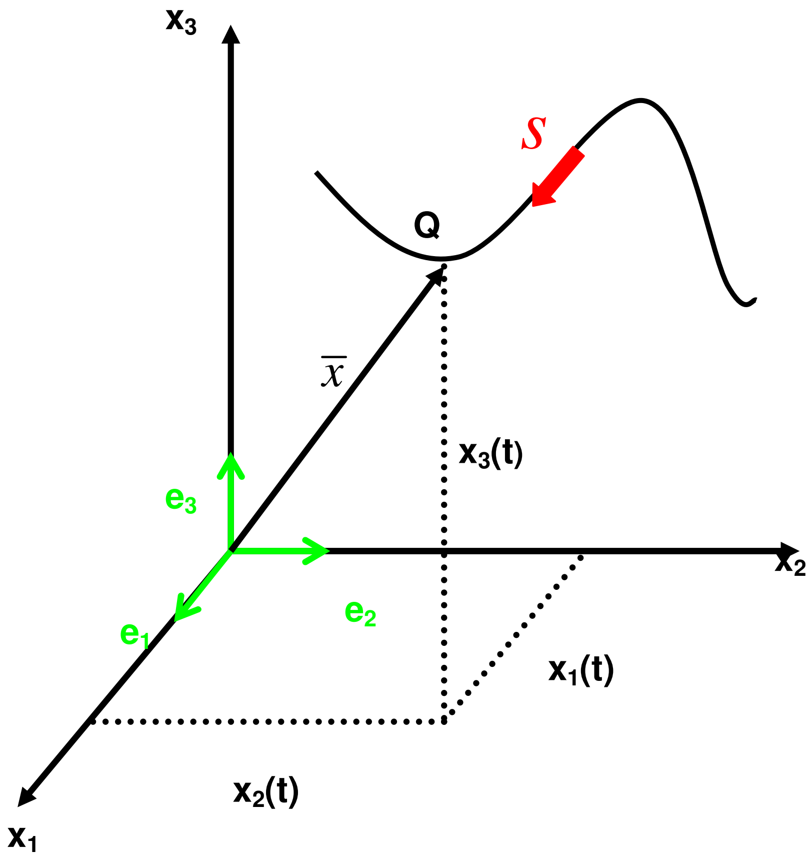
Καθ. Βλάσης Κουμούσης

Θεωρία Κελυφών

Βασικές αρχές (διαφορική γεωμετρία)

- Καμπύλη στο χώρο
- Μοναδιαίο Εφαπτομενικό Διάνυσμα
- Κύριο Επίπεδο (osculating plane)
- Καμπυλότητα

Βασικές αρχές (διαφορική γεωμετρία)



1) Καμπύλη στο χώρο (παραμετρική διατύπωση)

$$\overline{x} = x_1(t)\overline{e}_1 + x_2(t)\overline{e}_2 + x_3(t)\overline{e}_3 \qquad (1.1)$$

2) Μοναδιαίο Εφαπτομενικό Διάνυσμα

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{ds} = \frac{dx_1}{ds}e_1 + \frac{dx_2}{ds}e_2 + \frac{dx_3}{ds}e_3 \\ &\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} = \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{ds}\right)^2 \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Ισχύει:

$$\left(ds\right)^2 = \left(dx_1\right)^2 + \left(dx_2\right)^2 + \left(dx_3\right)^2 \qquad (1.3)$$

Άρα:

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} = 1 \qquad (1.4)$$

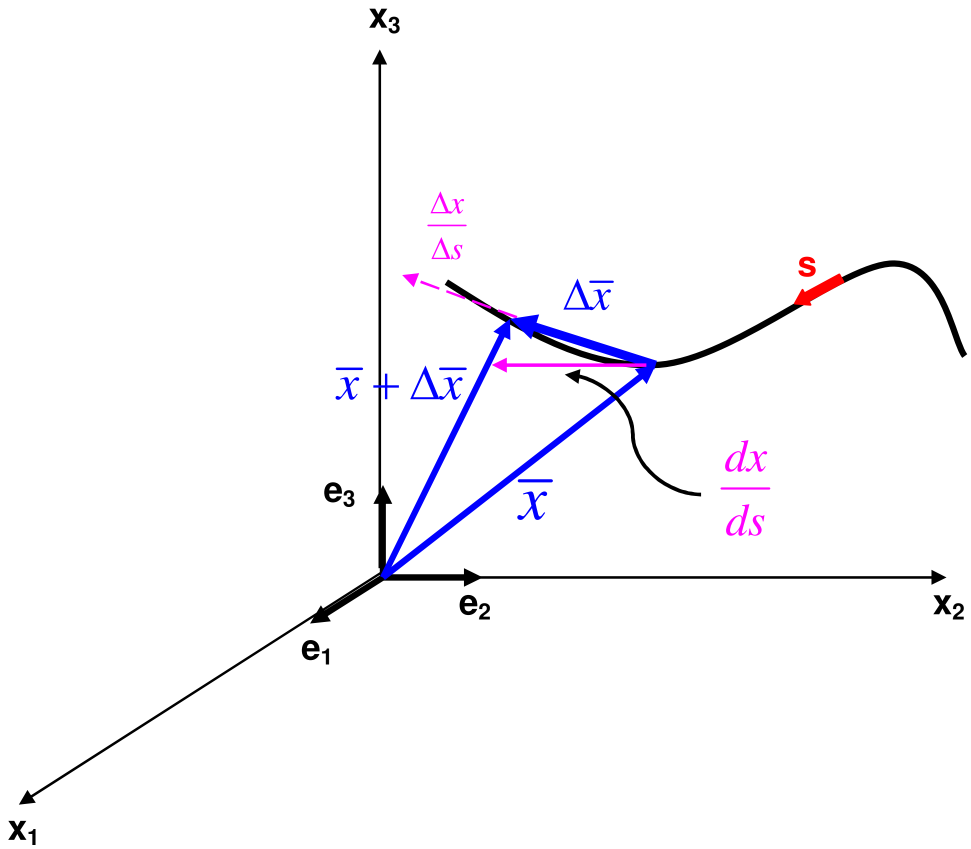
δηλαδή $\frac{dx}{ds}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

$$t = \frac{dx}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta s} \qquad (1.5)$$

Επίσης:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad (1.6)$$

είναι εφαπτομενικό διάνυσμα, αλλά όχι κατ’ ανάγκη μοναδιαίο.



3) Κύριο Επίπεδο (osculating plane)

- Η οριακή θέση ενός επιπέδου που διέρχεται από τρία συνεχόμενα σημεία της καμπύλης, καθώς τα δύο πλησιάζουν το τρίτο, ορίζουν το κύριο επίπεδο στη συγκεκριμένη θέση

- Κάθε σημείο του κυρίου επιπέδου ορίζει με ένα σημείο x της καμπύλης ένα διάνυσμα (X-x), το οποίο βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με το εφαπτομενικό διάνυσμα και το διάνυσμα της μεταβολής του

Το κύριο επίπεδο ορίζεται ως:

$$(X - x) \cdot \left[\left(\dot{x} \right) \times \left(\ddot{x} \right) \right] = 0 \tag{1.7}$$

Έτσι, μπορεί να οριστεί το κύριο κάθετο διάνυσμα σε ένα σημείο της καμπύλης ως το διάνυσμα που βρίσκεται στο κύριο επίπεδο και είναι κάθετο στο εφαπτομενικό διάνυσμα t.

4) Καμπυλότητα

$$t \cdot t = 1 \text{ και άρα } \frac{d}{ds}\left(t \cdot t \right) = 2t \cdot t' = 0$$

όπου ( )' δηλώνει την παράγωγο ως προς *s*. Προκύπτει έτσι ότι το *t'* είναι κάθετο στο *t*. Επίσης:

$$\begin{aligned} t &= \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \dot{x}t' \\ t' &= \dot{x}t'' + \ddot{x}\left(t' \right)^2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

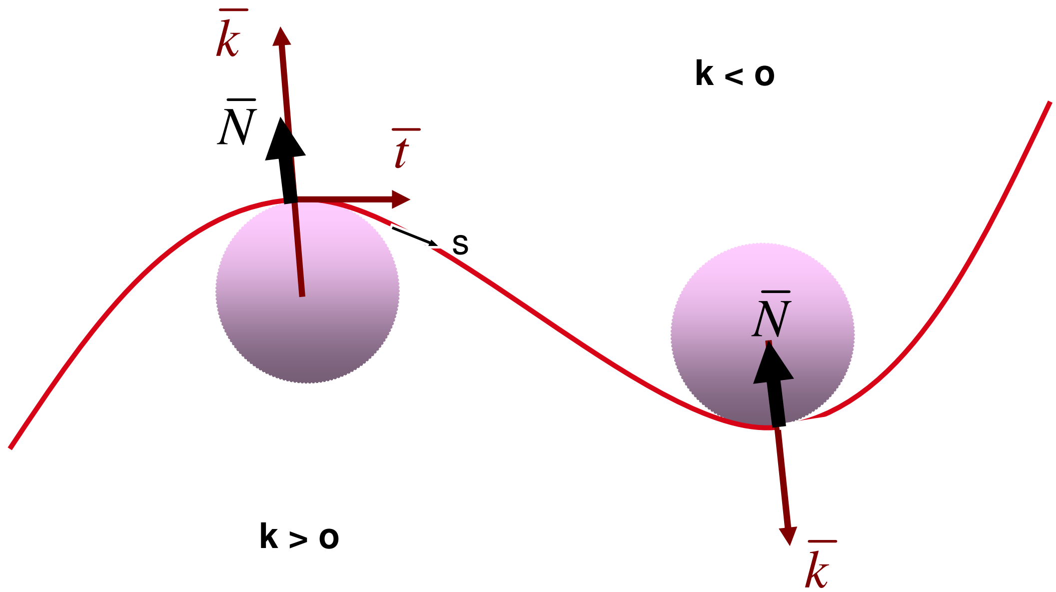
που δηλώνει ότι το διάνυσμα *t'* κείται στο επίπεδο των διανυσμάτων $\dot{x}$ και $\ddot{x}$ δηλαδή στο κύριο επίπεδο.

Εφόσον το διάνυσμα *t'* είναι κάθετο του t είναι και παράλληλο στην κάθετη διεύθυνση και στο αντίστοιχο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\overline{N}$, δηλαδή:

$$\overline{t'} = \overline{k} = k\overline{N} \tag{1.9}$$

όπου $\overline{k}$ ορίζεται ως το διάνυσμα της καμπυλότητας και *k=1/R* η καμπυλότητα που αντιστοιχεί στην ακτίνα καμπυλότητας *R*, που είναι η ακτίνα ενός κύκλου στο κύριο επίπεδο που διέρχεται από τρία γειτονικά σημεία της καμπύλης.

Η κατεύθυνση του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Επιλέγεται ως θετική η δεξιόστροφη.

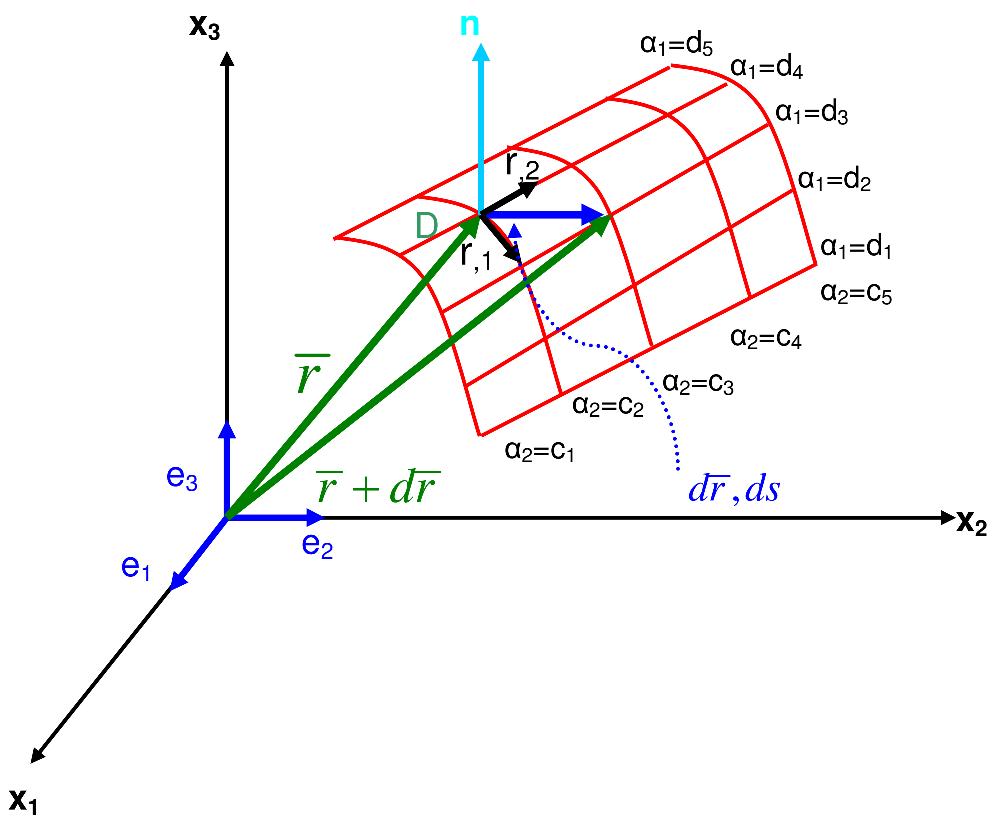

$\overline{k}$
k < o
$\overline{N}$
$\overline{t}$
s
$\overline{N}$
k > o
$\overline{k}$

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

Κάθε επιφάνεια S μπορεί να οριστεί σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων ως:

$$x_1 = f_1(\alpha_1,\alpha_2),\ \ x_2 = f_2(\alpha_1,\alpha_2),\ \ x_3 = f_3(\alpha_1,\alpha_2) \tag{1.10}$$

όπου f_i, i = 1,2,3 συναρτήσεις (μονότιμες) των παραμέτρων α_1 και α_2



$$\overline{r}(a_{1,}a_2) = f_1(a_1,a_2)\overline{e}_1 + f_2(a_1,a_2)\overline{e}_2 + f_3(a_1,a_2)\overline{e}_3 \tag{1.11}$$

$$dr = r_{,1}\, da_1 + r_{,2}\, da_2 \tag{1.12}$$

όπου $r_{,i} = \dfrac{\partial r}{\partial a_i},\ \ i = 1,2$

1η Θεμελιώδης Μορφή:

$$\begin{aligned}&\left(ds\right)^2 = dr\cdot dr = E\left(da_1\right)^2 + 2F\,da_1\,da_2 + G\left(da_2\right)^2\\&\textit{οπου}\\&E = r_{,1}\cdot r_{,1},\; F = r_{,1}\cdot r_{,2},\; G = r_{,2}\cdot r_{,2}\end{aligned} \tag{1.13}$$

Κατά μήκος των παραμετρικών καμπυλών ισχύει:

$$\begin{aligned}ds_1 &= \sqrt{E}\,da_1\; - \textit{καμπύλες με σταθερό}\; a_2\\ ds_2 &= \sqrt{G}\,da_2 - \textit{καμπύλες με σταθερό}\; a_1\end{aligned} \tag{1.14}$$

Όταν οι παραμετρικές καμπύλες τέμνονται κάθετα, τότε F=0. Άρα:

$$\begin{aligned}&\left(ds\right)^2 = A_1^2\left(da_1\right)^2 + A_2^2\left(da_2\right)^2\\&\textit{όπου}\\&A_1 = \sqrt{E},\; A_2 = \sqrt{G},\; \textit{και}\; F = 0\end{aligned} \tag{1.15}$$

Κάθετο Διάνυσμα

- Σε κάθε σημείο P αντιστοιχεί ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα *n(α1,α2)* που είναι κάθετο στα διανύσματα *r,1* και *r,2*, τα οποία ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο P

$$n(a_1,a_2) = \frac{\left(r_{,1}\times r_{,2}\right)}{\left|r_{,1}\times r_{,2}\right|} \tag{1.16}$$

- Από τον διανυσματικό λογισμό είναι γνωστό ότι:

$$\begin{aligned}&\left|r_{,1}\times r_{,2}\right| = \left|r_{,1}\right|\left|r_{,2}\right|\sin\theta\\&\textit{και}\\&r_{,1}\cdot r_{,2} = \left|r_{,1}\right|\left|r_{,2}\right|\cos\theta\end{aligned} \tag{1.17}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων *r,1* και *r,2*

$$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \sin\theta = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}} \tag{1.18}$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha \;\; n(a_1, a_2) = \frac{r_{,1} \times r_{,2}}{H}, \; H = \sqrt{EG - F^2} \tag{1.19}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $H \neq 0$.

<u>Παρατήρηση</u>:

Το κάθετο διάνυσμα μίας καμπύλης της επιφάνειας δεν συμπίπτει απαραίτητα με το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας στο ίδιο σημείο, δηλαδή: γενικά $N \cdot n \neq 1$

<u>Σύμβαση</u>:

Το κάθετο διάνυσμα n θεωρείται θετικό, όταν δείχνει από το κοίλο προς το κυρτό χωρίο. Αυτό βεβαίως απαιτεί τον κατάλληλο προσανατολισμό των παραμετρικών καμπύλων.

Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή

Το διάνυσμα της καμπυλότητας δίδεται ως

$$K = \frac{dt}{ds} = K_n + K_t \tag{1.20}$$

και διαχωρίζεται σε δύο συνιστώσες: την κάθετη και την εφαπτομενική K_n και K_t, αντίστοιχα

Το κάθετο διάνυσμα παρουσιάζει το κύριο ενδιαφέρον:

$$\bar{K}_n = -K_n \bar{n} \tag{1.21}$$

τα διανύσματα n και t είναι κάθετα, δηλαδή *n* t =0* .

$$
\begin{aligned}
&\frac{dn}{ds}\cdot t=-n\cdot\frac{dt}{ds}\\
&-\left(K_n\cdot\bar{n}\right)=\bar{K}_n\\
&\bar{n}\cdot\frac{d\bar{t}}{ds}=\bar{n}\cdot\bar{K}_n\\
&K_n=\frac{d\bar{r}\cdot d\bar{n}}{d\bar{r}\cdot d\bar{r}}\quad\left(\left(ds\right)^2=d\bar{r}\cdot d\bar{r}\right)
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

Επίσης:

$$
\begin{aligned}
d\bar{n}&=n_{,1}da_1+n_{,2}da_2\\
d\bar{r}&=r_{,1}da_1+r_{,2}da_2
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Έτσι:

$$
K_n=\frac{II}{I}=\frac{L\left(da_1\right)^2+2Mda_1da_2+N\left(da_2\right)^2}{E\left(da_1\right)^2+2Fda_1da_2+G\left(da_2\right)^2}
\tag{1.24}
$$

όπου οι επόμενες ποσότητες ορίζουν την δεύτερη θεμελιώδη μορφή

$$
L=r_{,1}\cdot n_{,1},\ 2M=\left(r_{,1}\cdot n_{,2}+r_{,2}\cdot n_{,1}\right),\ N=r_{,2}\cdot n_{,2}
\tag{1.25}
$$

Παραγωγίζοντας τις εκφράσεις $r_{,1}\cdot n=0$ και $r_{,2}\cdot n=0$ λαμβάνουμε:

$$
L=-r_{,11}\cdot n,\ M=-r_{,12}\cdot n,\ N=-r_{,22}\cdot n
\tag{1.26}
$$

$$
\begin{aligned}
&\acute{o}\pi o\upsilon\ r_{,ij}=\frac{\partial^2 r}{\partial a_i\partial a_j},\ i,j=1,2\\
&\kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ \varepsilon\pi\acute{\iota}\sigma\eta\varsigma\ r_{,12}=r_{,21}
\end{aligned}
$$

Επειδή οι ποσότητες *E, F, G, L, M, N* ορίζονται ως εκφράσεις των α_1 και α_2 και είναι σταθερές σε κάθε σημείο προκύπτει ότι η κάθετη καμπυλότητα εξαρτάται μόνο από την διεύθυνση $\dfrac{d\alpha_1}{d\alpha_2}$.

Κύριες Καμπυλότητες

Αναζητούμε τις διευθύνσεις που καθιστούν την κάθετη καμπυλότητα μέγιστη και ελάχιστη $\lambda = \dfrac{da_2}{da_1}$

$$K(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} \tag{1.27}$$

Θέτοντας $\dfrac{dK(\lambda)}{d\lambda} = 0$ λαμβάνουμε

$$\left(E + 2F\lambda + G\lambda^2\right)\left(M + N\lambda\right) - \left(L + 2M\lambda + N\lambda^2\right)\left(F + G\lambda\right) = 0 \tag{1.28}$$

Παρατηρώντας ότι:

$$\begin{aligned} E + 2F\lambda + G\lambda^2 &= \left(E + F\lambda\right) + \lambda\left(F + G\lambda\right) \\ L + 2M\lambda + N\lambda^2 &= \left(L + M\lambda\right) + \lambda\left(M + N\lambda\right) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Βρίσκουμε ότι:

$$\left(E + F\lambda\right)\left(M + N\lambda\right) = \left(F + G\lambda\right)\left(L + M\lambda\right) \tag{1.30}$$

Έτσι :

$$K(\lambda) = \frac{M + N\lambda}{F + G\lambda} = \frac{L + M\lambda}{E + F\lambda} \tag{1.31}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$(MG - NF)\lambda^2 + (LG - NE)\lambda + (LF - ME) = 0 \tag{1.32}$$

από όπου προκύπτει:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(LG - NE) \pm \sqrt{(LG - NE)^2 - 4(MG - NF)(LF - ME)}}{2(MG - NF)} \tag{1.33}$$

Αποδεικνύεται ότι οι δύο καμπυλότητες είναι ορθογώνιες και οι οικογένειες των καμπυλών που αντιστοιχούν σε αυτές είναι και αυτές ορθογώνιες. Αυτές αντιστοιχούν:

$$\frac{da_1}{da_2} = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \frac{da_2}{da_1} = 0 \tag{1.34}$$

$$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \;\; LF - ME = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; MG - NF = 0 \tag{1.35}$$

όμως για ορθογώνιες καμπύλες ισχύει F = 0.

Αποδεικνύεται, επίσης ότι, γενικά: $EG\text{-}F^2 > 0$**,** οπότε για τις ορθογώνιες, ούτε το Ε, ούτε το G μπορούν να μηδενίζονται. Έτσι, το Μ πρέπει να είναι μηδέν.

$$F = M = 0 \tag{1.36}$$

$$o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \;\; K_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}\,, \;\; K_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \tag{1.37}$$

Έτσι, όταν οι καμπύλες κύριας καμπυλότητας χρησιμοποιούνται ως παραμετρικές καμπύλες, απλοποιούνται σημαντικά οι εξισώσεις των κελυφών.