

Biegedrillknicken von Trägern mit einfach-symmetrischen Profilen

Ein wesentliches Problem beim Nachweis von Trägern unter Momentenbeanspruchung stellt die Ermittlung des elastischen kritischen Moments für Biegedrillknicken dar. Im vorliegenden Beitrag werden einfache Formeln zur Ermittlung des kritischen Moments von gabelgelagerten Trägern angegeben. Die Formeln decken viele praktische Anwendungsfälle ab. Die Herleitung erfolgt durch Anwendung der Energiemethode und Lösung nach dem Ritz'schen Verfahren. Für die Verdrehungen werden eingliedrige Ansätze gemacht. Die Ergebnisse werden mit genaueren Lösungen unter Anwendung mehrgliedriger Ansätze verglichen. Der Vergleich zeigt, daß für die üblichen Abmessungen die Genauigkeit innerhalb akzeptabler Grenzen bleibt.

Lateral torsional buckling of girders with monosymmetric cross-sections. The determination of the critical moment for lateral torsional buckling constitutes a main design issue for steel girders subjected to bending moments. This paper presents simple formulae for the estimation of the critical moment for simply supported girders subjected to end moments and transverse loading. The formulae cover a wide range of practical applications. They are derived by formulation of the relevant energy potential and solution by means of the Ritz method. For the angle of twisting one series terms are considered. The accuracy in comparison with more elaborated solutions by means of more series terms is examined. The comparison shows the adequacy of the proposed method.

1 Einleitung

Biegedrillknicken stellt eine wichtige Versagensart für Biegeträger aus offenen Querschnitten, insbesondere wenn die seitliche Verformungen oder die Verdrehungen nicht durch konstruktive Maßnahmen behindert werden. Der übliche Nachweisvorgang wird, wie bei den meisten Stabilitätsproblemen, in fünf Schritten ausgeführt und wird für Träger, die durch Biegemomente um die starke Achse beansprucht werden, in Tabelle 1 zusammengefaßt [1]. Ähnlich wird bei Stäben, die zusätzlich durch Normalkräfte und eventuelle Biegemomente um die schwache Achse beansprucht werden, vorgegangen, wobei der Nachweis über geeignete Interaktionsbeziehungen, die das Grenzmoment für Biegedrillknicken enthalten, erfolgt.

Tabelle 1 weist darauf hin, daß das wichtigste Nachweisproblem in der Bestimmung des elastischen, kritischen Biegedrillknickmoments M_{cr} , liegt, da die anderen Schritte relativ einfach sind. In praktischen Bemessungssituationen wird das Bauteil zwischen den Auflagern isoliert vom Gesamttragwerk betrachtet. Das kritische Moment wird in diesem Fall für einen einfachen Träger, der durch Querlasten und Endmomente, wie sie aus der globalen Tragwerksberechnung resultieren, ermittelt, unter Berücksichtigung der Lagerungsbedingungen für Torsion und eventuell vorhandenen seitlichen Abstützungen.

Das Eigenwertproblem wird i. d. R. durch Anwendung des Verfahrens von Ritz zur Lösung der Energiegleichungen gelöst. Die Qualität der Lösung hängt im wesentlichen von der Güte des Ansatzes für die Verformungen ab, da die Genauigkeit der Lösung – je mehr der Verformungszustand

Tabelle 1. Schritte zum Nachweis auf Biegedrillknicken von Trägern unter Momentenbeanspruchung um die starke Achse
Table 1. Steps for lateral torsional buckling verifications of girders subjected to major axis bending

Schritt		
1	Elastisches kritisches Moment	M_{cr}
2	Bezogene Schlankheit	$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_R}{M_{cr}}}$
3	Abminderungsbeiwert	χ_{LT} in Abhängigkeit von $\bar{\lambda}_{LT}$ aus einer Knickkurve
4	Beanspruchbarkeit	$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot \frac{M_R}{\gamma_M}$
5	Nachweis	$M_{Sd} \leq M_{b,Rd}$
M_{el} Fließmoment M_{pl} Plastisches Moment M_R M_{pl} oder M_{el} , je nach Querschnittsklasse M_{Sd} maximales Bemessungsmoment innerhalb der Trägerlänge		

des Ansatzes mit der wirklichen Biegedrillknickfigur zusammenfällt – steigt. Durch Anwendung geeigneter Rechenprogramme mit vielen Termen für die Verformungsansätze [2] können recht genaue Lösungen für M_{cr} bestimmt werden. Eine andere Möglichkeit ist die Anwendung geometrisch bzw. geometrisch und stofflich nichtlinearer Berechnungsmethoden unter Berücksichtigung geeigneter Imperfektionen aus der Ebene (Berechnungsmethoden GNIA bzw. GMNIA nach den Bezeichnungen von Eurocode 3), bei denen der Nachweis direkt ohne Ermittlung des kritischen Moments erfolgt.

Trotz der Bereitstellung geeigneter Bemessungsprogramme sind einfache Formeln, die eine Handkalkulation von M_{cr} ermöglichen, unersetzlich für die Praxis. Beispiele einer solchen Notwendigkeit sind Vorentwürfe, Prüfung von Projekten, Fälle, wo keine spezielle Software zur Verfügung steht, erste Abschätzungen der Abmessungen usw. Zu diesem Zweck befinden sich im Anhang G von Eurocode 3 [3] Tabellen für die Parameter, mit deren Hilfe M_{cr} bestimmt werden können. Die Fälle, die durch diese Tabellen abgedeckt werden, sind aber eher begrenzt. Sonst können Tabellen oder Nomogramme aus der Literatur verwendet werden [4], [5], [10].

Im vorliegenden Beitrag werden einfache Formeln zur Bestimmung des elastischen, kritischen Moments für Biegedrillknicken von Trägern mit einfach-symmetrischen Profilen vorgeschlagen. Die Formeln decken viele praktische Situationen ab und können auf einfache Weise in Bemessungsprogrammen für Stahlbauten eingebettet werden. Die Formeln werden mit Hilfe der Energiemethode durch Anwendung des Ritz'schen Verfahrens hergeleitet. Ihre Genauigkeit wird durch Vergleich mit verschärften Lösungsansätzen geprüft.

2 Anwendung der Energiemethode zur Lösung des Problems

Die zweite Variation des Energie-Potentials von biegedrillknickgefährdeten Trägern mit einfach-symmetrischem Profil um die z-Achse kann in folgender Form geschrieben werden [6], [7]:

$$\frac{1}{2} \delta^2 V^T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI_w \cdot (\theta'')^2 + GI_t \cdot (\theta')^2 - \frac{M_y^2}{EI_z} \cdot \theta^2 + M_y \cdot 2 \cdot z_j \cdot \theta'^2 - q \cdot z_g^M \cdot \theta^2 \right] \times dx - \frac{1}{2} \sum P_i \cdot z_g^M \cdot \theta_{(P)}^2 \quad (1)$$

worin (Bild 1):

- θ Drehwinkel des Querschnitts um die Längsachse
- I_w Wölbwiderstand
- I_t Drillwiderstand
- $M_y = M$ Bemessungsmoment um die starke Achse
- z_g^M Abstand des Angriffspunkts der Querbela-stung vom Schubmittelpunkt
- z_M Koordinate des Schubmittelpunkts

$$z_j = z_M - \frac{r}{2}$$

$$r = \frac{\int_A z \cdot (y^2 + z^2) \cdot dA}{I_y}$$

In den obigen Ausdrücken muß auf die korrekte Vorzeichenregelung nach den Bezeichnungen von Bild 1 geachtet werden.

Werte von z_M und r für übliche Querschnitte werden in Tabelle 2 zusammengefaßt [8].

Wesentlich bei dieser Form des Potentials ist, daß hier nur die unbekannte Funktion $\theta(x)$ auftritt. Dadurch

wird bei Anwendung der Energiemethode zur Lösung des Biegedrillknickproblems eine größere Genauigkeit erzielt, als wenn man das Potential durch zwei unbekannte Parameter, den Drehwinkel und die seitliche Verformung, ausdrücken und für beide Funktionen unabhängige Lösungsansätze ansetzen würde [11]. Die Anwendung dieser Form setzt aber voraus, daß die Randbedingungen für beide Parameter gleich sind. Das bedeutet, daß die Behinderung der seitlichen Verformungen zu einer Behinderung der Verdrehungen führen muß, eine Bedingung, die durch die seitliche Abstützung des gedrückten Gurts am besten erreicht wird.

Die Lösung des Biegedrillknickproblems erfolgt mit Hilfe der Energiemethode, bei der das energetische Indifferenzkriterium nach Gl. (2) verwendet wird:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \delta^2 V^T \right) = 0 \quad (2)$$

Bei Anwendung des *Ritz'schen* Verfahrens wird ein Lösungsansatz für die unbekannte Funktion $\theta(x)$ nach Gl. (3) formuliert, der die geometrischen Randbedingungen erfüllt:

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot f_i(x) \quad (3)$$

Dieser Ansatz geht in Verbindung mit Gl. (2) in das gewöhnliche Minimalproblem nach Gl. (4) über:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \delta^2 V^T \right)}{\partial C_1} = 0, \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \delta^2 V^T \right)}{\partial C_2} = 0, \dots, \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \delta^2 V^T \right)}{\partial C_n} = 0 \quad (4)$$

Die Bedingung für Biegedrillknicken ergibt sich durch Nullsetzen der Nennerdeterminante des obigen homogenen Gleichungssystems für die Freiwerte C_i .

Durch geeignete Wahl der Funktionen $f_i(x)$ derart, daß die erste Eigenform für Biegedrillknicken möglichst gut abgebildet wird, können ausreichend genaue Lösungen ermittelt werden. Die Einführung eines zweigliedri-

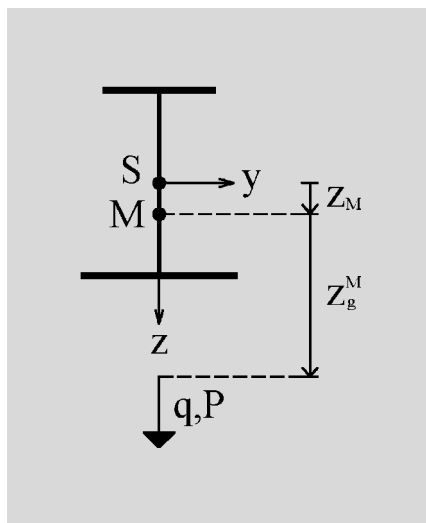


Bild 1. Bezeichnungen für den Querschnitt und die Belastung

Fig. 1. Notation for the cross-section and the loading

Tabelle 2. Parameter zur Bestimmung von z_j für einige Querschnitte

Table 2. Parameters for determining z_j for various cross-sections

Querschnitt	z_M	$r \cdot I_y$
	$\frac{(h - e) \cdot I_{fzu} - e \cdot I_{fzo}}{I_z}$	$z_M \cdot I_z - A_{fo} \cdot e^3 + A_{fu} \cdot (h - e)^3 + \frac{t_w}{4} \cdot [(h - e)^4 - e^4]$
	$e \cdot \left(1 + \frac{A \cdot h^2}{4 \cdot I_z} \right)$	$\frac{h^3 \cdot s \cdot e}{12} + \frac{h^2 \cdot t}{4} \cdot [e^2 - (b - e)^2] + h \cdot s \cdot e^3 + \frac{t}{2} \cdot [e^4 - (b - e)^4]$

gen Ansatzes hat zu befriedigenden Ergebnissen geführt. Einfache Formeln, die – wie sich später zeigt – ausreichend genau sind, können aber mit Hilfe eines eingliedrigen Ansatzes ermittelt werden. Eine solche Näherung führt direkt zur Lösung einer Gleichung mit dem kritischen Moment als Unbekannte.

Im folgenden werden einfache Formeln zur Bestimmung des elastischen, kritischen Biegedrillknickmoments, die viele praktische Bemessungssituationen abdecken, hergeleitet. An den Trägerenden wird Gabellagerung vorausgesetzt. Unter solchen Voraussetzungen kann die Ansatzfunktion für Träger ohne seitliche Abstützungen innerhalb seiner Länge in folgender Form geschrieben werden:

$$\theta(\xi) = C \cdot \sin(\pi\xi), \quad \xi = \frac{x}{\ell} \quad (5a)$$

Für Träger mit $(n - 1)$ seitlichen Zwischenhalterungen in gleichen Abständen läßt sich die Ansatzfunktion schreiben:

$$\theta(\xi) = C \cdot \sin(n\pi\xi), \quad \xi = \frac{x}{\ell} \quad (5b)$$

Die obigen Ansätze erfüllen die Randbedingungen der Gabellagerung ($\theta = \theta'' = 0$) an den Trägerenden $\xi = 0$ und $\xi = 1$.

3 Träger mit konstantem Querschnitt

3.1 Allgemeines

Die Einführung von Gl. (5) in (1) und die Ableitung nach Gl. (4) über den Parameter C führen für Träger unter Gleichlast q zur folgenden Gleichung für das kritische Moment M_{cr} :

$$\frac{EI_w}{\ell^4} k_1 + \frac{GI_t}{\ell^2} k_2 - \frac{M_{cr}^2}{EI_z} k_3 - \frac{M_{cr}}{\ell^2} z_g^M k_4 + \frac{M_{cr}}{\ell^2} z_j k_5 = 0 \quad (6a)$$

mit

$$k_1 = \int_0^1 \theta''^2 d\xi \quad k_2 = \int_0^1 \theta'^2 d\xi \quad k_3 = \int_0^1 \left(\frac{M}{M_{cr}} \right)^2 \theta^2 d\xi$$

$$k_4 = \ell^2 \cdot \int_0^1 \frac{q}{M_{cr}} \theta^2 d\xi \quad k_5 = \int_0^1 2 \cdot \left(\frac{M}{M_{cr}} \right) \cdot \theta'^2 d\xi \quad (6b)$$

Die Lösung der quadratischen Gl. (6a) führt zur Ermittlung des kritischen Moments. Aus den vielen möglichen Formulierungen für M_{cr} wird hier die in Eurocode 3 angegebene Form [3] adoptiert:

Tabelle 3. Werte der Integrale k_i für Träger unter Gleichlast ohne Zwischenabstützungen

Table 3. Values of integrals k_i for girders subjected to uniform loading without intermediate lateral support

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
$\frac{\pi^4}{2}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{1}{7} + \frac{\psi}{4,6} + \frac{\psi^2}{7} - \frac{1+\psi}{2,3\mu_0} + \frac{0,39}{\mu_0^2}$	$-\frac{4}{\mu_0}$	$2 \cdot \pi^2 \cdot H$ $\left(H = \frac{1}{4} + \frac{\psi}{4} - \frac{1}{4,3\mu_0} \right)$

$$M_{cr} = C_1 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{(kl)^2} \times$$

$$\times \left[\sqrt{\frac{I_w}{I_z} + \frac{(kl)^2}{\pi^2} \cdot \frac{GI_t}{EI_z} + (C_2 \cdot z_g^M - C_3 \cdot z_j)^2} - (C_2 \cdot z_g^M - C_3 \cdot z_j) \right] \quad (7)$$

Durch Vergleich der Gln. (6) und (7) können die unbekannten Parameter C_i und k in Abhängigkeit der Integrale k_i ausgedrückt werden. Im einzelnen ist es:

$$C_1 = \frac{k_2}{\sqrt{k_1 \cdot k_3}} \quad C_2 = \frac{k_4}{2 \cdot \sqrt{k_1 \cdot k_3}} \quad C_3 = \frac{k_5}{2 \cdot \sqrt{k_1 \cdot k_3}}$$

$$k = \pi \cdot \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad (8)$$

3.2 Träger unter gleichförmig verteilter Querlast

Betrachtet wird ein Träger zwischen festen Auflagern. An seinen Enden werden die aus der Tragwerksberechnung resultierenden Momente aufgebracht, so wie die direkt wirkende gleichförmig verteilte Querlast (Bild 2). Der Momentenverlauf entlang des Trägers lautet dann:

$$M(\xi) = -M_B \cdot \left[\frac{4}{\mu_0} \cdot (\xi - \xi^2) - \xi - \psi \cdot (1 - \xi) \right] \quad (9a)$$

mit

$$-1 \leq \psi = \frac{M_A}{M_B} \leq 1 \quad (9b)$$

und

$$0 \leq \mu_0 = \frac{-M_B}{q \cdot \ell^2/8} \quad (0 < q) \quad (9c)$$

Aus den obigen Ausdrücken wird ersichtlich, daß durch geeignete Wahl des Parameters μ_0 die Fälle gelenkig gelagerter Einfeldträger bzw. Träger ohne Querlast abgedeckt werden. Im ersten Fall wird ein kleiner (z. B. $\mu_0 = 0,01$), im zweiten Fall ein großer Wert (z. B. $\mu_0 = 1000$) des Parameters gewählt. Es wird vorausgesetzt, daß die Querlast q nach unten in Richtung der positiven z -Achse wirkt, so daß $0 < q$ gilt. Für Sog müssen der Querschnitt und die Belastung umgedreht werden.

Das kritische Moment wird zunächst am Trägerende B mit dem größeren Moment (in Absolutwerten) bestimmt. Dementsprechend ist $M_{cr} = M_B$, und die Funktionen für

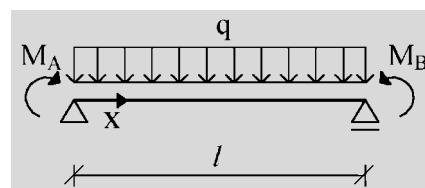
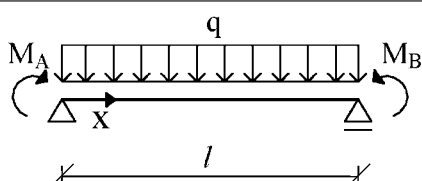
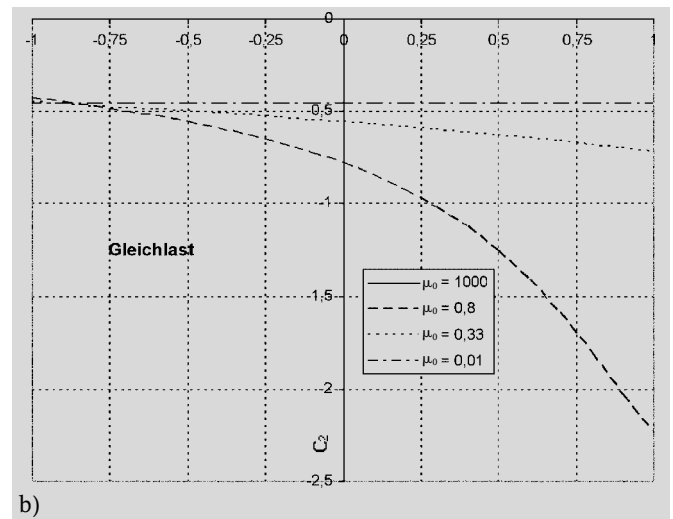
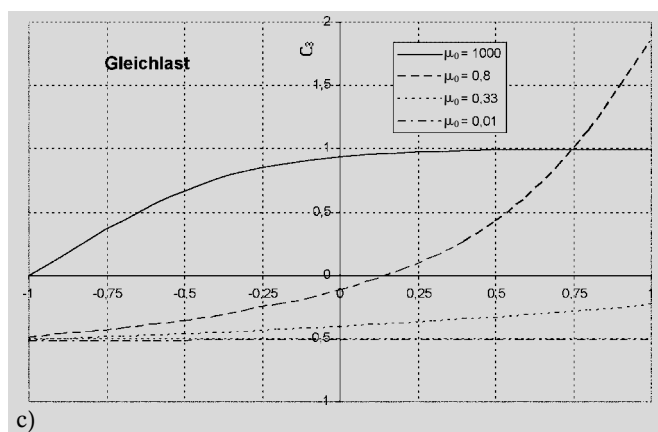
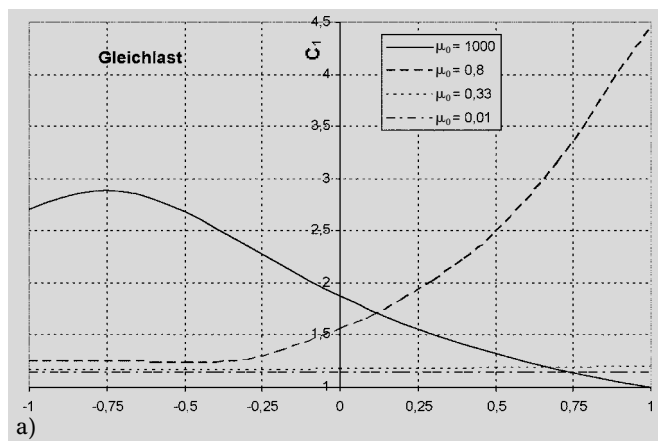


Bild 2. Träger unter Gleichlast
Fig. 2. Girders subjected to uniform loading

Tabelle 4. Parameter zur Bestimmung von $M_{cr,B}$ für Träger unter Gleichlast**Table 4.** Parameters for $M_{cr,B}$ for girders subjected to uniform loading

Anzahl der Zwischenabstützungen	k	C _{1,B}	C ₂	C ₃
0	1	$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot I}$	$-\frac{0,28658}{\mu_0 \cdot \sqrt{I}}$	$\frac{\sqrt{2} \cdot H}{\sqrt{I}}$
	$I = \frac{1}{7} + \frac{\psi}{4,6} + \frac{\psi^2}{7} - \frac{1 + \psi}{2,3\mu_0} + \frac{0,39}{\mu_0^2}$		$H = \frac{1 + \psi}{4} - \frac{1}{4,3\mu_0}$	
1	1/2	$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot I}$	$-\frac{0,0716}{\mu_0 \cdot \sqrt{I}}$	$\frac{\sqrt{2} \cdot 4 \cdot H}{\sqrt{I}}$
	$I = \frac{1}{6,2} + \frac{\psi}{5,6} + \frac{\psi^2}{6,2} - \frac{1 + \psi}{2,8\mu_0} + \frac{0,27}{\mu_0^2}$		$H = \frac{1 + \psi}{4} - \frac{1}{4,3\mu_0}$	
2	1/3	$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot I}$	$-\frac{0,0318}{\mu_0 \cdot \sqrt{I}}$	$\frac{\sqrt{2} \cdot 9 \cdot H}{\sqrt{I}}$
	$I = \frac{1}{6,1} + \frac{\psi}{5,8} + \frac{\psi^2}{6,1} - \frac{1 + \psi}{2,9\mu_0} + \frac{0,27}{\mu_0^2}$		$H = \frac{1 + \psi}{4} - \frac{1}{4,3\mu_0}$	
				

**Bild 3.** Parameter C_i für gleichförmig belastete Träger ohne seitliche Zwischenabstützungen**Fig. 3.** Parameters C_i for girders without intermediate lateral supports subjected to uniform loading

$$\left(\frac{M}{M_{cr}} \right) \text{ und } \frac{q}{M_{cr}}$$

in den Integralen können in Abhängigkeit der Parameter ψ und μ_0 ausgedrückt werden. Bei Anwendung von Gl. (5a) für θ lassen sich die Integrale k_i nach Tabelle 3 schreiben. Die Anwendung von Gl. (8) führt dann zur Bestimmung der Parameter C_1 , C_2 und C_3 für das kritische Moment, die in Tabelle 4, Zeile 2 angegeben werden. In dieser Tabelle wird C_1 als $C_{1,B}$ bezeichnet, um auszudrücken, daß das kritische Moment am Trägerende B ermittelt wird. Der endgültige Wert von C_1 wird nachfolgend angegeben.

Für Träger mit äquidistanten seitlichen Zwischenabstützungen des gedrückten Gurts, so daß die Verdrehung behindert wird, lassen sich die Ansatzfunktionen nach Gl. (5b) schreiben. Die Anwendung des gleichen Vorgangs wie davor führt zur Bestimmung der Parameter für das kritische Moment, die in Tabelle 4, Zeilen 3 und 4 zusammengefaßt werden.

Bis jetzt wurde das kritische Moment am Trägerende B bestimmt. Für den Nachweis auf Biegedrillknicken nach Tabelle 1 muß aber M_{cr} an der Stelle des maximalen Moments in Absolutwerten bestimmt werden. Dieses maximale Moment kann entweder das Auflagermoment bei B oder das maximale Feldmoment sein. Die Stelle des maximalen Feldmoments kann durch die Bedingung $M'(\xi) = 0$, mit M nach Gl. (9a) bestimmt werden zu:

$$\xi_0 = \frac{\psi - 1}{8} \cdot \mu_0 + \frac{1}{2} \quad (10)$$

Der entgültige Wert von C_1 ergibt sich dann aus der Beziehung

$$C_1 = C_{1,B} \cdot \max \left\{ 1, \left| \frac{M(\xi_0)}{M_B} \right| \right\} \quad (11)$$

mit $C_{1,B}$ aus Tabelle 4.

In Bild 3 werden für Träger ohne seitliche Abstützungen die Werte der Parameter C_i für verschiedene Momentenverteilungen angegeben. Man kann sich leicht überzeugen, daß die im Anhang des Eurocode 3 [3] für die entsprechenden Fälle angegebenen Werte mit den hier ermittelten zusammenfallen. Das deutet darauf hin, daß die im Eurocode vorgeschlagenen Werte auch durch eingliedrige Ansätze für die Verdrehung hergeleitet wurden.

3.3 Träger unter konzentrierter Last in der Mitte

Dieser Fall (Bild 4) wird analog mit nur zwei Modifikationen behandelt. Die eine erfolgt durch die Momentenverteilung

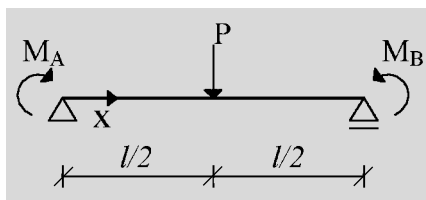


Bild 4. Träger unter Einzellast in Trägermitte

Fig. 4. Girders subjected to concentrated loading at mid-span

$$M(x) = -M_B \cdot \left[\frac{2\xi}{\mu_0} - \xi - \psi \cdot (1 - \xi) \right] \quad \xi \leq \frac{1}{2} \quad (12a)$$

$$M(x) = -M_B \cdot \left[\frac{2 \cdot (1 - \xi)}{\mu_0} - \xi - \psi \cdot (1 - \xi) \right] \quad \xi > \frac{1}{2} \quad (12b)$$

mit

$$-1 \leq \psi = \frac{M_A}{M_B} \leq 1 \quad (12c)$$

und

$$0 \leq \mu_0 = \frac{-M_B}{P \cdot \ell/4} \quad (12d)$$

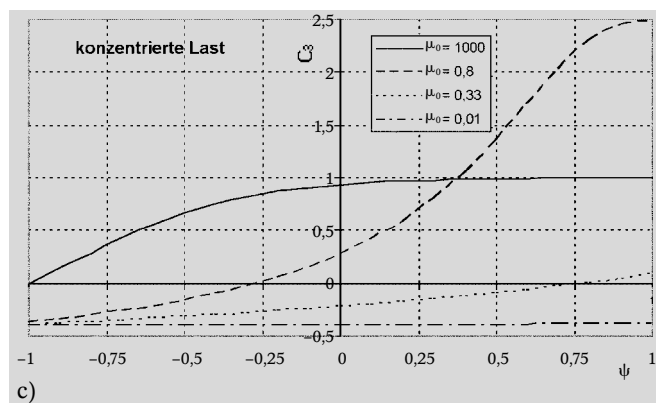
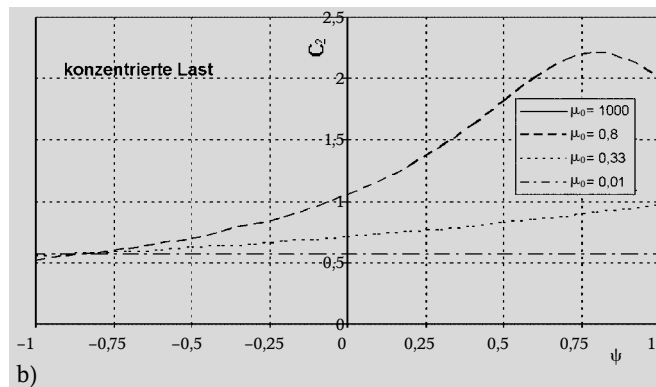
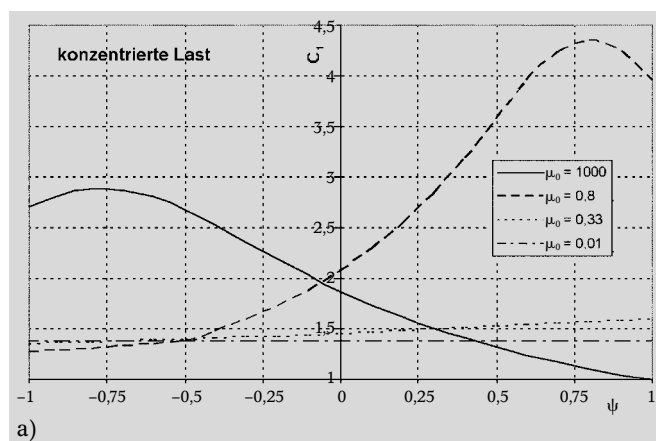
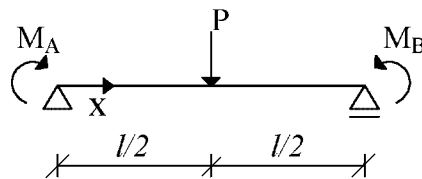


Bild 5. Parameter C_i für Träger unter Einzellast in der Mitte ohne seitliche Zwischenabstützungen

Fig. 5. Parameters C_i for girders without intermediate lateral supports subjected to concentrated loading at mid-span

Tabelle 5. Parameter zur Bestimmung von $M_{cr,B}$ für Träger unter Einzellast in Trägermitte
Table 5. Parameters for $M_{cr,B}$ for girders subjected to concentrated loading at mid-span

Anzahl der Zwischenabstützungen	k	$C_{1,B}$	C_2	C_3
0	1	$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot I}$	$-\frac{0,28658}{\mu_0 \cdot \sqrt{I}}$	$\frac{0,0716 \cdot H}{\sqrt{I}}$
		$I = \frac{1}{7} + \frac{\psi}{4,6} + \frac{\psi^2}{7} - \frac{1+\psi}{2,8\mu_0} + \frac{0,27}{\mu_0^2}$ $H = 4,93 \cdot (1 + \psi) - \frac{2,93}{\mu_0}$		
1	1/2	$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot I}$	0	$\frac{0,35 \cdot H}{\sqrt{I}}$
		$I = \frac{1}{6,25} + \frac{\psi}{5,6} + \frac{\psi^2}{6,2} - \frac{1+\psi}{4\mu_0} + \frac{0,14}{\mu_0^2}$ $H = (1 + \psi) - \frac{1}{\mu_0}$		



Die zweite Modifikation betrifft den Beitrag der direkt wirkenden Belastung, die jetzt durch den letzten Term der Gl. (1) ausgedrückt wird. An der Stelle der Lasteinwirkung ist $\theta(0,5) = C \cdot \sin(\pi/2) = C$. Dementsprechend läßt sich k_4 unter Berücksichtigung von Gl. (12d) schreiben:

$$k_4 = \frac{P \cdot \ell}{M_{cr}} = \frac{4}{\mu_0}$$

Die Parameter für das kritische Moment am Trägerende B werden in Tabelle 5 zusammengefaßt. Hier tritt aber das maximale Feldmoment in der Mitte auf ($\xi_0 = 0,5$), so daß der entgültige Wert von C_1 durch Gl. (13) bestimmt wird:

$$C_1 = C_{1,B} \cdot \max \left\{ 1, \left| \frac{M(0,5)}{M_B} \right| \right\} \quad (13)$$

Bild 5 stellt Werte der Parameter C_i für verschiedene Momentenverteilungen dar.

3.4 Einfeldträger unter zwei gleich konzentrierten Lasten

Dieser Fall (Bild 6) ist nützlich zum Biegedrillknicknachweis von Kranbahnträgern. Die Laststellung, die zum maximalen Moment führt, ist symmetrisch in bezug auf die Trägermitte, wenn

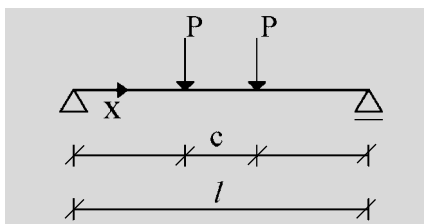


Bild 6. Träger unter zwei gleich konzentrierten Lasten
Fig. 6. Girders subjected to two equal concentrated loads

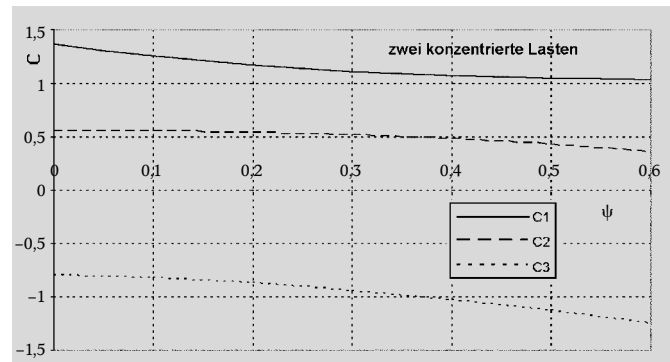


Bild 7. Parameter C_i in Abhängigkeit von γ
Fig. 7. Parameter C_i in dependence of γ

$$\gamma = \frac{c}{\ell} \leq 0,586$$

gilt. Aus der Intergration ergeben sich sin- und cos-Terme des Parameters γ , die durch Polynome angenähert werden können. Unter Anwendung dieser Funktionen können die Parameter der kritischen Momente folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0,97 \cdot \gamma^2 - 1,12 \cdot \gamma + 1,36, & k &= 1, \\ C_2 &= -0,61 \cdot \gamma^2 + 0,04 \cdot \gamma + 0,55, \\ C_3 &= -(0,93 \cdot \gamma^2 + 0,2 \cdot \gamma + 0,8) \end{aligned} \quad (14)$$

Bild 7 zeigt die Werte von C_i in Abhängigkeit von γ .

4 Träger mit veränderlichen Querschnitten

4.1 Lineare Veränderung der Trägerhöhe

Dieser Fall tritt häufig bei geschweißten Rahmenstützen auf (Bild 8a), bei denen die Gurtquerschnitte konstant sind und lediglich die Steghöhe veränderlich ist. Die entsprechende Funktion wird durch nachstehende Beziehung ausgedrückt:

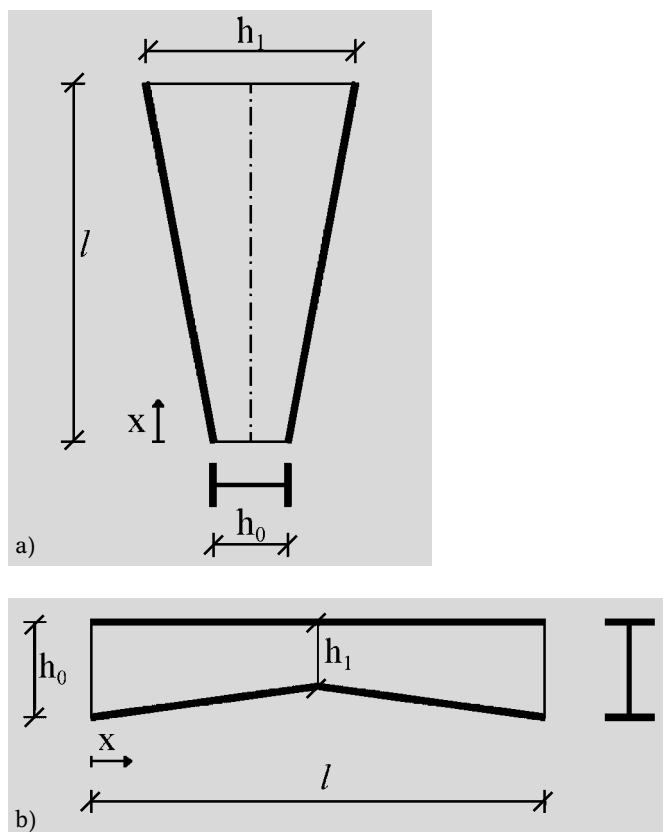


Bild 8. Träger mit veränderlichem Querschnitt
Fig. 8. Girders with variable cross-sections

$$h = h_0 \cdot [1 + (\eta - 1) \cdot \xi], \quad \eta = \frac{h_1}{h_0} \quad (15)$$

Für diesen doppelsymmetrischen Querschnitt ist I_z offensichtlich konstant. Der Wölbwiderstand wird aus

$$I_w = \frac{I_z \cdot h^2}{4}$$

ermittelt, so daß seine Veränderung entlang der Trägerlänge durch die Gleichung

$$I_w = I_{w0} \cdot [1 + (\eta - 1) \cdot \xi]^2 \quad (16)$$

angegeben wird. Der Drillwiderstand ändert sich auch entlang der Trägerlänge wegen der Veränderung des Beitrags des Stegs, während der Beitrag der Gurte konstant bleibt. Wenn man aber bedenkt, daß der Beitrag des Stegs wegen seiner geringen Dicke gegenüber der Dicke der Gurte im allgemeinen gering ist, ist die Gesamtänderung des Drillwiderstands eher gering. Zur Vereinfachung und unter Berücksichtigung des Näherungscharakters der Methode kann man I_t als konstant über die gesamte Trägerlänge annehmen. Sein Wert kann entweder in der Trägermitte oder, konservativer, an der Stelle der kleinsten Höhe berechnet werden.

In diesem Fall ist Gl. (6a) weiter gültig, so wie alle Integrale nach Gl. (6b), mit Ausnahme von k_1 , das jetzt mit Hilfe von Gl. (17a) bestimmt werden kann:

$$k_1 = \int_0^1 \left(\frac{I_w}{I_{w0}} \right) \cdot \theta''^2 d\xi \quad (17a)$$

Aus der Integration ergibt sich:

$$k_1 = \frac{\pi^4}{6} \cdot (1 + \eta + \eta^2) - \left(\frac{\eta - 1}{2} \cdot \pi \right)^2 \quad (17b)$$

Wird der obige Wert mit

$$k_1 = \frac{\pi^4}{2}$$

für Träger mit konstantem Querschnitt verglichen, so kann festgestellt werden, daß für Träger mit veränderlicher Höhe die Parameter zur Bestimmung des kritischen Moments mit Hilfe der gleichen Beziehungen wie für Träger mit konstanten Querschnitten ermittelt werden können, lediglich mit nachstehenden Modifizierungen:

$$C_{i, \text{verän}} = \frac{C_i}{\sqrt{\xi}} \quad k_{\text{verän}} = k \cdot \sqrt{\xi} \quad (18a)$$

In Gl. (18a) sind C_i und k die Werte für konstante Querschnitte und

$$\xi = \frac{1 + \eta + \eta^2}{3} - \left(\frac{\eta - 1}{\sqrt{2} \cdot \pi} \right)^2 \quad (18b)$$

4.2 Bilineare Veränderung der Trägerhöhe

Dieser Fall tritt bei geschweißten Trägern von Rahmentragwerken auf, bei denen sich die Querschnittshöhe von der Rahmenecke zur Feldmitte verjüngt (Bild 8b). Man kann wieder davon ausgehen, daß die Gurtquerschnitte konstant bleiben und die Steghöhe sich nach folgender Gleichung ändert:

$$\xi \leq 1/2: h = h_0 \cdot [1 + 2 \cdot (\eta - 1) \cdot \xi], \quad \eta = \frac{h_1}{h_0} \quad (19a)$$

I_z und I_t werden wieder als konstant angenommen, während die Veränderung von I_w ausgedrückt wird durch:

$$I_w = I_{w0} \cdot [1 + 2 \cdot (\eta - 1) \cdot \xi]^2 \quad (19b)$$

Die Ausführung der Integration führt die Beziehungen

$$C_{i, \text{verän}} = \frac{C_i}{\sqrt{\xi}} \quad k_{\text{verän}} = k \cdot \sqrt{\xi} \quad (20a)$$

mit

$$\xi = 0,93 - 0,26 \cdot \eta + 0,33 \cdot \eta^2 \quad (20b)$$

5 Genauigkeit der Methode

Wie oben erwähnt, hängt die Genauigkeit der Lösung im wesentlichen davon ab, in wie weit die Ansatzfunktionen die Biegedrillknickfigur wiedergeben. Offensichtlich steigt die Genauigkeit mit der Erhöhung der Ansatzglieder an. Jedoch zeigten frühere Untersuchungen [11], daß ein zweigliedriger Ansatz (erster und dritter Term bei symmetrischen

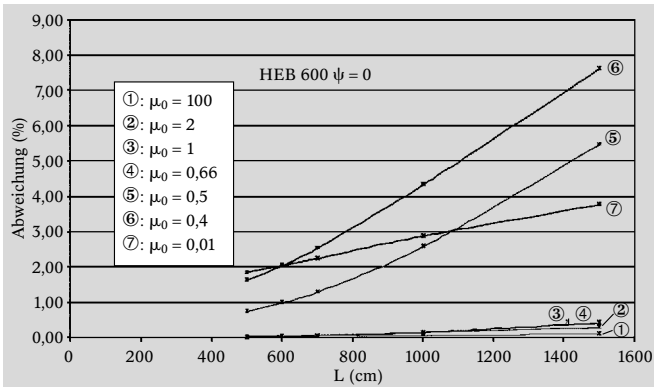


Bild 9. Abweichung des kritischen Moments zwischen ein- und dreigliedrigen Ansätzen für Träger unter Gleichlast und Endmomenten ($= M_{cr,1}/M_{cr,3}$)

Fig. 9. Periation of the critical moments between one and three series terms for girders subjected to uniform loading and end moments ($= M_{cr,1}/M_{cr,3}$)

Belastungen und erster und zweiter Term bei antisymmetrischen Belastungen) zu ausreichend genauen Ergebnissen führt.

Im vorliegenden Beitrag werden die angegebenen Lösungen mit den entsprechenden Ergebnissen von drei- bzw. viergliedrigen Ansätzen verglichen. Die Untersuchungen mit mehrgliedrigen Ansätzen wurden wegen des Rechenaufwands für spezielle Profile, Trägerlängen und Belastungsbedingungen durchgeführt. Die untersuchten Profile gehörten der Reihen I bzw. HEB, Größen 200 bis 1000, Trägerlängen 5 bis 15 m. Die Belastung erfolgte am Obergurt und war gleichförmig über die Trägerlänge verteilt.

Die Auswertung erfolgte in Diagrammen, die das Verhältnis der kritischen Momente des eingliedrigen Ansatzes zu dem entsprechenden Moment des drei- bzw. viergliedrigen Ansatzes in Prozent darstellten. Bild 9 stellt exemplarisch ein solches Diagramm dar. In [9] sind die Diagramme der gesamten Parameterstudie zu finden. Aus der Parameterstudie lassen sich folgende Rückschlüsse ziehen:

- Die Abweichungen steigen mit wachsender Trägerlänge.
- Die Abweichungen fallen mit steigender Profilgröße.
- Die Abweichungen fallen im allgemeinen mit steigender Querbelastung (wachsendes μ_0).
- Bei I-Profilen sind die Abweichungen größer als bei HEB-Profilen.
- Die Abweichungen sind für gleiche Endmomente ($\psi = 1$) vernachlässigbar.
- Die größten Abweichungen sind für Endmomentenverhältnisse ψ zwischen $-0,25$ und $+0,25$ festzustellen.
- Für die üblichen Profile und Trägerlängen besitzen die maximalen Abweichungen zwischen dem ein- und dreigliedrigen Ansatz Werte unter 10 %.
- Die Abweichungen zwischen dem drei- und viergliedrigen Ansatz sind für die üblichen Profile und Trägerlängen sehr klein.

6 Anwendungsbeispiel

Bild 10 stellt das Stahlprofil eines Verbundträgers dar, für das das kritische Moment auf Biegedrillknicken im Bauzustand bestimmt werden soll, wenn angenommen wird, daß der Träger über die Gesamtlänge gleichförmig belastet wird.

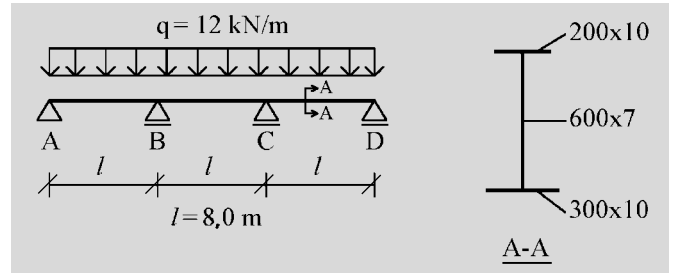


Bild 10. Geometrische Abmessungen und Belastung des Trägers des Anwendungsbeispiels

Fig. 10. Geometric and loading conditions of the girder of the design example

Querschnittseigenschaften

$$A_{fo} = 20 \text{ cm}^2, A_{fu} = 30 \text{ cm}^2, A_w = 60 \cdot 0,7 = 42 \text{ cm}^2, \\ A = 20 + 30 + 42 = 92 \text{ cm}^2$$

$$I_{fzo} = \frac{20^3 \cdot 1}{12} = 666,7 \text{ cm}^4, I_{fzu} = \frac{30^3 \cdot 1}{12} = 2250 \text{ cm}^4,$$

$$I_z = 666,7 + 2250 = 2916,7 \text{ cm}^4$$

$$e = \frac{60 \cdot 0,7 \cdot 30 + 30 \cdot 1 \cdot 60}{92} = 33,26 \text{ cm}$$

$$z_M = \frac{(60 - 33,26) \cdot 2250 - 33,26 \cdot 666,7}{2916,7} = 13,03 \text{ cm}$$

$$I_y = 20 \cdot 33,26^2 + 30 \cdot (60 - 33,26)^2 + \frac{60^3 \cdot 0,7}{12} + \\ + 42 \cdot (30 - 33,26)^2 = 56622 \text{ cm}^4$$

und

$$r \cdot I_y = 13,03 \cdot 2916,7 - 20 \cdot 33,26^3 + \\ + 30 \cdot (60 - 33,26)^3 + \\ + \frac{0,7}{4} \cdot \left[(60 - 33,26)^4 - 33,26^4 \right]$$

$$r = -4,40 \text{ cm}$$

$$z_j = 13,03 - \frac{-4,40}{2} = 15,23 \text{ cm},$$

$$z_g^M = -33,26 - 13,03 = -46,29 \text{ cm}$$

$$I_w = \frac{2250 \cdot 666,7}{2916,7} \cdot 60^2 = 1,85 \cdot 10^6 \text{ cm}^6,$$

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot (20 \cdot 1^3 + 30 \cdot 1^3 + 60 \cdot 0,7^3) = 23,5 \text{ cm}^4$$

Feld AB

Das Stützmoment ergibt sich aus

$$M_{B,C} = -\frac{q \cdot \ell^2}{10}.$$

Dementsprechend ist:

$$\psi = 0, \quad \mu_0 = \frac{-(-q \cdot \ell^2/10)}{q \cdot \ell^2/8} = 0,8$$

Aus Tabelle 3, Zeile 1 (keine Zwischenabstützung) können folgende Parameter errechnet werden:

$$k = 1, \quad C_1 = 1,548, \quad C_2 = -0,784, \quad C_3 = -0,126$$

$$\begin{aligned} M_{cr} &= 1,548 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 21000 \cdot 2916,7}{800^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{1,85 \cdot 10^6}{2916,7} + \frac{800^2}{\pi^2} \cdot \frac{23,5}{2,6 \cdot 2916,7} + \right. \\ &+ [(-0,784) \cdot (-46,29) - (-0,126) \cdot 15,23]^2 - \\ &\left. - [(-0,784) \cdot (-46,29) - (-0,126) \cdot 15,23] \right\}^{1/2} \\ &= 14169 \text{ kNcm} \end{aligned}$$

Feld BC

$$\psi = 1, \quad \mu_0 = \frac{-(-q \cdot \ell^2/10)}{q \cdot \ell^2/8} = 0,8$$

Aus Tabelle 3, Zeile 1 (keine Zwischenabstützung) werden errechnet:

$$k = 1, \quad C_1 = 4,426, \quad C_2 = -2,242, \quad C_3 = 1,852$$

Damit ergibt sich $M_{cr} = 22294 \text{ kNcm}$.

Bemerkungen

a) Dieses Beispiel zeigt den Näherungscharakter und das konservative Resultat des Nachweises von Durchlaufträgern auf Biegedrillknicken, wenn die einzelnen Felder getrennt nachgewiesen werden. In diesem Fall ergibt sich die kritische Gleichlast aus

$$q_{cr} = \frac{10 \cdot M_{cr}}{\ell^2}$$

und läßt sich für die einzelnen Felder errechnen zu:

Felder AB, CD: $q_{cr,AB} = q_{cr,CD} = 22,14 \text{ kN/m}$

Feld BC: $q_{cr,BC} = 34,83 \text{ kN/m}$

Offensichtlich besitzt aber der gesamte Durchlaufträger einen einzelnen Wert für die kritische Last, bei dem das Gleichgewicht umschlägt und Biegedrillknicken auftritt. Dieser Wert liegt zwischen den zwei obigen Werten, weil das mittlere Feld BC, wenn isoliert betrachtet, weniger anfällig auf Biegedrillknicken ist. Somit stützt das mittlere Feld die Seitenfelder und hebt dadurch deren kritische Last an.

Für einen Dreifeldträger läßt sich durch Anwendung des vorgeschlagenen Verfahrens ermitteln:

$$k = 1, \quad C_1 = 3,27, \quad C_2 = -1,656 \text{ und } C_3 = 0,966.$$

Mit diesen Werten errechnet sich die kritische Belastung für den Gesamtträger zu $q_{cr} = 30,9 \text{ kN/m}$.

b) Für Sog kann das kritische Moment durch Umdrehung des Querschnitts ermittelt werden, so daß die Belastung

nach unten wirkt und positiv bleibt ($q > 0$). In diesem Fall ist $z_j = -15,23 \text{ cm}$.

Für die auf den unteren Gurt wirkende Belastung q (bzw. den oberen Gurt des umgedrehten Querschnitts) ist $z_g^M = -13,71 \text{ cm}$. Die kritische Belastung der isolierten Felder beträgt in diesem Fall:

$$q_{cr,AB} = q_{cr,CD} = 48,83 \text{ kN/m}, \quad q_{cr,BC} = 43,75 \text{ kN/m}$$

Für den Durchlaufträger ist dann $q_{cr} = 47,55 \text{ kN/m}$.

7 Zusammenfassung

Es wurden einfache Formeln zur Ermittlung des elastischen kritischen Moments für Biegedrillknicken von gabelgelagerten Trägern unter verschiedenen Belastungsbedingungen angegeben. Die Formeln decken viele praktische Anwendungsfälle ab. Die Herleitung erfolgt durch Anwendung der Energiemethode und Lösung nach dem Ritz'schen Verfahren. Für die Verdrehungen wurden eingliedrige Ansätze gemacht. Der Vergleich mit mehrgliedrigen Ansätzen hat gezeigt, daß die Genauigkeit innerhalb akzeptabler Grenzen bleibt. Es wurden Überlegungen zum Nachweis von Durchlaufträgern durch getrennten Nachweis der Einzelfelder angestellt.

Literatur

- [1] Eurocode 3: Design of steel structures, Part 1.1: General rules and rules for buildings. EN 1993-1-1: 2003.
- [2] Bijlaard, F., Steenbergen, H.: Lateral torsional stability of members with lateral restraints at various locations between the supports. Eurosteel Conf., 2002, pp. 191–202.
- [3] Eurocode 3: Design of steel structures, Part 1.1: General rules and rules for buildings, Annex G: Design for torsion resistance. ENV 1993-1-1: 1992.
- [4] Kindmann, R.: Tragsicherheitsnachweise für biegedrillknickgefährdete Stäbe und Durchlaufträger. Stahlbau 62 (1993), S. 17–26.
- [5] Trahair, N.: Flexural-Torsional Buckling of Structures. London: E & FN Spon, 1993.
- [6] Chwalla, E.: Kippung von Trägern mit einfach-symmetrischen, dünnwandigen und offenen Querschnitten, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien, 1944.
- [7] Roik, K., Carl, J., Lindner, J.: Biegetorsionsprobleme gerader, dünnwandiger Stäbe. Berlin: Ernst & Sohn, 1972.
- [8] Meissner, F.: Einige Auswertungsergebnisse der Kipptheorie einfach-symmetrischer Balkenträger. Stahlbau 24 (1955), S. 110–113.
- [9] Papahatzakis, I.: Vergleich verschiedener Lösungsansätze beim Biegedrillknicknachweis mit Hilfe der Energiemethode. Athen: Diplomarbeit NTUA, (griechisch), 2003.
- [10] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. Braunschweig: Vieweg, 1992.
- [11] Vogel, U.: Die Kippstabilität von Durchlaufträgern mit dünnwandigem Z-Querschnitt bei Belastung in Richtung einer Querschnitts-Hauptachse. Bauingenieur, 1972, S. 423–429.

Autor dieses Beitrages:

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Ioannis Vayas, National Technical University of Athens, Laboratory of Steel Structures, Iroon Polytechniou Str 9, GR – 15780 Athen, Griechenland