

Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Εξισώσεων

Μέθοδος Απαλοιφής Gauss

Γραμμικό Σύστημα Εξισώσεων

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

• • • • •

$$• \quad + a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

• • • • •

$$• \quad + a_{ki}x_i + a_{k,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{kn}x_n = b_k$$

• • • • •

$$• \quad + a_{ni}x_i + a_{n,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Γραμμικό Σύστημα Εξισώσεων

$$Ax = B$$

$$A = [a_{ij}]$$

$$x = [x_i]$$

$$B = [b_i]$$

Επαυξημένος Πίνακας

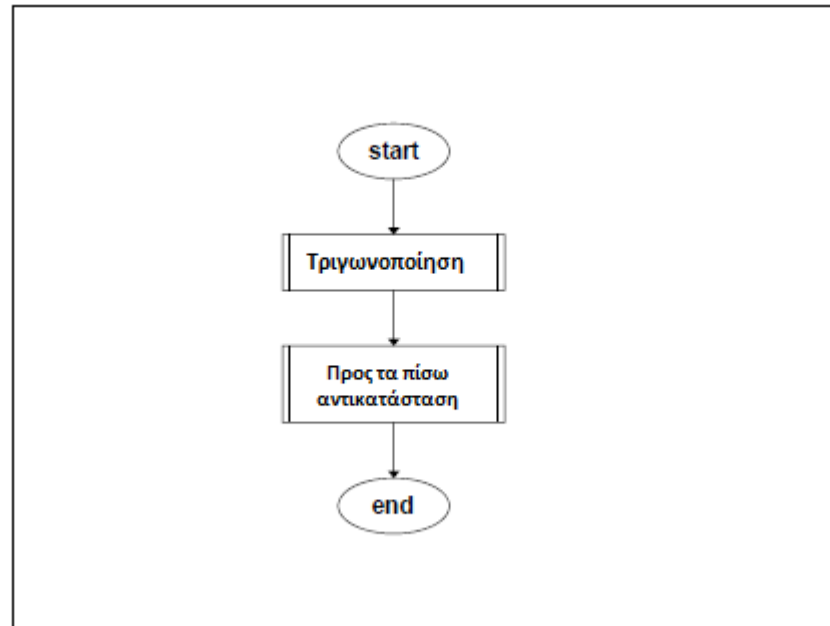
| | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|-----|----------|-------------|-----|----------|-------|
| a_{11} | a_{12} | a_{13} | ... | ... | ... | ... | a_{1n} | b_1 |
| a_{21} | a_{22} | a_{23} | ... | ... | ... | ... | a_{2n} | b_2 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | a_{ii} | $a_{i,j+1}$ | ... | a_{in} | b_i |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ | ⋮ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | a_{ki} | $a_{k,j+1}$ | ... | a_{kn} | b_k |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ... | ⋮ | ⋮ |
| ... | ... | ... | ... | a_{ni} | $a_{n,j+1}$ | ... | a_{nn} | b_n |

Ένας επαυξημένος πίνακας ονομάζεται **κλιμακωτός (άνω τριγωνικός)** όταν το οδηγό στοιχείο κάθε γραμμής (πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της) βρίσκεται τουλάχιστον μία θέση δεξιότερα από τον οδηγό της προηγούμενης στο τέλος (κάτω μέρος) του πίνακα

Άνω Τριγωνικός Πίνακας

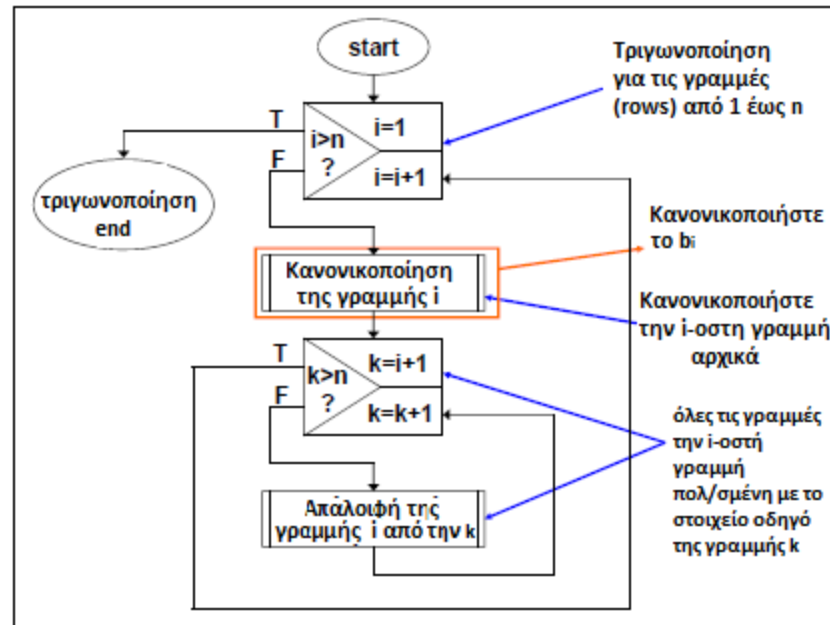
$$\begin{array}{cccccc} X & X & X & X & X & B \\ 0 & X & X & X & X & B \\ 0 & 0 & X & X & X & B \\ 0 & 0 & 0 & X & X & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X & B \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x5 \end{array}$$

Σχεδιασμός του αλγορίθμου



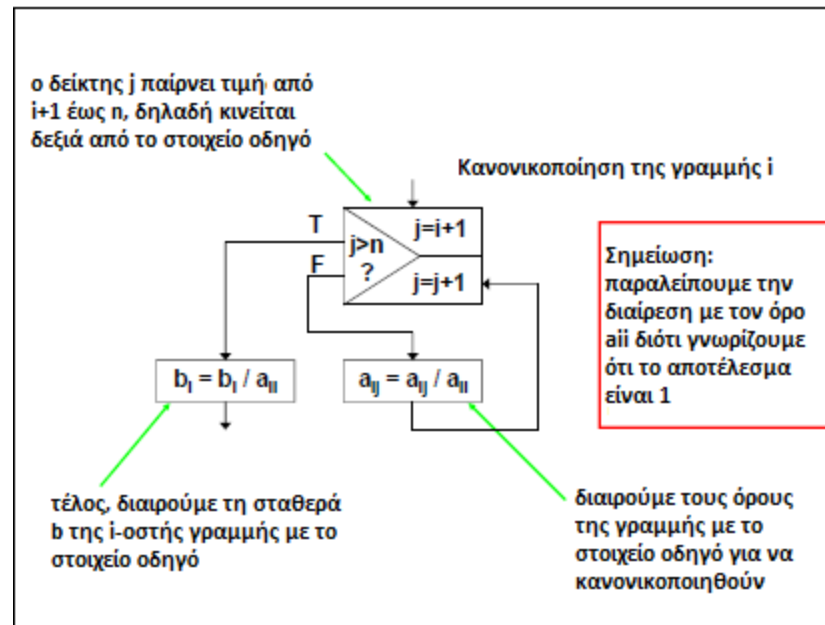
Βασικά στάδια του αλγορίθμου
απαλοιφής του Gauss

Αναλυτικά ο αλγόριθμος



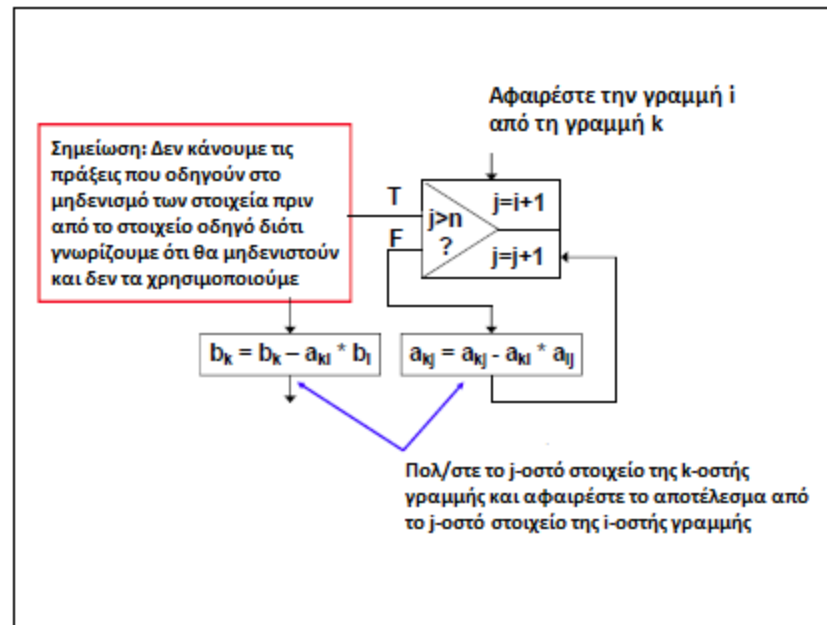
Τριγωνοποίηση & Απαλοιφή

Αναλυτικά ο αλγόριθμος



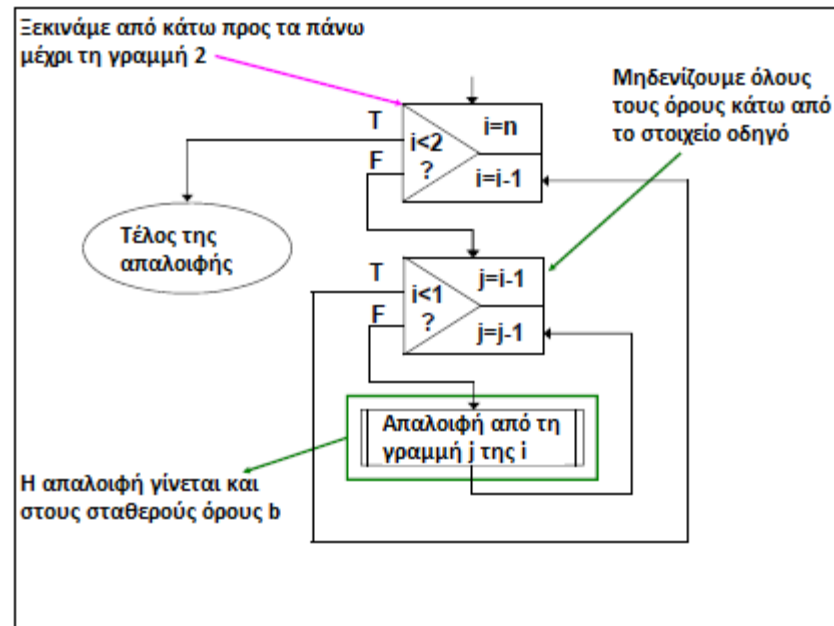
Κανονικοποίηση

Αναλυτικά ο αλγόριθμος



Αφαίρεση της i -οστής γραμμής από αυτές που βρίσκονται παρακάτω

Αναλυτικά ο αλγόριθμος



Προς τα πίσω αντικατάσταση

Ανάπτυξη Λύσης

Πίνακας A: Amat()

Πίνακας b: bvec()

Πίνακας λύσης: x Xvec

Τάξη Συστήματος nxn

Κανονικοποίηση / Απαλοιφή

For i = 1 To n

'Κανονικοποιούμε τον επαυξημένο πίνακα

For j = i + 1 To n

$Amat(i, j) = Amat(i, j) / Amat(i, i)$ 'Διαίρεση με το στοιχείο οδηγό a_{ii}

Next j

$bvec(i) = bvec(i) / Amat(i, i)$ 'Κανονικοποίηση και του b_i του επαυξημένου πίνακα

For k = i + 1 To n 'Αφαίρεση της i γραμμής από την k γραμμή

For j = i + 1 To n

$Amat(k, j) = Amat(k, j) - Amat(i, j) * Amat(k, i)$

Next J

$bvec(k) = bvec(k) - bvec(i) * Amat(k, i)$

Next k

Next i

Προς τα πίσω Αντικατάσταση

```
For i = n To 2 Step -1
  For J = i - 1 To 1 Step -1
    bvec(J) = bvec(J) - Amat(J, i) * bvec(i)
  Next J
Next I
```

Αριθμητικό Παράδειγμα

A =

| | | |
|-----|------|------|
| 8 | 3.8 | 4.85 |
| 2.8 | 4.25 | 0.5 |
| 6.1 | 7 | 3.2 |

b =

| |
|------|
| 1.4 |
| 2.33 |
| 6.2 |

Επαυξημένος Πίνακας =

| | | | |
|-----|------|------|------|
| 8 | 3.8 | 4.85 | 1.4 |
| 2.8 | 4.25 | 0.5 | 2.33 |
| 6.1 | 7 | 3.2 | 6.2 |

Βήματα Επίλυσης

Κανονικοποίηση:

$i = 1$

Στοιχείο Οδηγός είναι το $a_{11} = 8$

Διαιρώντας την πρώτη γραμμή με το 8,

ο επαυξημένος γίνεται

| | | | |
|-----|-------|---------|-------|
| 1 | 0.475 | 0.60625 | 0.175 |
| 2.8 | 4.25 | 0.5 | 2.33 |
| 6.1 | 7 | 3.2 | 6.2 |

Να σημειωθεί ότι για λόγους αύξησης της ταχύτητας του αλγορίθμου δεν εκτελούμε την πράξη $8/8$ διότι γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι το αποτέλεσμα είναι μονάδα. Οπότε θεωρούμε πια ότι ο a_{11} μετά την κανονικοποίηση θα είναι 1. Αν τρέξουμε όμως τον αλγόριθμο στο excel θα διαπιστώσουμε ότι η τιμή του a_{11} παραμένει 8, απλά δεν συμμετέχει πια σε πράξεις, οπότε τρέχοντας τον κώδικα θα πάρουμε τον επαυξημένο πίνακα:

| | | | |
|-----|-------|---------|-------|
| 8 | 0.475 | 0.60625 | 0.175 |
| 2.8 | 2.92 | -1.1975 | 1.84 |
| 6.1 | 7 | 3.2 | 6.2 |

Βήματα Επίλυσης

Απαλοιφή:

$i = 1, k=2$

Θα πολ/σουμε τη γραμμή 1 με το στοιχείο a_{21} και θα την αφαιρέσουμε από τη γραμμή 2 με σκοπό να μηδενίσουμε τον πρώτο όρο.

| | | | |
|-----|-------|---------|-------|
| 1 | 0.475 | 0.60625 | 0.175 |
| 0 | 2.92 | -1.1975 | 1.84 |
| 6.1 | 7 | 3.2 | 6.2 |

$i=1, k=3$

Θα πολ/σουμε τη γραμμή 1 με το στοιχείο a_{31} και θα την αφαιρέσουμε από τη γραμμή 3 με σκοπό να μηδενίσουμε τον πρώτο όρο.

| | | | |
|---|--------|----------|--------|
| 1 | 0.475 | 0.60625 | 0.175 |
| 0 | 2.92 | -1.1975 | 1.84 |
| 0 | 4.1025 | -0.49812 | 5.1325 |

Να σημειωθεί ότι την αφαίρεση στους δυο πρώτους όρους (a_{21} & a_{31}) την παραλείπουμε για λόγους επιτάχυνσης της διαδικασίας, διότι γνωρίζουμε ότι το αποτέλεσμα είναι μηδέν.

Βήματα Επίλυσης

Κανονικοποίηση:

$$i = 2$$

Στοιχείο Οδηγός είναι το $a_{22} = 2.92$

Διαιρώντας την δεύτερη γραμμή με το 2.92,

ο επαυξημένος γίνεται:

| | | | |
|---|--------|----------|----------|
| 1 | 0.475 | 0.60625 | 0.175 |
| 0 | 1 | -0.4101 | 0.630137 |
| 0 | 4.1025 | -0.49812 | 5.1325 |

Απαλοιφή:

$$i = 2, k=3$$

Θα πολ/σουμε τη γραμμή 2 με το στοιχείο a_{32} και θα την αφαιρέσουμε από τη γραμμή 3 με σκοπό να μηδενίσουμε τον δεύτερο όρο, όπου προκύπτει ο επαυξημένος:

| | | | |
|---|-------|----------|----------|
| 1 | 0.475 | 0.60625 | 0.175 |
| 0 | 1 | -0.4101 | 0.630137 |
| 0 | 0 | 1.184321 | 2.547363 |

Βήματα Επίλυσης

Κανονικοποίηση:

$i = 3$

Στοιχείο Οδηγός είναι το $a_{33} = 1.184321$

Διαιρώντας την τρίτη γραμμή με το 1.184321 ,

ο επαυξημένος γίνεται:

| | | | |
|---|-------|---------|----------|
| 1 | 0.475 | 0.60625 | 0.175 |
| 0 | 1 | -0.4101 | 0.630137 |
| 0 | 0 | 1 | 2.150905 |

Βήματα Επίλυσης

Προς τα πίσω Αντικατάσταση:

Από το τέλος προς την αρχή (i από n έως 2) εκτελούμε τις πράξεις της μορφής για όλα τα στοιχεία j της κάθε γραμμής (για j από i – 1 έως 1):

$$b_j = b_j - a_{ji} b_i$$

Δηλαδή:

Θεωρούμε δεδομένο ότι $b_3 = 2.150905$ (αφού η τελευταία γραμμή είναι της μορφής (0, 0, 1, 2.150905)).

Για $i = 3$, j από 2 έως 1

$$b_2 = b_2 - a_{23} * b_3 = 1.512229$$

$$b_1 = b_1 - a_{13} * b_3 = -1.12899$$

Για $i = 2$, j από 1 έως 1

$$b_1 = b_1 - a_{12} * b_2$$

$$\text{Δηλαδή: } b_2 = -1.12899 - 0.475 * 1.512229 = -1.8473$$

Βήματα Επίλυσης

Έτσι οι ρίζες της επίλυσης είναι:

$$x_1 = b_1 = -1.8473$$

$$x_2 = b_2 = 1.512229$$

$$x_3 = b_3 = 2.150905$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να επιλυθεί το σύστημα $Ax=B$ όπου:

$$A = \{a_{ij}\} = \left\{ \sum_{k=0, \dots, j} [(i+0.1)^{(1.3-k/10)}] \right\}, \quad \{b_i\} = i * 10^{-6}$$