Αριθμητική Ολοκλήρωση με τις μεθόδους Τραπεζίου/Simpson

Φίλιππος Δογάνης
Δρ. Χημικός Μηχανικός ΕΜΠ

Μια πρώτη προσέγγιση

Ο χώρος χωρίζεται σε διαστήματα:

$$Partition\ P = \{a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b\}$$

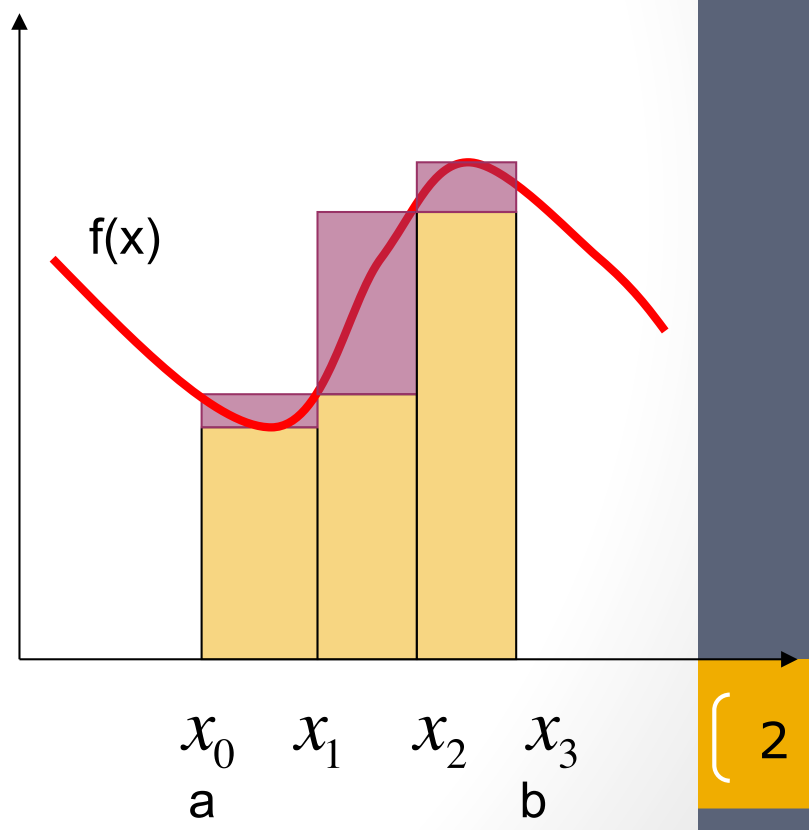
$$\text{Ορίζουμε}:$$

$$m_i = \min\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$$

$$M_i = \max\{f(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\}$$

$$\text{Ελάχιστο} \quad L(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$$

$$\text{Μέγιστο} \quad U(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$



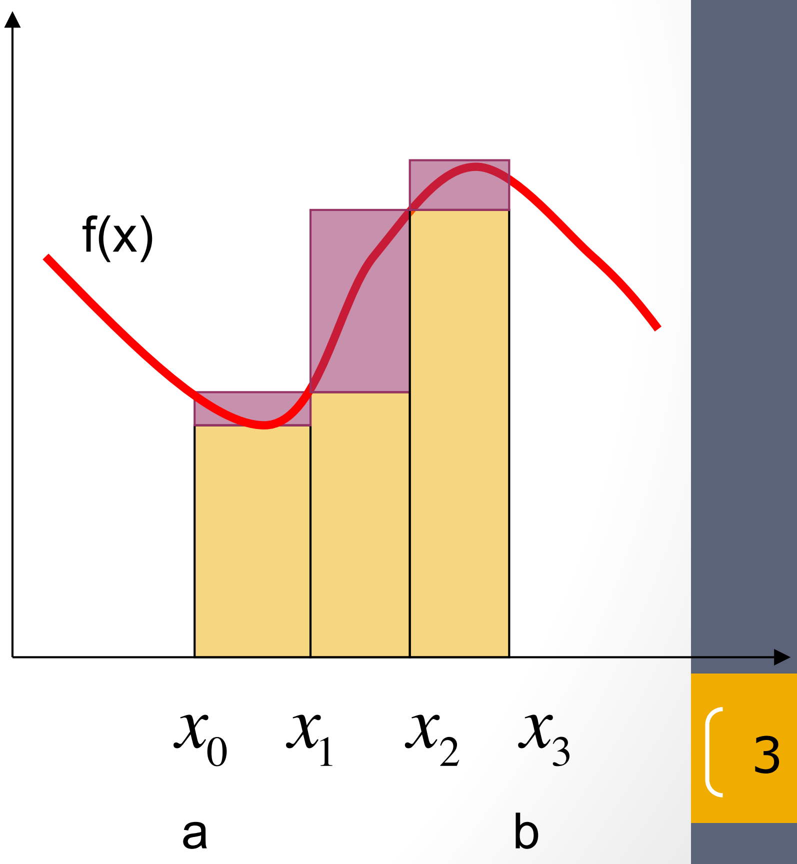
Μια πρώτη προσέγγιση

Ελάχιστο $L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$

Μέγιστο $U(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$

Εκτίμηση του ολοκληρώματος $=\dfrac{L+U}{2}$

$\Sigma\varphi\acute{\alpha}\lambda\mu\alpha \leq \dfrac{U-L}{2}$



Παράδειγμα

$$\int_0^1 x^2 \, dx$$

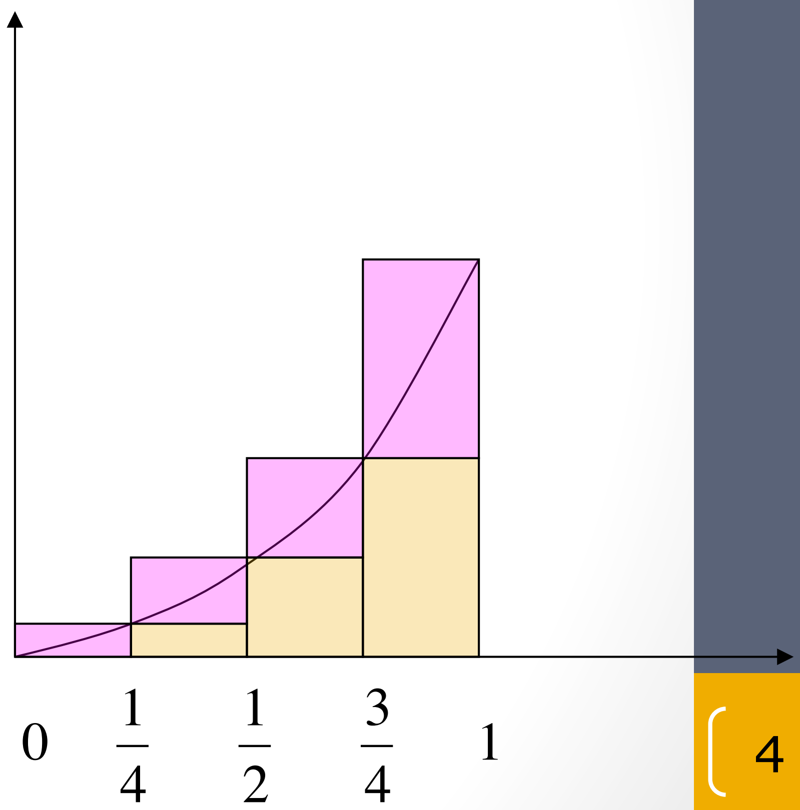
$$\text{Τ}\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau\alpha \; P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

$n = 4$ (τέσσερα ίσα διαστήματα)

$$m_0 = 0, \qquad m_1 = \frac{1}{16}, \qquad m_2 = \frac{1}{4}, \qquad m_3 = \frac{9}{16}$$

$$M_0 = \frac{1}{16}, \quad M_1 = \frac{1}{4}, \quad M_2 = \frac{9}{16}, \quad M_3 = 1$$

$$x_{i+1} - x_i = \frac{1}{4} \qquad \gamma\iota\alpha \quad i = 0,1,2,3$$



Παράδειγμα

$$\text{Ελάχιστο} \quad L(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$$

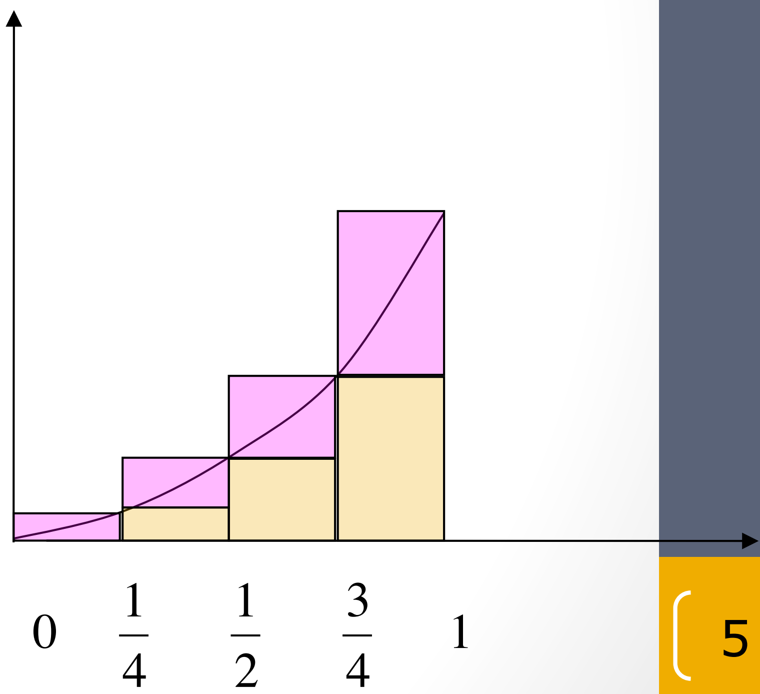
$$L(f,P)=\frac{1}{4}\left[0+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}\right]=\frac{14}{64}$$

$$\text{Μέγιστο} \quad U(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\left(x_{i+1}-x_i\right)$$

$$U(f,P)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}+1\right]=\frac{30}{64}$$

$$\text{Εκτίμηση του ολοκληρώματος}=\frac{1}{2}\left(\frac{30}{64}+\frac{14}{64}\right)=\frac{11}{32}$$

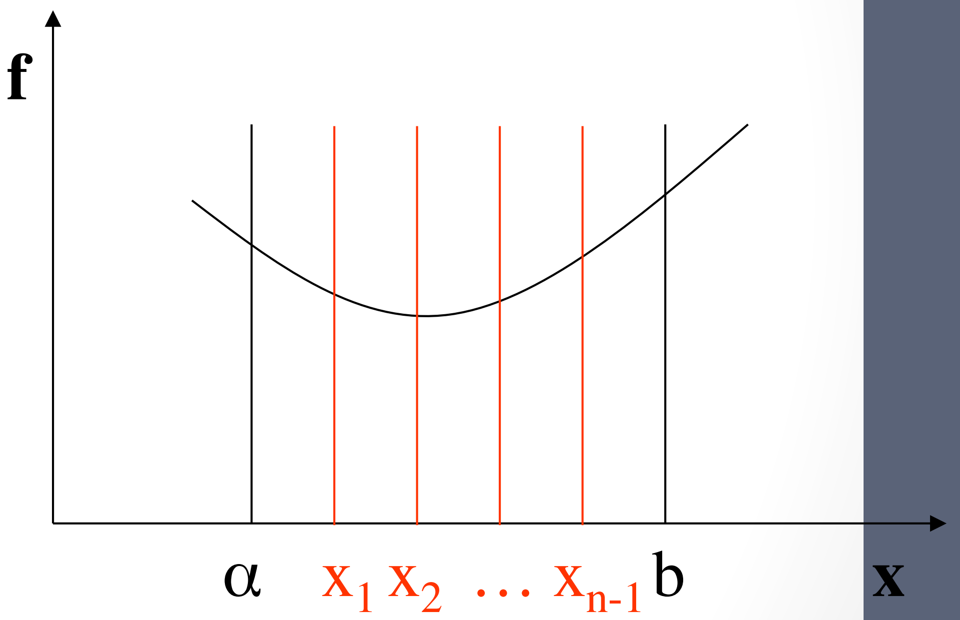
$$\text{Σφάλμα}<\frac{1}{2}\left(\frac{30}{64}-\frac{14}{64}\right)=\frac{1}{8}$$



Αριθμητική ολοκλήρωση

$$\text{Γενικά}: \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

- **Μέθοδοι Newton-Cotes**
  - Ισαπέχοντα σημεία στην περιοχή ολοκλήρωσης
  - Χρήση πολυωνύμων παρεμβολής



- **Μέθοδοι Gauss**
  - Μη ισαπέχοντα σημεία στην περιοχή ολοκλήρωσης

- Ολοκλήρωση κατά τμήματα
- Προσαρμοζόμενη ολοκλήρωση

Μέθοδοι Newton-Cotes

- ***Μέθοδος Τραπεζίου (Πολυώνυμο πρώτης τάξης)***

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0 + a_1 x\right)dx$$

- ***Μέθοδος Simpson (Πολυώνυμο δεύτερης τάξης)***

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right)dx$$

Αριθμητική ολοκλήρωση Μέθοδοι Newton-Cotes

Πολυώνυμα παρεμβολής Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_{n,i}(x) \qquad L_{n,i}(x) = \prod_{k=0,i\neq k}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

Οπότε:

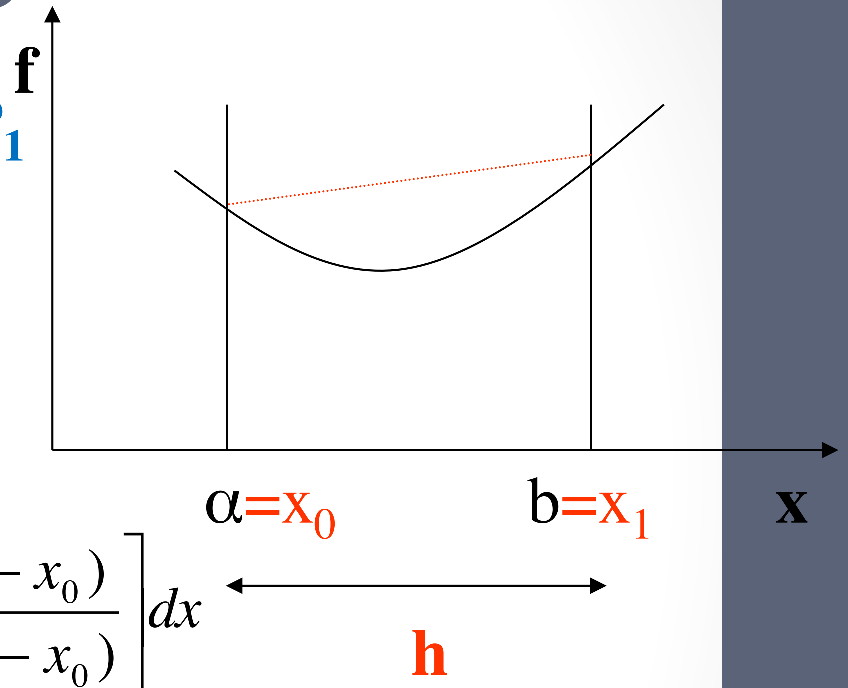
$$\int_a^b P_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \int_a^b f(x_i) L_{n,i}(x)dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

με: $$a_i = \int_a^b L_{n,i}(x)dx$$

Αριθμητική ολοκλήρωση
Μέθοδος Τραπεζίου

Πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange P_1



$$P_1(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}$$

Οπότε:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a\equiv x_0}^{b\equiv x_1}\left[f(x_0)\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\right]dx$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_1-x_0)}\int_{x_0}^{x_1}(x_1-x)dx + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)}\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)dx +$$

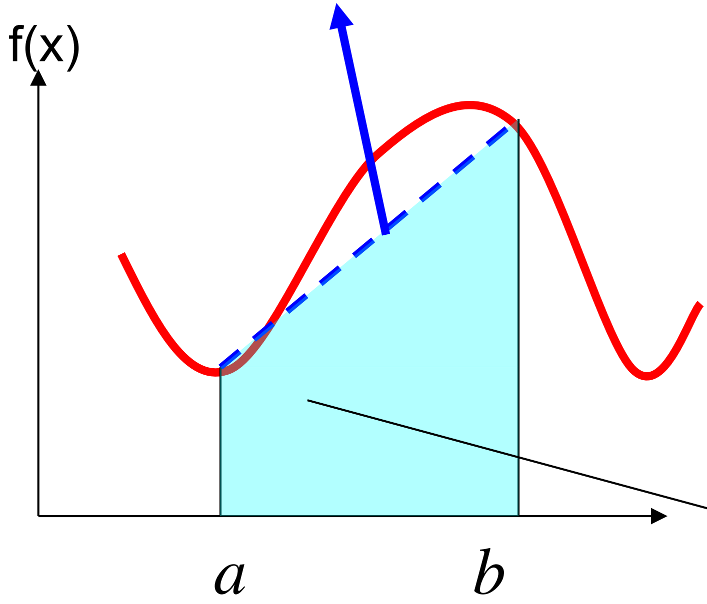
$$= \frac{1}{2}(x_1-x_0)[f(x_0)+f(x_1)]$$

$$\equiv \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

Μέθοδος Τραπεζίου

Για ένα διάστημα

$$f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$



$$I=\int_a^b f(x)dx$$

$$I\approx\int_a^b\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)dx$$

$$=\left(f(a)-a\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x\Big|_a^b$$

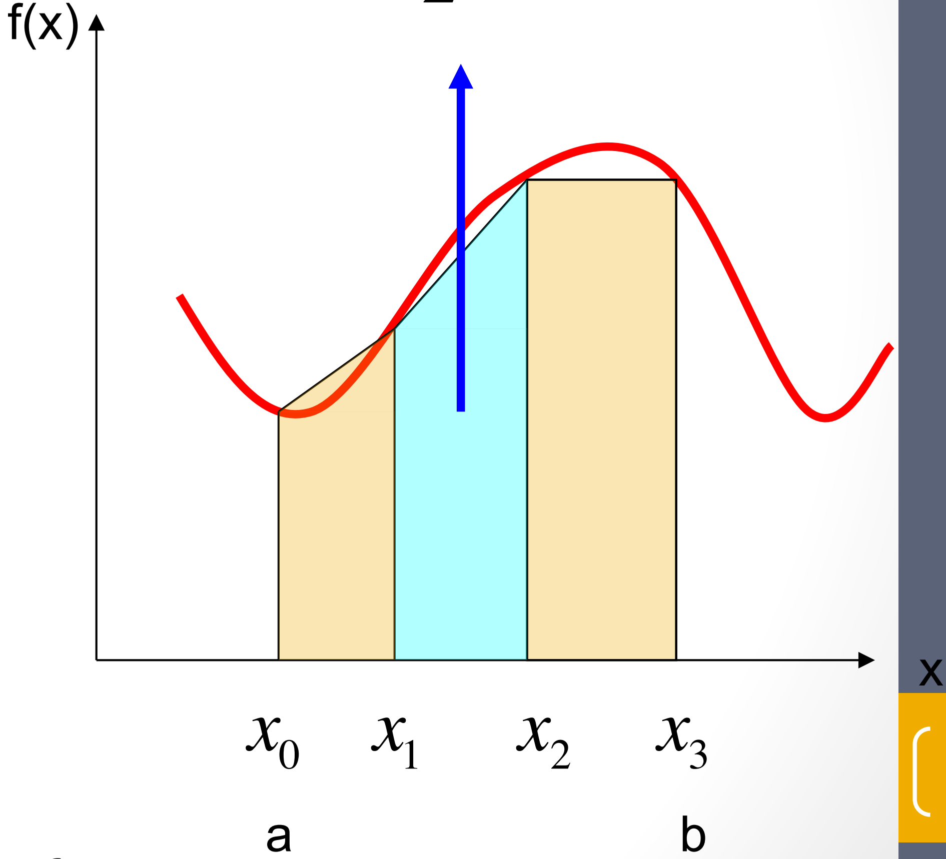
$$+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b$$

$$=\boxed{(b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2}}$$

Μέθοδος Τραπεζίου

Για πολλά διαστήματα

$$\mathrm{E}\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu = \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}(x_2 - x_1)$$



Το διάστημα [a,b]

επιμερίζεται σε n τμήματα

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n = b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \text{άθροισμα των}$$

εμβαδών των τραπεζίων

Μέθοδος Τραπεζίου
Γενική και ειδική μορφή

Αν το διάστημα επιμερίζεται σε n τμήματα (όχι απαραίτητα ίσα)

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(x_{i+1} - x_i\right)\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)}$$

Ειδική περίπτωση (ίσα διαστήματα)

$$x_{i+1} - x_i = h \quad \text{for all} \quad i$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{1}{2}\left[f(x_0) + f(x_n)\right] + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Παράδειγμα

Δίνεται πίνακας με την ταχύτητα ενός αντικειμένου.

Time (s)	0.0	1.0	2.0	3.0
Velocity (m/s)	0.0	10	12	14

Εκτιμήστε την απόσταση που διανύθηκε το χρονικό διάστημα [0,3].

Απόσταση = ολοκλήρωμα της ταχύτητας

$$\text{Απόσταση} = \int_0^3 V(t)\, dt$$

Παράδειγμα

Το διάστημα επιμερίζεται σε 3 υποδιαστήματα

Τα σημεία είναι: $\{0,1,2,3\}$

Χρόνος (s)	0.0	1.0	2.0	3.0
Ταχύτητα (m/s)	0.0	10	12	14

$$\text{Μέθοδος τραπεζίου}$$

$$h = x_{i+1} - x_i = 1$$

$$T = h\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}\big(f(x_0) + f(x_n)\big)\right]$$

$$\text{Απόσταση} = 1\left[(10+12) + \frac{1}{2}(0+14)\right] = 29$$

Υπολογισμός του σφάλματος
Μέθοδος Τραπεζίου

Πόσα ίσα διαστήματα απαιτούνται

ώστε να υπολογιστεί το $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$

με ακρίβεια 5ου δεκαδικού ψηφίου;

Υπολογισμός του σφάλματος

Μέθοδος Τραπεζίου — Θεωρητικά

Υπόθεση: $f''(x)$ συνεχής στο $[a,b]$

ίσα διαστήματα (πλάτους $= h$)

Θεώρημα: Εάν η τραπεζοειδής μέθοδος χρησιμοποιηθεί

για την προσέγγιση του $\int_a^b f(x)dx$ τότε:

$$Error = -\frac{b-a}{12}\, h^2 f''(\xi) \quad \text{όπου } \xi \in [a,b]$$

$$|Error| \leq \frac{b-a}{12}\, h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

Παράδειγμα

$$\boxed{\int_0^{\pi} \sin(x)dx, \quad \text{να βρεθεί } h \text{ ώστε } \quad |\text{error}| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}}$$

$$|Error| \le \frac{b-a}{12} h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$b=\pi; \; a=0; \quad f'(x)=\cos(x); \quad f''(x)=-\sin(x)$$

$$|f''(x)| \le 1 \quad \Rightarrow |Error| \le \frac{\pi}{12} h^2 \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \qquad h^2 \le \frac{6}{\pi}\times 10^{-5}$$

Παράδειγμα

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
f(x)	2.1	3.2	3.4	2.8	2.7

Χρησιμοποιήστε την μέθοδο τραπεζίου για

να υπολογίσετε το: $\int_1^3 f(x)dx$

$$T(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(x_{i+1} - x_i\right)\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)$$

Ειδική περίπτωση: $h = x_{i+1} - x_i$ για κάθε i,

$$T(f,P) = h\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}\left(f(x_0) + f(x_n)\right)\right]$$

Παράδειγμα

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
f(x)	2.1	3.2	3.4	2.8	2.7

$$\int_1^3 f(x)dx \approx h\left[\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}\left(f(x_0) + f(x_n)\right)\right]$$

$$= 0.5\left[3.2 + 3.4 + 2.8 + \frac{1}{2}\left(2.1 + 2.7\right)\right]$$

$$= 5.9$$

Αριθμητική ολοκλήρωση
Μέθοδος Simpson

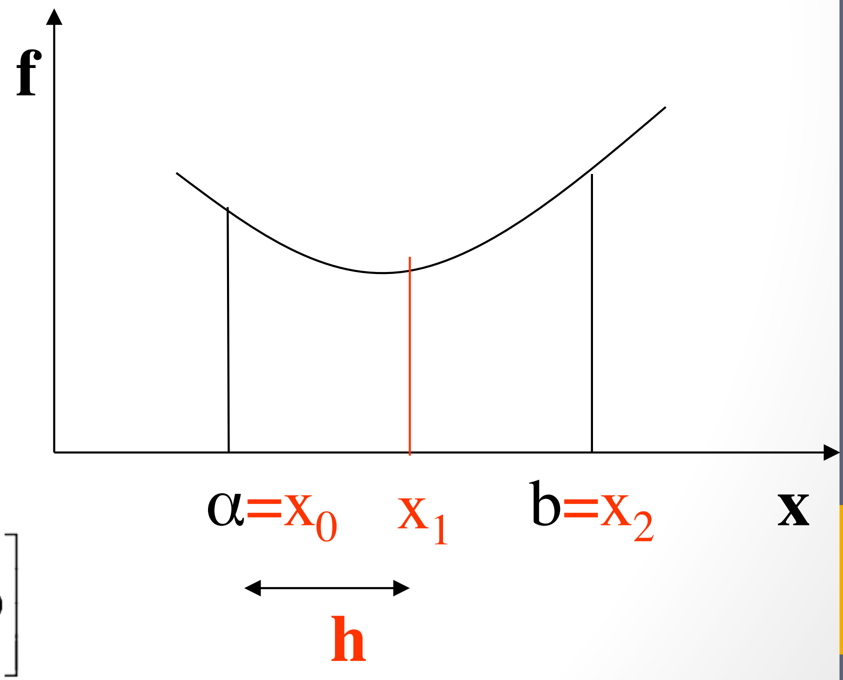
τα πολυώνυμα είναι 2ης τάξης

Πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange P_2

$$P_2(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx \;&\approx \frac{f(x_0)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx \\
&- \frac{f(x_1)}{h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_2)dx \\
&+ \frac{f(x_2)}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_0)(x-x_1)dx \\
&= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]
\end{aligned}$$



Γενικός τύπος: $$\frac{h}{3}\left[f(x_0)+4\sum_{\substack{i=1\\ i=odd}}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{\substack{i=2\\ i=even}}^{n-2} f(x_i)+f(x_n)\right]$$

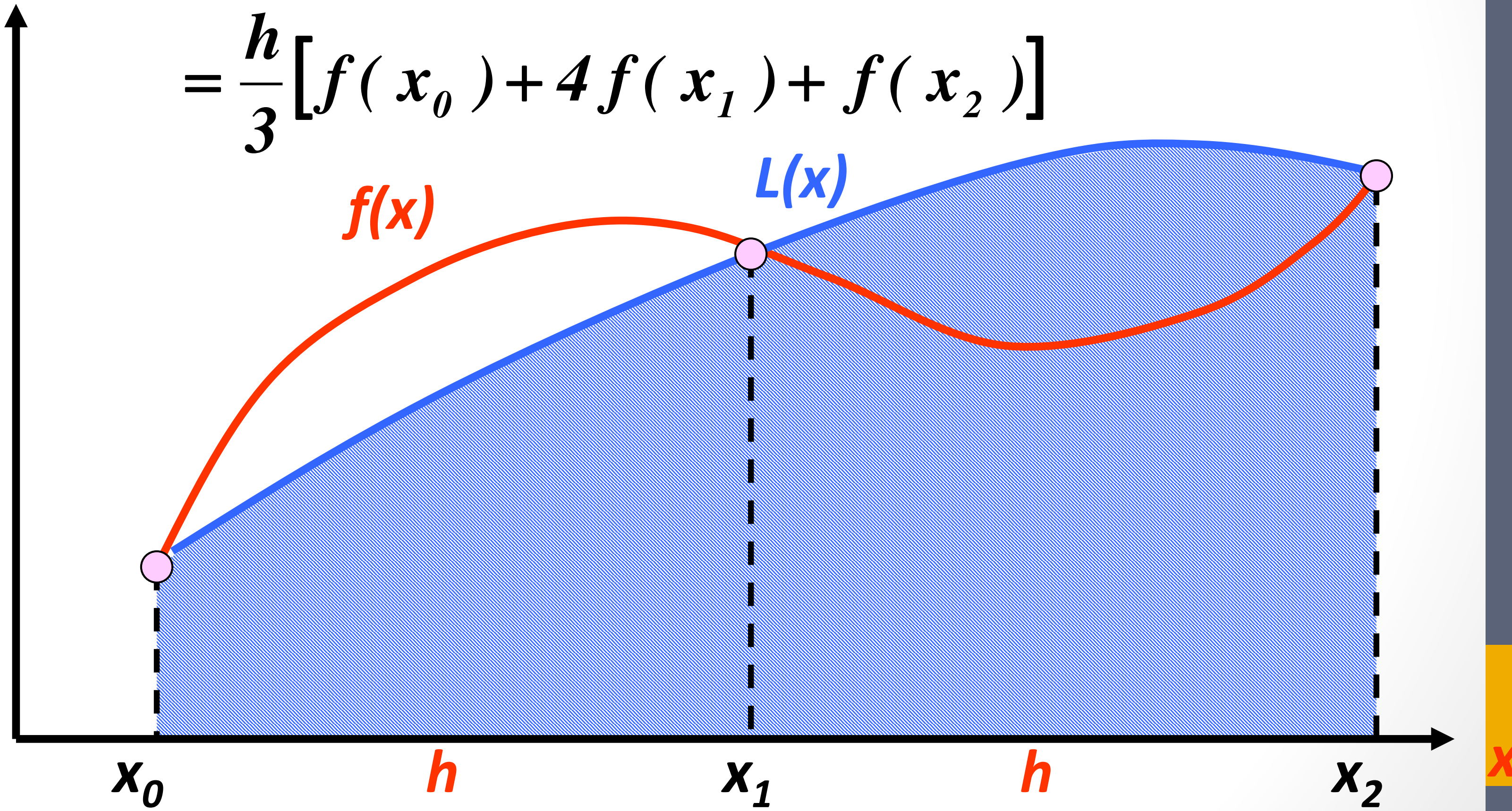
Η προσέγγιση βασίζεται στην χρήση μιας παραβολής ανάμεσα σε 2 διαστήματα. Επομένως η μέθοδος Simpson 1/3 χρησιμοποιείται μόνο με **άρτιο** αριθμό διαστημάτων και **περιττό** αριθμό σημείων.

Μέθοδος Simpson 1/3

Προσέγγιση της συνάρτησης με παραβολή (n=2)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

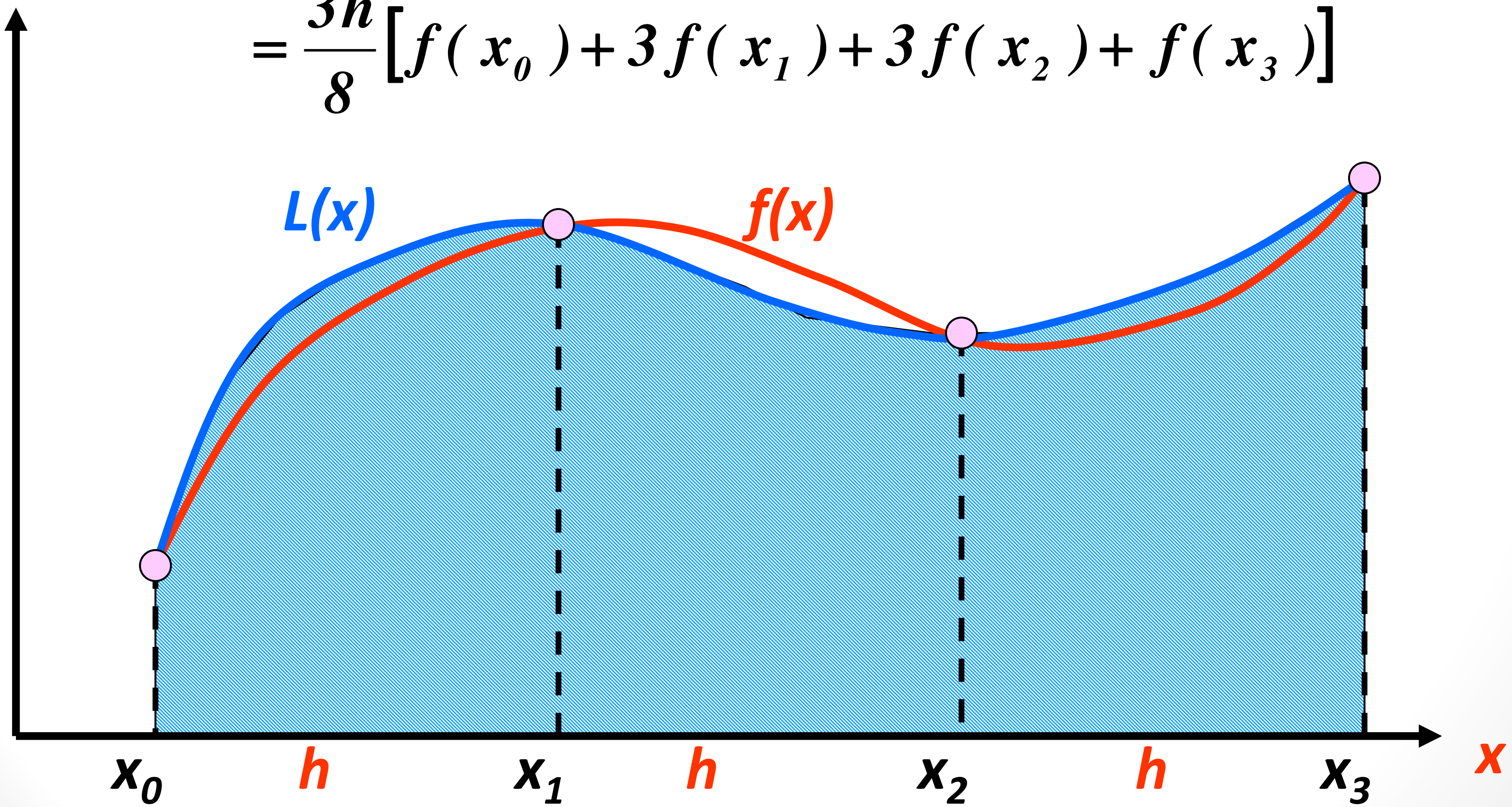


Μέθοδος Simpson 3/8

Προσέγγιση της συνάρτησης με πολυώνυμο (n=4)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$



Παράδειγμα :Μέθοδοι Simpson

- **Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:** $\int_0^4 xe^{2x}dx$
- **Μέθοδοι Simpson 1/3**

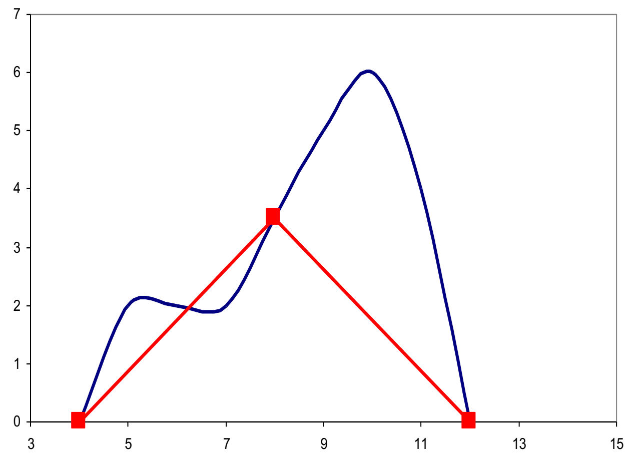
$$I = \int_0^4 xe^{2x}dx \approx \frac{h}{3}[f(0) + 4f(2) + f(4)]$$
$$= \frac{2}{3}\left[0 + 4(2e^4) + 4e^8\right] = 8240.411$$
$$\varepsilon = \frac{5216.926 - 8240.411}{5216.926} = -57.96\%$$

- **Μέθοδοι Simpson 3/8**

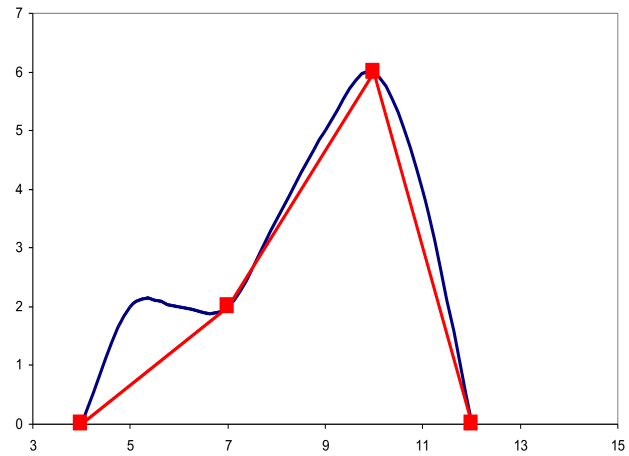
$$I = \int_0^4 xe^{2x}dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(0) + 3f(\frac{4}{3}) + 3f(\frac{8}{3}) + f(4)\right]$$
$$= \frac{3(4/3)}{8}[0 + 3(19.18922) + 3(552.33933) + 11923.832] = 6819.209$$
$$\varepsilon = \frac{5216.926 - 6819.209}{5216.926} = -30.71\%$$

Κανόνας Τραπεζίου με διαφορετικό αριθμό διαστημάτων

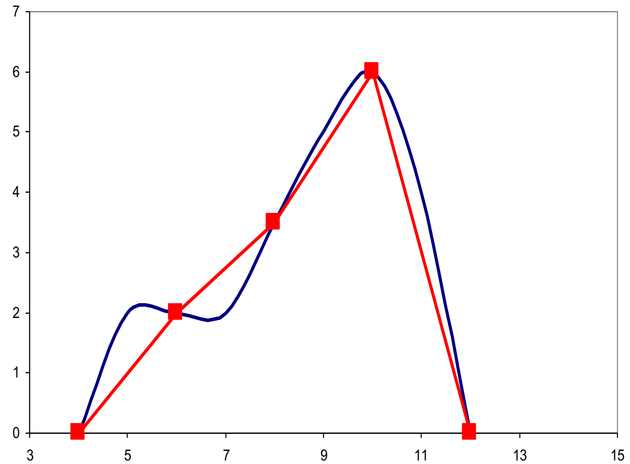
Δυο διαστήματα



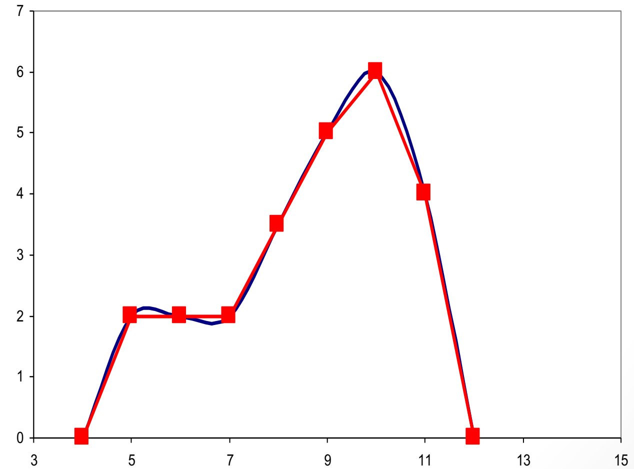
Τρία διαστήματα



Τέσσερα διαστήματα



Πολλά διαστήματα



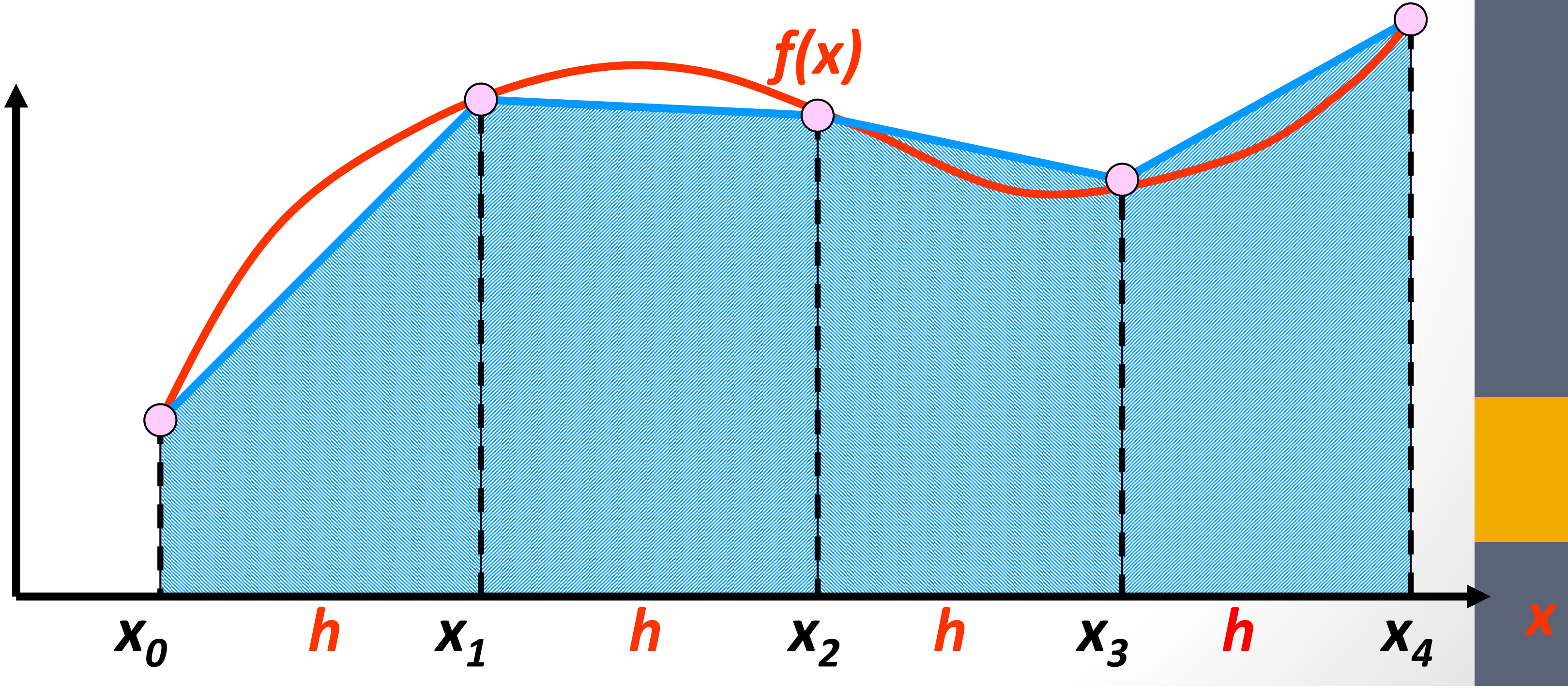
Μέθοδος τραπεζίου με πολλά διαστήματα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$



Μέθοδος τραπεζίου με πολλά και άνισα διαστήματα

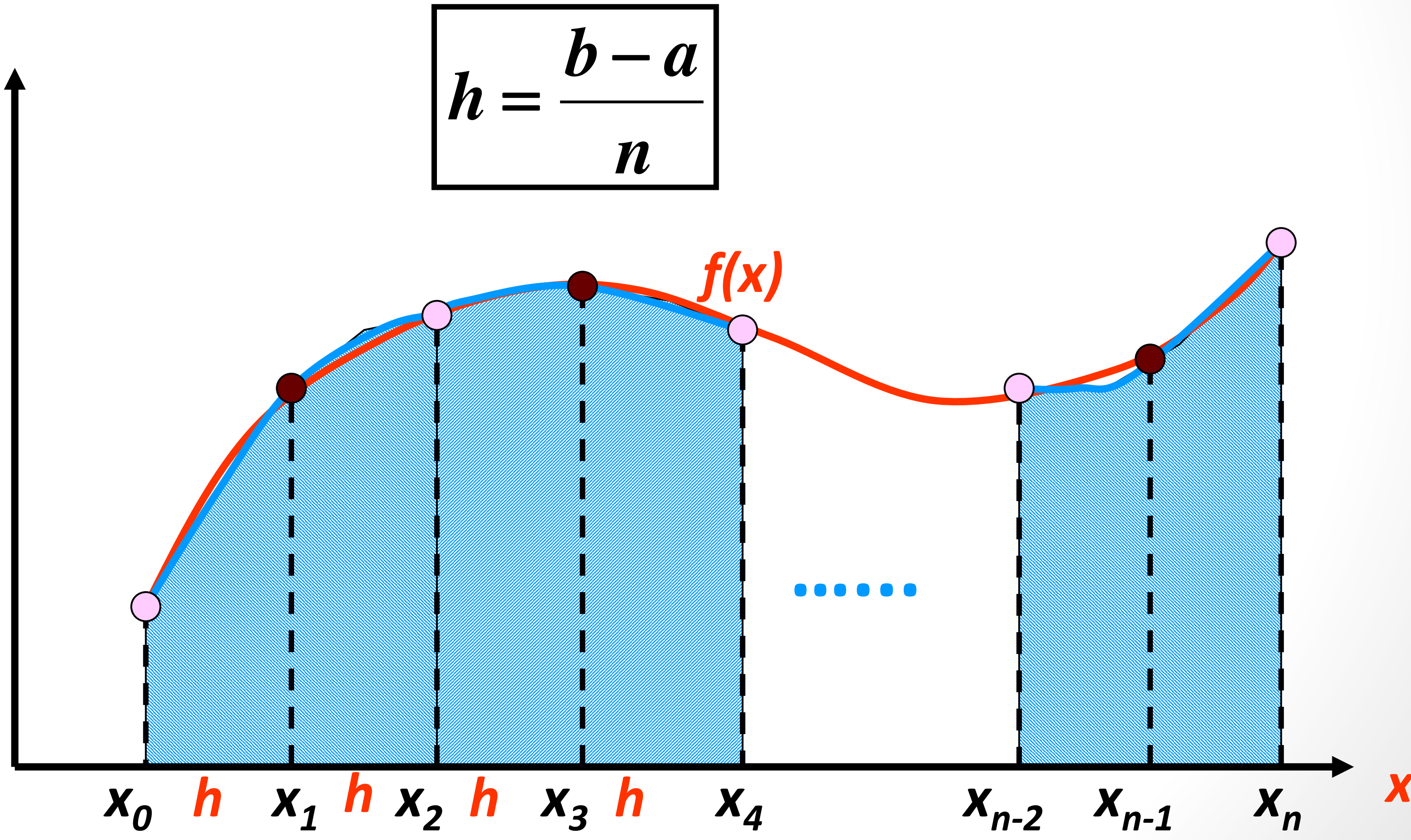
Υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$I = \int_0^4 xe^{2x}dx$$

- ***$h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $h_3 = 0.5$, $h_4 = 0.5$***

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^{3.5} f(x)dx + \int_{3.5}^4 f(x)dx \\
&= \frac{h_1}{2}\left[f(0) + f(2)\right] + \frac{h_2}{2}\left[f(2) + f(3)\right] \\
&+ \frac{h_3}{2}\left[f(3) + f(3.5)\right] + \frac{h_4}{2}\left[f(3.5) + f(4)\right] \\
&= \frac{2}{2}\left[0 + 2e^4\right] + \frac{1}{2}\left[2e^4 + 3e^6\right] + \frac{0.5}{2}\left[3e^6 + 3.5e^7\right] \\
&+ \frac{0.5}{2}\left[3.5e^7 + 4e^8\right] = 5971.58 \qquad \Rightarrow \varepsilon = -14.45\%
\end{aligned}$$

Μέθοδος Simpson με πολλά διαστήματα



Μέθοδος Simpson με πολλά διαστήματα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^4 xe^{2x}dx$

- *αρ. σημείων : 3, πλάτος: h = 2*

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \frac{h}{3}\left[f(0)+4f(2)+f(4)\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[0+4(2e^4)+4e^8\right] = 8240.411 \quad \Rightarrow \varepsilon = -57.96\% \end{aligned}}$$

- *αρ. σημείων : 5, πλάτος: h = 1*

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \frac{h}{3}\left[f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+f(4)\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[0+4(e^2)+2(2e^4)+4(3e^6)+4e^8\right] \\ &= 5670.975 \quad \Rightarrow \varepsilon = -8.70\% \end{aligned}}$$

Μέθοδος Simpson με πολλά και άνισα διαστήματα

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα: $$I = \int_0^4 xe^{2x}dx$$

αρ. σημείων: 3, πλάτος: $h_1 = 1.5$, $h_2 = 0.5$

$$I = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx$$

$$= \frac{h_1}{3}\left[f(0) + 4f(1.5) + 2f(3)\right]$$

$$+ \frac{h_2}{3}\left[f(3) + 4f(3.5) + 2f(4)\right]$$

$$= \frac{1.5}{3}\left[0 + 4(1.5e^3) + 3e^6\right] + \frac{0.5}{3}\left[3e^6 + 4(3.5e^7) + 4e^8\right]$$

$$= 5413.23 \quad \Rightarrow \varepsilon = -3.76\%$$

Συγκρίνοντας το σφάλμα ανά μέθοδο και αριθμό σημείων

	Αριθμός σημείων	% σφάλμα
Simpson 1/3	3 με πλάτος 1	57.96
Simpson 3/8	4 με πλάτος 4/3	30.71
Τραπεζίου **με άνισα διαστήματα**	5 ($h_1 = 2$, $h_2 = 1$, $h_3 = 0.5$, $h_4 = 0.5$)	14.45
Simpson 1/3	5 με πλάτος 1	8.70
Simpson 1/3 **με άνισα διαστήματα**	3 με πλάτος 1.5 3 με πλάτος 0.5	3.76

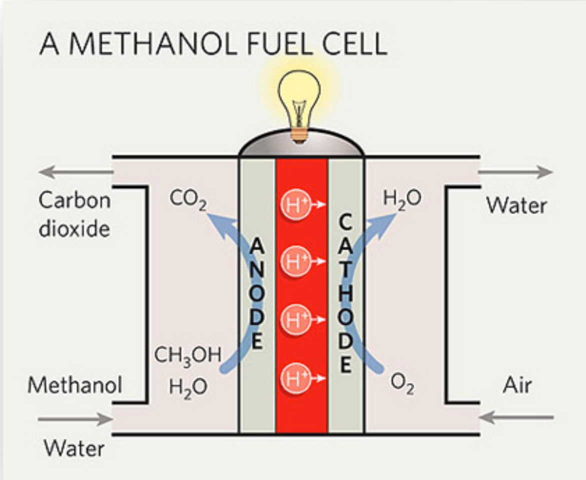
Εφαρμογή στην Χημική Μηχανική

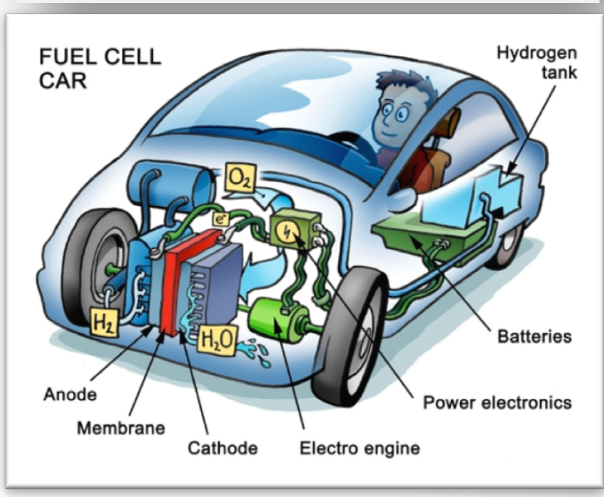
- Καθώς μελετήθηκε μια κυψέλη καυσίμου, καταστρώθηκε ένα ηλεκτροχημικό μοντέλο για το ρεύμα οξυγόνου-μεθανόλης.
- Μια απλοποιημένη μορφή του μηχανισμού κατανάλωσης του οξυγόνου δίνεται παρακάτω:

$$T = -\int_a^b \left(\frac{6.73x + 4.3025\times10^{-7}}{2.316\times10^{-11}x} \right) dx$$

a. Ζητείται να υπολογιστεί ο χρόνος που απαιτείται για την κατανάλωση του 50% της αρχικής ποσότητας (1.22×10^{-6} m^3) με την μέθοδο Simpson σε 4 διαστήματα.

b. Βρείτε το πραγματικό σφάλμα για το ερώτημα (a).





Εισαγωγικά για τις κυψέλες καυσίμου εδώ:
https://www.youtube.com/watch?v=aIakSwd6N6c

Εφαρμογή στην Χημική Μηχανική

$$T = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

$$n = 4$$

$$a = 1.22\times 10^{-6}$$

$$b = 0.61\times 10^{-6}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.61\times 10^{-6} - 1.22\times 10^{-6}}{4} = -0.15250\times 10^{-6}$$

$$f(x) = -\left[\frac{6.73x + 4.3025\times 10^{-7}}{2.316\times 10^{-11}x}\right]$$

Εφαρμογή στην Χημική Μηχανική

$$f(x_0)=f(1.22\times10^{-6})$$

$$f(1.22\times10^{-6})=-\left[\frac{6.73(1.22\times10^{-6})+4.3025\times10^{-7}}{2.316\times10^{-11}(1.22\times10^{-6})}\right]=-3.0581\times10^{11}$$

$$f(x_1)=f(1.22\times10^{-6}-0.15250\times10^{-6})=f(1.0675\times10^{-6})$$

$$f(1.0675\times10^{-6})=-\left[\frac{6.73(1.0675\times10^{-6})+4.3025\times10^{-7}}{2.316\times10^{-11}(1.0675\times10^{-6})}\right]=-3.0799\times10^{11}$$

$$f(x_2)=f(1.0675\times10^{-6}-0.15250\times10^{-6})=f(0.915\times10^{-6})$$

$$f(0.915\times10^{-6})=-\left[\frac{6.73(0.915\times10^{-6})+4.3025\times10^{-7}}{2.316\times10^{-11}(0.915\times10^{-6})}\right]=-3.1089\times10^{11}$$

$$f(x_3)=f(0.915\times10^{-6}-0.15250\times10^{-6})=f(0.76250\times10^{-6})$$

$$f(0.76250\times10^{-6})=-\left[\frac{6.73(0.76250\times10^{-6})+4.3025\times10^{-7}}{2.316\times10^{-11}(0.76250\times10^{-6})}\right]=-3.1495\times10^{11}$$

$$f(x_4)=f(x_n)=f(0.61\times10^{-6})$$

$$f(0.61\times10^{-6})=-\left[\frac{6.73(0.61\times10^{-6})+4.3025\times10^{-7}}{2.316\times10^{-11}(0.61\times10^{-6})}\right]=-3.2104\times10^{11}$$

Εφαρμογή στην Χημική Μηχανική

$$T = \frac{b-a}{3n}\left[f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right] = \frac{0.61\times10^{-6} - 1.22\times10^{-6}}{3(4)}\left[\begin{array}{l} f\left(1.22\times10^{-6}\right) + 4\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i=odd}}^{3} f(x_i) \\ +2\sum\limits_{\substack{i=2 \\ i=even}}^{2} f(x_i) + f\left(0.61\times10^{-6}\right) \end{array}\right]$$

$$= \frac{-0.61\times10^{-6}}{12}\left[f\left(1.22\times10^{-6}\right) + 4f(x_1) + 4f(x_3) + 2f(x_2) + f\left(0.61\times10^{-6}\right)\right]$$

$$= \frac{-0.61\times10^{-6}}{12}\left[\begin{array}{l} f\left(1.22\times10^{-6}\right) + 4f\left(1.0675\times10^{-6}\right) + \\ 4f\left(0.76250\times10^{-6}\right) + 2f\left(0.915\times10^{-6}\right) + f\left(0.61\times10^{-6}\right) \end{array}\right]$$

$$= \frac{-0.61\times10^{-6}}{12}\left[\begin{array}{l} -3.0582\times10^{11} + 4\left(-3.0799\times10^{11}\right) + \\ 4\left(-3.1495\times10^{11}\right) + 2\left(-3.1089\times10^{11}\right) - 3.2104\times10^{11} \end{array}\right]$$

=190136.9827 sec

Εφαρμογή στην Χημική Μηχανική

Υπολογίζοντας επακριβώς το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$T = -\int_{1.22\times10^{-6}}^{0.61\times10^{-6}} \left(\frac{6.73x + 4.3025\times10^{-7}}{2.316\times10^{-11}x} \right) dx \cong \mathbf{190135\ sec}$$

οπότε το σφάλμα είναι:

e = (Αναλυτική λύση) – (Αριθμητική λύση)

= 190135 - 190136.9827

= -1.9838

Εφαρμογή στην Χημική Μηχανική

Πιο μεγάλη αξία έχει τις περισσότερες φορές να κρίνουμε το ολοκλήρωμα ως ποσοστό της ακριβούς τιμής του ολοκληρώματος, για να μπορούμε να δούμε την σχετική απόσταση.

Για την συγκεκριμένη περίπτωση είναι:

$$Error = \left|\frac{-1.9838}{190135}\right| \cdot 100 = 0.0010434\%$$

Αριθμητική ολοκλήρωση
Υπολογισμός σφαλμάτων