ΘΕΜΑ 3

Άσκηση εφαρμογής της μεθόδου Newton Raphson

ΘΕΜΑ 3

Η ακόλουθη αντίδραση πραγματοποιείται σε έναν αντιδραστήρα αέριας φάσης:

$$H_2S+O_2 \leftrightarrow H_2+SO_2$$

Όταν το σύστημα φτάσει σε ισορροπία στους 600K και 10 atm, τα μοριακά κλάσματα στο παραγόμενο αέριο μίγμα ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{y_{H_2} y_{SO_2}}{10/64 - 64(y_{H_2S} y_{O_2})^2} = 1.51457$$

Γράψτε πρόγραμμα που να χρησιμοποιεί την μέθοδο Newton-Raphson για τον υπολογισμό του μείγματος ισορροπίας: δηλαδή υπολογίστε πόσα mole H_2S, O_2, H_2, SO_2 απαρτίζουν το μείγμα ισορροπίας.

- Υπόδειξη: Υπολογίστε την ποσότητα του H_2S που έχει καταναλωθεί (αντιδράσει) στην περίπτωση που η αντίδραση κινείται δεξιά ή την ποσότητα H_2S που έχει παραχθεί στην περίπτωση που η αντίδραση κινείται αριστερά για να επιτευχθεί ισορροπία στους 600K και 10 atm.

A.

N_{H_2S}	N_{O_2}	N_{H_2}	N_{SO_2}
3	**2**	**0**	**0**

B.

N_{H_2S}	N_{O_2}	N_{H_2}	N_{SO_2}
3	**2**	**3**	**0**

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Αρχική κατάσταση μείγματος:

N_{H2S} = **5**mol, N_{O2} = **3**mol, N_{H2} = **0**mol, N_{SO2} = **0**mol

- $N_{gaseous\ mixture}$ = **8**mol

- Αρχικά μοριακά κλάσματα: y_{H2S}=**0.625**, y_{O2}=**0.375**mol

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Από τη στοιχειομετρία της αντίδρασης έχουμε για κάθε ένα **mole** αντιδρώντος τη δημιουργία ενός **mole** προϊόντος
- Είναι αναμενόμενο ότι μετά την αποκατάσταση της ισορροπίας θα ισχύει:

$$\mathbf{2} \leq H_2S \leq \mathbf{5} \;\&\; \mathbf{0} \leq O_2 \leq \mathbf{3}\text{mol}$$

και

$$\mathbf{0.25} \leq y_{H2S} \leq \mathbf{0.625} \;\&\; 0 \leq y_{O2} \leq \mathbf{0.375}\text{mol}$$

- Τέλος έχουμε ως δεδομένο ότι ισχύει η σχέση μεταξύ αντιδρώντων – προϊόντων που καθορίζει την ισορροπία:

$$\frac{y_{H_2} y_{SO_2}}{10/64 - 64(y_{H_2S} y_{O_2})^2} = 1.51457$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Έστω ότι δημιουργήθηκαν **x mol** προϊόντων

- Από τη στοιχειομετρία της αντίδρασης και τη δεδομένη αρχική ποσότητα αντιδρώντων προκύπτει η τελική κατάσταση ισορροπίας του μείγματος:

$$N_{H2S}=\mathbf{5-x}\ \text{mol},\ N_{O2}=\mathbf{3-x}\ \text{mol},$$
$$N_{H2}=\mathbf{x}\ \text{mol},\ N_{SO2}=\mathbf{x}\ \text{mol}$$

- Έτσι τα μοριακά κλάσματα αντιδρώντων και προϊόντων δεδομένου ότι το $N_{mixture}$=**8mol** θα είναι:

$$y_{H2S}=\mathbf{(5-x)/8}\ \text{mol},\ y_{O2}=\mathbf{(3-x)/8}\ \text{mol},$$
$$y_{H2}=\mathbf{x/8}\ \text{mol},\ y_{SO2}=\mathbf{x/8}\ \text{mol}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Έτσι η σχέση που ισχύει για την ισορροπία στους 600**K** και 10**atm** θα γίνει:

$$\frac{x^2}{10-[(5-x)(3-x)]^2}=1.51457$$

- και ισοδύναμα προκύπτει η πολυωνυμική σχέση 4ου βαθμού:

$$1.51457\,[(5-x)(3-x)]^2+x^2-15.1457=0 \qquad (\text{εξ. } \mathbf{1})$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Το πρόβλημα υπολογισμού της ισορροπίας έχει αναχθεί σε πρόβλημα υπολογισμού των ριζών της εξίσωσης (εξ. $\mathbf{1}$).
- Η επίλυσή της (εξ. $\mathbf{1}$) με αναλυτικές μεθόδους είναι επίπονη
- Σε πιο πολύπλοκες σχέσεις από αυτήν η επίλυση με **αναλυτικές** μεθόδους είναι αδύνατη γενικά.
- Για τους λόγους αυτούς θα ακολουθήσουμε **αριθμητικές** μεθόδους επίλυσης

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ F(X)=0

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΡΙΖΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Στην κατηγορία αυτή υπάρχουν πολλές μεθοδολογίες, οι πιο δημοφιλείς είναι:

- Μέθοδος διχοτόμησης (**Bolzano**),

Βασίζεται στο **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**:

Αν η f ανήκει στο C[a,b] και K είναι ένας οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ του f(a) και f(b), τότε υπάρχει ένας αριθμός c που ανήκει στο (a,b) για το οποίο f(c)=K

(+)Συγκλίνει πάντα (-)Είναι γενικά μια αργή μέθοδος

- Μέθοδος **Newton Raphson**

Βασίζεται στο **ανάπτυγμα Taylor**:

*Έστω y=f(x) και ότι **f(x0)** & **dy/dx0** είναι γνωστά, αλλά θέλουμε να γνωρίζουμε την τιμή της **f(x1)** που **x1** έχει κοντινή τιμή στην **x0**. Μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή της **f(x1)** από την γραμμική σχέση:*

$$f(x_1) \approx f(x_0) + dy/dx_0(x_1 - x_0)$$

(+)Είναι πολύ γρήγορη μέθοδος με πολύ μικρό σφάλμα

(-)Έχει προβλήματα σταθερότητας και εξαρτάται από τις αρχικές τιμές

ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON-RAPHSON

Για να βρούμε τις ρίζες $\rho=(\rho_1,\rho_2,...,\rho_n)$ της εξίσωσης **f(x)=0,** η οποία έχει γνωστή παράγωγο **f'(x$_0$)** σε μια τιμή **x$_0$** στη γειτονία της ρίζας ρ_i**,** από το ανάπτυγμα **Taylor** πρώτου βαθμού θα έχουμε:

$$f(\rho_i) \approx f(x_0) + f'(x_0)(\rho_i - x_0)$$

Και ισοδύναμα προκύπτει η προσέγγιση **x$_1$** της ρ_i:

$$\rho_i \approx x_1 = x_0 + \frac{f(\rho_i) - f(x_0)}{f'(x_0)} \overset{f(\rho_i)=0}{=} x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \text{(εξ. 2)}$$

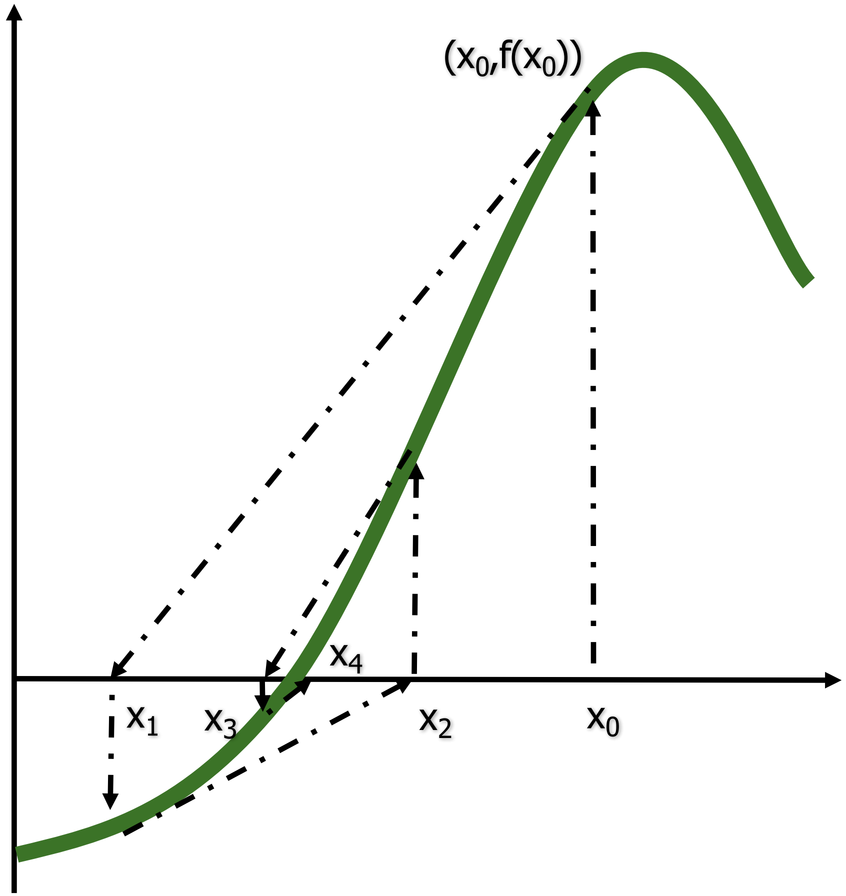
ΜΕΘΟΔΟΣ NEWTON-RAPHSON

Στη σχέση (εξ. **2**) η τιμή $\mathbf{x}_1$ είναι μια καλύτερη προσέγγιση της ρίζας $\rho_\mathbf{i}$. Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία της (εξ. **2**) θεωρώντας ως αρχική τιμή την προσέγγιση $\mathbf{x}_1$ στη θέση της $\mathbf{x}_0$, προκύπτει η επαναληπτική σχέση που ορίζει την μέθοδο Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,\ldots \qquad \text{(εξ. } \mathbf{3}\text{)}$$

Η σχέση αυτή τερματίζεται όταν η εκτίμηση του σφάλματος είναι μικρότερη από μια επιθυμητή τιμή ανοχής: $\mathbf{|x_{n+1}-x_n| \leq tol}$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ



Στο σχήμα δεξιά παρατηρούμε την γεωγραφική ερμηνεία της μεθόδου NR. Έστω ένα σημείο x_0, το οποίο θεωρούμε ως την πρώτη προσέγγιση στη ρίζα. Παίρνοντας την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $[x_0, f(x_0)]$ προσδιορίζουμε ένα νέο σημείο x_1 από την τομή της εφαπτομένης με τον άξονα, κ.ο.κ.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Σε πραγματικά προβλήματα ο υπολογισμός της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης **f(x) δεν είναι εφικτός**

- λόγω της **πολυπλοκότητας** των αλγεβρικών πράξεων που απαιτούνται
- σε πραγματικά προβλήματα η εξίσωση **f(x)** δύναται να είναι πεπλεγμένη και **να μην είναι δυνατή η ανάλυσή της**.

Για τους λόγους αυτούς η πρώτη παράγωγος **f'(x)** μπορεί να προσεγγιστεί από την σχέση του ορισμού της:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

καλύτερα αποτελέσματα μπορούν να επιτευχθούν από τη σχέση:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Όπως κάθε μεθοδολογία της αριθμητικής ανάλυσης που εξαρτάται από αρχικές τιμές, έτσι και η μεθοδολογία **Newton Raphson** για την εύρεση των ριζών εξίσωσης **εξαρτάται ιδιαίτερα από τις αρχικές τιμές**.

Με λανθασμένη εκτίμηση των αρχικών τιμών είναι δυνατόν να οδηγήσει σε

- **μη εύρεση όλων των ριζών της εξίσωσης**
- **αένααες επαναλήψεις** χωρίς σύγκλιση.

Σε πραγματικά προβλήματα η εκτίμηση των αρχικών τιμών γίνεται **βάσει εμπειρίας** ή με τη χρήση μιας **δεύτερης μεθοδολογίας** για τον χονδροειδή υπολογισμό των αρχικών τιμών.

Το πιο συνηθισμένο σε τέτοιες περιπτώσεις είναι η διερεύνηση στο πεδίου ορισμού της συνάρτησης για τον υπολογισμό των αρχικών τιμών με τη **μέθοδο της διχοτόμησης**.

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

Σύμφωνα με την αρχή της μεθόδου της διχοτόμησης όταν σε ένα διάστημα [a, b] ισχύει ότι:

$$f(a)f(b)<0$$

τότε υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα [a, b].

Βέβαια πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στην περίπτωση που στο διάστημα [a, b] υπάρχουν περισσότερες της μιας ρίζες, οπότε δεν ισχύει και η παραπάνω συνθήκη.

Για το λόγο αυτό σε κάθε πρόβλημα θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη όλες οι παράμετροι του προβλήματος και να συνεκτιμώνται ώστε η επίλυση να προσεγγίζει όσο το δυνατόν περισσότερο στην πραγματικότητα

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ NEWTON RAPHSON

ΨΕΥΤΟΚΩΔΙΚΑΣ NEWTON RAPHSON

<u>INPUT:</u> x_0, h, tol_root (ανοχή στην εύρεση ρίζας), tol_x (ανοχή στις τιμές x), i_{max}

(τις τιμές για τις παραπάνω παραμέτρους πρέπει να τις επιλέξετε εσείς)

STEP1: SET $x=x_0$, SET i=0

STEP2: SET i=i+1

CALCULATE f(x)

CALCULATE $f^-(x)= f(x-h)$

CALCULATE $f^+(x)= f(x+h)$

CALCULATE $f'(x)=[f^+(x)-f^-(x)]/2h$

STEP4: **if** f'(x)=0 **then** {

if f(x) <= tol_root **then goto 10** //success

else SET $X=X_0+h$

}

STEP5: SET $x_{new}=x-f(x)/f'(x)$

STEP6: **if** $i > i_{max}$ **then exit** //failure

STEP7: **if** abs(x_{new}-x) <= tol_x **then goto** STEP10 //success

else goto STEP8

STEP8: SET $x=x_{new}$

STEP9: **goto** STEP2

STEP10: **exit**

<u>OUTPUT</u>: $x_{root}=x_{new}$

ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΕ ΓΛΩΣΣΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Οι βασικές αρχές για να δημιουργηθεί ένα πρόγραμμα που θα επιλύει το παραπάνω πρόβλημα είναι:

1. Κατασκευή μιας κεντρικής ρουτίνας εισαγωγής αρχικών τιμών (**x**, **h**, **tol**).
2. Κατασκευή των **function** που θα υπολογίζουν την τιμή της συνάρτησης και την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης
3. Κατασκευή ενός **function** που θα υπολογίζει την εκτίμηση σφάλματος **tol**
4. Κατασκευή ενός **subroutine** ή **function** το οποίο θα εκτελεί μέχρι $\mathbf{i}_{max}$ **loops** για τον υπολογισμό της νέας τιμής του **x** βάσει του αναγωγικού τύπου της **Newton Raphson**
5. Αν η εκτέλεση ήταν επιτυχής τότε καταγραφή σε αρχείο των αποτελεσμάτων ή ενημέρωση του χρήστη μέσω κατάλληλου διαλόγου. Σε αντίθετη περίπτωση ενημέρωση του χρήστη (αρχείο ή διάλογος) ότι η μεθοδολογία απέτυχε σε τόσους κύκλους.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Αρχικές τιμές:
Η σχέση (εξ. **1**) είναι πολυώνυμο 4ου βαθμού. Οπότε περιμένουμε να έχει μέχρι και 4 ρίζες, από τις οποίες μόνον η μια θα έχει φυσική σημασία και οι υπόλοιπες θα πρέπει να απορριφθούν.

Δεδομένης της στοιχειομετρίας του προβλήματος η τιμή του x που θα είναι αποδεκτή είναι εντός τους διαστήματος [0, 3], δηλαδή από το να αντιδράσει όλο το O_2 (μετατόπιση της ισορροπίας δεξιά) μέχρι να μην αντιδράσει καθόλου (μετατόπιση της ισορροπίας αριστερά.

Έτσι μπορούμε να δώσουμε ως αρχική τιμή είτε το x=0 (δηλαδή ότι δεν αντέδρασε καθόλου), είτε x=3 (δηλαδή ότι αντέδρασε όλο).

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Αρχική τιμή x=0

Παράμετροι: h=0.001, tol=1e-5 και maximum αριθμό επαναλήψεων τις 50 φορές.

n	f(x)	$f^-(x)$	$f^+(x)$	$f'(x)$	x_n	x_{n+1}	error
0	325.63255	325.26920	325.99619	-363.49682	0.00000	0.89583	0.89583
1	98.61030	98.77100	98.44978	-160.61340	0.89583	1.50979	0.61396
2	28.10550	28.18100	28.03010	-75.44652	1.50979	1.88232	0.37252
3	6.78783	6.82881	6.74693	-40.94095	1.88232	2.04811	0.16580
4	1.00714	1.03630	0.97804	-29.13072	2.04811	2.08268	0.03457
5	0.03847	0.06542	0.01158	-26.91922	2.08268	2.08411	0.00143
6	0.00006	0.02693	-0.02673	-26.82961	2.08411	2.08412	0.00000

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Αρχική τιμή: x=3

Παράμετροι: h=0.001, tol=1e-5 και maximum αριθμό επαναλήψεων τις 50 φορές.

n	f(x)	$f^-(x)$	$f^+(x)$	$f'(x)$	x_n	x_{n+1}	error
0	-6.14570	-6.15169	-6.13969	5.99999	3.00000	4.02428	1.02428
1	2.56195	2.55405	2.56985	7.90153	4.02428	3.70005	0.32423
2	-0.20103	-0.21009	-0.19198	9.05379	3.70005	3.72225	0.02220
3	-0.00062	-0.00962	0.00838	8.99736	3.72225	3.72232	0.00007
4	0.00000	-0.00900	0.00900	8.99718	3.72232	3.72232	0.00000

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Έτσι βρέθηκαν δυο λύσεις για τις δυο αρχικές τιμές:

Λύση I: αντέδρασαν **x=2.08412 mol**, άρα η σύσταση του τελικού μείγματος ισορροπίας στους 600K και 10 atm θα είναι:

$$N_{H2S} = \mathbf{2.91588}\ N_{O2} = \mathbf{0.91588}\ N_{H2} = \mathbf{2.08412}\ N_{SO2} = \mathbf{2.08412}$$

Λύση II: αντέδρασαν **x=3.72232 mol**, άρα η σύσταση του τελικού μείγματος ισορροπίας στους 600K και 10 atm θα είναι:

$$N_{H2S} = \mathbf{1.27768}\ N_{O2} = \mathbf{-0.72232}\ N_{H2} = \mathbf{3.72232}\ N_{SO2} = \mathbf{3.72232}$$

Η ΛΥΣΗ II ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙ ΝΑ ΕΧΕΙ ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ!

ΕΡΩΤΗΜΑ 1

Τέλος για την εύρεση τυχόν άλλων λύσεων θα έπρεπε να γίνει διερεύνηση στο πεδίο τιμών της **f(x)**

Ο έλεγχος αυτός χρειάζεται να γίνει μόνον για να δούμε αν υπάρχουν άλλες λύσεις στο διάστημα [0, 3], στο οποίο έχουμε βρει την λύση x=2.08412 mol.

Έτσι μπορούμε να ελέγξουμε τις τιμές της **f(x)** για **x=0**, **x=1**, **x=2**, **x=2.25**, **x=2.50**, **x=2.75** και **x=3.00**

x	0.0	1.0	2.0	2.25	2.5	2.75	3.0
f(x)	325.63255	82.78678	2.48543	-3.64036	-6.52918	-7.10398	-6.14570
πρόσημο	+	+	+	-	-	-	-

Από τον έλεγχο αυτό συμπεραίνουμε ότι στο διάστημα [0,3] υπάρχει μόνον μια ρίζα και αυτή βρίσκεται στο διάστημα (2.00, 2.25), οπότε δεν χρειάζεται να δοκιμάσουμε άλλες αρχικές τιμές

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ
(ΕΡΩΤΗΜΑ 2)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (ΕΡΩΤΗΜΑ 2)

- Αρχική κατάσταση μείγματος:

N_{H2S} = **3mol**, N_{O2} = **2mol**, N_{H2}= **3mol**, N_{SO2} = **0mol**

- $N_{gaseous\ mixture}$ = **8mol**

- Αρχικά μοριακά κλάσματα: y_{H2S}=**0.375**, y_{O2}=**0.250**mol

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (ΕΡΩΤΗΜΑ 2)

- Από τη στοιχειομετρία της αντίδρασης έχουμε για κάθε ένα **mole** αντιδρώντος τη δημιουργία ενός **mole** προϊόντος

- Είναι αναμενόμενο ότι μετά την αποκατάσταση της ισορροπίας θα ισχύει:

$$\mathbf{1 \leq H_2S \leq 3 \ \& \ 0 \leq O_2 \leq 2mol}$$

και

$$\mathbf{0.125 \leq y_{H2S} \leq 0.375 \ \& \ 0 \leq y_{O2} \leq 0.250mol}$$

- Τέλος έχουμε ως δεδομένο ότι ισχύει η σχέση μεταξύ αντιδρώντων – προϊόντων που καθορίζει την ισορροπία:

$$\frac{y_{H_2} y_{SO_2}}{10/64 - 64(y_{H_2S} y_{O_2})^2} = 1.51457$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (ΕΡΩΤΗΜΑ 2)

- Έστω ότι δημιουργήθηκαν **x mol** προϊόντων και ότι η αντίδραση κινήθηκε προς τα δεξιά.

- Από τη στοιχειομετρία της αντίδρασης και τη δεδομένη αρχική ποσότητα αντιδρώντων προκύπτει η τελική κατάσταση ισορροπίας του μείγματος:

$$N_{H2S}=\mathbf{3\text{-}x}\text{mol},\ N_{O2}=\mathbf{2\text{-}x}\text{mol},$$
$$N_{H2}=\mathbf{(3+x)}\text{mol},\ N_{SO2}=\mathbf{x}\text{mol}$$

- Έτσι τα μοριακά κλάσματα αντιδρώντων και προϊόντων δεδομένου ότι το $N_{mixture}$**=8mol** θα είναι:

$$y_{H2S}=\mathbf{(3\text{-}x)/8}\text{mol},\ y_{O2}=\mathbf{(2\text{-}x)/8}\text{mol},\ y_{H2}=\mathbf{(3+x)/8}\text{mol},\ y_{SO2}=\mathbf{x/8}\text{mol}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ (ΕΡΩΤΗΜΑ 2)

- Έτσι η σχέση που ισχύει για την ισορροπία στους 600**K** και 10**atm** θα γίνει μετά τις απαλοιφές:

$$\frac{x(3+x)}{10-[(2-x)(3-x)]^2}=1.51457$$

- και ισοδύναμα προκύπτει η πολυωνυμική σχέση 4^{ου} βαθμού:

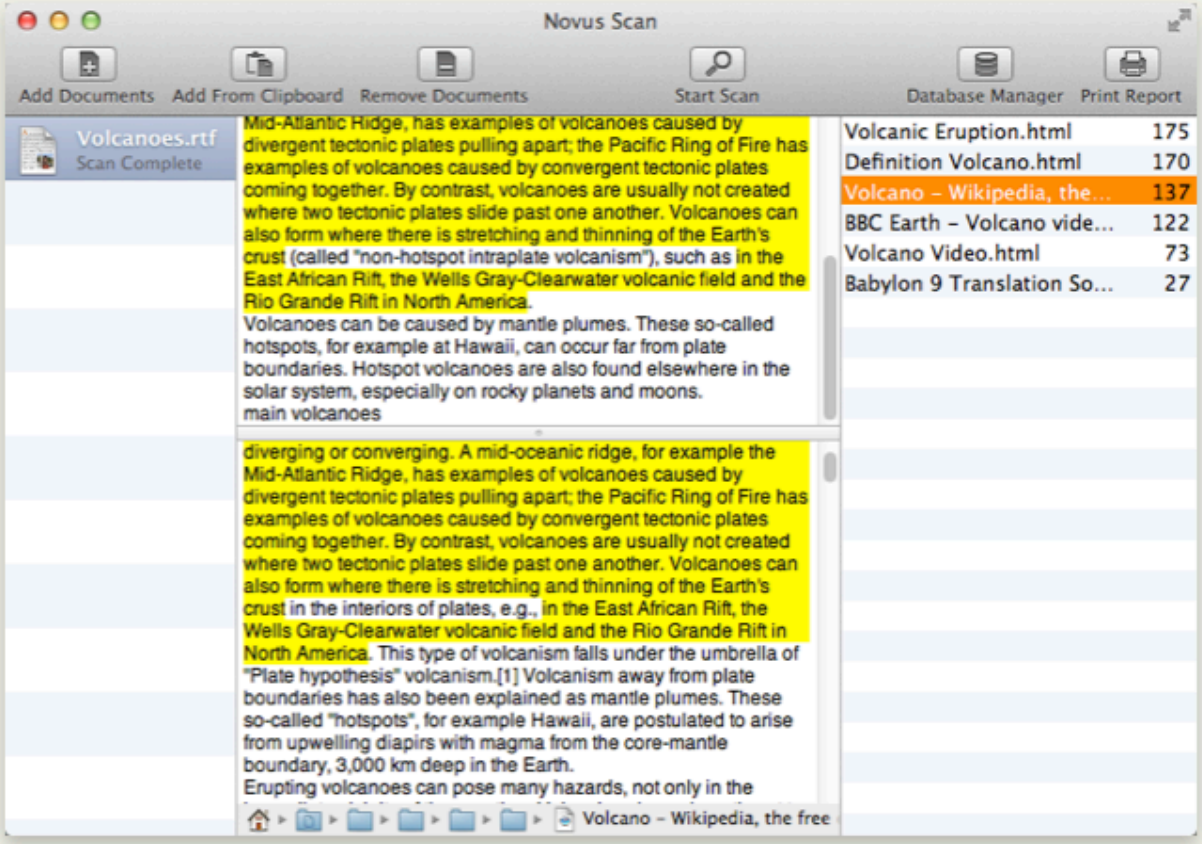
$$1.51457\,[(2-x)(3-x)]^2+x(3+x)-15.1457=0 \qquad (εξ.\ \mathbf{4})$$

- Στο προηγούμενο ερώτημα η σχέση ήταν:

$$1.51457\,[(5-x)(3-x)]^2+x^2-15.1457=0$$

Scan Away

Click a button and the scanning engine compares your document to the contents of your database, looking for matching groups of words.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ - ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΕΙΣ

- Οποιαδήποτε απορία – διευκρίνηση στο e-mail: fdoganis@chemeng.ntua.gr
- Σε οποιαδήποτε επικοινωνία θα σημειώνετε το ονοματεπώνυμό σας, βάζοντας υποχρεωτικά στο θέμα του μηνύματος «3η Εργασία ΑΣΧΜ».