

**Μάθημα: Εισαγωγή στην Βελτιστοποίηση
Συστημάτων****Τρίτη, 10/1/2013**Διδάσκοντες: Μ.Γ. Καρλαύτης, Αναπληρωτής Καθηγητής
Ν.Δ. Λαγαρός, Λέκτορας**5^η Σειρά ασκήσεων-Μηγραμμικός Προγραμματισμός**

Για τα παρακάτω προβλήματα Μηγραμμικού Προγραμματισμού, να γίνει η διατύπωση του προβλήματος (αλγόριθμος) και να γίνει επίλυση αυτών μέσω matlab (**optimtool**, **fminbnd**, **fminunc**, **ga**):

1. Να γίνει γραφική απεικόνιση των παρακάτω συναρτήσεων (**ezplot**, **ezmesh**, **ezsurf**, **ezcontour**):

$$1.1) f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$$

$$1.2) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$1.3) f(x) = \sin[(2x + 3)x]$$

$$1.4) f(x) = (x - \pi)^2 - 1$$

$$1.5) f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$1.6) f(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$$

$$1.7) f(x, y) = (x - 22.22)^2 + (y - 44.44)^2 - 17$$

2. Να βρεθεί το βέλτιστο στις παρακάτω συναρτήσεις και να γίνει γραφική απεικόνιση αυτών για πλήθος μεταβλητών $n=2$.

Branin

$$f(x) = \left(x_2 - \frac{5.1}{4\pi^2} x_1^2 + \frac{5}{\pi} x_1 - 6 \right)^2 +$$

$$10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos x_1 + 10$$

$$-5 \leq x_1 \leq 10; 0 \leq x_2 \leq 15$$

Haupt-1

$$f(x) = x_1 \sin(4x_1) + 1.1x_2 \sin(2x_2)$$

$$0 \leq x_1 \leq 10; x^* = \{9.039 \quad 8.668\}; f(x^*) = -18.5547$$

Six-hump camel problem

$$f(x) = 4x_1^2 - 2.1x_1^4 + \frac{1}{3}x_1^6 + x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_2^4$$

$$-5 \leq x_1, x_2 \leq 5$$

Zakharov

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2 + \left(\sum_{j=1}^n \frac{j}{2} x_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n \frac{j}{2} x_j \right)^4$$

$$-5 \leq x_j \leq 5; x^* = \{0 \quad \dots \quad 0\}; f(x^*) = 0$$

Goldstein and Price

$$f(x) = \left[1 + (x_1 + x_2 + 1)^2 (19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2) \right] \cdot \left[30 + (2x_1 - 3x_2)^2 (18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2) \right]$$

$$-2 \leq x_1, x_2 \leq 2; x^* = \{0 \quad -1\}; f(x^*) = 3$$

Haupt-2

$$f(x) = -e^{-0.2\sqrt{0.5(x_1^2 + x_2^2)} + 3(\cos(2x_1) + \sin(2x_2))}$$

$$-5 \leq x_1, x_2 \leq 5; x^* = \{0 \quad 0.7687\}; f(x^*) = -345.3599$$

Shaffer

$$f(x) = 0.5 + \frac{\sin(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2 - 0.5}{(1 + 0.001(x_1^2 + x_2^2))^2}$$

$$-100 \leq x_1, x_2 \leq 100; x^* = \{0 \quad 0\}; f(x^*) = 0$$

Sphere

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2$$

$$-100 \leq x_j \leq 100; x^* = \{0 \quad \dots \quad 0\}; f(x^*) = 0$$

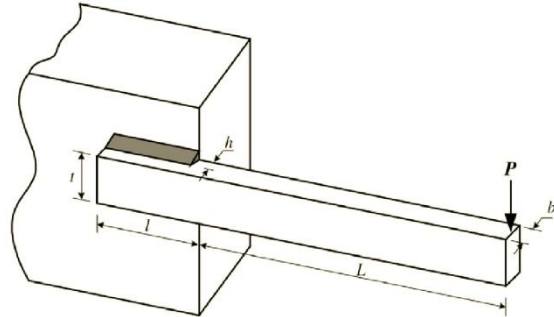
3. Να βρεθεί το βέλτιστο για τις συναρτήσεις του Πίνακα 1 και να γίνει γραφική απεικόνιση αυτών για πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού D=2.

Πίνακας 1.

Name	Equation	Number of dimensions (D)	Bound Constraints
Griewank	$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^D x_i^2 - \prod_{i=1}^D \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	10	$[-600, 600]^D$
Ackley	$f(x) = -20 \exp\left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D \cos(2\pi x_i)\right) + 20 + \exp(1)$	15	$[-32.768, 32.768]^D$
Rastrigin	$f(x) = 10D + \sum_{i=1}^D [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)]$	10	$[-5.12, 5.12]^D$
Schwefel ^a	$f(x) = 418.9829D + \sum_{i=1}^D \left[-x_i \sin(\sqrt{ x_i })\right]$	15	$[-500, 500]^D$

4. Η συγκολλημένη δοκός του Σχήματος 1 ζητείται να σχεδιαστεί για ελάχιστο κόστος κατασκευής. Η δοκός είναι κατασκευασμένη από χάλυβα και είναι πακτωμένη στο ένα άκρο της, ενώ φορτίζεται με ένα φορτίο P που ενεργεί στο ελεύθερο άκρο της. Το πάχος της συγκόλλησης (h), το μήκος της συγκόλλησης (l), το ύψος της δοκού (t) και το πλάτος της δοκού (b) αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού. Η διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης με την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς εκφράζεται ως εξής:

Σχήμα 1.



$$\min f = (1 + C_1) \cdot h^2 \cdot l + C_2 \cdot t \cdot b \cdot (L + 1)$$

$$\text{s.t. } g_1 = \tau_d - \tau \geq 0$$

$$g_2 = \sigma_d - \sigma \geq 0$$

$$g_3 = b - h \geq 0$$

$$g_4 = P_c - P \geq 0$$

$$g_5 = 0.25 - \delta \geq 0$$

$$\tau = \sqrt{(\tau')^2 + (\tau'')^2} + l \tau' \tau'' / \sqrt{0.25(l^2 + (h+t)^2)}$$

$$\sigma = \frac{504000}{t^2 b}$$

$$P_c = 64746(1 - 0.0282346t)tb^3$$

$$\delta = \frac{2.1952}{t^3 b}$$

$$\tau' = \frac{6000}{\sqrt{2}hl}$$

$$\tau'' = \frac{6000(14 + 0.5l)\sqrt{0.25(l^2 + (h+t)^2)}}{2\{0.707hl(l^2/12 + 0.25(h+t)^2)\}}$$

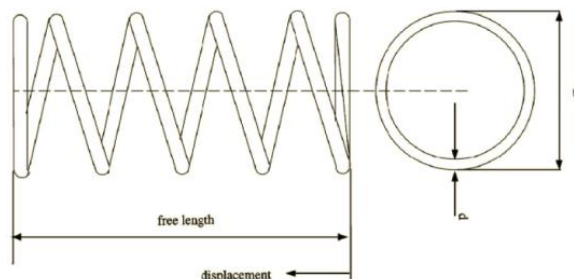
Τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος είναι: $0.125 \leq h \leq 5$ (in), $0.1 \leq l, t \leq 10$ (in) και $0.1 \leq b \leq 5$ (in), ενώ οι σταθερές παράμετροι της διατύπωσης του προβλήματος βρίσκονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2.

Constant Item	Description	Values
C_1	cost per volume of the welded material	0.10471 (\$/in ³)
C_2	cost per volume of the bar stock	0.04811 (\$/in ³)
τ_d	design shear stress of the welded material	13600 (psi)
σ_d	design normal stress of the bar material	30000 (psi)
δ_d	design bar end deflection	0.25 (in)
E	Young's modulus of bar stock	30×10^6 (psi)
G	shear modulus of bar stock	12×10^6 (psi)
P	loading condition	6000 (lb)
L	overhang length of the beam	14 (in)

5. Το ελικοειδές ελατήριο που φαίνεται στο Σχήμα 2 υπόκειται σε αξονικό σταθερό θλιπτικό φορτίο. Το ελατήριο ζητείται να σχεδιαστεί για ελάχιστο όγκο. Η διάμετρος του ελατηρίου (D), η διάμετρος του σύρματος (d), και το πλήθος των δακτυλίων (n) συμπεριλήφθηκαν ως μεταβλητές σχεδιασμού στην διατύπωση του προβλήματος: D και d είναι συνεχείς μεταβλητές ενώ n είναι ένας ακέραιος αριθμός. Η συνάρτηση κόστους για να ελαχιστοποιηθεί ο όγκος του ελατηρίου εκφράζεται ως:

Σχήμα 2.



$$\min \left\{ \frac{\pi D d^2 (n+2)}{4} \right\}$$

$$s.t. \quad g_1 = \frac{8C_f P_{max} D}{3.14156 d^3} - S \leq 0$$

$$g_2 = \frac{8KP_{max} D n}{C_f d^4} + 1.05(n+2)d - L_{free} \leq 0$$

$$g_3 = d_{min} - d \leq 0$$

$$g_4 = (d+D) - D_{max} \leq 0$$

$$g_5 = 3 - \frac{D-d}{d} \leq 0$$

$$g_6 = \delta - \delta_{pm} \leq 0$$

$$g_7 = \frac{8KP_{max} D^3 n}{C_f d^4} + \frac{P_{max} - P_{load}}{K} + 1.05(n+2)d - L_{free} \leq 0$$

$$g_8 = \delta_w - \frac{P_{max} - P_{load}}{K} \leq 0$$

$$C_f = \frac{4(S_i)-1}{4(S_i)-4} + \frac{0.615}{S_i}; S_i = \frac{D}{d} \quad K = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$

$$\delta_p = \frac{F_p}{K}$$

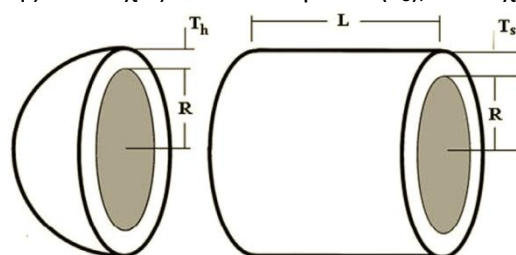
Τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος είναι: $0.05 \leq d \leq 1$ (in), $0.25 \leq D \leq 1.3$ (in) και $2 \leq n \leq 15$ (in), ενώ οι παράμετροι της διατύπωσης του προβλήματος βρίσκονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3.

Constant item	Description	Values
P_{max}	Maximum work load	1000.0 (lb)
S	Maximum shear stress	189×10^3 (psi)
E	Elastic modulus of the material	30×10^6 (psi)
G	Shear modulus of the material	11.5×10^6 (psi)
L_{free}	Maximum coil free length	14 (in)
d_{min}	Minimum wire diameter	0.2 (in)
D_{max}	Maximum outside diameter of the spring	3.0 (in)
P_{load}	Preload compression force	300.0 (lb)
δ_{pm}	Maximum deflection under preload	6.0 (in)
δ_w	Deflection from preload position to maximum load position	1.25 (in)

6. Το κυλινδρικό δοχείο πίεσης περιορίζεται στα δύο άκρα με ημισφαιρική κεφαλή (Σχήμα 3), ζητείται να σχεδιαστεί για ελάχιστο κόστος. Η δεξαμενή έχει πίεση λειτουργίας των 3000 (psi) και ελάχιστο όγκο 750 (ft³), και πρέπει να είναι σχεδιασμένη σύμφωνα με τον κώδικα ASME για λέβητες και τα δοχεία πίεσης. Το συνολικό κόστος προκύπτει από συνδυασμό της συγκόλλησης, τα υλικά και το κόστος κατασκευής. Το πάχος του κυλινδρικού (T_s), το πάχος της ημισφαιρικής κεφαλής (T_h), η εσωτερική ακτίνα (R), και το μήκος του κυλινδρικού τμήματος του δοχείου (L) αποτελούν τις μεταβλητές βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

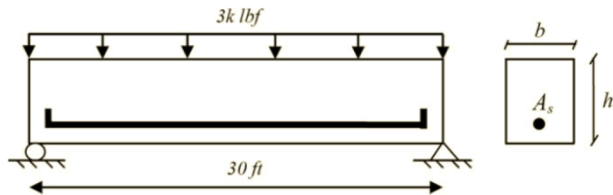
Σχήμα 3.



$$\begin{aligned} \min & \{ 6.224T_sRL + 1.7781T_hR^2 + 3.1661T_s^2L + 19.84T_h^2R \} \\ \text{s.t. } & g_1 = -T_s + 0.0193R \leq 0 \\ & g_2 = -T_h + 0.00954R \leq 0 \\ & g_3 = -\pi R^2L - \frac{4}{3}\pi R^3 + 750 \times 1728 \leq 0 \\ & g_4 = L - 240 \leq 0 \end{aligned}$$

Τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος είναι: $1 \times 0.0625 \leq T_s, T_h \leq 99 \times 0.0625$ (in), $10 \leq R \leq 200$ (in) και $10 \leq L \leq 240$ (in).

7. Η αμφιέριστη δοκός από οπλισμένο σκυρόδεμα που φαίνεται στο Σχήμα 4 ζητείται να σχεδιαστεί για ελάχιστο κόστος. Η δοκός ανοίγματος 30 (ft), υπόκειται σε ωφέλιμο φορτίο του 2000 (lbf) και μόνιμο φορτίο 1000 (lbf) στο οποίο συμπεριλαμβάνεται και το ίδιο βάρος της δοκού. Η θλιπτική αντοχή του σκυροδέματος (σ_c) είναι 5 (ksi) ενώ η τάση διαρροής του χάλυβα οπλισμού (σ_y) είναι 50 (ksi). Το κόστος ανά μονάδα επιφάνειας του σκυροδέματος και χάλυβα, είναι αντίστοιχα 0.02 και 1.0 \$/in². Η διατομή του οπλισμού (A_s), το πλάτος της δοκού (b) και το ύψος της (h) αποτελούν τις μεταβλητές βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να εκφραστεί ως:

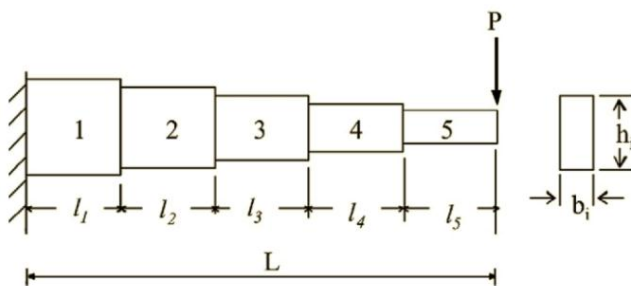


Σχήμα 4.

$$\begin{aligned} \min & \{ 29.4A_s + 0.6bh \} \\ \text{s.t. } & g_1 = \frac{h}{b} - 4 \leq 0 \\ & g_2 = 180 + 7.375 \frac{A_s^2}{b} - A_s h \leq 0 \end{aligned}$$

Τα όρια των μεταβλητών σχεδιασμού του προβλήματος είναι: $0.01 \times b \times h \leq A_s \leq 0.04 \times b \times h$ (in²), $28 \leq b \leq 40$ (in) και $5 \leq h \leq 10$ (in).

8. Ο πρόβολος του Σχήματος 5 ζητείται να σχεδιαστεί για ελάχιστο όγκο. Η δοκός αποτελείται από πέντε τμήματα μεταβλητής διατομής: το ύψος και το πλάτος της διατομής του κάθε τμήματος επιλέγονται ως μεταβλητές σχεδιασμού. Για το παράδειγμα του Σχήματος 5 περιέχονται 10 μεταβλητές βελτιστοποίησης. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να εκφραστεί ως:



Σχήμα 5.

$$\min \{ D(b_1 h_1 l_1 + b_2 h_2 l_2 + b_3 h_3 l_3 + b_4 h_4 l_4 + b_5 h_5 l_5) \}$$

$$s.t. \quad g_1 = \frac{6Pl_1}{b_5 h_5^2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_2 = \frac{6P(l_1 + l_4)}{b_4 h_2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_3 = \frac{6P(l_1 + l_4 + l_3)}{b_3 h_2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_4 = \frac{6P(l_1 + l_4 + l_3 + l_2)}{b_2 h_2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_5 = \frac{6P(l_1 + l_4 + l_3 + l_2 + l_1)}{b_1 h_1^2} - \sigma_d \leq 0$$

$$g_6 = \frac{Pl^3}{3E} \cdot \left(\frac{1}{I_1} + \frac{7}{I_4} + \frac{19}{I_3} + \frac{37}{I_2} + \frac{61}{I_1} \right) - \Delta_{\max} \leq 0$$

$$g_7 = \frac{h_5}{b_5} - 20 \leq 0$$

$$g_8 = \frac{h_4}{b_4} - 20 \leq 0$$

$$g_9 = \frac{h_3}{b_3} - 20 \leq 0$$

$$g_{10} = \frac{h_2}{b_2} - 20 \leq 0$$

$$g_{11} = \frac{h_1}{b_1} - 20 \leq 0$$

Το πεδίο αναζήτησης ορίζεται ως εξής: $1 \leq b_1 \leq 5$ (cm), $2.4 \leq b_2, b_3 \leq 3.1$ (cm), $1 \leq b_4, b_5 \leq 5$ (cm), $45 \leq h_1, h_2 \leq 60$ (cm), $30 \leq h_3 \leq 65$ (cm), $30 \leq h_4, h_5 \leq 65$ (cm). Οι τιμές των σταθερών παραμέτρων που εμπλέκονται στη διατύπωση αυτού του προβλήματος βελτιστοποίησης που αναφέρονται στον Πίνακα 4.

Πίνακας 4.

Constant item	Description	Values
P	Concentrated load	50000 (N)
σ_d	Design bending stress	14000(N/cm ²)
E	Elastic modulus of the material	2×10^7 (N/cm ²)
$D_{\max}$	Allowable deflection	2.7(cm)
L	Total length of the five-stepped cantilever beam	500 (cm)

Παρατηρήσεις:

- Μέσα σε παρένθεση (...) αναγράφεται παραπάνω η εντολή (ή οι εντολές) του Matlab η οποία πρέπει να χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση.
- Για οποιαδήποτε απορία ή διευκρίνιση, μη διστάσετε να στείλετε email στις παρακάτω διευθύνσεις mgk@mail.ntua.gr, nlagaros@central.ntua.gr. Θα σας δοθεί πολύ σύντομα απάντηση με email για να προχωρήσετε!