

**Μάθημα: Εισαγωγή στην Βελτιστοποίηση  
Συστημάτων****Τετάρτη, 19/12/2012**Διδάσκοντες: Μ.Γ. Καρλαύτης, Αναπληρωτής Καθηγητής  
Ν.Δ. Λαγαρός, Λέκτορας**4<sup>η</sup> Σειρά ασκήσεων-Ακέραιος & Τετραγωνικός Προγραμματισμός**

Για τα παρακάτω προβλήματα Ακεραίου και Τετραγωνικού Προγραμματισμού, να γίνει η διατύπωση του προβλήματος (αλγόριθμος) και να γίνει επίλυση αυτών μέσω matlab (**optimtool**, **bintprog**, **quadprog**):

1. Να λυθεί το ακόλουθο πρόβλημα Ακέραιου Προγραμματισμού με χρήση δυαδικών μεταβλητών.

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & -2 \leq x_1 \leq 4 \\ & 1 \leq x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{N} \text{ (ακέραιοι αριθμοί)} \end{aligned}$$

2. Εταιρεία κατασκευής χωματουργικών διαθέτει τέσσερα (4) μηχανήματα χωματουργικών εργασιών (ΜΧΕ) και τέσσερις (4) εργασίες (Ε), τις οποίες πρέπει να πραγματοποιήσει στα πλαίσια ενός έργου οδοποιίας. Ο χρόνος που απαιτεί κάθε μηχανήμα για να πραγματοποιήσει την κάθε εργασία φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 1 (πίνακας κόστους προβλήματος ανάθεσης).

Πίνακας 1.

| ΜΧΕ \ Ε | Ε1 | Ε2 | Ε3 | Ε4 |
|---------|----|----|----|----|
| ΜΧΕ1    | 14 | 5  | 8  | 7  |
| ΜΧΕ2    | 2  | 12 | 6  | 5  |
| ΜΧΕ3    | 7  | 8  | 3  | 9  |
| ΜΧΕ4    | 2  | 4  | 6  | 10 |

Επιθυμία της εταιρείας είναι να τοποθετήσει κάθε μηχανήμα στην κατάλληλη εργασία για να ελαχιστοποιήσει το χρόνο κατασκευής. Να επιλυθεί ως Πρόβλημα Ακέραιου Προγραμματισμού (ΠΑΠ).

3. Το υπουργείο Συγκοινωνιών της πολιτείας της Indiana σε συνεργασία με το πανεπιστήμιο Purdue έχει αναπτύξει ένα λογισμικό με ρόλο συμβουλευτικού χαρακτήρα για τη διαχείριση των 16000 γεφυρών της πολιτείας, το οποίο ονομάζεται Indiana Bridge Management System. Σκοπός του λογισμικού είναι η ανάλυση της κατάστασης των γεφυρών της πολιτείας με βάση συλλεγόμενα στοιχεία και η βέλτιστη επιλογή ενεργειών σε αυτές σε βάθος χρόνου, έχοντας ως περιορισμό το διατιθέμενο προϋπολογισμό. Η διαδικασία βέλτιστης επιλογής θα μας απασχολήσει στην άσκηση αυτή. Θεωρείται ότι πρέπει να βελτιστοποιηθεί η συνολική εικόνα των γεφυρών, ως άθροισμα των επιμέρους βελτιώσεων των γεφυρών, ως αποτελέσματα ενεργειών σε αυτές. Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε γέφυρα η τωρινή κατάσταση (αντοχές, λειτουργικότητα κ.λ.π.) χαρακτηρίζεται από μια ποσότητα Α (που μπορεί να ονομαστεί και χρηστικότητα). Εφόσον επιλεγεί η πραγματοποίηση

ενέργειας βελτίωσης της γέφυρας εντός του χρονικού διαστήματος ανάλυσης, σε κάποια χρονική στιγμή αυτού (σε επίπεδο έτους συνήθως) και η ποσότητα βελτιωθεί σε  $B > A$ , η διαφορά  $\Delta = B - A$  δείχνει τη βελτίωση της γέφυρας ως αποτέλεσμα της επιλεγμένης ενέργειας. Η φιλοσοφία του όλου προτύπου είναι να μεγιστοποιηθεί το άθροισμα των  $\Delta$  των γεφυρών που επιλέγονται προς ενέργεια. Έστω  $N$  ο αριθμός των γεφυρών,  $T$  ο αριθμός των χρονικών περιόδων (συνήθως έτη) και  $P_{ik}$  ο αριθμός των προτεινόμενων ενεργειών στη γέφυρα  $i$  το έτος  $k$ , το ΠΑΠ διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^T \sum_{j=1}^{P_{ik}} \Delta_{ijk} \cdot X_{ijk} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^T \sum_{j=1}^{P_{ik}} X_{ijk} \leq 1 \text{ για κάθε γέφυρα } i \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{P_{ik}} c_{ijk} \cdot X_{ijk} \leq b_k \text{ για κάθε χρονικό διάστημα } k \\ & X_{ijk} = 0, 1 \text{ (ακέραιοι αριθμοί)} \end{aligned}$$

όπου η δυαδική μεταβλητή  $X_{ijk} = 1$  αν επιλεγεί ενέργεια  $j$  για την γέφυρα  $i$  τη χρονική περίοδο  $k$  και 0 αν δεν επιλεγεί. Επίσης ορίζουμε ως  $\Delta_{ijk}$  την ποσοτικοποιημένη βελτίωση που θα προκύψει στη γέφυρα  $i$ , αν επιλεγεί ενέργεια  $j$  τη χρονική περίοδο  $k$ . Στοιχεία για ένα παράδειγμα του παραπάνω ΠΑΠ δίνονται στον παρακάτω Πίνακα 2.

Πίνακας 2.

| Γέφυρα | Έτος 1  |          | Έτος 2  |          |
|--------|---------|----------|---------|----------|
|        | Κόστος  | Βελτίωση | Κόστος  | Βελτίωση |
| 1      | 400,000 | 30       | 400,000 | 35       |
| 2      | 350,000 | 50       | 400,000 | 45       |
| 3      | 400,000 | 40       | 450,000 | 50       |
| 4      | 350,000 | 55       | 450,000 | 55       |
| 5      | 350,000 | 50       | 400,000 | 45       |

**Προϋπολογισμός έτους 1      1,000,000 €,**

**Προϋπολογισμός έτους 2      1,200,000 €.**

Θα γίνει ανάλυση για  $N = 5$  γέφυρες,  $T = 2$  έτη και  $P_{ik} = 1$  ενέργεια ανά γέφυρα ανά έτος. Όλες οι τιμές κόστους θεωρούνται ανηγμένες σε κοινό έτος βάσης. Έστω ότι έχουμε δύο μόνο ενέργειες  $A$  και  $B$  που μπορούν να γίνουν για τη βελτίωση μιας γέφυρας και η βελτίωση είναι αριθμός από 0 έως 100.

**4.** Σε μία αγορά υπάρχουν πέντε δυνατότητες επένδυσης. Κάθε επένδυση χαρακτηρίζεται από το κόστος εισόδου στην επένδυση, το κόστος κτήσης και την απόδοση που δίνεται στον Πίνακα 3. Το κόστος εισόδου στην επένδυση δεν μπορεί να υπερβαίνει τα 125 Ευρώ και ζητούμενο είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους, όταν ισχύει ότι: (i) δεν μπορείτε να επενδύσετε στην 2<sup>η</sup> και στην 5<sup>η</sup> επενδυτική κίνηση ταυτόχρονα, (ii) μπορείτε να επενδύσετε στην 1<sup>η</sup> αν έχετε επενδύσει σε τουλάχιστον μία από τις 2 και 3 επενδυτικές κινήσεις, (iii) πρέπει να επενδύσετε τουλάχιστον σε δύο από τις 3, 4 και 5, (iv) δεν μπορείτε να υπερβείτε το μέγιστο πλήθος των μονάδων που περιγράφονται στον Πίνακα 3.

Πίνακας 3.

| Επένδυση | Κόστος εισόδου (€) | Κόστος/ Μονάδα (€) | Κέρδος/ Μονάδα (€) | Μέγιστο πλήθος μονάδων |
|----------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------------|
| 1        | 25                 | 5                  | 15                 | 5                      |
| 2        | 35                 | 7                  | 25                 | 4                      |
| 3        | 28                 | 6                  | 17                 | 5                      |
| 4        | 20                 | 4                  | 13                 | 7                      |
| 5        | 40                 | 8                  | 18                 | 3                      |

5. Να επιλυθεί το ακόλουθο Πρόβλημα Τετραγωνικού Προγραμματισμού (ΠΤΠ):

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{5}{2}x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2^2 + 3x_2x_3 + \frac{5}{2}x_3^2 + 2x_1 - 35x_2 - 47x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

6. Να επιλυθεί το ακόλουθο ΠΤΠ:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_1 \leq 3 \end{aligned}$$

**Παρατηρήσεις:**

- Μέσα σε παρένθεση (...) αναγράφεται παραπάνω η εντολή (ή οι εντολές) του Matlab η οποία πρέπει να χρησιμοποιηθεί σε κάθε περίπτωση.
- Για οποιαδήποτε απορία ή διευκρίνιση, μη διστάσετε να στείλετε email στις παρακάτω διευθύνσεις [mgk@mail.ntua.gr](mailto:mgk@mail.ntua.gr), [nlagaros@central.ntua.gr](mailto:nlagaros@central.ntua.gr). Θα σας δοθεί πολύ σύντομα απάντηση με email για να προχωρήσετε!