

Υπόγεια ροή

Εξισώσεις (μονοφασικής) ροής

Εξισώσεις πολυφασικής ροής

Ποια προβλήματα λύνονται με ποια εργαλεία;

- Μονοδιάστατα προβλήματα (ή μονοδιάστατη απλοποίηση 2-D πεδίων ροής), σταθερή υδραυλική κλίση (στον χρόνο) → νόμος Darcy
- Γενική περίπτωση: ισοζύγιο μάζας → εξισώσεις ροής
 - Μόνιμη 2-D ροή, απουσία άντλησης/εισπίεσης: δίκτυα ροής
 - Μη μόνιμη ροή (1-D παράδειγμα ροής λόγω αλλαγής εδαφικού όγκου: εξίσωση στερεοποίησης αργίλων)
 - Μη μόνιμη ροή, κυλινδρικές συντεταγμένες (2-D): άντληση υδροφορέων από φρέατα
 - Μη μόνιμη ροή: ακόρεστη ζώνη (διφασική ροή = νερό, αέρας, πολυφασική ροή = νερό, μη υδατικός οργανικός ρύπος, αέρας), κορεσμένη ζώνη (διφασική ροή = νερό, DNAPL)

Ποιοι οι στόχοι του μαθήματος για κάθε εργαλείο;

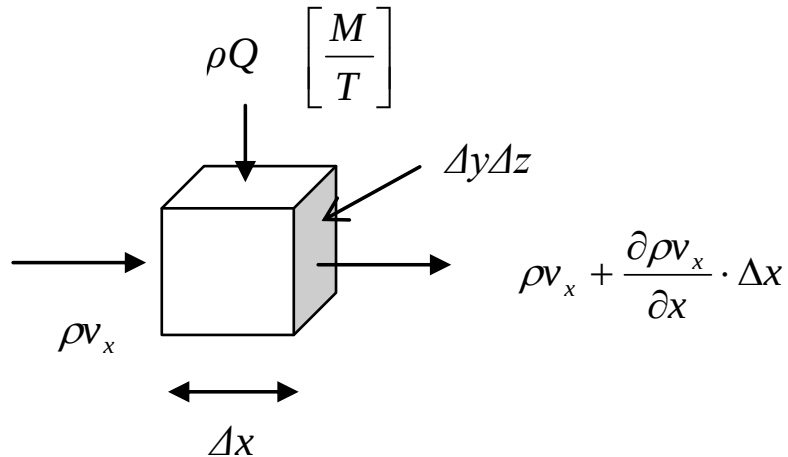
- Μονοδιάστατα προβλήματα (ή μονοδιάστατη απλοποίηση 2-D πεδίων ροής), σταθερή υδραυλική κλίση (στον χρόνο)
 - ευχέρεια στον υπολογισμό υδραυλικού φορτίου, φορτίου πίεσης
 - ευχέρεια στην ανάγνωση χαρτών στάθμης δυναμικού (πού θα πάει το νερό, υπολογισμός υδραυλικής κλίσης)
 - ευχέρεια στην εφαρμογή του νόμου Darcy
 - ευχέρεια σε υπολογισμούς μεταφοράς ρύπου λόγω μεταγωγής (π.χ. χρόνου άφιξης ρύπου)

Ποιοι οι στόχοι του μαθήματος για κάθε εργαλείο; (συν.)

- Μόνιμη 2-D ροή, απουσία άντλησης/εισπίεσης: δίκτυα ροής
 - ευχέρεια στην «απλή ανάγνωση» δικτύων ροής (πώς κινείται το νερό, ανάγνωση υδραυλικού φορτίου, μέτρηση πίεσης)
- Παράδειγμα μη μόνιμης 1-D ροής: εξίσωση στερεοποίησης
 - σύνδεση με προηγούμενα
- Μη μόνιμη ροή, εγκιβωτισμένος υδροφορέας, υδροφορέας ελεύθερης ροής (2-D): άντληση από φρέατα
 - εξοικείωση με ύπαρξη διαθέσιμων μεθόδων υπολογισμού
- Μη μόνιμη ροή: διφασική ροή, πολυφασική ροή
 - ποιοτική περιγραφή κίνησης & κατανομής νερού, μη υδατικού ρύπου (βλέπε και μάθημα 22/10/2020)

Ισοζύγιο μάζας ρευστού → εξισώσεις υπόγειας ροής

- Στοιχειώδης όγκος $\Delta x \Delta y \Delta z$



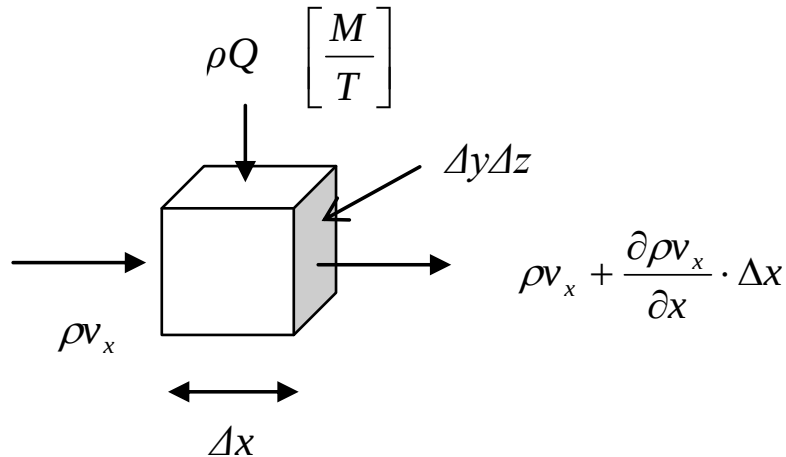
Ροή μάζας = μάζα
(νερού) που διέρχεται
από διατομή ανά χρόνο

Σύμβαση: εισερχόμενη
ροή = θετικό πρόσημο

- Ροή μάζας στην κατεύθυνση x

$$\left[\rho v_x - \left(\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) \Delta x \right) \right] \Delta y \Delta z = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Εξίσωση υπόγειας ροής: γενική περίπτωση



- Ισοζύγιο μάζας

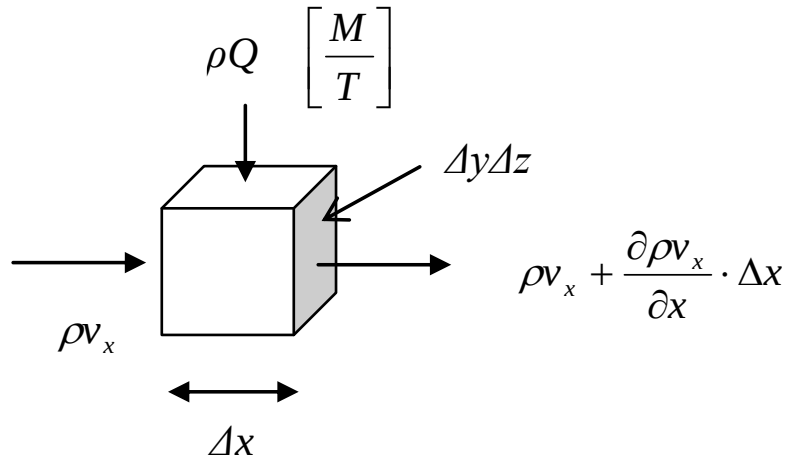
$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) \right] \Delta x \Delta y \Delta z + \rho Q = \frac{\partial(\Delta x \Delta y \Delta z \cdot n \cdot \rho)}{\partial t}$$

- Γενική μορφή εξίσωσης ροής σε τρεις διαστάσεις

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \rho q = \frac{\partial(n \cdot \rho)}{\partial t}} \quad (I)$$

- $q = \text{ροή όγκου ανά μοναδιαίο όγκο υδροφορέα} = \frac{Q}{\Delta x \Delta y \Delta z}$

Εξίσωση υπόγειας ροής: υποπεριπτώσεις



- Σταθερή πυκνότητα, συνθήκες μόνιμης ροής (ίδια εικόνα στον χρόνο), $q = 0$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = 0$$

- Συνδυασμός με νόμο Darcy σε 3 διαστάσεις

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(-K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0$$

Εξίσωση υπόγειας ροής για συνθήκες μόνιμης ροής, σταθερή πυκνότητα, απουσία άντλησης/εισπίεσης

- Ομοιογενές έδαφος

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

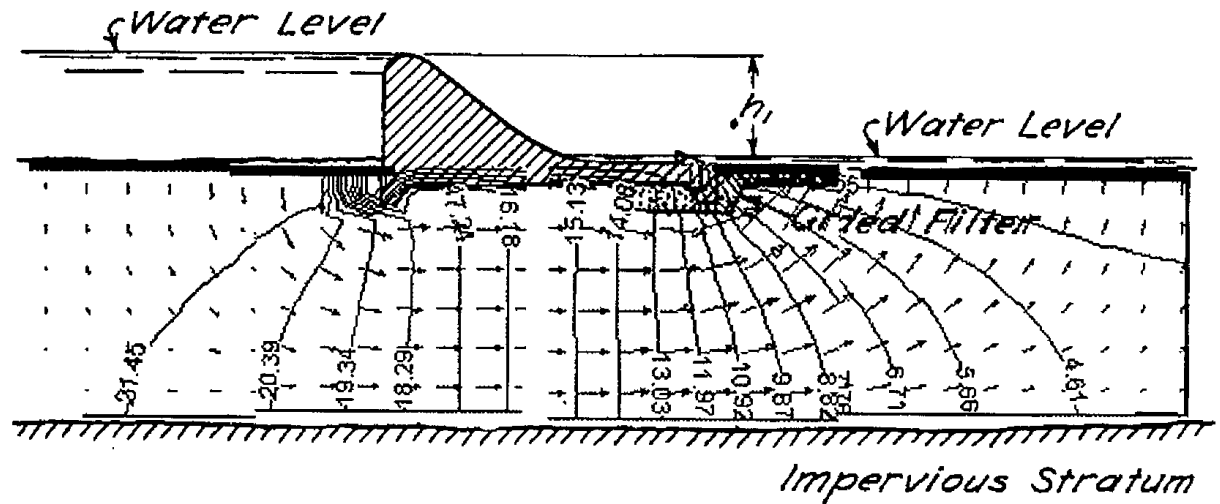
- Ομοιογενές + ισότροπο έδαφος

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

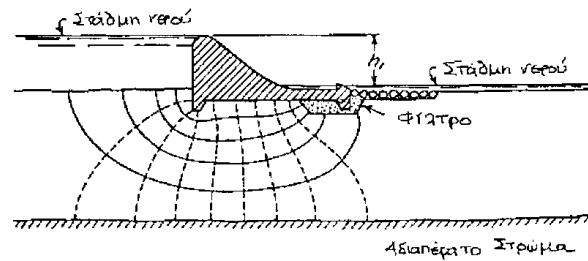
Εξίσωση Laplace ($\nabla^2 h = 0$): ικανοποιείται από δύο οικογένειες ορθογώνιων καμπυλών (ισοδυναμικές γραμμές, ροϊκές γραμμές) → γραφική επίλυση: δίκτυα ροής

Δίκτυα ροής

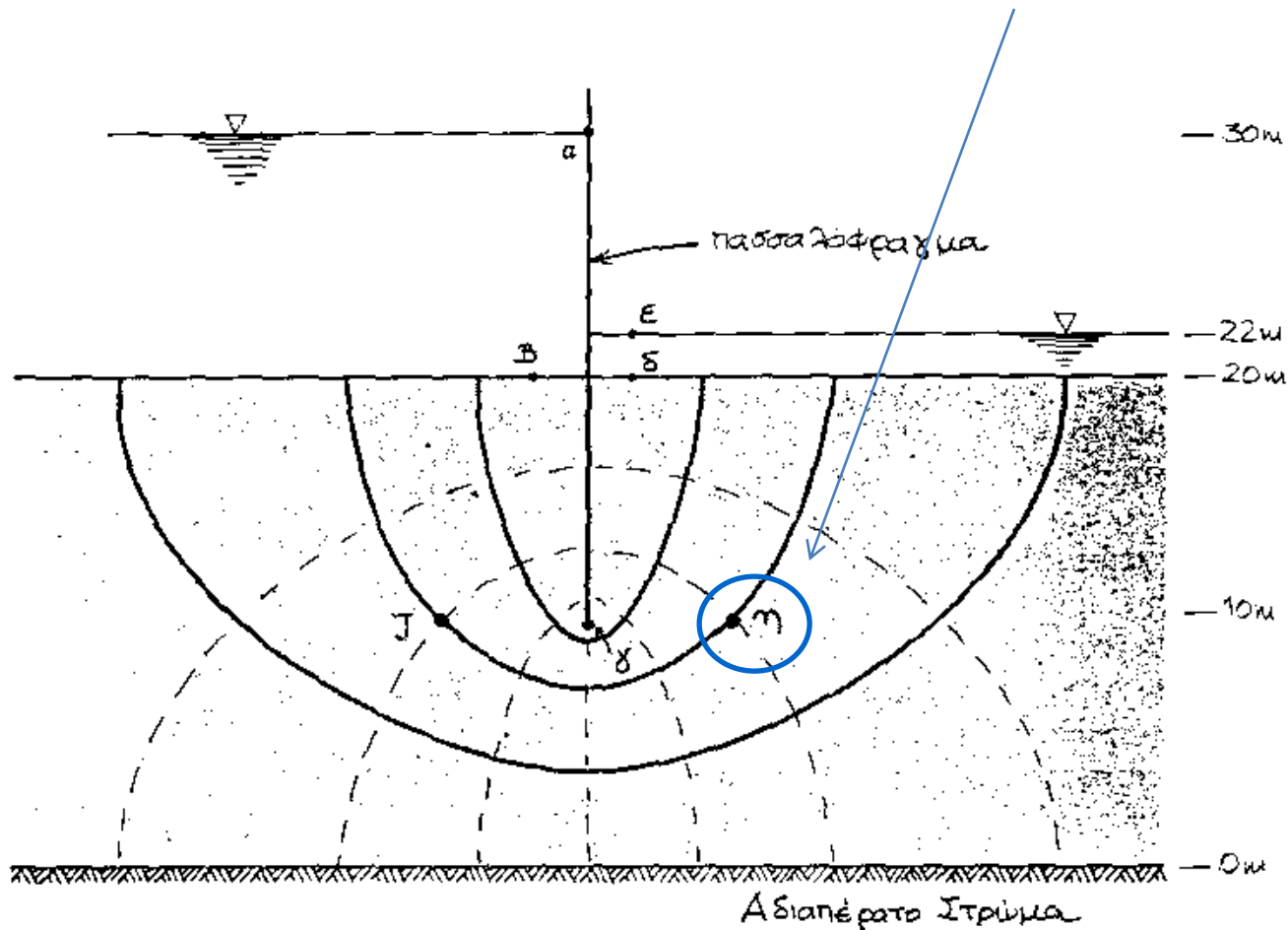
Απεικόνιση
αποτελεσμάτων
αριθμητικού
προσομοιώματος
ροής



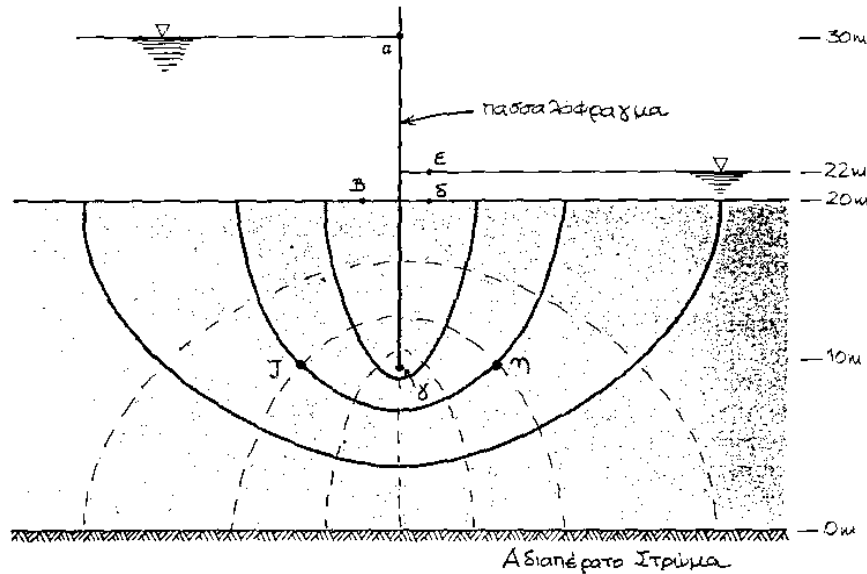
Δίκτυο ροής



**Άσκηση «απλής ανάγνωσης» δικτύου ροής:
πού θα ανέβει η στάθμη νερού σε πιεζόμετρο που
εγκαθιστώ στο σημείο «η»;**



Δίκτυα ροής: επίδραση ανισοτροπίας

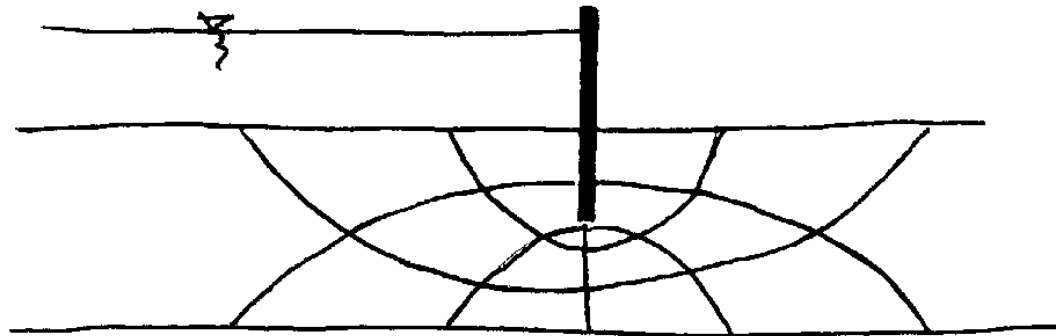


Ισότροπο έδαφος:

Ροϊκές γραμμές $\perp$
Ισοδυναμικές γραμμές

Ανισότροπο έδαφος

$$K_x > K_z$$



Ερώτηση κατανόησης

- Η εξίσωση Laplace ($\nabla^2 h = 0$) ισχύει για...
(τσεκάρετε όλα τα σωστά)

- ☐ ☒ σταθερή πυκνότητα ρευστού
- ☐ ☒ ομοιογενές και ισότροπο έδαφος
- ☐ ☒ απουσία άντλησης και εισπίεσης
- ☐ ☒ κάτι άλλο

Μη μόνιμη ροή, κορεσμένο έδαφος

- Για $q = 0$, η (I) δίνει:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = \frac{\partial(n \cdot \rho)}{\partial t}$$

- Για ρευστά ελαχίστως συμπιεστά

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

- Η μερική παράγωγος ως προς τον χρόνο γράφεται ως άθροισμα:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n) = \frac{\partial \rho}{\partial t} n + \frac{\partial n}{\partial t} \rho$$

ροή λόγω αλλαγής
όγκου ρευστού

ροή λόγω αλλαγής
όγκου εδάφικων πόρων

Μη μόνιμη ροή, κορεσμένο έδαφος, $q = 0$, ελαχίστως συμπιεστά ρευστά

- Αποδεικνύεται ότι για σταθερό σημείο $\partial p = \partial h$ (σύνδεση μεταβολής όγκου με μεταβολή υδραυλικού φορτίου):

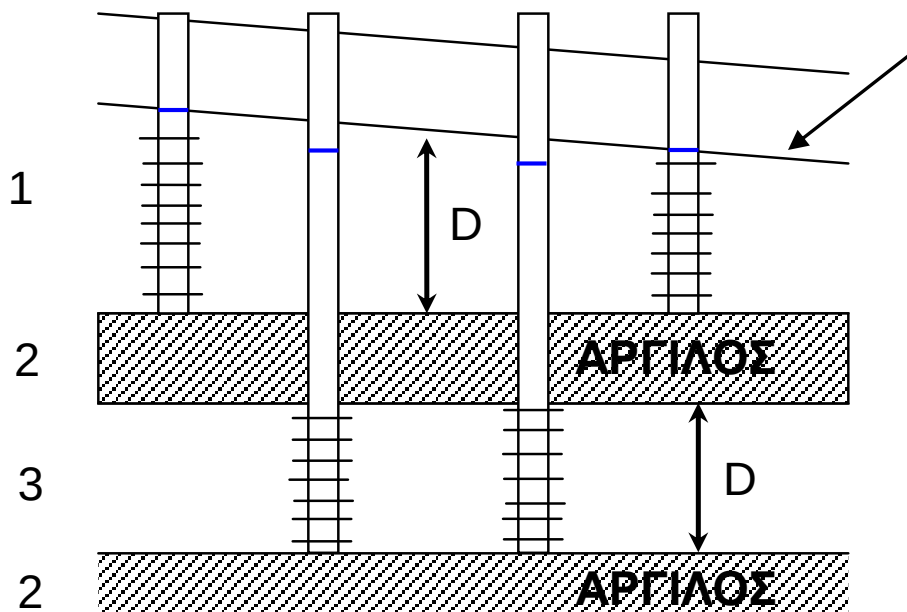
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} n + \frac{\partial n}{\partial t} \rho = \rho^2 g n \beta \frac{\partial h}{\partial t} + \rho^2 g \alpha \frac{\partial h}{\partial t}$$

συμπιεστότητα ρευστού

συμπιεστότητα εδάφους, $E_s = 1/\alpha$

μέτρο
μονοδιάστατης
συμπίεσης
- Ορίζω αντιπροσωπευτικά μεγέθη υδροφορέα πάχους D
 - Ειδική εναποθήκευση: $S_s = \gamma_w (\alpha + n\beta)$ $[L^{-1}]$
 - Συντελεστής εναποθήκευσης:** $S = S_s \cdot D$
[αδιάστατο μέγεθος]
 - Διαβιβαστικότητα:** $T = K \cdot D$ $[L^2/T]$

Υδροφορείς & πηγάδια, ξανά



Υδροφόρος Ορίζοντας,
Πιεζομετρική Επιφάνεια

(1) Υδροφορέας ελεύθερης ροής

(2) Σχηματισμός περιορισμένης
υδροφορίας

(3) Υδροφορέας εγκιβωτισμένης
ροής

Μη μόνιμη ροή, κορεσμένο έδαφος, $q = 0$, ελαχίστως συμπιεστά ρευστά (συν.)

- Εξισώσεις ροής με χαρακτηριστικά μεγέθη υδροφορέων

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial h}{\partial z} \right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

- Για ομοιογενές και ισότροπο έδαφος

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S_s}{K} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

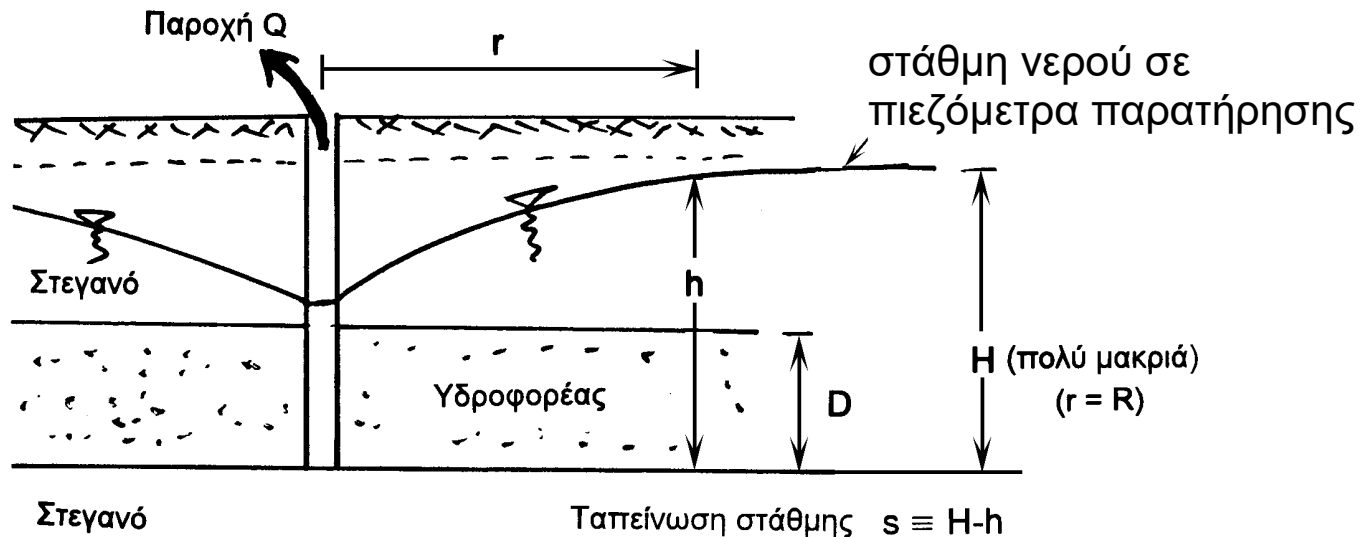
- Διδιάστατη οριζόντια ροή, εγκιβωτισμένος υδροφορέας

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

- Συμμετρία ως προς άξονα (άντληση από πηγάδι), κυλινδρικές συντεταγμένες

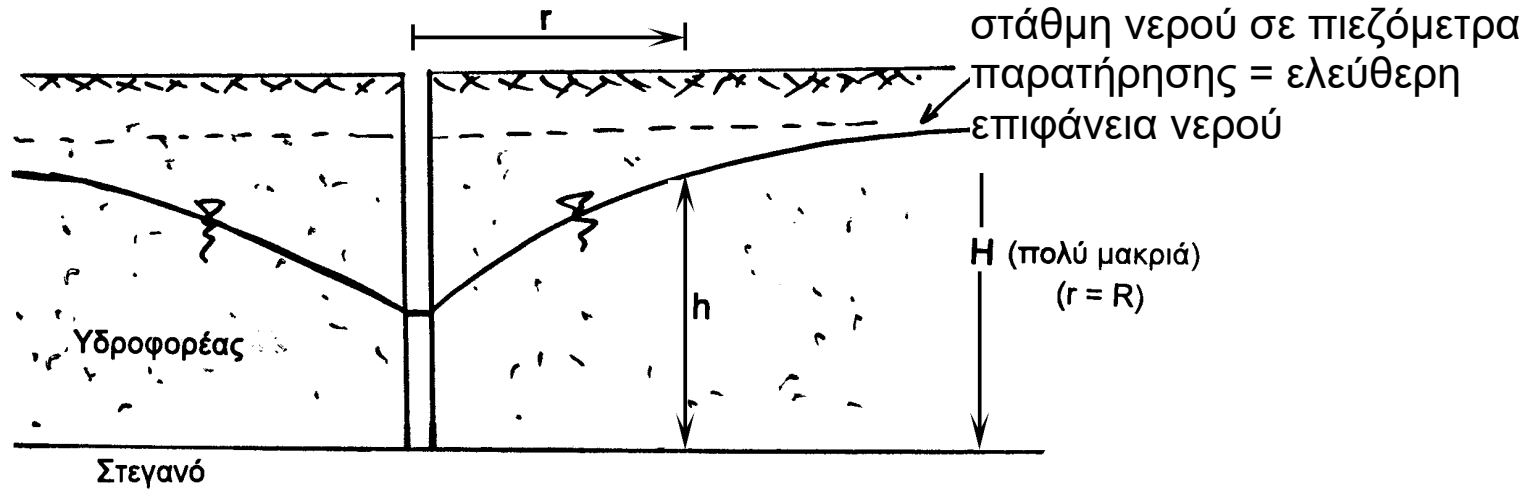
$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}}$$

Υδροφόρας εγκιβωτισμένης ροής: Άντληση από πηγάδι



- $S = \gamma_w (\alpha n + \beta) \cdot D =$ συντελεστής εναποθήκευσης
- $T = K \cdot D =$ διαβιβαστικότητα
- Εφαρμοσμένο πρόβλημα No 1: Αντλώ με δεδομένη παροχή, καταγράφω διαδοχικές μετρήσεις ταπείνωσης στάθμης σε πιεζόμετρο, $s(r, t_1), s(r, t_2), \dots$, βρίσκω S, T
- Εφαρμοσμένο πρόβλημα No 2: Με γνωστά τα S, T , βρίσκω παροχή που απαιτείται για συγκεκριμένη ταπείνωση στάθμης (π.χ. εκσκαφές κάτω από τον Υ.Ο.)
- Προϋπόθεση: το πηγάδι πρέπει να αντλεί καθ' όλο το ύψος του υδροφορέα

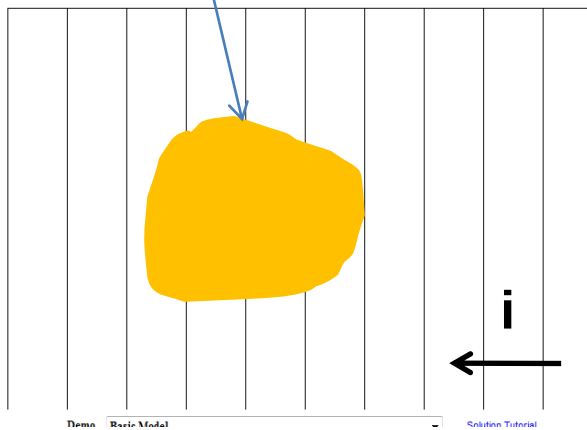
Υδροφορέας ελεύθερης ροής: Άντληση από πηγάδι



- Ίδια λογική με εγκιβωτισμένο υδροφορέα, αλλά διαφορετικές σχέσεις (ή ίδιες σχέσεις με προσεγγιστική ισχύ) καθώς, με την πτώση της στάθμης του νερού λόγω άντλησης, διευρύνεται η ακόρεστη ζώνη και μικραίνει η επιφάνεια ροής στο πηγάδι

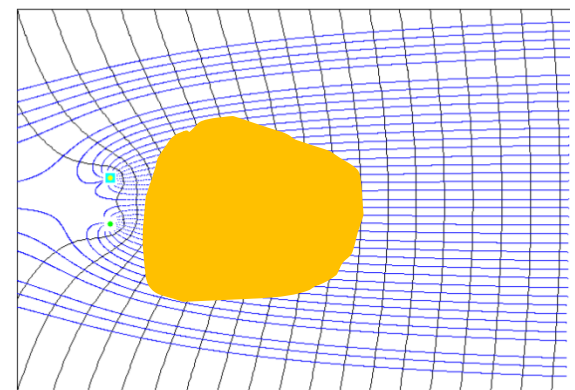
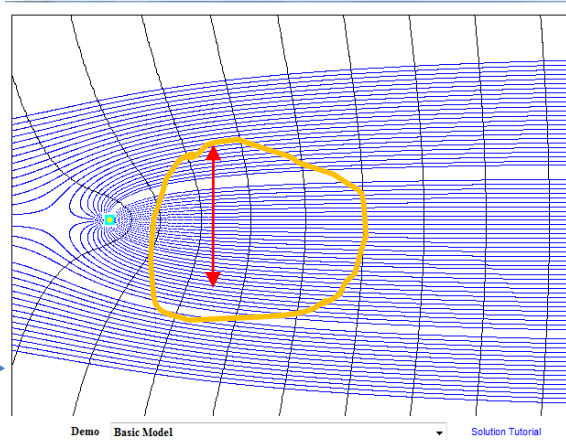
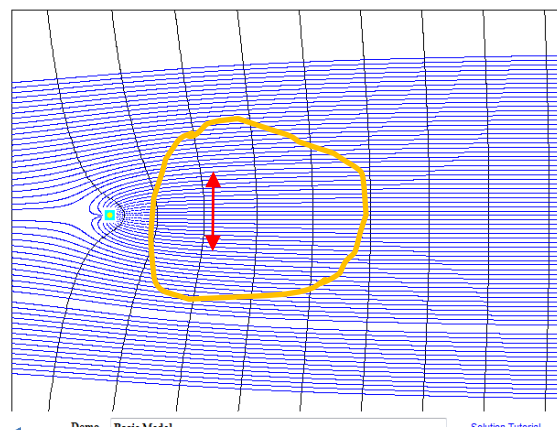
Επαλληλία φυσικής ροής και αντλήσεων, μέθοδος ιχνηλασίας σωματιδίων (particle tracking): εφαρμογή σε λογισμικά

Ρυπασμένη περιοχή



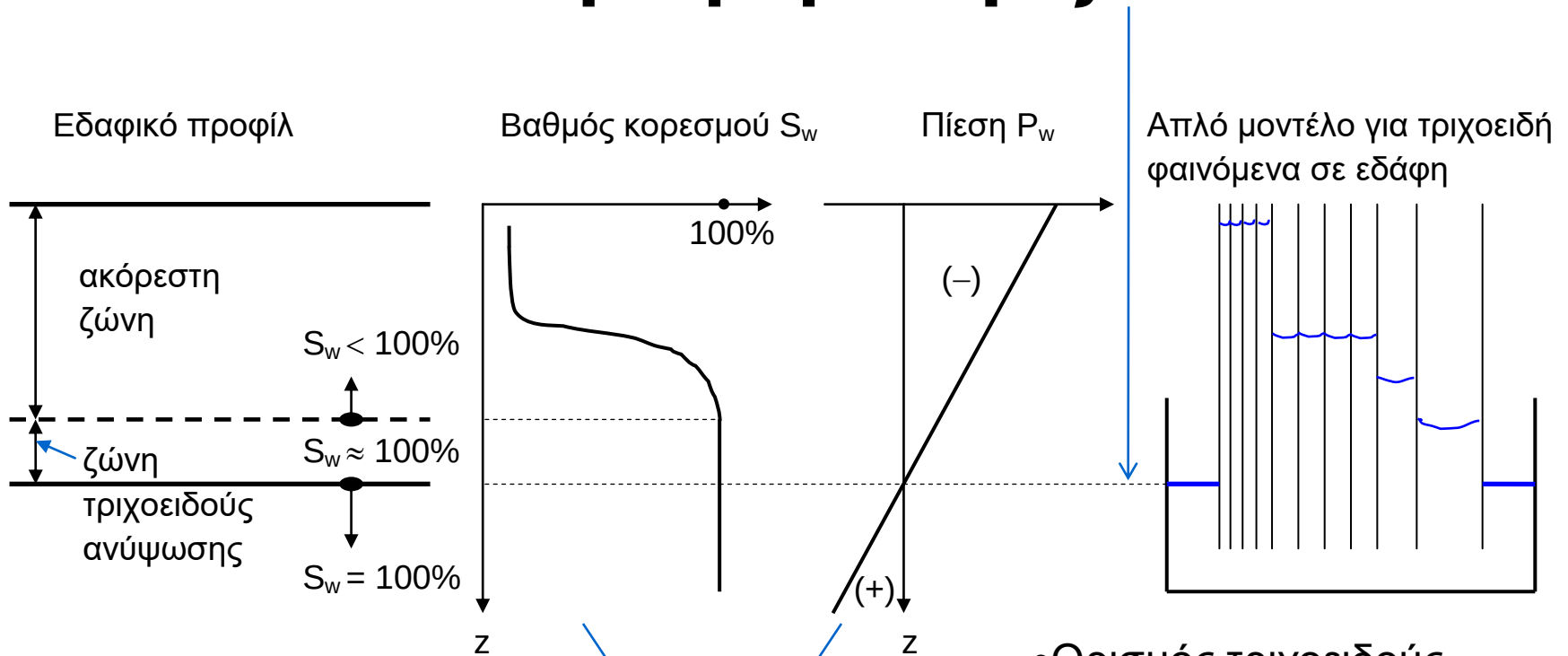
Υδροφορέας 3km x 3km:
 $i = 0.002$, $K = 10^{-4}$ m/s,
 $D = 10$ m

Άντληση από ένα
πηγάδι με παροχή
 $Q = 137$ m³/d
και $Q = 274$ m³/d



Άντληση από δύο
πηγάδια με συνολική
παροχή $Q = 356$ m³/d
(178 m³/d το καθένα)

Ακόρεστη ζώνη: τι γίνεται πάνω από τον υδροφόρο ορίζοντα



Συνδυασμός καμπυλών:
σχέση μεταξύ πίεσης, P_w
– βαθμού κορεσμού, S_w

- Ορισμός τριχοειδούς πίεσης, $P_c = P_a - P_w \rightarrow$ σχέση μεταξύ P_c και S_w
- $P_c \uparrow$ επιφανειακή τάση υγρού-αέρα $\uparrow$ άνοιγμα πόρων $\downarrow$

Ροή στην ακόρεστη ζώνη, $S_w \neq 1$, $q = 0$

- Προσαρμογή του όρου που εκφράζει την αλλαγή μάζας στον στοιχειώδη όγκο στην γενική εξίσωση (I). Ωχ! ένας παραπάνω άγνωστος: S = βαθμός κορεσμού

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = \frac{\partial(n \cdot \rho \cdot S)}{\partial t}$$

- Για ρ σταθερό και αμελητέα μεταβολή του πορώδους n (δηλ. όταν η αλλαγή του όγκου του νερού που προέρχεται από την αλλαγή του πορώδους είναι αμελητέα σε σχέση με την αλλαγή όγκου λόγω μεταβολής του βαθμού κορεσμού)

$$-\frac{\partial}{\partial x}(v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = n \cdot \frac{\partial(S)}{\partial t}$$

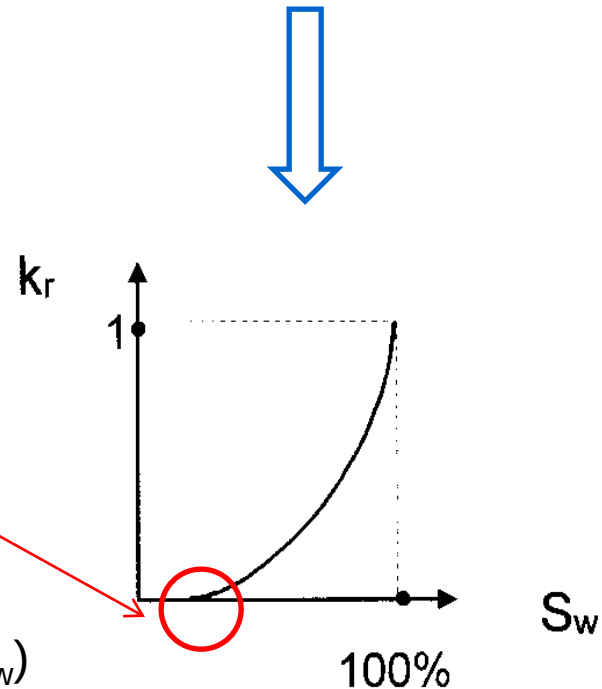
Νόμος Darcy για ροή στην ακόρεστη ζώνη

- Εισάγεται η έννοια της σχετικής διαπερατότητας k_r ($0 \leq k_r \leq 1$), η οποία είναι συνάρτηση του βαθμού κορεσμού S

$$v_x = -\frac{k \cdot k_r \cdot \rho \cdot g}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{P_w}{\rho g} \right)$$

Το νερό, κατανομημένο ασυνεχώς στους εδαφικούς πόρους, σταματά να ρέει για βαθμό κορεσμού μεγαλύτερο από το μηδέν (παραμένων βαθμός κορεσμού).

Η πειραματική μέτρηση της καμπύλης $k_r(S_w)$ δεν είναι απλή. Λογισμικά ακόρεστης ροής συχνά την προσεγγίζουν ως ευθεία γραμμή.



Ακόρεστη ζώνη, τριχοειδή φαινόμενα: υλικά πειράματος σε πορώδες μέσο



Τριχοειδή φαινόμενα σε πορώδες μέσο: (χαμηλός βαθμός κορεσμού)



Ακόρεστη ζώνη: ρευστό ακινητοποιημένο σε πορώδες μέσο λόγω τριχοειδών φαινομένων

Το μπλε
ρευστό
δεν έχει
στάξει στο
πιάτο



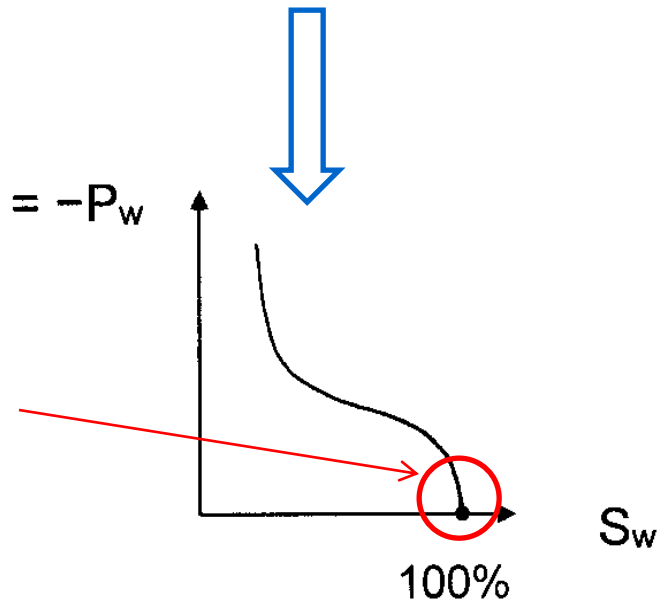
Η εξίσωση ροής έχει έναν επιπλέον άγνωστο (S), όμως βρήκαμε μια πρόσθετη σχέση: $P_C(S)$

- Μεταβολή της τριχοειδούς πίεσης P_{Caw} με τον βαθμό κορεσμού S_w :

$$P_{Caw} = P_a - P_w = P_{Caw}(S_w)$$

$$P_c = -P_w$$

Το έδαφος παραμένει κορεσμένο, έχοντας αρνητική πίεση, στη ζώνη τριχοειδούς ανύψωσης.



Η πειραματική μέτρηση της καμπύλης $P_C(S_w)$ δεν είναι δύσκολη. Όμως οι καμπύλες διαφορετικών εδαφών διαφέρουν σημαντικά (ουσιαστικά αποτυπώνουν την κατανομή μεγεθών των πόρων) – δεν ενδείκνυται διαδανεισμός καμπυλών.

Εξίσωση ροής στην ακόρεστη ζώνη

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k \cdot k_r}{\mu} \frac{\partial P_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k \cdot k_r}{\mu} \frac{\partial P_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k \cdot k_r}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} (P_w + \rho g z) \right) = n \frac{\partial S_w}{\partial t}$$

- Αριθμητική επίλυση με δεδομένα k (δηλ. K), n , $k_r(S_w)$, $P_C(S_w)$
 - $k_r(S_w)$, $P_C(S_w)$: είναι γνωστές και ως καταστατικές σχέσεις ακόρεστης ροής, και περιγράφουν την αλληλεπίδραση νερού και αέρα
- Επίλυση ως προς P_w , S_w

Εξισώσεις ροής για πολυφασική ροή

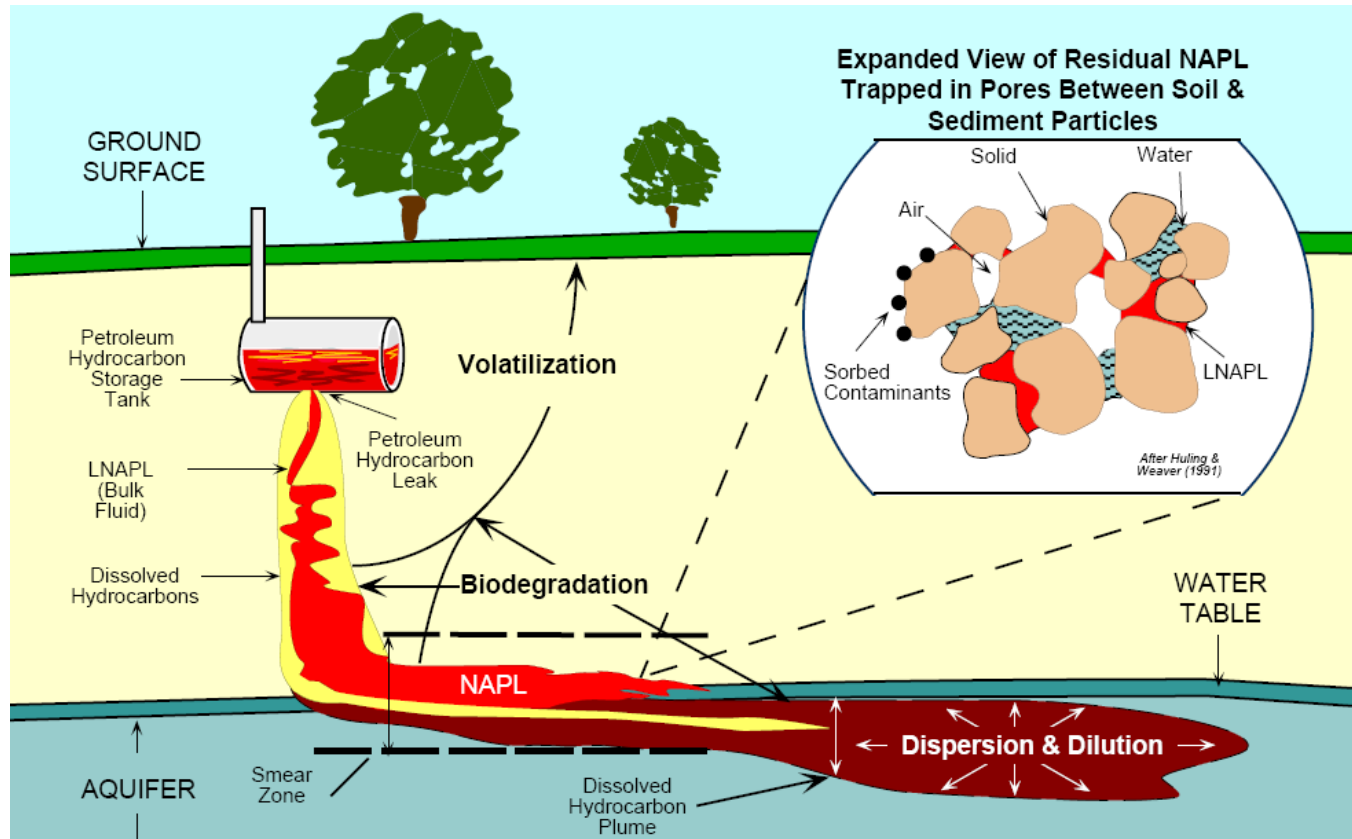
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial}{\partial z} (P_i + \rho_i g z) \right) = n \frac{\partial S_i}{\partial t}$$

- για $i = w$ (νερό), α (αέρας), o (NAPL)
- 3 εξισώσεις ($i = w, \alpha, o$), 6 άγνωστοι (P_i, S_i), ξέρω $S_\alpha + S_w + S_o = 1 \Rightarrow$ θέλω άλλες 2 εξισώσεις:

$$P_{Cow} = P_o - P_w = P_{Cow}(S_w) \quad P_{Cao} = P_a - P_o = P_{Cao}(S_a)$$

- Το κάθε ρευστό κινείται μέσω διαφορετικών ροϊκών σωλήνων – ταυτόχρονα υποθέτουμε ότι αλληλεπιδρούν ανά ζεύγη (αέρας με NAPL και NAPL με νερό) όπως εκφράζεται από τις καταστατικές σχέσεις

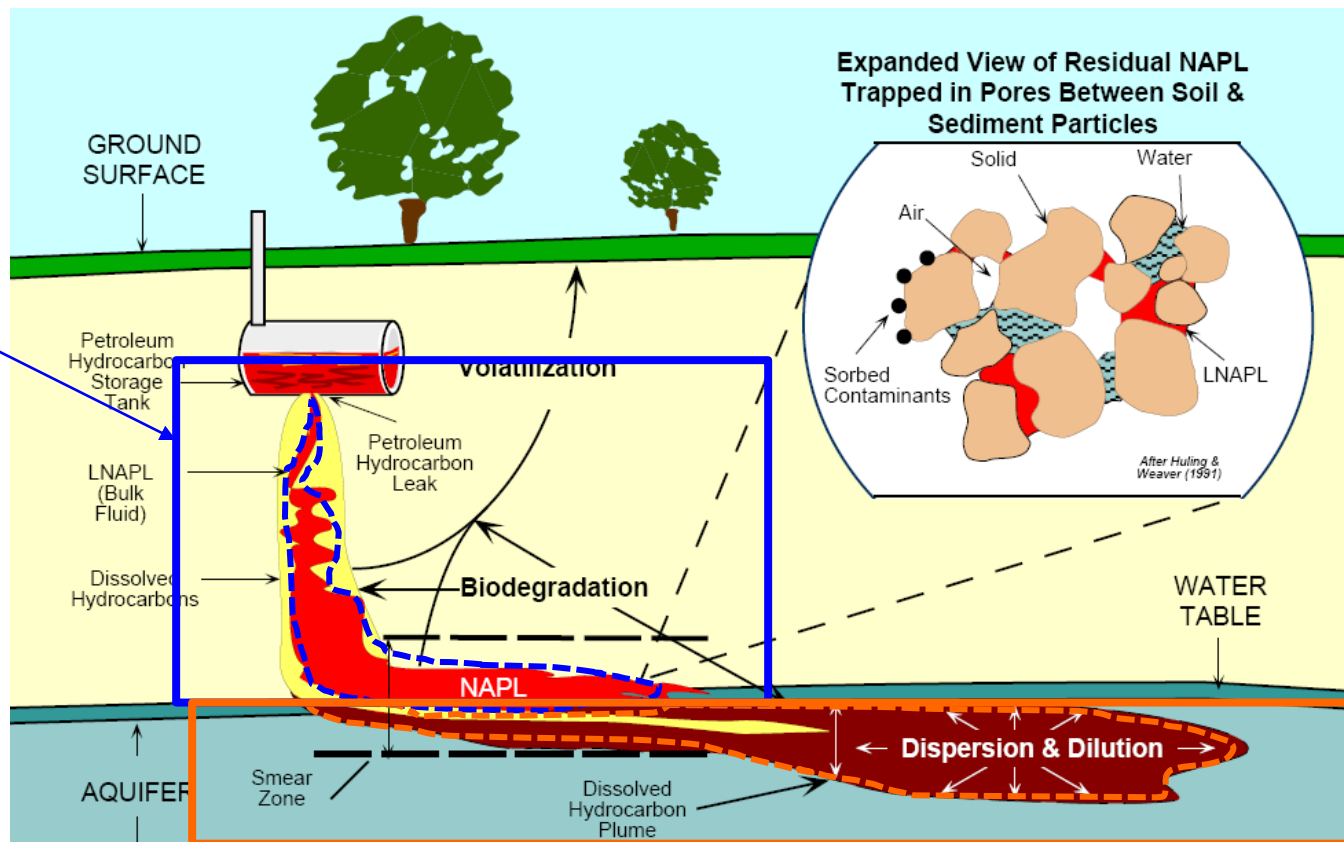
Πεδίο εφαρμογής εξισώσεων πολυφασικής ροής – μεταφοράς (διαλυμένου) ρύπου?



USEPA (1999): EPA/600/F-98/021

Πεδίο εφαρμογής εξισώσεων πολυφασικής ροής – μεταφοράς (διαλυμένου) ρύπου

**Ακόρεστη
ζώνη:** ροή
NAPL, ροή
νερού, ροή
αέρα



USEPA (1999): EPA/600/F-98/021

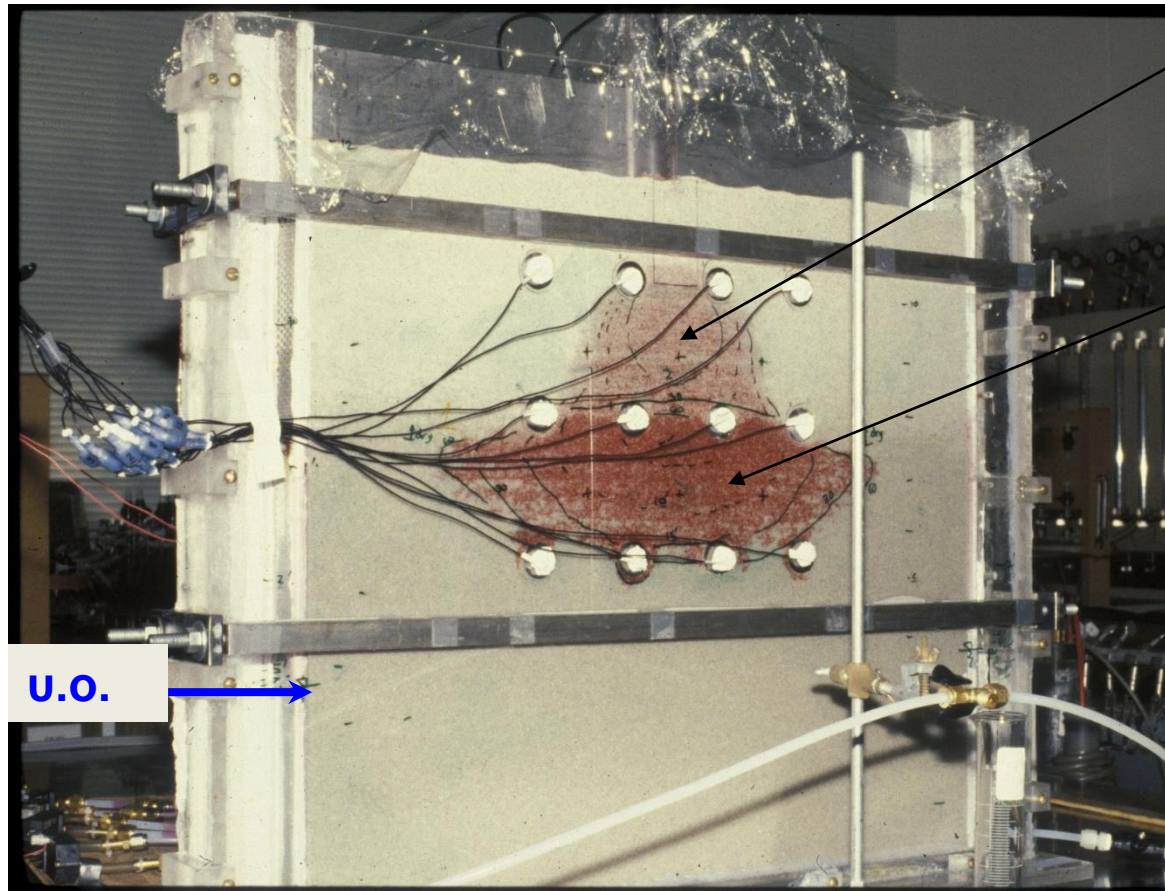
Κορεσμένη ζώνη: ροή νερού,
μεταφορά ρύπου (θα μελετηθεί
ποσοτικά στην Ενότητα 7)

Εξισώσεις ροής για πολυφασική ροή

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial}{\partial z} (P_i + \rho_i g z) \right) = n \frac{\partial S_i}{\partial t}$$

- για $i = w$ (νερό), α (αέρας), o (NAPL)
- Ερωτήσεις πρακτικού ενδιαφέροντος: τι ποσότητα NAPL (S_o) έχω πού; (πώς) θα κινηθεί; (βλέπε και μάθημα 22/10/2020)
 - δεν ξεχνώ ότι κάθε φάση σταματά να ρέει για βαθμό κορεσμού μικρότερο του παραμένοντα ($\approx 5-15\%$)

Κηροζίνη* (LNAPL) σε χονδρόκοκκη άμμο: εκτιμήστε βαθμό κορεσμού, S_o



παραμένων
βαθμός
κορεσμού,
 $S_o=?$

κηλίδα,
“φακός” ή
“τηγανίτα”:
δυνατότητα
άντλησης-
περαιτέρω
κίνησης,
 $S_o=?$

* βαμμένη
κόκκινη

Βασικά σημεία

- Με τα δίκτυα ροής, που περιγράφουν μόνιμες διδιάστατες ροές σε κορεσμένο έδαφος, ξέρουμε το υδραυλικό φορτίο παντού (επίσης, αφαιρώντας το υψομετρικό φορτίο, βρίσκουμε την πίεση που ενδιαφέρει σε γεωτεχνικά προβλήματα)
- Για ροή νερού σε ακόρεστο έδαφος, χρειάζεται να ξέρουμε τις καταστατικές σχέσεις της ακόρεστης ροής, δηλ. (1) πώς αυξάνεται η τριχοειδής πίεση καθώς μειώνεται ο βαθμός κορεσμού του νερού και (2) πώς μειώνεται η σχετική διαπερατότητα καθώς μειώνεται ο βαθμός κορεσμού
 - Οι καταστατικές σχέσεις, και ιδιαίτερα η (1), εξαρτώνται από το έδαφος

Βασικά σημεία (συν.)

- Τα προβλήματα διαρροής μη υδατικών ρύπων περιγράφονται μαθηματικά με εξισώσεις πολυφασικής ροής, δηλ. διφασική ροή (πχ διαρροή DNAPL σε κορεσμένο έδαφος) ή τριφασική ροή (πχ διαρροή LNAPL ή DNAPL σε ακόρεστο έδαφος)
- Η αριθμητική προσομοίωση της κίνησης μη υδατικών ρύπων δεν συνηθίζεται σε περιστατικά ρυπασμένων χώρων με εξαίρεση τυχόν ερευνητικές μελέτες
 - Ο χαρακτηρισμός της κατανομής μη υδατικού ρύπου στο πεδίο, αν γίνει, θα γίνει με επιτόπου μεθόδους (δειγματοληψίες, γεωφυσικές μέθοδοι, κ.α.)

Πηγές σχημάτων

Σημείωση: το μη πρωτογενές υλικό αυτής της παρουσίασης ή έχει αναρτηθεί στο διαδίκτυο με άδεια Creative Commons, ή είναι διαθέσιμο στο διαδίκτυο (πχ πρακτική των ΗΠΑ για μελέτες κλπ δημόσιων οργανισμών) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί με κατάλληλη αναφορά (attribution), ή συνοδεύεται από άδεια από τον εκδότη.

Διαφάνειες 17, 18. Καββαδάς, Μ., 2013, Στοιχεία Περιβαλλοντικής Γεωτεχνικής, Εκδόσεις Τσότρας, Σχήματα 3.13 και 3.14, αντίστοιχα, χρησιμοποιούνται με άδεια.

Διαφάνειες 29, 30. US Environmental Protection Agency (EPA), 1999, Monitored Natural Attenuation of Petroleum Hydrocarbons, EPA/600/F-98/021, <https://clu-in.org/download/remed/pet-hyd.pdf> (Ημερομηνία πρόσβασης 31-10-2018)