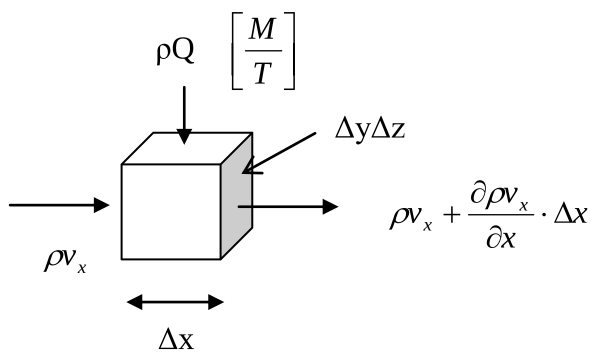
Υπόγεια Ροή - Εξισώσεις

Ποια προβλήματα μπορούν να λυθούν με ποια εργαλεία;

- Απλά μονοδιάστατα προβλήματα, σταθερή κλίση = νόμος Darcy
- Γενική περίπτωση: ισοζύγιο μάζας → εξισώσεις ροής
    - Μόνιμη ροή, 2-D: δίκτυα ροής
    - Παράδειγμα μη μόνιμης ροής, 1-D: εξίσωση στερεοποίησης
    - Μη μόνιμη ροή, εγκιβωτισμένος υδροφορέας, υδροφορέας ελεύθερης ροής, κυλινδρικές συντεταγμένες: άντληση από φρέατα
    - Μη μόνιμη ροή: ακόρεστη ζώνη (διφασική ροή = νερό, αέρας), πολυφασική ροή (νερό, μη υδατικός οργανικός ρύπος, αέρας)

Ισοζύγιο μάζας ρευστού → Εξισώσεις υπόγειας ροής

Στοιχειώδης όγκος $\Delta x\ \Delta y\ \Delta z$



Ροή μάζας στην κατεύθυνση x

$$\left[\rho v_x - (\rho v_x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\Delta x)\right]\Delta y \Delta z = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\Delta x \Delta y \Delta z$$

- Εξίσωση ροής σε τρεις διαστάσεις

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right]\Delta x \Delta y \Delta z + \rho Q = \frac{\partial(\Delta x \Delta y \Delta z \cdot n \cdot \rho)}{\partial t}$$

Γενική μορφή εξίσωσης ροής

$$\boxed{-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) + \rho q = \frac{\partial(n \cdot \rho)}{\partial t}} \quad \text{(I)}$$

q = ροή όγκου ανά μοναδιαίο όγκο υδροφορέα $= \dfrac{Q}{\Delta x \Delta y \Delta z}$

Πιθανές συνοριακές συνθήκες: Σταθερή παροχή, σταθερό υδραυλικό φορτίο

• Απλοποιημένες μορφές της εξίσωσης ροής για διαφορετικές συνθήκες ροής / χαρακτηριστικά πεδίου ροής

- **Συνθήκες μόνιμης ροής** (η μάζα στο στοιχειώδη όγκο δεν αλλάζει), $\boldsymbol{q = 0}$

για **σταθερή πυκνότητα** $\Rightarrow$ $-\frac{\partial}{\partial x}(v_x)-\frac{\partial}{\partial y}(v_y)-\frac{\partial}{\partial z}(v_z)=0$

Συνδυασμός με νόμο Darcy σε 3 διαστάσεις

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(-K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(-K_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=0$$

- **Ομοιογενές έδαφος**

$$\boxed{K_x\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+K_y\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+K_z\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0}$$

- **Ισότροπο έδαφος**

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0} \qquad \boxed{\nabla^2 h=0}$$

Εξίσωση Laplace (γραμμική μερική διαφ. εξίσωση)

Μη μόνιμη ροή, κορεσμένο έδαφος, $q = 0$

(I) $\Rightarrow \quad -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = \frac{\partial (n \cdot \rho)}{\partial t}$

Για ρευστά ελάχιστα συμπιεστά υποθέτουμε ότι $\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$ και έτσι $\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) = \rho \frac{\partial v_x}{\partial x}$

Η μερική παράγωγος ως προς το χρόνο γράφεται ως άθροισμα $\frac{\partial}{\partial t}(\rho n) = \frac{\partial \rho}{\partial t} n + \frac{\partial n}{\partial t}\rho$, όπου ο πρώτος όρος εκφράζει την αλλαγή του όγκου του ρευστού, ενώ ο δεύτερος την αλλαγή του όγκου του εδάφους (δηλαδή των εδαφικών πόρων). Με ενδιαφέρει να εμφανίσω το υδραυλικό φορτίο και στη μερική παράγωγο ως προς το χρόνο, θέλω λοιπόν να συνδέσω την αλλαγή του όγκου με την αλλαγή στο υδραυλικό φορτίο. Αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} n + \frac{\partial n}{\partial t}\rho = \rho^2 g n \beta \frac{\partial h}{\partial t} + \rho^2 g a \frac{\partial h}{\partial t}$$

όπου β είναι η συμπιεστότητα του ρευστού που συνήθως θεωρούμε ότι είναι αμελητέα και α είναι η συμπιεστότητα του εδαφικού υλικού, $1/\alpha = E_s$ (όπου E_s είναι το μέτρο μονοδιάστατης συμπίεσης). ΦΥΣΙΚΗ ΕΞΗΓΗΣΗ: <u>για σταθερό σημείο</u>, καθώς μειώνεται το υδραυλικό φορτίο μειώνεται η πίεση κι έτσι ελευθερώνεται όγκος νερού λόγω (1) αύξησης όγκου νερού και (2) μείωσης όγκου πόρων (αύξηση ενεργού τάσης).

Για έναν εγκιβωτισμένο υδροφορέα πάχους H και υδραυλικής αγωγιμότητας K ορίζω:

Ειδική εναποθήκευση: $S_s = \gamma_w(\alpha + n\beta)$ [L^{-1}]

<u>Συντελεστής εναποθήκευσης</u>: $S = S_s \cdot H, \quad S = \frac{H\gamma_w}{E_s}$ για β=0 [αδιάστατο μέγεθος]

<u>Διαβιβαστικότητα</u>: $T = K \cdot H$ [L^2/T]

Έτσι η **εξίσωση μη μόνιμης ροής** γίνεται

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t}}$$

Για ομοιογενές και ισότροπο υλικό

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S_s}{K}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}}$$

Για διδιάστατη οριζόντια ροή, για οριζόντιο εγκιβωτισμένο υδροφορέα

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$ (καρτεσιανές συντεταγμένες)

$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T}\frac{\partial h}{\partial t}}$ (κυλινδρικές συντ., συμμετρία ως προς άξονα = **άντληση από πηγάδι**)

Ροή στην ακόρεστη ζώνη ($S \neq 1$), q = 0

(I) $\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = \frac{\partial(n \cdot \rho \cdot S)}{\partial t}$, όπου S είναι ο βαθμός κορεσμού

για ρ σταθερό και αμελητέα μεταβολή του n

$$-\frac{\partial}{\partial x}(v_x) - \frac{\partial}{\partial y}(v_y) - \frac{\partial}{\partial z}(v_z) = n \cdot \frac{\partial(S)}{\partial t}$$

Ο νόμος του Darcy για ακόρεστη ροή: εισάγεται η έννοια της σχετικής διαπερατότητας k_r ($0 \leq k_r \leq 1$), η οποία είναι συνάρτηση του βαθμού κορεσμού S_w

$$v_x = -\frac{k \cdot k_r \cdot \rho \cdot g}{\mu} \frac{\partial}{\partial x}\left(z + \frac{P_w}{\rho g}\right)$$

Η εξίσωση ροής έχει έναν παραπάνω άγνωστο (S), έχω όμως και μια πρόσθετη σχέση, τη μεταβολή της τριχοειδούς πίεσης P_{Caw} με το βαθμό κορεσμού S_w:

$$P_{Caw} = P_a - P_w = P_{Caw}(S_w)$$

Έτσι η **εξίσωση ροής για την ακόρεστη ζώνη** γράφεται

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k \cdot k_r}{\mu} \frac{\partial P_w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k \cdot k_r}{\mu} \frac{\partial P_w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k \cdot k_r}{\mu} \frac{\partial}{\partial z}(P_w + \rho g z)\right) = n \frac{\partial S_w}{\partial t}}$$

Αριθμητική επίλυση με δεδομένα k (δηλ. K), n, $k_r(S_w)$, $P_C(S_w)$

Λύνω ως προς P_w, S_w

Εξίσωση ροής για πολυφασική ροή

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial P_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k \cdot k_{ri}}{\mu_i} \frac{\partial}{\partial z}(P_i + \rho_i g z)\right) = n \frac{\partial S_i}{\partial t}$$

για $i = w$ (νερό), α (αέρας), o (NAPL)

3 εξισώσεις ($i = w, \alpha, o$), 6 άγνωστοι (P_i, S_i) $\Rightarrow$ θέλω άλλες 3 εξισώσεις:

$S_\alpha + S_w + S_o = 1$, $P_{Cow} = P_o - P_w = P_{Cow}(S_w)$, $P_{Cao} = P_a - P_o = P_{Cao}(S_a)$

Ερωτήσεις πρακτικού ενδιαφέροντος: τι ποσότητα NAPL (S_o) έχω πού; (πώς) θα κινηθεί;