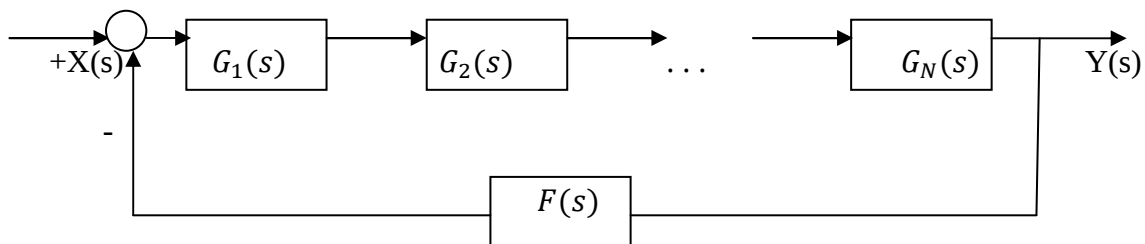


Ισοδυναμία τοπολογιών βρόχων.

Κατά κανόνα, συμφέρει να ανάγουμε τις «πολύπλοκες» τοπολογίες βρόχων σε έναν απλό κλειστό βρόχο, με μία συνάρτηση μεταφοράς στον κατ' ευθείαν κλάδο και μία συνάρτηση μεταφοράς στον κλάδο ανάδρασης όπως θα φανεί κατωτέρω:

1. Συστήματα ΓΧΑ εν σειρά (σε αλληλουχία/cascaded) στον κατευθείαν κλάδο.

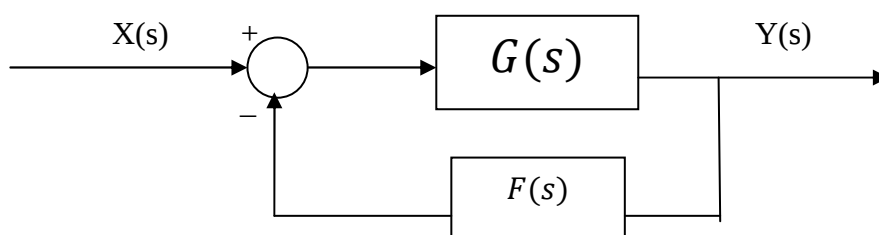


Σχήμα 1.1

Έχουμε ήδη θεμελιώσει ότι οποιοσδήποτε πεπερασμένος αριθμός ΓΧΑ συστημάτων σε σειρά είναι επίσης ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ίση με το γινόμενο των επιμέρους συναρτήσεων μεταφοράς, δηλαδή στο προκείμενο

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \dots G_N(s) \quad (1.1)$$

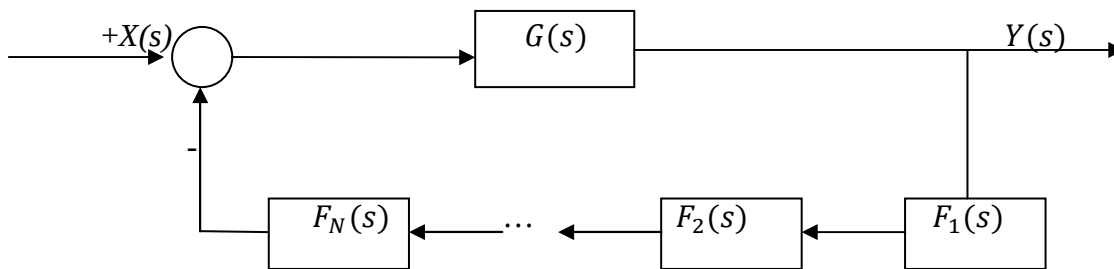
οπότε και το ανωτέρω σύστημα είναι ισοδύναμο με το κάτωθι απλό σύστημα κλειστού βρόχου.



Σχήμα 1.2

2. Συστήματα ΓΧΑ εν σειρά (σε αλληλουχία/cascaded) στον κλάδο ανάδρασης.

Έστω ο κάτωθι σχηματισμός:

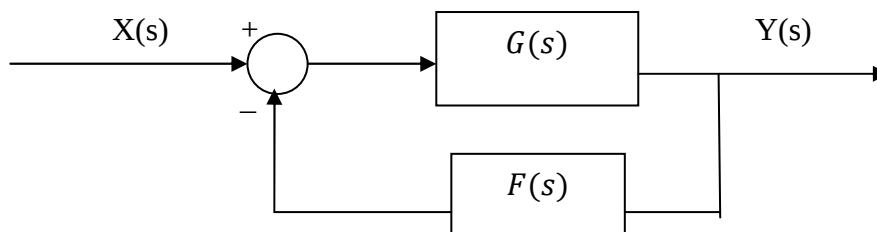


Σχήμα 2.1

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση τα εν σειρά ΓΧΑ συστήματα ισοδυναμούν με ένα επίσης ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς το γινόμενο των συναρτήσεων μεταφοράς των επιμέρους συστημάτων. Με άλλα λόγια ισχύει για τον κλάδο ανάδρασης

$$F(s) = F_1(s)F_2(s) \dots F_N(s) \quad (2.1)$$

και το σύστημα του σχήματος 2.1 ισοδυναμεί με το κάτωθι



Σχήμα 2.2

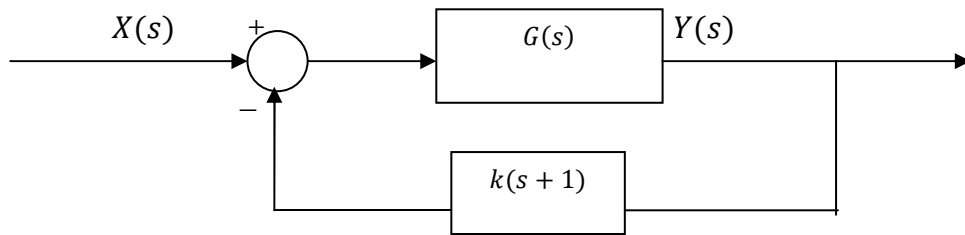
3. Ισοδύναμες τοπολογίες ελέγχου

Έχουμε διαπιστώσει από την προηγούμενη ανάλυση ότι η ευστάθεια ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου εξαρτάται μόνο από τον παρονομαστή της συνολικής συνάρτησης μεταφοράς. Επίσης, και η μεταβατική απόκριση του συστήματος, ουσιαστικά και πρακτικά, επηρεάζεται καθοριστικά από τον ίδιο παρονομαστή. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι διαγράμματα βαθμίδων κλειστών βρόχων που τελικά οδηγούν σε συνολική συνάρτηση μεταφοράς με τον ίδιο παρονομαστή, είναι ισοδύναμα από πλευράς αυτομάτου ελέγχου. Αυτή η ισοδυναμία θα καταδειχτεί με συγκεκριμένα παραδείγματα:

α) Δείξαμε στα προηγούμενα ότι το Γ.Χ.Α. σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 0.4s + 4}$$

είναι ασταθές και μπορεί να ελεγχθεί ικανοποιητικά με το κάτωθι Γ.Χ.Α. σύστημα κλειστού βρόχου:



Σχήμα 3.1

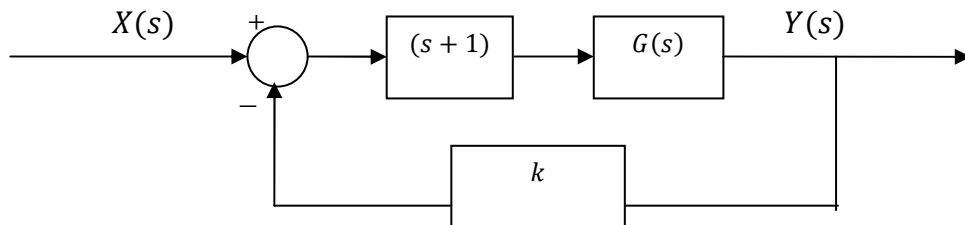
Το ανωτέρω σύστημα κλειστού βρόχου έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{1}{\frac{s^2 - 0.4s + 4}{k(s+1)}} \Leftrightarrow$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + (k - 0.4)s + (4 + k)}$$

και αντιστοιχεί σε ευσταθές σύστημα δευτέρας τάξεως για $k > 0.4$.

Ας θεωρήσουμε τώρα την κάτωθι τοπολογία-διάγραμμα βαθμίδων:



Σχήμα 3.2

Η συνάρτηση μεταφοράς του κατευθείαν κλάδου είναι

$$G_1(s) = (s + 1)G(s)$$

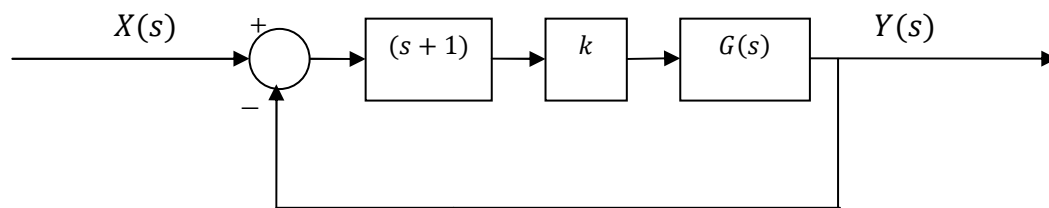
και η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου είναι η

$$H_1(s) = \frac{G_1(s)}{1 + F_1(s)G_1(s)} = \frac{\frac{(s + 1)}{(s^2 - 0.4s + 4)}}{1 + k \frac{(s + 1)}{(s^2 - 0.4s + 4)}} \Leftrightarrow$$

$$H_1(s) = \frac{s + 1}{s^2 + (k - 0.4)s + (4 + k)}.$$

Παρατηρούμε ότι η $H(s)$ και η $H_1(s)$ έχουν διαφορετικό αριθμητή αλλά τον ίδιο παρονομαστή, άρα τα δύο αντίστοιχα συστήματα Γ.Χ.Α. έχουν την ίδια συμπεριφορά από πλευράς ΣΑΕ.

Ας θεωρήσουμε τώρα την κάτωθι τοπολογία-διάγραμμα βαθμίδων:



Σχήμα 3.3

Η συνάρτηση μεταφοράς του κατευθείαν κλάδου είναι

$$G_2(s) = k(s + 1)G(s)$$

και η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου είναι η

$$H_2(s) = \frac{G_2(s)}{1 + F_2(s)G_2(s)} = \frac{\frac{k(s + 1)}{(s^2 - 0.4s + 4)}}{1 + \frac{k(s + 1)}{(s^2 - 0.4s + 4)}} \Leftrightarrow$$

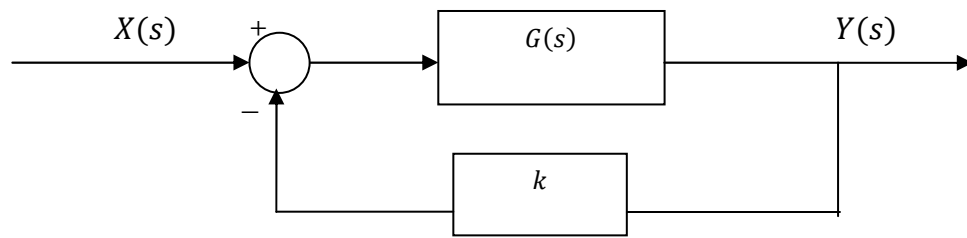
$$H_2(s) = \frac{k(s + 1)}{s^2 + (k - 0.4)s + (4 + k)}.$$

Παρατηρούμε ότι η $H(s)$, η $H_1(s)$ και η $H_2(s)$ έχουν διαφορετικό αριθμητή αλλά τον ίδιο παρονομαστή, άρα όλα τα αντίστοιχα Γ.Χ.Α. συστήματα έχουν την ίδια συμπεριφορά από πλευράς ΣΑΕ, δηλαδή από πλευράς ευστάθειας και συμπεριφοράς στη μεταβατική απόκριση και στη μόνιμη κατάσταση. Παραδείγματος χάριν, για είσοδο βηματική συνάρτηση, η έξοδος για $k > 0.4$ είναι $cu(t)$, όπου c σταθερά η οποία όμως ενδέχεται να αλλάζει από τοπολογία σε τοπολογία. (δηλαδή άλλο c κατά κανόνα δίνει το $H(s)$ άλλο το $H_1(s)$ άλλο το $H_2(s)$). Κάτι τέτοιο όμως, δεν αποτελεί ουσιώδη διαφοροποίηση από πλευράς ΣΑΕ.

β) Δείξαμε στα προηγούμενα ότι το Γ.Χ.Α. σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s + 7}{s^3 + 4s^2 + s - 6}$$

είναι ασταθές. Εξετάζουμε εάν μπορεί να ελεγχθεί με τη βοήθεια ενός ΓΧΑ συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς $F(s) = k$, με χρήση του κάτωθι κλειστού βρόχου:



Σχήμα 3.4

Πράγματι, το σύστημα αυτό έχει συνάρτηση μεταφοράς την

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{\frac{s+7}{s^3 + 4s^2 + s - 6}}{1 + k \frac{s+7}{s^3 + 4s^2 + s - 6}} \Leftrightarrow$$

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + (k+1)s + (7k-6)}$$

Ελέγχουμε την ευστάθεια του $H(s)$ με το κριτήριο του Routh-Hurwitz.

Ισχύει:

s^3	1	$k+1$
s^2	4	$7k-6$
s^1	$\frac{4(k+1)-7k-6}{4}$	0
s^0	$7k-6$	0

Για να είναι το σύστημα ευσταθές θα πρέπει να συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$\frac{4(k+1)-7k-6}{4} > 0$$

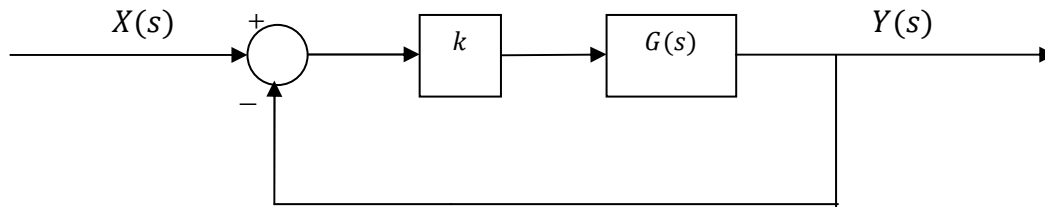
και

$$7k-6 > 0$$

Αρα πρέπει και αρκεί να ισχύει

$$\frac{6}{7} < k < \frac{10}{3}.$$

Η διάταξη του σχήματος 3.4 είναι ισοδύναμη, από πλευράς ΣΑΕ, με το διάγραμμα βαθμίδων του σχήματος 3.5.



Σχήμα 3.5

Όντως, η συνάρτηση μεταφοράς του κατευθείαν κλάδου είναι

$$G_1(s) = kG(s)$$

και η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου είναι η

$$H_1(s) = \frac{G_1(s)}{1 + F_1(s)G_1(s)} = \frac{k \frac{s+7}{s^3 + 4s^2 + s - 6}}{1 + k \frac{s+7}{s^3 + 4s^2 + s - 6}} \Leftrightarrow$$

$$H_1(s) = \frac{k(s+7)}{s^3 + 4s^2 + (k+1)s + (7k-6)}.$$

Παρατηρούμε ότι η $H(s)$ και η $H_1(s)$ έχουν διαφορετικό αριθμητή αλλά τον ίδιο παρονομαστή, άρα τα δύο αντίστοιχα συστήματα ΓΧΑ έχουν την ίδια συμπεριφορά από πλευράς ΣΑΕ. Επειδή όσο αριστερότερα είναι όλοι οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου, τόσο γρηγορότερα τείνει στην επιθυμητή τιμή η έξοδος, για αυτό ας αναζητήσουμε ένα εύρος τιμών του k όπου όλοι οι πόλοι της $H(s)$ έχουν πραγματικό μέρος < -3 .

Προκειμένου να γίνει αυτό γράφουμε το αρχικό πολυώνυμο ως ένα νέο πολυώνυμο ως προς $(s+3)$. Προκύπτει συνεπώς η ακόλουθη ταυτότητα

$$s^3 + 4s^2 + (k+1)s + (7k-6) \equiv \alpha_3(s+3)^3 + \alpha_2(s+3)^2 + \alpha_1(s+3) + \alpha_0 \quad (1)$$

Θέτοντας στην (1) $s = -3$ λαμβάνουμε $\alpha_0 = 4k$

Επειδή απαιτούμε η (1) να είναι ταυτότητα μπορούμε να την παραγωγίσουμε οπότε λαμβάνουμε

$$3s^2 + 8s + (k+1) \equiv 3\alpha_3(s+3)^2 + 2\alpha_2(s+3) + \alpha_1 \quad (2)$$

Θέτοντας στη (2) $s = -3$ λαμβάνουμε $\alpha_1 = k+4$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα (2) λαμβάνουμε

$$6s + 8 \equiv 6\alpha_3(s + 3) + 2\alpha_2 \quad (3)$$

Θέτοντας στην (3) $s = -3$ λαμβάνουμε $\alpha_2 = -5$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα (3) λαμβάνουμε

$$\alpha_3 = 1$$

Προφανώς οι συντελεστές του πολυωνύμου

$$r^3 - 5r^2 + (k + 4)r + 4k \text{ όπου } r = s + 3,$$

υποδεικνύουν αμέσως ότι αυτό είναι ασταθές για κάθε k και ότι, άρα, δεν υπάρχουν πραγματικά k τα οποία μπορούν να καταστήσουν όλους τους πόλους του αρχικού συστήματος κλειστού βρόχου να έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του -3 .

Ας δούμε αν υπάρχει k που κάνει τη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου να έχει όλους τους πόλους της με πραγματικό μέρος μικρότερο του -0.2 .

Προκειμένου να γίνει αυτό γράφουμε το αρχικό πολυώνυμο ως ένα νέο πολυώνυμο ως προς $r = (s + 0.2)$, οπότε προκύπτει η ακόλουθη ταυτότητα

$$s^3 + 4s^2 + (k + 1)s + (7k - 6) \equiv \beta_3(s + 0.2)^3 + \beta_2(s + 0.2)^2 + \beta_1(s + 0.2) + \beta_0 \quad (4)$$

Θέτοντας στην (4) $s = -0.2$ λαμβάνουμε άμεσα $\beta_0 = \frac{34k}{5} - \frac{756}{125}$

Επειδή απαιτούμε η (4) να είναι ταυτότητα μπορούμε να την παραγωγίσουμε λαμβάνοντας

$$3s^2 + 8s + (k + 1) \equiv 3\beta_3(s + 0.2)^2 + 2\beta_2(s + 0.2) + \beta_1 \quad (5)$$

Θέτοντας εκ νέου στην (5) $s = -0.2$ λαμβάνουμε $\beta_1 = k - \frac{12}{25}$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα (5) λαμβάνουμε

$$6s + 8 \equiv 6\beta_3(s + 0.2) + 2\beta_2 \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας στην (6) το s με -0.2 λαμβάνουμε $\beta_2 = 3.4$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα (6) λαμβάνουμε προφανώς

$$\beta_3 = 1$$

Για να βρούμε τα πιθανά k που καθιστούν το αρχικό πολυώνυμο

$$s^3 + 4s^2 + (k + 1)s + (7k - 6)$$

να έχει ρίζες , όλες με πραγματικό μέρος μικρότερο του -0.2 , πρέπει και αρκεί να απαιτήσουμε το πολυώνυμο

$$r^3 + 1.6r^2 + \left(k - \frac{87}{25}\right)r + \left(\frac{31k}{5} - \frac{594}{125}\right)$$

να είναι ευσταθές. Γιατί;;

Άρα εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh στο τελευταίο πολυώνυμο

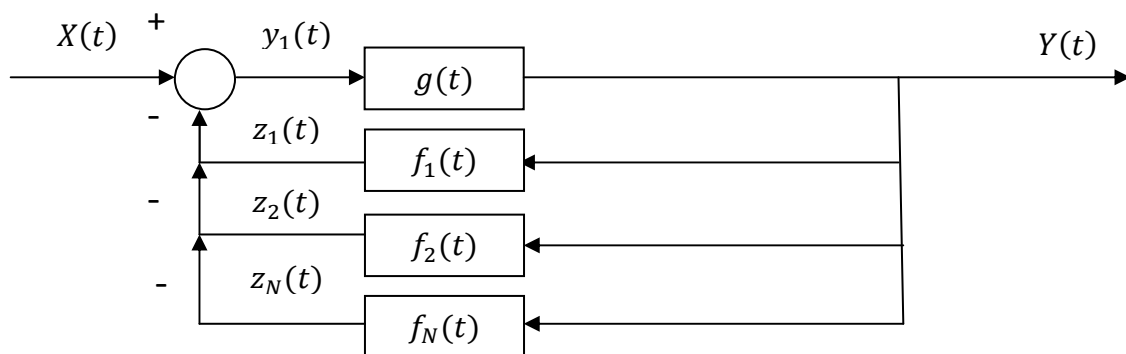
s^3	1	$k - \frac{12}{25}$
s^2	3.4	$\frac{34k}{5} - \frac{756}{125}$
s^1	$\frac{552}{425} - k$	0
s^0	$\frac{34k}{5} - \frac{756}{125}$	0

Απαιτώντας η πρώτη στήλη του Routh να είναι να περιέχει εξ ολοκλήρου θετικούς όρους λαμβάνουμε για το k τον περιορισμό

$$\frac{378}{425} < k < \frac{552}{425} \quad (7)$$

4. Συστήματα ΓΧΑ κλειστού βρόχου με πεπερασμένο αριθμό κλάδων ανάδρασης συνδεδεμένων εν παραλλήλω.

Η ανάλυση θα γίνει κατ' αρχήν στο πεδίο του χρόνου.



Σχήμα 4.1

Ισχύει:

$$y_1(t) = x(t) - (z_1(t) + z_2(t) + \dots + z_N(t))$$

$$z_1(t) = f_1(t) * y(t), z_2(t) = f_2(t) * y(t), \dots, z_N(t) = f_N(t) * y(t)$$

Και

$$y(t) = y_1(t) * g(t)$$

Άρα,

$$y(t) = g(t) * (x(t) - (z_1(t) + z_2(t) + \dots + z_N(t))) \quad (4.1)$$

Και επειδή έχουμε αποδείξει ότι το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους ΓΧΑ συστημάτων είναι επίσης ένα ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση το άθροισμα των επιμέρους κρουστικών αποκρίσεων, προκύπτει ότι όλος ο κλάδος ανάδρασης ισοδυναμεί με ένα ΓΧΑ με κρουστική απόκριση

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_N(t)$$

Μετασχηματίζοντας τις προηγούμενες σχέσεις κατά LAPLACE λαμβάνουμε

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \dots + F_N(s)$$

και συνολικά λαμβάνουμε για την έξοδο

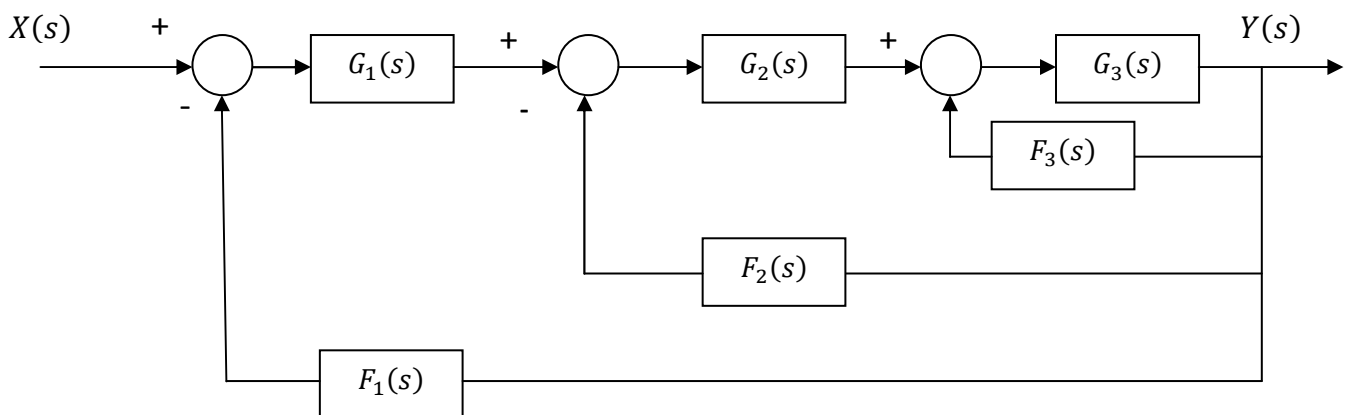
$$\frac{Y(s)}{X(s)} \equiv H(s) = \frac{G(s)}{1+F(s)G(s)} \quad (4.2)$$

Εντελώς ανάλογα, εάν υπάρχουν παράλληλοι κατ' ευθείαν κλάδοι με συνάρτηση μεταφοράς $G_1(s), G_2(s), \dots, G_N(s)$ ο καθένας, τότε όλοι αυτοί ισοδυναμούν με έναν συνολικό κατ' ευθείαν κλάδο με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) + \dots + G_N(s) \quad (4.3)$$

5. Διάφοροι κλάδοι ανάδρασης με κοινή αρχή.

Θα δείξουμε τον τρόπο αντιμετώπισης αυτής της τοπολογίας με το κάτωθι συγκεκριμένο παράδειγμα.

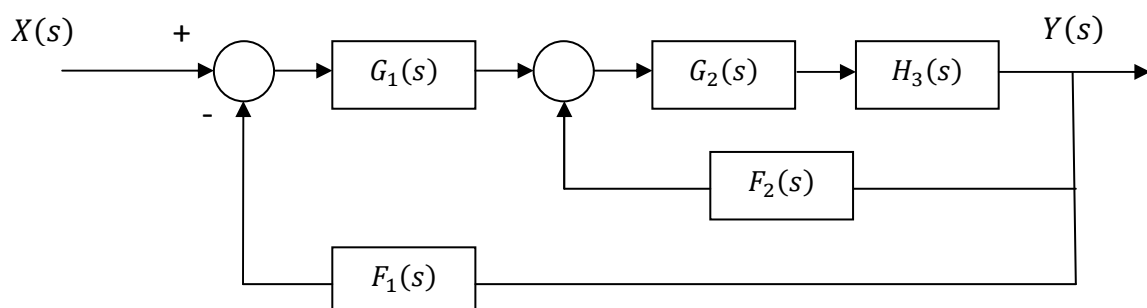


Σχήμα 5.1

Εκκινώντας από δεξιά, διότι ο κοινός κόμβος είναι στην αρχή των κλάδων ανάδρασης που είναι δεξιά, μετασχηματίζουμε κάθε κλειστό βρόχο με ανάδραση, με ένα απλό ΓΧΑ σύστημα. Άρα, στο πρώτο βήμα λαμβάνουμε ένα ΓΧΑ με συνάρτηση μεταφοράς

$$H_3(s) = \frac{G_3(s)}{1 + F_3(s)G_3(s)} \quad (5.1)$$

οπότε λαμβάνουμε την εξής ισοδύναμη τοπολογία.



Σχήμα 5.2

Με όμοιο τρόπο αντικαθιστούμε το δεξιά κλειστό βρόχο όπου στον κατ' ευθείαν κλάδο υπάρχουν 2 ΓΧΑ συστήματα εν σειρά με συναρτήσεις μεταφοράς $G_2(s)$ και

$H_3(s)$ και κλάδο ανάδρασης τον $F_2(s)$, με ένα ΓΧΑ σύστημα με συνολική συνάρτηση μεταφοράς

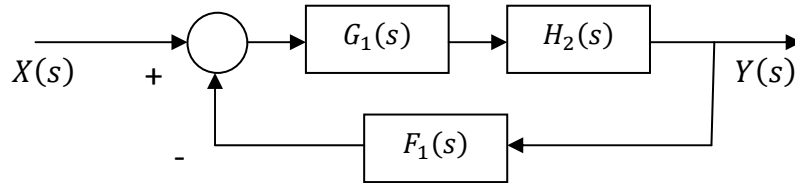
$$H_2(s) = \frac{G_2(s)H_3(s)}{1 + F_2(s)G_2(s)H_3(s)}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση την έκφραση της $H_3(s)$ της σχέσης (5.1) λαμβάνουμε

$$H_2(s) = \frac{G_2(s) \frac{G_3(s)}{1 + F_3(s)G_3(s)}}{1 + F_2(s)G_2(s) \frac{G_3(s)}{1 + F_3(s)G_3(s)}} \Leftrightarrow$$

$$H_2(s) = \frac{G_2(s)G_3(s)}{1 + F_3(s)G_3(s) + F_2(s)G_2(s)G_3(s)} \quad (5.2)$$

Οπότε λαμβάνουμε την ισοδύναμη τοπολογία του σχήματος 5.3



Σχήμα 5.3

Στο επόμενο βήμα με όμοιο τρόπο αντικαθιστούμε το δεξιά κλειστό βρόχο όπου στον κατ' ευθείαν κλάδο υπάρχουν 2 ΓΧΑ συστήματα εν σειρά με συναρτήσεις μεταφοράς $G_1(s)$ και $H_2(s)$ και κλάδο ανάδρασης τον $F_1(s)$, με το τελικό ΓΧΑ σύστημα το οποίο έχει συνολική συνάρτηση μεταφοράς

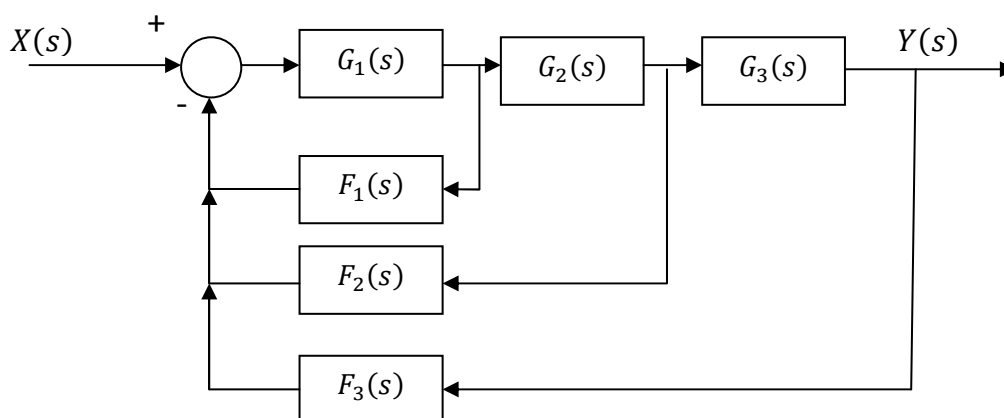
$$H(s) = \frac{G_1(s)H_2(s)}{1 + F_1(s)G_1(s)H_2(s)}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση την έκφραση της $H_2(s)$ της σχέσης (5.2) λαμβάνουμε

$$H(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + F_3(s)G_3(s) + F_2(s)G_2(s)G_3(s) + F_1(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)} \quad (5.3)$$

6. Διάφοροι κλάδοι ανάδρασης με κοινό πέρας.

Θα δείξουμε τον τρόπο αντιμετώπισης και αυτού του διαγράμματος βαθμίδος με το κάτωθι συγκεκριμένο παράδειγμα.

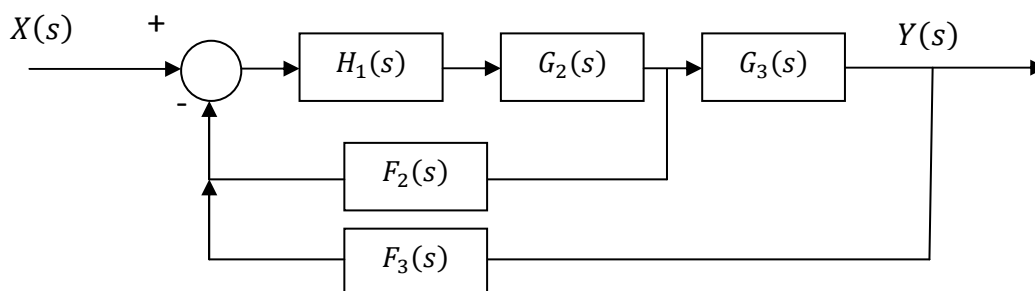


Σχήμα 6.1

Εκκινώντας από τον πρώτο αριστερά κόμβο, επειδή το κοινό πέρας βρίσκεται στην αρχή, μετασχηματίζουμε κάθε κλειστό βρόχο με ανάδραση, με ένα απλό ΓΧΑ σύστημα. Άρα, στο πρώτο βήμα λαμβάνουμε ένα ΓΧΑ σύστημα με ευθύ κλάδο το $G_1(s)$ και κλάδο ανάδρασης το $F_1(s)$ και συνάρτηση μεταφοράς

$$H_1(s) = \frac{G_1(s)}{1 + F_1(s)G_1(s)} \quad (6.1)$$

Κατά συνέπεια προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα.



Σχήμα 6.2

Πάλι, στον αριστερά κλειστό βρόχο υπάρχουν ένας κατ' ευθείαν κλάδος με 2 ΓΧΑ συστήματα εν σειρά με συναρτήσεις μεταφοράς $H_1(s)$ και $G_2(s)$ και ένας κλάδος

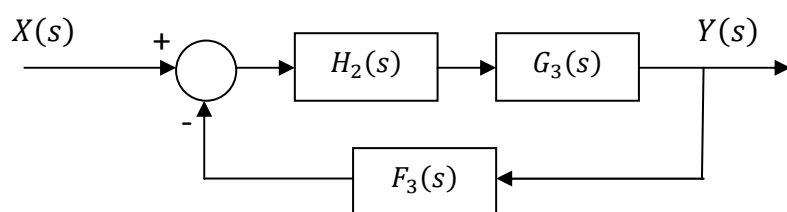
ανάδρασης με συνάρτηση $F_2(s)$. Αντικαθιστούμε αυτόν τον κλειστό με ένα ΓΧΑ σύστημα η συνολική συνάρτηση μεταφοράς του οποίου είναι η ακόλουθη

$$H_2(s) = \frac{H_1(s)G_2(s)}{1 + F_2(s)H_1(s)G_2(s)}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση την έκφραση της $H_1(s)$ της σχέσης (6.1) λαμβάνουμε

$$H_2(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + F_1(s)G_1(s) + F_2(s)G_1(s)G_2(s)} \quad (6.2)$$

Κατά συνέπεια προκύπτει το ισοδύναμο σύστημα.



Σχήμα 6.3

Στο τελικό βήμα έχουμε ένα κλειστό βρόχο με $H_2(s)$ και $G_3(s)$ στον ευθύ κλάδο και $F_3(s)$ στον κλάδο ανάδρασης με συνολική συνάρτηση μεταφοράς

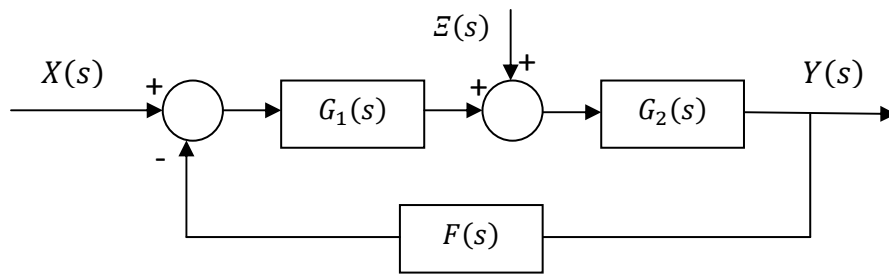
$$H(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + F_1(s)G_1(s) + F_2(s)G_1(s)G_2(s) + F_3(s)G_1(s)G_2(s)G_3(s)} \quad (6.3)$$

7. Ένα μοντέλο εισαγωγής διαταραχών στο σύστημα

(Εδώ ας μελετηθεί το *thetiki_anadrasi*)

Υπάρχει ένα μοντέλο που συμπεριλαμβάνει ενδεχόμενες διαταραχές στο σύστημα, σύμφωνα με το οποίο σε κατάλληλα σημεία στο βρόχο, οι διαταραχές προστίθενται ως επιπλέον είσοδοι. Ο τρόπος χειρισμού αυτών των μοντέλων θα καταδειχθεί μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα:

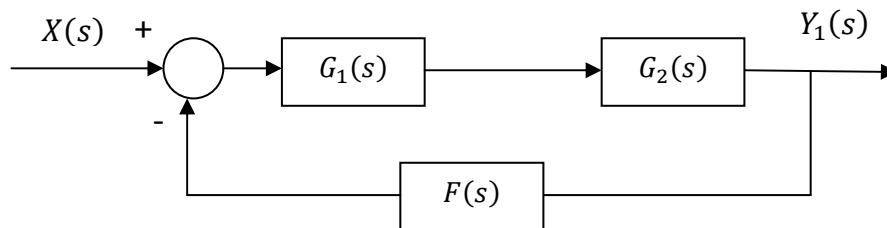
α) Έστω η κάτωθι τοπολογία όπου η διαταραχή προστίθεται ως επιπλέον είσοδος στον κατ' ευθείαν κλάδο μεταξύ των 2 ΓΧΑ συστημάτων με συνάρτηση μεταφοράς $G_1(s)$ και $G_2(s)$.



Σχήμα 7.1

Επειδή όλα τα επί μέρους συστήματα είναι γραμμικά μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή να θεωρήσουμε τη μία φορά την είσοδο $x(t)$ με $\xi(t) = 0$ και τη δεύτερη φορά $x(t) = 0$ και είσοδο $\xi(t)$. Επομένως αναλύουμε πρώτα τα δύο κάτωθι ΓΧΑ συστήματα στο πεδίο των s .

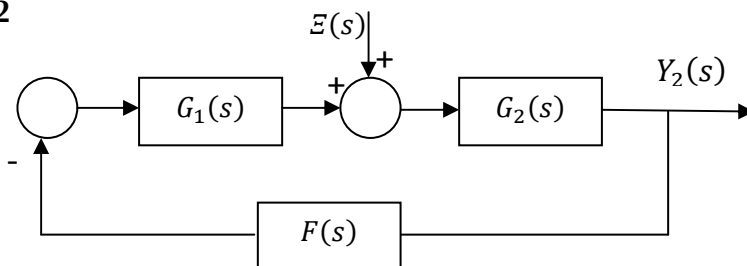
A1



Σχήμα 7.2

$$Y_1(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + F(s)G_1(s)G_2(s)} X(s)$$

A2



Σχήμα 7.3

ΠΡΟΣΟΧΗ αν και $x(t) = 0$, ο αφαιρέτης παραμένει γεγονός που συνεπάγεται επιβολή αντίθετου προσήμου στην $F(s)$. Επιπλέον ο ευθύς κλάδος του κλειστού βρόχου έχει τώρα μόνο το $G_2(s)$, ενώ ο κλάδος ανάδρασης έχει εν σειρά τα $(-F(s))$ και $G_1(s)$. Δηλαδή το γεγονός ότι στο σημείο που προστίθεται η $\xi(t)$ υπάρχει αθροιστής αντί για αφαιρέτη αντισταθμίζεται από την αντιστροφή του προσήμου της $F(s)$. Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του νέου κλειστού βρόχου δίνεται από τη σχέση

$$H_2(s) = \frac{G_2(s)}{1 + F(s)G_1(s)G_2(s)}$$

ενώ η έξοδος $Y_2(s)$ από τη σχέση

$$Y_2(s) = H_2(s)E(s)$$

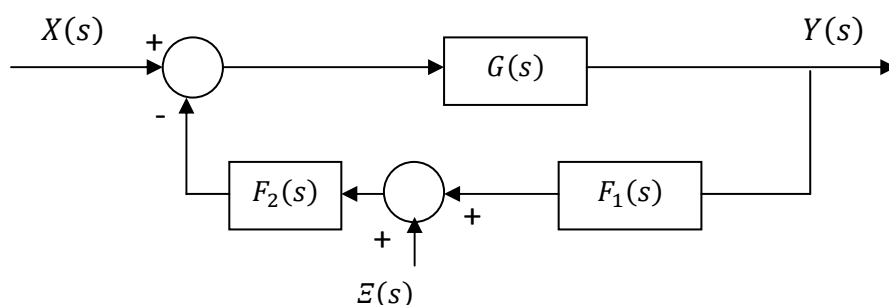
Άρα λόγω της επαλληλίας, η συνολική απόκριση του συστήματος όταν και η είσοδος $x(t)$ και οι διαταραχές ληφθούν υπόψη, θα είναι στο πεδίο των s :

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{G_2(s)}{1 + F(s)G_1(s)G_2(s)} (G_1(s)X(s) + E(s)) \quad (7.1)$$

Από αυστηρά μαθηματικής απόψεως, η συνολική απόκριση δεν έχει Συνάρτηση Μεταφοράς, αφού η έξοδος δεν προκύπτει από συνέλιξη ούτε με τη $x(t)$, ούτε με $(x(t) + \xi(t))$. Όμως, η ευστάθεια του συστήματος κατά BIBO, ως και η μεταβατική του απόκριση καθορίζονται από το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε μια «ψευδο-είσοδο» της μορφής $(G_1(s)X(s) + E(s))$ και να εφαρμόσουμε όλες τις προηγούμενες μεθόδους, ως και αυτές που θα αναφερθούν στα επόμενα, στην ψευδο – Συνάρτηση Μεταφοράς

$$\frac{G_2(s)}{1 + F(s)G_1(s)G_2(s)} \quad (7.2)$$

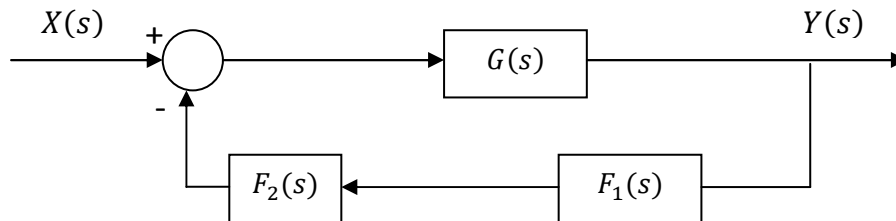
β) Έστω η κάτωθι τοπολογία όπου η διαταραχή προστίθεται ως επιπλέον είσοδος στον κλάδο ανάδρασης μεταξύ των 2 ΓΧΑ συστημάτων με συναρτήσεις μεταφοράς $F_1(s)$ και $F_2(s)$.



Σχήμα 7.4

Επειδή όλα τα επί μέρους συστήματα είναι γραμμικά μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας, δηλαδή να θεωρήσουμε τη μία φορά την είσοδο $x(t)$ με $\xi(t) = 0$ και τη δεύτερη φορά $x(t) = 0$ και είσοδο $\xi(t)$. Επομένως αναλύουμε πρώτα τα δύο κάτωθι ΓΧΑ συστήματα στο πεδίο των s .

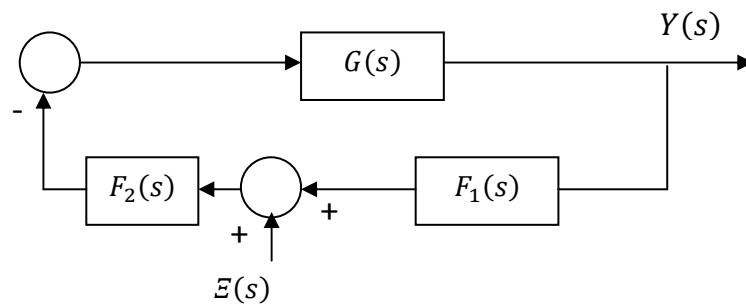
B1



Σχήμα 7.5

$$Y_1(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F_1(s)F_2(s)} X(s)$$

B2



Σχήμα 7.6

ΠΡΟΣΟΧΗ αν και $x(t) = 0$, ο αφαιρέτης παραμένει γεγονός που συνεπάγεται επιβολή αντίθετου προσήμου στην $F_2(s)$. Επιπλέον ο ευθύς κλάδος του κλειστού βρόχου έχει τώρα εν σειρά τα $(-F_2(s))$ και $G(s)$, ενώ ο κλάδος ανάδρασης έχει μόνο το $F_1(s)$. Δηλαδή το γεγονός ότι στο σημείο που προστίθεται η $\xi(t)$ υπάρχει αθροιστής αντί για αφαιρέτη αντισταθμίζεται από την αντιστροφή του προσήμου της

$F_2(s)$. Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς του νέου κλειστού βρόχου δίνεται από τη σχέση

$$H_2(s) = \frac{-F_2(s)G(s)}{1 + G(s)F_1(s)F_2(s)}$$

ενώ η έξοδος $Y_2(s)$ από τη σχέση

$$Y_2(s) = H_2(s)E(s)$$

Άρα λόγω της επαλληλίας, η συνολική απόκριση του συστήματος όταν και η είσοδος $x(t)$ και οι διαταραχές ληφθούν υπόψη, θα είναι στο πεδίο των s :

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F_1(s)F_2(s)}(X(s) - F_2(s)E(s)) \quad (7.3)$$

Από αυστηρά μαθηματικής απόψεως, πάλι η συνολική απόκριση δεν έχει Συνάρτηση Μεταφοράς, αφού η έξοδος δεν προκύπτει από συνέλιξη ούτε με τη $x(t)$, ούτε με $(x(t) + \xi(t))$. Όμως, η ευστάθεια του συστήματος κατά BIBO, ως και η μεταβατική του απόκριση καθορίζονται από το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε μια «ψευδο-είσοδο» της μορφής $(X(s) - F_2(s)E(s))$ και να εφαρμόσουμε όλες τις προηγούμενες μεθόδους στην ψευδο – Συνάρτηση Μεταφοράς

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)F_1(s)F_2(s)} \quad (7.4)$$