

1. Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Ζητείται να εξεταστεί η ευστάθειά του κατά BIBO.

Λύση :

A)

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \equiv \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+2}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$:

$$g(t) = \frac{1}{2}u(t) - e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)$$

Η $g(t)$ είναι φραγμένη καθώς $t \rightarrow \infty$. Το σύστημα είναι;

B) Βάζω είσοδο στο σύστημα τη βηματική συνάρτηση $u(t)$.

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2(s+1)(s+2)} \equiv -\frac{3}{4} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{s+2}$$
$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = -\frac{3}{4}u(t) + \frac{1}{2}tu(t) + e^{-t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-2t}u(t)$$

η οποία αποκλίνει καθώς $t \rightarrow \infty$.

Άρα για μία **φραγμένη είσοδο**, την $u(t)$, βρήκαμε **έξοδο** που **αποκλίνει**, άρα το σύστημα δεν είναι ευσταθές κατά BIBO.

2. Δίνεται το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 9)(s+1)}$$

Ζητείται να βρεθεί η κρουστική του απόκριση ως, και να εξεταστεί η ευστάθειά του κατά BIBO.

Λύση :

A)

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + 9)(s+1)} \equiv \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{60}j\right) \frac{1}{s+3j} + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{60}j\right) \frac{1}{s-3j} + \frac{1}{10} \frac{1}{s+1}$$

Η κρουστική απόκριση του συστήματος είναι $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$:

$$g(t) = \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{60}j\right) e^{-3jt}u(t) + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{60}j\right) e^{3jt}u(t) + \frac{1}{10} e^{-t}u(t) \Rightarrow$$
$$g(t) = \frac{1}{30} (3 \cos(3t) + \sin(3t))u(t) + \frac{1}{10} e^{-t}u(t)$$

Η $g(t)$ είναι φραγμένη καθώς $t \rightarrow \infty$. Το σύστημα είναι;

B) Βάζω είσοδο στο σύστημα τη βηματική συνάρτηση $u(t)$.

$$\begin{aligned}
Y(s) &= G(s) \frac{1}{s} = \frac{1}{(s^2 + 9)(s + 1)s} \\
&\equiv \frac{11}{9s} - \frac{1}{10s + 1} - \frac{1 + 3j}{180} \frac{1}{s + 3j} - \frac{1 - 3j}{180} \frac{1}{s - 3j} \\
\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} y(t) &= \frac{1}{9}u(t) - \frac{1}{10}e^{-t}u(t) - \frac{1 + 3j}{180}e^{-3jt}u(t) - \frac{1 - 3j}{180}e^{3jt}u(t)
\end{aligned}$$

η οποία ΔΕΝ αποκλίνει καθώς $t \rightarrow \infty$.

Αποδείξαμε ότι είναι BIBO;;;

Γ) Βάζουμε είσοδο την $x(t) = \frac{1}{5}\sin(5t)$. Οπότε

$$\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)X(s) \equiv \frac{1}{(s^2 + 9)(s + 1)} \frac{1}{s^2 + 25} \equiv \frac{A}{s + 3j} + \frac{B}{s - 3j} + \frac{\Gamma}{s + 1} + \frac{\Delta}{s + 5j} + \frac{E}{s - 5j} \\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$A = \frac{-3 - j}{96}, B = \frac{-3 + j}{96}, \Gamma = \frac{13}{338}, \Delta = \frac{5 + j}{4160}, E = \frac{5 - j}{4160}$$

Άρα

$$y(t) = Ae^{-3jt} + Be^{3jt} + \Gamma e^{-t} + \Delta e^{-5jt} + Ee^{5jt}$$

η οποία είναι φραγμένη και ισοδυνάμως γράφεται

$$y(t) = \frac{\sin(3t) - 3\cos(3t)}{480} + \Gamma e^{-t} + \frac{-\sin(5t) + 5\cos(5t)}{13}$$

Δ) Βάζουμε σαν είσοδο το $x(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$.

$$x(t) = \frac{1}{3}\sin(3t) \stackrel{\mathcal{L}}{\Rightarrow} X(s) = \frac{1}{3} \frac{3}{s^2 + 3^2} = \frac{1}{s^2 + 9}$$

Τότε

$$\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)X(s) = \frac{1}{(s^2 + 9)(s + 1)} \frac{1}{s^2 + 9} = \frac{1}{(s^2 + 9)^2(s + 1)} \Rightarrow \\
&\Rightarrow Y(s) \equiv \frac{A}{s + 3j} + \frac{B}{(s + 3j)^2} + \frac{\Gamma}{s - 3j} + \frac{\Delta}{(s - 3j)^2} + \frac{E}{s + 1}
\end{aligned}$$

Θέτοντας

- $s = -1$ λαμβάνουμε $E = \frac{1}{100}$
- $s = -3j$ λαμβάνουμε $B = -\frac{1}{360}(1 + 3j)$
- $s = 3j$ λαμβάνουμε $\Delta = -\frac{1}{360}(1 - 3j)$
- Με παραγωγήιση μπορούμε να βρούμε τα A και Γ , τα οποία θα είναι συζυγή, αλλά οι πράξεις δεν απαιτούνται διότι οι αντίστοιχοι όροι είναι, όπως έχουμε δει, φραγμένοι.

Παρατηρούμε όμως ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{(s+3j)^2} + \frac{\Delta}{(s-3j)^2}\right\} &= B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3j)^2}\right\} + \Delta\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3j)^2}\right\} = \\ &= Bt^2e^{-3jt}u(t) + \Delta t^2e^{3jt}u(t) = -\frac{t^2}{180}(\cos(3t) + 3\sin(3t))\end{aligned}$$

που προφανώς αποκλίνει.

Σε ποιο φυσικό φαινόμενο θεωρείτε ότι αντιστοιχεί η ανωτέρω διαδικασία;

Ε) Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο της προηγούμενης συνάρτησης μεταφοράς.

$$s^3 + s^2 + 9s + 9$$

s^3	1	9
s^2	1	9
s^1	2	0
s^0	9	

s^3	1	9
s^2	1	9
s^1	0	0
s^0	0	0

Αντικαθιστούμε με τον πίνακα

s^3	1	9
s^2	1	9
s^1	2	0
s^0	9	0

Δηλαδή ευστάθεια; Αντίφαση;.

3. Να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια το ΓΧΑ σύστημα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του οποίου είναι το

$$s^5 + 6s^4 + 20s^3 + 60s^2 + 99s + 54$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

s^5	1	20	99
s^4	6	60	54
s^3	10	90	0
s^2	6	54	0
s^1	0	0	0
s^0	0	0	0

4. Να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια ένα ΓΧΑ σύστημα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του οποίου είναι το

$$P(s) = s^6 + 3s^5 + 12s^4 + 30s^3 + 29s^2 + 27s + 18$$

s^6	1	12	29	18
s^5	3	30	27	0
s^4	2	20	18	0
s^3	0	0	0	0
s^2				
s^1				
s^0				

s^6	1	12	29	18
s^5	3	30	27	0
s^4	2	20	18	0
s^3	0	0	0	0
s^2	45/4	9		
s^1	27/5	0		
s^0	9			

s^6	1	12	29	18
s^5	3	30	27	0
s^4	2	20	18	0
s^3	8	40	0	0
s^2	10	18	0	0
s^1	25.6	0	0	0
s^0	18			

Το «βοηθητικό» πολυώνυμο είναι αυτό που νοητά σχηματίζεται από τους συντελεστές που είναι άνωθεν της γραμμής του Routh που μηδενίζονται. Εν προκειμένω: $\theta(s) = 2s^4 + 20s^2 + 18$, με ρίζες για το s^2 τις $-9, -1$. Άρα

$$s^2 = -9, \text{ και } s^2 = -1 \text{ ή ισοδυνάμως } \rho_1 = 3j, \rho_2 = -3j, \rho_3 = j, \rho_4 = -j$$

Ισχύει το εξής: Μία ολόκληρη γραμμή του πίνακα Routh μηδενίζεται όταν το αρχικό πολυώνυμο έχει έναν πολυωνυμικό παράγοντα, ο οποίος είναι ή άρτιος ή περιττός. Στην περίπτωση αυτή, αν το αρχικό πολυώνυμο έχει καθαρά φανταστικές ρίζες, τις ίδιες καθαρά φανταστικές ρίζες έχει και το πολυώνυμο που δημιουργείται από την γραμμή του πίνακα Routh άνωθεν αυτής που μηδενίζεται. Το ίδιο όμως ισχύει και για ζεύγη ριζών του αρχικού πολυωνύμου, όχι απαραίτητως καθαρά φανταστικών αλλά πάντως αντίθετους.

5. Να εξεταστεί ως προς την ευστάθεια ένα ΓΧΑ σύστημα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του οποίου είναι το

$$P(s) = 19s^5 + 38s^4 - 100s^3 - 200s^2 + 40s + 80$$

s^5	19	-100	40
s^4	38	-200	80
s^3	0	0	0
s^2			
s^1			
s^0			

Άρα το βοηθητικό πολυώνυμο είναι το

$$\theta(s) = 38s^4 - 200s^2 + 80, \text{ με ρίζες τις } \rho_{1,2} = \pm 2.1970 \text{ και } \rho_{3,4} = \pm 0.6604.$$

Επομένως οδηγούμεθα στην κάτωθι ακριβέστερη διατύπωση του κριτηρίου:

Κριτήριο ευστάθειας ΓΧΑ συστήματος με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P(s)$, δηλαδή παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς, που έχει μόνο πραγματικούς συντελεστές.

Σχηματίζουμε τον πίνακα Routh και τότε :

Α) Εάν μετά την ολοκλήρωση όλων των τεχνικών, η πρώτη στήλη του πίνακα Routh εμφανίζει εναλλαγές προσήμου τότε το σύστημα είναι ασταθές και το πλήθος των ριζών του $P(s)$, που έχουν το πραγματικό τους μέρος θετικό, είναι ίσο με τον αριθμό των αλλαγών των προσήμων.

Β) Εάν μια γραμμή του πίνακα Routh αποτελείται εξ ολοκλήρου από μηδενικά, τότε αναζητούμε πιθανές ρίζες του $P(s)$ επί του άξονα των φανταστικών. Εάν υπάρχουν τέτοιες ρίζες, τότε αυτές θα ικανοποιούν και το πολυώνυμο που νοητά σχηματίζεται από τους συντελεστές που βρίσκονται άνωθεν της μηδενικής γραμμής. Η ύπαρξη φανταστικών ριζών συνεπάγεται αστάθεια κατά BIBO, αφού μπορούμε πάντα να βρούμε φραγμένη είσοδο που κάνει την έξοδο να αποκλίνει. (marginal stability –οριακή ευστάθεια).

Γ) Εάν μετά την ολοκλήρωση όλων των τεχνικών, όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα Routh είναι αριθμοί ομόσημοι, χωρίς να έχει εμφανιστεί γραμμή του πίνακα Routh εξολοκλήρου με μηδενικά στοιχεία, τότε το σύστημα είναι ευσταθές έχοντας όλους τους πόλους με πραγματικό μέρος αρνητικό (δηλαδή στο αριστερό ημιεπίπεδο).