

Παράδειγμα 1:

Έστω ένα σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 29 \frac{dy(t)}{dt} + 42y(t) = x(t) \quad (1)$$

$$\text{με μηδενικές αρχικές συνθήκες. (δηλαδή } \ddot{y}(t)(0) = \dot{y}(t)(0) = y(t)(0) = 0) \quad (2)$$

Ζητείται να μελετηθεί το εν λόγω σύστημα με είσοδο βηματική συνάρτηση δηλαδή

$$x(t) = u(t). \quad (3)$$

Βήμα 1^ο: Υπολογισμός συνάρτησης μεταφοράς και εξόδου στο πεδίο των s.

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (1) και λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3) έχουμε:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^3 y(t)}{dt^3}\right\} + 2\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} - 29\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 42\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (4)$$

$$(\text{υπενθυμίζουμε ότι } \mathcal{L}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\right)\right\} = s\mathcal{L}\left\{\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\right\} - \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}} \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y^{(1)}(0) - \dots - y^{(n-1)}(0))$$

Κατά συνέπεια η εξίσωση (4) και με δεδομένες τις σχέσεις (2) έχει ως εξής

$$s^3 Y(s) + 2s^2 Y(s) - 29s Y(s) + 42Y(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{s^3 + 2s^2 - 29s + 42} \quad (5)$$

όπου η συνάρτηση μεταφοράς ευθέως κλάδου είναι η

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 - 29s + 42} \quad (6)$$

Από τους διαιρέτες του σταθερού όρου του πολωνύμου $s^3 + 2s^2 - 29s + 42$ προκύπτει

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{(s+7)(s-2)(s-3)} \quad (7)$$

Βήμα 2^ο: Υπολογισμός της απόκρισης στο πεδίο του χρόνου.

Αναλύοντας το δεξί μέλος της ισότητας στη σχέση (7) σε απλά κλάσματα λαμβάνουμε:

$$Y(s) = \frac{1}{42s} - \frac{1}{630(s+7)} - \frac{1}{18(s-2)} + \frac{1}{30(s-3)} \quad (8)$$

Η εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace και στα δύο μέλη της (8) δίνει:

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{1}{42} \mathcal{L}^{-1}\{s\} - \frac{1}{630} \mathcal{L}^{-1}\{s+7\} - \frac{1}{18} \mathcal{L}^{-1}\{s-2\} + \frac{1}{30} \mathcal{L}^{-1}\{s-3\} \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{1}{42} u(t) - \frac{1}{630} e^{-7t} - \frac{1}{18} e^{2t} + \frac{1}{30} e^{3t} \quad t \geq 0^- \end{aligned} \quad (9)$$

Παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο σύστημα είναι ασταθές κατά BIBO, όπου αυτή η έννοια θα ορισθεί ευθύς παρακάτω, αφού για τη φραγμένη είσοδο $u(t)$, η τιμή της εξόδου $y(t)$ τείνει κατ' απόλυτη τιμή στο άπειρο, λόγω του εκθετικού όρου e^{3t} που είναι κυρίαρχος. Παρατηρούμε επίσης ότι αυτό συμβαίνει διότι τουλάχιστον ένας πόλος (δηλαδή τουλάχιστον μία ρίζα στον παρανομαστή) έχει πραγματικό μέρος στο $\mathbb{R}^+$ ή ισοδυνάμως ο πόλος βρίσκεται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Γενικώς ισχύουν τα εξής:

Ορισμός 1: μία συνάρτηση $x(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται φραγμένη σε ένα διάστημα Δ υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, αν και μόνο αν υπάρχει θετική σταθερά M τέτοια ώστε

$$|x(t)| \leq M \forall t \in \Delta.$$

Ορισμός 2: Ένα σύστημα λέγεται φραγμένης εισόδου φραγμένης εξόδου (Bounded Input Bounded Output-BIBO), όταν για κάθε φραγμένη είσοδο το σύστημα γεννά φραγμένη έξοδο. Στο προηγούμενο παράδειγμα 1 παρατηρούμε ότι όταν η είσοδος είναι η βηματική απόκριση τότε το σύστημα συμπεριφέρεται ευσταθώς. Θα διαπιστώσουμε στα επόμενα ότι το εν λόγω σύστημα είναι όντως ευσταθές κατά BIBO, γεγονός που συνδέεται καθοριστικά με το ότι οι πόλοι του (οι ρίζες του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Πρόταση 1: Έστω ένα σύστημα Γ.Χ.Α., με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ όπου $P(s)$

και $Q(s)$ πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές, πρώτα μεταξύ τους, όπου ο βαθμός του παρανομαστή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή. (Υπενθυμίζουμε ότι δύο πολυώνυμα λέγονται πρώτα μεταξύ τους εάν το μέγιστο πολυώνυμο που διαιρεί και τα δύο είναι η μονάδα). Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι το $Q(s)$ έχει διακριτές πραγματικές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ οι οποίες λέγονται πόλοι του συστήματος. Τότε :

α) Εάν μία εκ των $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ είναι θετική, τότε το σύστημα ΔΕΝ είναι BIBO και συνήθως λέγεται ασταθές.

β) Εάν όλες οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ είναι αρνητικές, τότε υπάρχουν πραγματικές σταθερές $A_1, A_2, \dots, A_n$ τέτοιες ώστε η κρουστική απόκριση του συστήματος στο χρόνο να ισούται με

$$g(t) = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + \dots + A_n e^{\rho_n t}.$$

γ) Εάν όλες οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ είναι αρνητικές τότε το σύστημα είναι BIBO δηλαδή ευσταθές σύμφωνα με τον ορισμό 1.

Απόδειξη: α) Θεωρούμε σαν είσοδο στο σύστημα τη βηματική συνάρτηση $u(t)$ οπότε η έξοδος του συστήματος είναι $Y(s) = G(s) \frac{1}{s} \Rightarrow$ υπάρχουν σταθερές $B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$Y(s) = \frac{B_1}{s-\rho_1} + \frac{B_2}{s-\rho_2} + \dots + \frac{B_n}{s-\rho_n} + \frac{B_{n+1}}{s}.$$

Όποτε

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B_1}{s-\rho_1} + \frac{B_2}{s-\rho_2} + \dots + \frac{B_n}{s-\rho_n} + \frac{B_{n+1}}{s} \right\} = B_1 e^{\rho_1 t} + B_2 e^{\rho_2 t} + \dots + B_n e^{\rho_n t} + B_{n+1} u(t)$$

Χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι τουλάχιστον η ρ_1 είναι θετική, οπότε ο όρος

$B_1 e^{\rho_1 t}$ είναι μη φραγμένος (αποκλίνει). Επομένως, επειδή υπάρχει μία τουλάχιστον φραγμένη ακολουθία, εν προκειμένω η βηματική $u(t)$, η οποία γεννά μη φραγμένη έξοδο, το σύστημα δεν ευσταθές κατά BIBO.

β) Αναπτύσσοντας την $G(s)$ σε απλά κλάσματα θα βρούμε κατά τα γνωστά σταθερές $A_1, A_2, \dots, A_n$, τέτοιες ώστε να ισχύει

$$G(s) = \frac{A_1}{s-\rho_1} + \frac{A_2}{s-\rho_2} + \dots + \frac{A_n}{s-\rho_n}.$$

Αρα εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει

$$g(t) = A_1 e^{\rho_1 t} + A_2 e^{\rho_2 t} + \dots + A_n e^{\rho_n t}.$$

γ) Έστω $x(t)$ τυχούσα είσοδος στο σύστημα, φραγμένη από το M στο διάστημα $(0^-, +\infty)$. Τότε,

$$y(t) = \int_{0^-}^{\infty} x(t-w)h(w)dw \Rightarrow |y(t)| = \left| \int_{0^-}^{\infty} x(t-w)h(w)dw \right| \leq \int_{0^-}^{\infty} |x(t-w)h(w)|dw =$$

$$\int_{0^-}^{\infty} |x(t-w)||h(w)|dw \leq M \int_{0^-}^{\infty} |h(w)|dw.$$

Λόγω του β) η τελευταία παράσταση είναι προφανώς φραγμένη. Απλά αναφέρουμε ότι από αυστηρής μαθηματικής απόψεως, η ύπαρξη του $\int_0^\infty |x(t-w)||h(w)|dw$ εγγυάται την ύπαρξη του $|\int_0^\infty x(t-w)h(w)dw|$ ΟΕΔ

Παράδειγμα 2:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{s^5 + 12s^4 + 59s^3 + 150s^2 + 204s + 144}.$$

Δύο εκ των ριζών του παρονομαστή είναι οι $\rho_1 = -1 - \sqrt{2}i$ και $\rho_2 = -3 + \sqrt{3}i$

Να βρεθεί η βηματική απόκριση του συστήματος και να θεμελιωθεί ότι είναι ευσταθές κατά BIBO.

Λύση: Κατ' αρχήν, επειδή το πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, έχει συζυγείς ρίζες, δηλαδή ρίζες με ίδιο πραγματικό και αντίθετο φανταστικό μέρος. Κατά συνέπεια, στην προκειμένη περίπτωση είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί $\rho_3 = -1 + \sqrt{2}i$ και $\rho_4 = -3 - \sqrt{3}i$ είναι επίσης ρίζες του παρονομαστή του $G(s)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι το πολυώνυμο είναι 5^{ου} βαθμού και συνεπώς θα έχει εκτός των προηγούμενων τεσσάρων και μία πέμπτη ρίζα, πραγματική. Δοκιμάζοντας τους διαιρέτες του σταθερού όρου διαπιστώνουμε ότι η τιμή -4 μηδενίζει τον παρονομαστή και συμπερασματικά αποτελεί την πέμπτη ρίζα του παρονομαστή. Δηλαδή $\rho_5 = -4$.

Σε επόμενο βήμα εντοπίζουμε τις ρίζες του αριθμητή προκειμένου να διαπιστώσουμε εάν αριθμητής και παρονομαστής είναι πολυώνυμα πρώτα μεταξύ τους. Οι ρίζες της παράστασης

$$s^2 + 2s + 5 \text{ είναι οι } z_1 = -1 + 2i \text{ και } z_2 = -1 - 2i.$$

Με βάση τα προηγούμενα η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να γραφεί ως εξής.

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 4)(s + 1 + \sqrt{2}i)(s + 1 - \sqrt{2}i)(s + 3 - \sqrt{3}i)(s + 3 + \sqrt{3}i)}.$$

και η βηματική απόκριση

$$Y(s) = \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 4)(s + 1 + \sqrt{2}i)(s + 1 - \sqrt{2}i)(s + 3 - \sqrt{3}i)(s + 3 + \sqrt{3}i)} \left(\frac{1}{s} \right).$$

Αναλύοντας την $Y(s)$ σε απλά κλάσματα λαμβάνουμε

$$Y(s) = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1+\sqrt{2}i} + \frac{\Gamma}{s+1-\sqrt{2}i} + \frac{\Delta}{s+3-\sqrt{3}i} + \frac{E}{s+3+\sqrt{3}i} + \frac{Z}{s} \Rightarrow$$

$$s^2 + 2s + 5 \equiv A(s+1+\sqrt{2}i)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i)(s+3+\sqrt{3}i)s +$$

$$B(s+4)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i)(s+3+\sqrt{3}i)s +$$

$$\Gamma(s+4)(s+1+\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i)(s+3+\sqrt{3}i)s +$$

$$\Delta(s+4)(s+1+\sqrt{2}i)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3+\sqrt{3}i)s +$$

$$E(s+4)(s+1+\sqrt{2}i)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i)s +$$

$$Z(s+4)(s+1+\sqrt{2}i)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i)(s+3+\sqrt{3}i)$$

Θέτοντας $s = -4$ λαμβάνουμε άμεσα $A = \frac{13}{-176} = -0.0739$

Θέτοντας $s = -1 - \sqrt{2}i$ λαμβάνουμε άμεσα $B = \frac{2}{-40+115i} = 0.0053 - 0.0154i$

Θέτοντας $s = -1 + \sqrt{2}i$ λαμβάνουμε άμεσα $\Gamma = \frac{2}{-40+115i} = 0.0053 - 0.0154i$

Θέτοντας $s = -3 + \sqrt{3}i$ λαμβάνουμε άμεσα $\Delta = \frac{5-6.928i}{-108-145.49i} = 0.0143 + 0.0449i$

Θέτοντας $s = -3 - \sqrt{3}i$ λαμβάνουμε άμεσα $E = \frac{5-6.928i}{-108+145.49i} = 0.0143 - 0.0449i$

Θέτοντας $s = 0$ λαμβάνουμε άμεσα $Z = \frac{5}{144} = 0.0347$

Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ γράφεται πλέον ως εξής:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1+\sqrt{2}i} + \frac{\Gamma}{s+1-\sqrt{2}i} + \frac{\Delta}{s+3-\sqrt{3}i} + \frac{E}{s+3+\sqrt{3}i} + \frac{Z}{s} \right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s+4} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s+1+\sqrt{2}i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Gamma}{s+1-\sqrt{2}i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Delta}{s+3-\sqrt{3}i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{s+3+\sqrt{3}i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Z}{s} \right\} \Rightarrow$$

$$y(t) = Ae^{-4t} + Be^{-t-i\sqrt{2}t} + \Gamma e^{-t+i\sqrt{2}t} + \Delta e^{-3t-i\sqrt{3}t} + Ee^{-3t+i\sqrt{3}t} + Zu(t) =$$

$$Ae^{-4t} + e^{-t}(Be^{-i\sqrt{2}t} + \Gamma e^{+i\sqrt{2}t}) + e^{-3t}(\Delta e^{-i\sqrt{3}t} + Ee^{+i\sqrt{3}t}) + Zu(t)$$

$$\text{Αλλά } |Be^{-i\sqrt{2}t} + \Gamma e^{+i\sqrt{2}t}| \leq |B||e^{-i\sqrt{2}t}| + |\Gamma||e^{+i\sqrt{2}t}| = |B| + |\Gamma|$$

$$\text{και } |\Delta e^{-i\sqrt{3}t} + Ee^{+i\sqrt{3}t}| \leq |\Delta||e^{-i\sqrt{3}t}| + |E||e^{+i\sqrt{3}t}| = |\Delta| + |E|$$

Άρα, του $t \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow Zu(t)$.

Όσον αφορά στη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ αυτή μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1+\sqrt{2}i} + \frac{\Gamma}{s+1-\sqrt{2}i} + \frac{\Delta}{s+3-\sqrt{3}i} + \frac{E}{s+3+\sqrt{3}i} \Rightarrow \\ s^2 + 2s + 5 &\equiv A(s+1+\sqrt{2}i)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i)(s+3+\sqrt{3}i) + \\ &\quad B(s+4)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i)(s+3+\sqrt{3}i) + \\ &\quad \Gamma(s+4)(s+1+\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i)(s+3+\sqrt{3}i) + \\ &\quad \Delta(s+4)(s+1+\sqrt{2}i)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3+\sqrt{3}i) + \\ &\quad E(s+4)(s+1+\sqrt{2}i)(s+1-\sqrt{2}i)(s+3-\sqrt{3}i) \end{aligned}$$

$$\text{Θέτοντας } s = -4 \text{ λαμβάνουμε άμεσα } A = \frac{13}{44} = 0.2955$$

$$\text{Θέτοντας } s = -1 - \sqrt{2}i \text{ λαμβάνουμε άμεσα } B = \frac{2}{-68-19.8i} = -0.0271 + 0.0079i$$

$$\text{Θέτοντας } s = -1 + \sqrt{2}i \text{ λαμβάνουμε άμεσα } \Gamma = \frac{2}{-68+19.8i} = -0.0271 - 0.0079i$$

$$\text{Θέτοντας } s = -3 + \sqrt{3}i \text{ λαμβάνουμε άμεσα } \Delta = \frac{5-6.928i}{6+51.961i} = -0.1206 - 0.1102i$$

$$\text{Θέτοντας } s = -3 - \sqrt{3}i \text{ λαμβάνουμε άμεσα } E = \frac{5+6.928i}{6-51.961i} = -0.1206 - 0.1102i$$

Η συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ γράφεται πλέον ως εξής:

$$G(s) = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1+\sqrt{2}i} + \frac{\Gamma}{s+1-\sqrt{2}i} + \frac{\Delta}{s+3-\sqrt{3}i} + \frac{E}{s+3+\sqrt{3}i}$$

Εφαρμόζοντας και στα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace λαμβάνουμε την κρουστική απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου.

Άρα

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1+\sqrt{2}i} + \frac{\Gamma}{s+1-\sqrt{2}i} + \frac{\Delta}{s+3-\sqrt{3}i} + \frac{E}{s+3+\sqrt{3}i} \right\} =$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s+4} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{B}{s+1+\sqrt{2}i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Gamma}{s+1-\sqrt{2}i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\Delta}{s+3-\sqrt{3}i} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{E}{s+3+\sqrt{3}i} \right\} =$$

$$g(t) = Ae^{-4t} + e^{-t} (Be^{-i\sqrt{2}t} + \Gamma e^{+i\sqrt{2}t}) + e^{-3t} (\Delta e^{-i\sqrt{3}t} + E e^{+i\sqrt{3}t}).$$

Ακριβώς για τον ίδιο λόγο όπως πριν παρατηρούμε ότι οι όροι που πολλαπλασιάζουν τα e^{-4t}, e^{-t}, e^{-t} είναι απολύτως φραγμένοι. Άρα για κάθε φραγμένη είσοδο $x(t)$ υπάρχει το συνελκτικό ολοκλήρωμα

$$\int_{0^-}^{\infty} |x(t-w)| |h(w)| dw$$

Και επομένως η $y(t)$ είναι φραγμένη ακριβώς για τους ίδιους λόγους που αναφέρονται στην πρόταση 1.

Παράδειγμα 3:

Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{s-1}{(s+2)^3(s+1)^2}$.

Θα μελετηθεί η χρονική απόκριση του συστήματος με είσοδο τη βηματική συνάρτηση.

Πράγματι ισχύει $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s-1}{(s+2)^3(s+1)^2} \frac{1}{s}$.

Αλλά, $\frac{s-1}{(s+2)^3(s+1)^2} \frac{1}{s} \equiv \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{\Gamma}{(s+2)^3} + \frac{\Delta}{s+1} + \frac{E}{(s+1)^2} + \frac{Z}{s} \Leftrightarrow$

$s-1 \equiv (A(s+2)^2 + B(s+2) + \Gamma)(s+1)^2s + (\Delta(s+1) + E)(s+2)^3s + Z(s+2)^3(s+1)^2$
Σχέση (9α)

$s-1 \equiv A(s+2)^2(s+1)^2s + B(s+2)(s+1)^2s + \Gamma(s+1)^2s + \Delta(s+2)^3(s+1)s + E(s+2)^3s + Z(s+2)^3(s+1)^2.$ Σχέση (9β)

Θέτοντας:

- $s = 0$ προκύπτει άμεσα $Z = -\frac{1}{8}$
- $s = -1$ προκύπτει άμεσα $E = 2$

- $s = -2$ προκύπτει άμεσα $\Gamma = \frac{3}{2}$

Παραγωγίζοντας την ταυτότητα (9α) προκύπτει η ακόλουθη ταυτότητα.

$$1 \equiv (2A(s+2) + B)(s+1)^2s + (A(s+2)^2 + B(s+2) + \Gamma)2(s+1)s + \\ (A(s+2)^2 + B(s+2) + \Gamma)(s+1)^2 + \Delta(s+2)^3s + (\Delta(s+1) + E)3(s+2)^2s + \\ (\Delta(s+1) + E)(s+2)^3 + Z3(s+2)^2(s+1)^2 + Z(s+2)^32(s+1).$$

Οπότε

- θέτοντας $s = -1$ λαμβάνουμε άμέσως το $\Delta = -5$
- θέτοντας $s = -1$ λαμβάνουμε άμέσως το $-\Delta - 3E = -2$
- θέτοντας $s = -2$ λαμβάνουμε άμέσως το $B = \frac{13}{4}$
- θέτοντας $s = 0$ λαμβάνουμε άμεσα το $A = \frac{41}{8}$

Τελικά ισχύει:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{\Gamma}{(s+2)^3} + \frac{\Delta}{s+1} + \frac{E}{(s+1)^2} + \frac{Z}{s} \right\} =$$

$$A\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + B\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} + \Gamma\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^3} \right\} + \Delta\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} + E\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} + Z\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\}$$

$$\text{Άρα } y(t) = \left(Ae^{-2t} + Bte^{-2t} + \Gamma \frac{t^2}{2} e^{-2t} + \Delta e^{-t} + Ete^{-2t} + Z \right) u(t)$$

Συμπερασματικά, ανεξαρτήτως του εάν οι πόλοι του συστήματος είναι μονοί πολλαπλοί πραγματικοί οι μιγαδικοί, ισχύει η κάτωθι πρόταση η απόδειξη της οποίας προκύπτει άμεσα από τα προηγούμενα με ελάχιστες τροποποιήσεις σε τεχνικές λεπτομέρειες:

Πρόταση 2: Έστω ένα σύστημα Γ.Χ.Α., με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ όπου $P(s)$

και $Q(s)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές, πρώτα μεταξύ τους, όπου ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή. Τότε :

α) Εάν μία εκ των εν γένει μιγαδικών και ενδεχομένως πολλαπλών ριζών του παρονομαστή, δηλαδή των πόλων του συστήματος, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ έχει πραγματικό μέρος θετικό, τότε το σύστημα ΔΕΝ είναι BIBO και συνήθως λέγεται ασταθές κατά BIBO.

β) Εάν όλοι οι πόλοι του συστήματος $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, δηλαδή βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο, τότε το σύστημα είναι BIBO, δηλαδή ευσταθές σύμφωνα με τον ορισμό 1.

Τα κάτωθι επιπλέον παραδείγματα αναδεικνύουν περαιτέρω την ισχύ των όσων αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Παράδειγμα 4:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s + 7}{s^3 + 4s^2 + s - 6}.$$

Εξετάζοντας τους διαιρέτες του σταθερού όρου, διαπιστώνουμε ότι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι οι 1, -2, -3. Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$G(s) = \frac{s + 7}{s^3 + 4s^2 + s - 6} = \frac{s + 7}{(s - 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{8/12}{(s - 1)} - \frac{20/12}{(s + 2)} + \frac{1}{(s + 3)}.$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου είναι

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{8}{12} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - 1}\right\} - \frac{20}{12} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g(t) = \frac{8}{12} e^t - \frac{20}{12} e^{-2t} + e^{-3t}. \end{aligned}$$

Οι όροι $-\frac{20}{12} e^{-2t}$ και e^{-3t} που αντιστοιχούν στις ρίζες -2 και -3 αντίστοιχα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, τείνουν εκθετικά στο 0 προϊόντος του χρόνου. Όμως, ο όρος $\frac{8}{12} e^t$, ο οποίος αντιστοιχεί στη ρίζα 1, επιβάλλει αστάθεια στην έξοδο, πρακτικά για οποιαδήποτε φραγμένη είσοδο. Άρα το σύστημα είναι ασταθές κατά BIBO.

Παράδειγμα 5:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s + 2}{(s + 3)(s^2 + 4s + 5)(s^2 + 2s + 2)}.$$

Βρίσκοντας τις ρίζες των τριωνύμων προκύπτει ότι.

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s-(-2+j))(s-(-2-j))(s-(-1+j))(s-(-1-j))}$$

Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)((s+1)^2+1)((s+2)^2+1)} \Leftrightarrow$$

$$G(s) = -\frac{1}{10} \frac{1}{(s+3)} - \frac{1}{5} \frac{s}{((s+1)^2+1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{((s+2)^2+1)} + \frac{3}{10} \frac{s}{((s+2)^2+1)}$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου είναι.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} =$$

$$= -\frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - \frac{1}{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2+1}\right\} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{3}{10} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2+1}\right\}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$g(t) = -\frac{1}{10} e^{-3t} - \frac{1}{5} (\cos(t) - \sin(t)) e^{-t} + \frac{1}{2} \sin(t) e^{-2t} + \frac{3}{10} (\cos(t) - 2\sin(t)) e^{-2t}$$

Όλοι οι όροι του $g(t)$ τείνουν εκθετικά στο 0 προϊόντος του χρόνου. Άρα το σύστημα είναι ευσταθές κατά BIBO. Σημειωτέον ότι όλες οι ρίζες του παρονομαστή έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του μηδενός, γεγονός που κάνει όλες τις εκθετικές συναρτήσεις να τείνουν ασυμπτωτικά στο μηδέν, καθώς $t \rightarrow \infty$.

Παράδειγμα 6:

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)(s^2-4s+5)}.$$

Βρίσκοντας τις ρίζες των τριωνύμων προκύπτει ότι

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)(s-(2+i))(s-(2-i))}$$

Άρα, η συνάρτηση μεταφοράς αναλύεται σε απλά κλάσματα ως εξής:

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+2)(s+1)((s-2)^2+1)} \Leftrightarrow$$

$$G(s) = -\frac{1}{17(s+2)} + \frac{1}{5(s+1)} + \frac{11}{17((s-2)^2+1)} - \frac{36s}{255((s-2)^2+1)}$$

Άρα η κρουστική απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου είναι.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} =$$

$$= -\frac{1}{17}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{11}{17}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+1}\right\} - \frac{36}{255}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)^2+1}\right\} \Leftrightarrow$$

$$g(t) = -\frac{1}{17}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{11}{17}\sin(t)e^{2t} - \frac{36}{255}(\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t}$$

Παρατηρούμε πάλι ότι οι όροι $-\frac{1}{17}e^{-2t}$ και $-\frac{1}{5}e^{-t}$ που αντιστοιχούν στις ρίζες -2 και -1 αντίστοιχα του χαρακτηριστικού πολωνύμου, τείνουν εκθετικά στο 0 προϊόντος του χρόνου. Όμως, αντιθέτως, οι όροι $\frac{11}{17}\sin(t)e^{2t}$ και $-\frac{36}{255}(\cos(t) + 2\sin(t))e^{2t}$, οι οποίοι αντιστοιχούν σε ρίζες του χαρακτηριστικού πολωνύμου (σε πόλους) με πραγματικό μέρος το 2, επιβάλλουν αστάθεια στην έξοδο, πρακτικά για οποιαδήποτε φραγμένη είσοδο. Άρα το σύστημα είναι ασταθές κατά BIBO.