

1. Μας δίνουν ένα σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$b_m \frac{d^m}{dt^m} y(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} y(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} y(t) + b_0 y(t) =$$

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + a_0 x(t) \quad (1)$$

με $n < m$ και μας ζητούν να το φέρουμε σε ελέγξιμη μορφή. Τότε εφαρμόζουμε τη συστηματική μέθοδο με την οποία μεταβαίνουμε σε κανονική ελέγξιμη μορφή χώρου καταστάσεων. Σε αυτή τη μορφή είμαστε σίγουροι ότι μπορούμε να βρούμε κατάλληλη είσοδο $z(t)$ σε ένα νέο σύστημα σύστημα κλειστού βρόχου με ανάδραση, η οποία ελέγχει το αρχικό μας σύστημα.

Προφανώς εάν μας δίνουν το σύστημα σε μορφή συνάρτησης μεταφοράς στο χώρο των S πρώτα με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μεταβαίνουμε στη διαφορική εξίσωση της μορφής (1) και μετά εφαρμόζουμε την προαναφερθήσα διαδικασία.

2. Μας δίνουν ένα σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$b_m \frac{d^m}{dt^m} y(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} y(t) + \dots + b_1 \frac{d}{dt} y(t) + b_0 y(t) =$$

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} x(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) + \dots + a_1 \frac{d}{dt} x(t) + a_0 x(t)$$

Με $n < m$ και μας ζητούν να το φέρουμε σε παρατηρήσιμη μορφή. Τότε εφαρμόζουμε τη συστηματική μέθοδο με την οποία μεταβαίνουμε σε παρατηρήσιμη μορφή χώρου καταστάσεων. Σε αυτή τη μορφή είμαστε σίγουροι ότι μπορούμε να προσδιορίζουμε πάντα τις αρχικές συνθήκες $X(0^+)$ όταν γνωρίζουμε τα $X(t) \quad y(t) \quad \forall t > 0$

Πάλι, προφανώς, εάν μας δίνουν το σύστημα σε μορφή συνάρτησης μεταφοράς στο χώρο των S πρώτα με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace μεταβαίνουμε στη διαφορική εξίσωση της μορφής (1) και μετά εφαρμόζουμε την προαναφερθήσα διαδικασία.

3. Μας δίνουν ένα ΓΧΑ σύστημα διατυπωμένο ήδη σε εξισώσεις χώρου καταστάσεων, δηλαδή στη μορφή

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + Bz(t) \quad (2. \alpha)$$

$$y(t) = C \cdot X + Dz(t) \quad (2. \beta)$$

και μας ερωτούν αν αυτό είναι ελέγξιμο. Τότε εφρμόζουμε τα αντίστοιχα κριτήρια τόσο τα γενικά μέσω του πίνακα ελεγχιμότητας S , όσο και τα ειδικά στην περίπτωση μιας εισόδου μιας εξόδου.

Εαν το σύστημα προκύψει μη ελέγξιμο, τότε κατά κανόνα επιβάλεται να το καταστήσουμε ελέγξιμο. Ένας σίγουρος δρόμος για να το επιτύχουμε αυτό είναι από τις εξισώσεις (2. α), (2. β) να μεταβούμε στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος στο χώρο των s , από αυτήν στη διαφορική εξίσωση τύπου (1) και από την Δ.Ε. στην κανονική ελέγξιμη μορφή.

4. Εάν εκ νέου μας δίνουν ένα ΓΧΑ σύστημα διατυπωμένο ήδη σε εξισώσεις χώρου καταστάσεων, δηλαδή στη μορφή

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + Bz(t)$$

$$y(t) = C \cdot X + Dz(t)$$

και μας ερωτούν αν αυτό είναι παρατηρήσιμο. Τότε εφρμόζουμε τα αντίστοιχα κριτήρια τόσο τα γενικά μέσω του πίνακα παρατηρησιμότητας R , όσο και τα ειδικά στην περίπτωση μιας εισόδου μιας εξόδου.

Εαν το σύστημα προκύψει μη παρατηρήσιμο, τότε κατά κανόνα επιβάλεται να το καταστήσουμε παρατηρήσιμο. Ένας σίγουρος δρόμος για να το επιτύχουμε αυτό είναι από τις εξισώσεις (2. α), (2. β) να μεταβούμε στη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος στο χώρο των s , από αυτήν στη διαφορική εξίσωση τύπου (1) και από την Δ.Ε. στην κανονική ελέγξιμη μορφή.

Μετάβαση από χώρο καταστάσεων σε διαφορική εξίσωση για σύστημα μιας εισόδου μιας εξόδου

Δίνεται το n –οστού βαθμού ΓΧΑ σύστημα, διατυπωμένο σε μορφή εξισώσεων κατάστασης

$$\frac{d}{dt}X = AX + Bz, \quad y = CX + Dz, \quad X(0^+) = X_0$$

Θα πρέπει να στην πραγματικότητα να παράξουμε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)}$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

A) Αναγνωρίζουμε ότι οι πίνακες A, B είναι σε κανονική ελέγξιμη μορφή.

Τότε, εκτός από το μεγιστοβάθμιο συντελεστή που είναι υποχρεωτικά 1, οι υπόλοιποι συντελεστές του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς προκύπτουν από την τελευταία γραμμή του A με αρνητικό πρόσημο και με σειρά από τον ελαχιστοβάθμιο προς το μεγιστοβάθμιο συντελεστή. Οι συντελεστές του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς

προκύπτουν από τα στοιχεία του πίνακα-γραμμή $\mathbf{C}$, με σειρά από τον ελαχιστοβάθμιο προς το μεγιστοβάθμιο συντελεστή.

Β) Αναγνωρίζουμε ότι οι πίνακες $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ είναι σε κανονική παρατηρήσιμη μορφή.

Τότε, εκτός από το μεγιστοβάθμιο συντελεστή που είναι υποχρεωτικά 1, οι υπόλοιποι συντελεστές του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς προκύπτουν σε φυσική σειρά από την 1^η στήλη του $\mathbf{A}$ με αρνητικό πρόσημο. Οι συντελεστές του αριθμητή προκύπτουν από τα στοιχεία του πίνακα-στήλη $\mathbf{B}$.

Γ) Η γενική περίπτωση

Για να παράξουμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς $\frac{Y(s)}{Z(s)}$ από τις εξισώσεις κατάστασης εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στις διαφορικές εξισώσεις των καταστάσεων παίρνοντας

$$\begin{bmatrix} sX_1(s) \\ sX_2(s) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \end{bmatrix} + \mathbf{B}Z(s) \Leftrightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{B}Z(s)$$

Για τα s που δεν είναι ιδιοτιμές του $\mathbf{A}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \end{bmatrix} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}Z(s)$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του y αφού κάνουμε μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$Y(s) = (\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D)Z(s) \Rightarrow H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D$$

Αρχικές Συνθήκες

Σε κάθε περίπτωση οι αρχικές συνθήκες ως προς y για $t = 0^+$ προκύπτουν παραγωγίζοντας $n - 1$ φορές την εξίσωση του y και αντικαθιστώντας σε κάθε παραγωγή $\frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z$.

$$\frac{d^k}{dt^k} y(0^+) = \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{X}(0^+) + D \frac{d^k}{dt^k} z(0^+) + \mathbf{C} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B} \frac{d^i}{dt^i} z(0^+)$$