

Δεύτερο παράδειγμα ΓΧΑ συστήματος. Κύκλωμα RLC.

1. Πρώτη μέθοδος περιγραφής του συστήματος, μέσω ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων.

Έστω ένα κύκλωμα L,C,R εν σειρά με πηγή τάσης $v(t)$. Το κύκλωμα αυτό το θεωρούμε σύστημα με είσοδο $v(t)$ και έξοδο το κοινό ρεύμα του ενιαίου κλάδου $i(t)$.

Η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα προκύπτει από το Νόμο τάσεων του Kirchhoff: $v(t) = v_L + v_C + v_R$ και ισοδυνάμως

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + Ri(t) \quad (1)$$

Το σύστημα είναι γραμμικό; Ναι ή όχι και γιατί;

Για να απαντήσουμε σε αυτή την ερώτηση, μπορούμε να ορίσουμε τον αντίστροφο τελεστή

$$L \frac{d}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t + R$$

που δρα πάνω στο $i(t)$. Θα ακολουθήσουμε όμως τον πιο εύκολο τρόπο που περιγράψαμε και στο παράδειγμα με το ελατήριο.

Έστωσαν $v_1(t)$ και $v_2(t)$ δύο διαφορετικές τάσεις πηγής που προκαλούν τη ροή στο κύκλωμα των ρευμάτων $i_1(t)$ και $i_2(t)$ αντίστοιχα. Οι δύο σχετικές εξισώσεις είναι οι:

$$v_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_1(t) dt + Ri_1(t)$$

$$v_2(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_2(t) dt + Ri_2(t)$$

με αρχικές συνθήκες: $i_1(t_0), \dot{i}_1(t_0)$, και $i_2(t_0), \dot{i}_2(t_0)$ αντίστοιχα.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και εκμεταλλευόμενοι τη γραμμικότητα τόσο του τελεστή της παραγώγου όσο και του ολοκληρώματος, προκύπτει η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση:

$$v_1(t) + v_2(t) = L \frac{d}{dt} (i_1(t) + i_2(t)) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t (i_1(t) + i_2(t)) dt + R(i_1(t) + i_2(t)) \quad (2)$$

Εάν και οι αρχικές συνθήκες της εξίσωσης είναι $i_1(t_0) + i_2(t_0)$ και $\dot{i}_1(t_0) + \dot{i}_2(t_0)$, τότε το σύστημα είναι γραμμικό.

Εντελώς ανάλογα, με απλό πολλαπλασιασμό της εξίσωσης (1) με ένα οποιοδήποτε αριθμό έστω a προκύπτει ότι αν η είσοδος είναι $av(t)$ τότε και η έξοδος είναι $ai(t)$ για ανάλογες αρχικές συνθήκες.

Το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο; Ναι ή όχι και γιατί;

Ο απλούστερος τρόπος για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα είναι να παραγωγίσουμε άπαξ την (1) οπότε λαμβάνουμε

$$\frac{dv(t)}{dt} = L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} i(t) \quad (3)$$

Η εξίσωση αυτή είναι ακριβώς της ίδιας μορφής με του προαναφερθέντος παραδείγματος με το ελατήριο, όπου το ρόλο της συναρτήσεως $F(t)$ τον παίζει η συνάρτηση $\frac{dv(t)}{dt}$ και το ρόλο του $y(t)$ το ρεύμα $i(t)$.

2. Δεύτερη μέθοδος περιγραφής του συστήματος, μέσω του μετασχηματισμού Laplace.

Είθισται ως χρονική στιγμή t_0 να λαμβάνεται η αρχή μέτρησης του χρόνου δηλαδή $t_0 = 0^-$. Επιπλέον για τους λόγους που περιγράφησαν στο παράδειγμα του ελατηρίου και που θα αναδειχθούν πάλι στην αμέσως παρακάτω ανάλυση, επιλέγονται μηδενικές αρχικές συνθήκες, δηλαδή $i(0^-) = \frac{di(0^-)}{dt} = 0$ για οποιαδήποτε είσοδο. Τονίζεται ότι για να εξασφαλιστεί το χρονικά αναλλοίωτο της εξισώσεως (1), πρέπει το $i(t)$ και το $\frac{di(t)}{dt}$ να είναι μηδέν για κάθε χρονική στιγμή $t \leq 0^-$. Δηλαδή

$$i(0^-) = \frac{di(0^-)}{dt} = 0 \quad \forall t \leq 0^- \quad (4)$$

ή ισοδυνάμως όπως προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση ως προς t

$$\int_{\gamma}^{0^-} i(t) dt = 0, \quad \text{εφ' όσον} \quad i(\gamma) = 0 \quad \forall t \leq 0^- \quad (5)$$

Εάν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace των $i(t)$ και $v(t)$ εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace, έστω $(\mathcal{L})$, και στα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$L\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left\{\int_{t_0}^t i(t) dt\right\} + R\mathcal{L}\{i(t)\} = \mathcal{L}\{v(t)\} \Leftrightarrow$$

$$L[sI(s) - i(0^-)] + \frac{1}{c} \frac{1}{s} [I(s) + \int_{-\gamma}^{0^-} i(t)dt] + RI(s) = V(s) \quad (6)$$

Λόγω των (4) και (5) προκύπτει

$$LsI(s) + \frac{1}{sc} I(s) + RI(s) = V(s) \quad (7)$$

και λύνοντας ως προς $I(s)$ προκύπτει:

$$I(s) = \frac{V(s)}{Ls + \frac{1}{sc} + R} \Leftrightarrow \frac{I(s)}{V(s)} \equiv H(s) = \frac{1}{Ls + \frac{1}{sc} + R} \Leftrightarrow$$

$$H(s) = \frac{s}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{c}} = \frac{1}{L} \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{Lc}} \quad (8)$$

Στο εν λόγω κύκλωμα ας θεωρήσουμε αντίσταση $R = 0,8M\Omega$, πηνίο αυτεπαγωγής $L = 0,1MH$ και πυκνωτή χωρητικότητας $c = \frac{20}{3} \approx 6,67 mF$.

Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει

$$H(s) = 10 \frac{s}{s^2 + 8s + 15} = 10 \frac{s}{(s+3)(s+5)}$$

Αναλύοντας σε απλά κλάσματα προκύπτει για τη συνάρτηση μεταφοράς ότι:

$$H(s) = 5 \left(\frac{5}{s+5} - \frac{3}{s+3} \right) \quad (9)$$

3. Περιγραφή του συστήματος μέσω της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ στο πεδίο του χρόνου.

Όπως και στο μηχανικό παράδειγμα του ελατηρίου έχοντας θεμελιώσει ότι το σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο, αυτό καθορίζεται πλήρως στο πεδίο του χρόνου από την κρουστική απόκρισή του $h(t)$ δηλαδή την έξοδο του όταν θέσουμε σαν είσοδο στο σύστημα τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(t)$. Επειδή

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

τότε, για τυχούσα είσοδο $v(t)$ στο σύστημα, η έξοδος $i(t)$ θα είναι

$$i(t) = h(t) * v(t).$$

Στο εν λόγω παράδειγμα

$$h(t) = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+3} - \frac{3}{s+5}\right\} = 25e^{-3t} - 15e^{-5t}, t \leq 0^- \quad (10)$$

Άρα

$$i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(w)v(t-w)dw \Leftrightarrow$$

$$i(t) = 5 \int_0^{+\infty} (5e^{-3w} - 3e^{-5w})v(t-w)dw \quad (11)$$

$$i(t) = 5 \int_0^t (5e^{-3w} - 3e^{-5w})v(t-w)dw \quad (11)$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την απαίτηση

$$h(t-w) = 0 \text{ για } t-w \leq 0^- \Leftrightarrow w \geq t$$

4. Εισαγωγή στην περιγραφή του συστήματος στο χώρο καταστάσεως-εξίσωση καταστάσεως.

Στόχος: να μετατρέψουμε τη 2^{ης} τάξεως διαφορική εξίσωση (3), σε ένα σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως και να γράψουμε το σύστημα αυτό σε μητρική μορφή. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε δύο ενδιάμεσες μεταβλητές τις

$$x_1(t) = i(t) \text{ (το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο)}$$

$$x_2(t) = Q_c(t) = \int_{0^-}^t i(t)dt \text{ (το εκάστοτε φορτίο του πυκνωτή)}, \quad (12)$$

τις οποίες ονομάζουμε **μεταβλητές καταστάσεως**. Ο λόγος που διαλέξαμε δύο μεταβλητές καταστάσεως, είναι το γεγονός ότι το σύστημά μας περιγράφεται από μία ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση που είναι ισοδύναμη με διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (εξίσωση (1)).

Σχέση εξόδου και μεταβλητών καταστάσεως:

Εν προκειμένω, η έξοδος $i(t)$ συνδέεται απλούστατα μόνο με μία μεταβλητή καταστάσεως και συγκεκριμένα ισχύει

$$i(t) = x_1(t)$$

Επειδή η έξοδος πρέπει τυπικά να συνδέεται με όλες τις μεταβλητές καταστάσεως, χρησιμοποιούμε το βοηθητικό πίνακα $[1 \ 0]$ και γράφουμε

$$i(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Εν συνεχεία γράφουμε τις πεπλεγμένες εξισώσεις καταστάσεως, οι οποίες είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ως προς $x_1(t), x_2(t)$ όπου εμπλέκεται και η είσοδος. Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο σχέσεις (12) λαμβάνουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{di(t)}{dt} \\ \dot{x}_2(t) &= i(t) = x_1(t) . \end{aligned} \quad (14)$$

Από την εξίσωση (1) την οποία ξαναγράφουμε για καλύτερη εποπτεία

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + Ri(t)$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (12) και (14) προκύπτει:

$$L \frac{di}{dt} = -\frac{1}{C} Q_C - Ri + v(t).$$

Ισοδυνάμως

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R}{L} x_1(t) - \frac{1}{LC} x_2(t) + \frac{1}{L} v(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) . \end{aligned} \quad (15)$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις και γράφοντάς τις σε μητρική μορφή λαμβάνουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v(t). \quad (16)$$

Ορίζοντας

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

το ανωτέρω σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης γράφεται ως εξής

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}v(t)$$

με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}.$$

Δηλαδή, επειδή το ΓΧΑ σύστημά μας μπορεί να περιγραφεί από μία διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, μπορεί ισοδυνάμως να περιγραφεί με ένα (γραμμικό) σύστημα 2×2 διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Τονίζουμε ότι οι σχέσεις (17) συνδυάζονται άρρηκτα με τη σχέση (13), η οποία συνδέει την έξοδο $i(t)$ του συστήματος με τις επιλεγείσες μεταβλητές καταστάσεως $x_1(t)$, $x_2(t)$. Τονίζουμε επίσης emphaticά ότι η επιλογή των μεταβλητών καταστάσεως και οι συνεπακόλουθες εξισώσεις καταστάσεως ΔΕΝ είναι μοναδικές.