

Πρώτα θεωρήματα περί ευστάθειας BIBO

Το κριτήριο Routh-Hurwitz

Όπως έχει τονισθεί, τα συστήματα που μελετάμε είτε ευθέως κλάδου είτε κλειστού βρόχου, είναι της μορφής:

$$H(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

όπου ο βαθμός του πολυωνύμου του παρονομαστή (που λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο) είναι πάντα μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή.

Για να βρούμε την απόκριση στο πεδίο του χρόνου, πρώτα αναλύουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε απλά κλάσματα. Είδαμε πως γίνεται αυτό σε προηγούμενη ενότητα όπου θεμελιώσαμε επίσης ότι **ένα ΓΧΑ σύστημα, είναι ευσταθές μόνο αν η συνάρτηση μεταφοράς του δεν έχει ρίζες στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Ειδικότερα, εάν όλοι οι πόλοι του συστήματος έχουν πραγματικό μέρος μικρότερο του μηδενός, τότε το σύστημα είναι ασφαλώς ευσταθές. Αντιθέτως, εάν μετά τις πιθανές απλοποιήσεις, ένας τουλάχιστον πόλος βρίσκεται στο δεξί ημιεπίπεδο, τότε το σύστημα ΔΕΝ είναι BIBO ή ισοδυνάμως είναι ασταθές κατά BIBO. Επιπλέον οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου επηρεάζουν αποφασιστικά και καθοριστικά τη συμπεριφορά του συστήματος τόσο στη μόνιμη κατάσταση όσο και στη μεταβατική απόκριση.**

Θα δούμε τώρα ένα σύνολο κριτηρίων ευστάθειας ενός συστήματος κατά BIBO, τα οποία ΔΕΝ απαιτούν γνώση των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης δηλαδή των πόλων του συστήματος.

Προς την κατεύθυνση αυτή, θα διατυπώσουμε κατ' αρχήν μερικά βασικά στοιχεία από την άλγεβρα πολυωνύμων. Έστω ο πολυωνυμικός παρονομαστής $P(s)$ της συνάρτησης μεταφοράς:

$$P(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του D' Alembert κάθε πολυώνυμο n -οστού βαθμού έχει ακριβώς n ρίζες εν $\mathbb{C}$, δηλαδή στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών. Επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γράφεται:

$$P(s) = \alpha_n (s - \rho_1)(s - \rho_2) \dots (s - \rho_n)$$

Το κάτωθι θεώρημα συνδέει τους συντελεστές τυχόντος πολυωνύμου n -οστού βαθμού με τις ρίζες του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ ενός πολυωνύμου

$$p(s) = \alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία με τους συντελεστές αυτού, όπως ορίζουν οι κάτωθι σχέσεις.

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = -(\rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_n)$$

$$\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \dots + \rho_1\rho_n + \rho_2\rho_3 + \dots + \rho_{n-1}\rho_n$$

.

.

.

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_n} = -(1)^n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n$$

Απόδειξη: θα δοθεί με απλά παραδείγματα που οδηγούν σαφώς στην επέκταση με απλή επαγωγή.

A) Για $n = 2$

$$\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \equiv a_2(s - \rho_1)(s - \rho_2) \equiv \alpha_2(s^2 - (\rho_1 + \rho_2)s + \rho_1\rho_2) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2(\rho_1 + \rho_2), \alpha_0 = \alpha_2\rho_1\rho_2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -(\rho_1 + \rho_2), \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_2} = \rho_1\rho_2$$

B) Για $n = 3$

$$\begin{aligned} \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 &\equiv a_3(s - \rho_1)(s - \rho_2)(s - \rho_3) \equiv \alpha_3(s^2 - (\rho_1 + \rho_2)s + \rho_1\rho_2)(s - \rho_3) \\ &\equiv \alpha_3 s^3 - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)s^2 + (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3)s - \rho_1\rho_2\rho_3 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = -(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3), \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3, \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_3} = -\rho_1\rho_2\rho_3$$

Γ) Για $n = 4$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα και με ευθύγραμμες πράξεις λαμβάνουμε

$$\alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \equiv a_4(s - \rho_1)(s - \rho_2)(s - \rho_3)(s - \rho_4) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_4} = -(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4), \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_4} = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3 + \rho_2\rho_4 + \rho_3\rho_4,$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_4} = -(\rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \rho_1\rho_3\rho_4 + \rho_2\rho_3\rho_4), \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_4} = \rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$$

Κ.ο.κ.

Ισχύει επίσης η παρακάτω πολύ σημαντική βοηθητική πρόταση (Λήμμα):

Λήμμα1: Εάν το τυχόν πολυώνυμο $P(s)$ έχει **πραγματικούς συντελεστές**, τότε ένα έχει ρίζα το μιγάδα $\alpha + \beta i$ θα έχει υποχρεωτικά και το συζυγή του $\alpha - \beta i$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας τον τελεστή «συζυγές» στην εξίσωση

$$\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

και χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες αυτού λαμβάνουμε:

$$\overline{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \overline{0} \Leftrightarrow$$

$$\overline{\alpha_n s^n} + \overline{\alpha_{n-1} s^{n-1}} + \dots + \overline{\alpha_1 s} + \overline{\alpha_0} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overline{\alpha_n} \overline{s}^n + \overline{\alpha_{n-1}} \overline{s}^{n-1} + \dots + \overline{\alpha_1} \overline{s} + \overline{\alpha_0} = 0$$

Αλλά, οι συντελεστές είναι πραγματικοί όταν και μόνον όταν $\overline{\alpha_i} = \alpha_i$ $i = 0, 1, \dots, n$. Άρα η τελική εξίσωση είναι ίδια με την αρχική, με ρίζα όμως τον συζυγή μιγάδα του s . ΟΕΔ.

Προσοχή! Το πολυώνυμο με ρίζες $1 - i$, $1 + 2i$ αντιστοιχεί στο πολυώνυμο

$$(s - (1 - i))(s - (1 + 2i)) \equiv s^2 - (2 + i)s + (3 + i)$$

το οποίον δεν έχει όλους τους συντελεστές του πραγματικούς και άρα μπορεί να έχει μη συζυγείς ρίζες.

Επιπλέον, ισχύει το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Ένα σύστημα είναι ασταθές, εάν ένας τουλάχιστον συντελεστής του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου είναι μηδέν ή είναι ετερόσημος προς κάποιους άλλους συντελεστές αυτού.

Η απόδειξη θα διαφανεί από παραδείγματα.

Κατ' αρχήν, από απλή εποπτεία συνάγεται ότι ένα γινόμενο μονωνύμων της μορφής π.χ.

$$(s + 1)(s + 2)(s + 5)(s + \sqrt{11})$$

δίνει μετά το ανάπτυγμα όλους τους συντελεστές του προκύπτοντος πολυωνύμου θετικούς.

Κατ' αναλογία, ένα γινόμενο μονωνύμων, που συμπεριλαμβάνει συζυγείς μιγαδικές ρίζες, π.χ. της μορφής

$$(s + 2)(s + 4)(s + 1 - 3i)(s + 1 + 3i) \equiv (s + 2)(s + 4)((s + 1)^2 + 3^2)$$

αποκλείεται να δίνει, μετά το ανάπτυγμα, πολυώνυμο που να μην έχει όλους τους συντελεστές θετικούς.

Γενικά, έστω ότι έχουμε ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς όπου όλοι οι πόλοι της έχουν πραγματικό μέρος στο αριστερό ημιεπίπεδο. Τότε, εφόσον το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει πραγματικούς συντελεστές, κάνοντας το ανάπτυγμα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $(s - \rho_1)(s - \rho_2) \dots (s - \rho_n)$, προκύπτουν όλοι οι συντελεστές θετικοί. Π.χ., για μια συνάρτηση μεταφοράς τρίτου βαθμού, έστω $\rho_1 = \alpha + \beta j$. Επειδή οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι πραγματικοί, στις ρίζες αυτού θα ανήκει και ο συζυγής μιγαδικός, έστω $\rho_2 = \alpha - \beta j$. Η δε τρίτη ρίζα, αναγκαστικά πραγματική, έστω ότι είναι $\rho_3 < 0$. Τότε, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γράφεται:

$$\begin{aligned} C(s) &= (s - \rho_1)(s - \rho_2)(s - \rho_3) = (s - \alpha - \beta j)(s - \alpha + \beta j)(s - \rho_3) = \\ &= (s + |a| - \beta j)(s + |a| + \beta j)(s + |\rho_3|) = ((s + |a|)^2 + \beta^2)(s + |\rho_3|) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ όλοι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι θετικοί.

Πόρισμα:

Εάν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι θετικός, τότε εάν το σύστημα είναι ευσταθές και όλοι οι άλλοι συντελεστές αυτού θα είναι θετικοί. Δυϊκώς αντίστοιχα, εάν ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι αρνητικός, τότε εάν το σύστημα είναι ευσταθές και όλοι οι άλλοι συντελεστές αυτού θα είναι αρνητικοί.

Προσοχή! Αυτή η συνθήκη για ευστάθεια είναι αναγκαία και όχι ικανή.

Μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ευστάθειας δίνει το κριτήριο Routh, το οποίο παρουσιάζεται ολοκληρωμένα σε αυτήν και την επόμενη ενότητα .

Ο πίνακας Routh

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	..	..
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	..	..
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	..	..
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	..	..
..	..	..	..	..	..
..	..	..	..	..	..

$$\begin{aligned} \text{Όπου } b_1 &= \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \dots \\ c_1 &= \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}, \dots \end{aligned}$$

Στην πρώτη γραμμή ξεκινάω από το συντελεστή μέγιστου βαθμού και κατεβαίνω κατά 2 σταματώντας μόλις πριν ο δείκτης γίνει αρνητικός. Στη δεύτερη γραμμή ξεκινώ από το συντελεστή του δεύτερου μεγιστοβάθμιου και πάλι κατεβαίνω κατά 2 σταματώντας εκ νέου s πριν ο δείκτης γίνει αρνητικός. Ο πίνακας Routh θα έχει $n+1$ γραμμές, όπου n ο βαθμός του πολυωνύμου. Οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου τοποθετούνται όλοι στις δύο πρώτες γραμμές μέχρις ότου εξαντληθούν. Στις επόμενες γραμμές τοποθετούνται οι

υπόλοιπες τιμές σύμφωνα με τους ανωτέρω κανόνες. Στις θέσεις του πίνακα όπου δεν προκύπτουν συντελεστές εννοείται ο αριθμός μηδέν.

Παράδειγμα 1

Για τη συνάρτηση μεταφοράς $H(s) = \frac{11}{s^3+s^2+3s+10}$, ο πίνακας Routh προκύπτει:

s^3	1	3
s^2	1	10
s^1	-7	0
s^0	10	0

Ο πίνακας Routh έχει τέσσερις γραμμές, αφού το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 (Routh-Hurwitz)

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη ώστε να ισχύει $Re(\rho_i) \leq 0, i = 1, 2, \dots, n$, όπου $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(s)$, είναι η πρώτη στήλη του πίνακα Routh να μην παρουσιάζει αλλαγή προσήμου. Σε περίπτωση που παρουσιάζει, τότε το σύστημα είναι ασταθές και το πλήθος των ριζών του $p(s)$, που έχουν το πραγματικό τους μέρος θετικό, είναι ίσο με τον αριθμό των αλλαγών των προσήμων.

Ελέγχουμε αν το σύστημα του παραδείγματός μας είναι ευσταθές:

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα, στην πρώτη στήλη του πίνακα παρατηρούνται 2 αλλαγές προσήμου, οπότε το σύστημα είναι ασταθές.

Το κριτήριο Routh προσδιορίζει το πλήθος των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στο δεξί μιγαδικό επίπεδο. Στο προηγούμενο παράδειγμα, αφού έχουμε δύο αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη, το σύστημά μας έχει δύο ρίζες στο δεξί μιγαδικό επίπεδο.

Παράδειγμα 2

Έστω το σύστημα δευτέρου βαθμού $a_2s^2 + a_1s + a_0$. Ο πίνακας Routh του συστήματος αυτού είναι:

s^2	a_2	a_0
s^1	a_1	0
s^0	b_1	0

$$b_1 = \frac{a_1 a_0 - a_2 \cdot 0}{a_1} = a_0$$

Οπότε, η πρώτη στήλη του πίνακα Routh γίνεται $a_2 a_1 a_0$. Για να είναι ένα σύστημα δευτέρου βαθμού ευσταθές, πρέπει οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου να είναι ομόσημοι.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί αν το σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(s) = 3s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 2s + 3$ είναι ευσταθές ή ασταθές.

s^4	3	4	3
s^3	5	2	0
s^2	14/5	3	0
s^1	-47/14	0	0
s^0	3	0	0

Στην πρώτη στήλη παρατηρούμε 2 αλλαγές προσήμου, άρα το πολυώνυμο έχει 2 ρίζες στο δεξι μιγαδικό ημιεπίπεδο, άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί αν το σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$p(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$ είναι ευσταθές ή ασταθές.

s^5	1	2	6
s^4	3	6	9
s^3	0	3	0
s^2			
s^1			
s^0			

Υπάρχουν δύο τρόποι να αντιμετωπιστεί η ειδική περίπτωση όπου προκύπτει μηδενικό στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh:

- Στην πρώτη περίπτωση, αντικαθιστούμε το μηδενικό στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh με ποσότητα ε ομόσημη με το στοιχείο της πρώτης στήλης άνωθεν του μηδενικού, εν προκειμένω με $\varepsilon > 0$ και εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh βρίσκοντας τα όρια για $\varepsilon \rightarrow 0$. Δηλαδή ο πίνακας Routh του παραδείγματος 2 διαμορφώνεται ως εξής:

s^5	1	2	6
s^4	3	6	9
s^3	ε	3	0
s^2	$\frac{6\varepsilon - 9}{\varepsilon}$	9	0
s^1	$3 - \frac{3\varepsilon^2}{2\varepsilon - 3}$	0	0
s^0	9	0	0

Υπολογίζουμε τα όρια

$$A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{6\varepsilon - 9}{\varepsilon} = 6 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{9}{\varepsilon}$$

Παρατηρούμε ότι ο κυρίαρχος όρος είναι ο $-\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{9}{\varepsilon}$, άρα στον αντίστοιχο κελί στον πίνακα τελικά θα έχουμε ένα πολύ μεγάλο αρνητικό αριθμό ($-\infty$).

Και

$$B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(3 - \frac{3\varepsilon^2}{2\varepsilon - 3} \right) = 3$$

Επομένως τα πρόσημα της πρώτης στήλης είναι από πάνω προς τα κάτω: + + + - + +, επομένως προκύπτουν δύο εναλλαγές προσήμου, άρα το σύστημα είναι ασταθές με δύο πόλους στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

- Στη δεύτερη περίπτωση, πολλαπλασιάζουμε το πολυώνυμο με τον παράγοντα $(s+a)$, όπου $a>0$, και το $-a$ δεν είναι ρίζα (προκύπτει ότι δεν είναι ρίζα με αντικατάσταση του $-a$ στη χαρακτηριστική εξίσωση) . Τα συμπεράσματα για την ευστάθεια του νέου πολυωνύμου ισχύουν και για το αρχικό πολυώνυμο (γιατί;;). Στο παράδειγμά μας, πολλαπλασιάζουμε το πολυώνυμο με $s+1$, και το νέο πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$\hat{p}(s) = (s+1)p(s) = s^6 + 4s^5 + 5s^4 + 8s^3 + 12s^2 + 15s + 9$$

και ο πίνακας διαμορφώνεται ως εξής:

s^6	1	5	12	9
s^5	4	8	15	0
s^4	3	33/4	9	
s^3	-3	3	0	
s^2	45/4	9		
s^1	27/5	0		
s^0	9			

Και πάλι, προκύπτουν δύο αλλαγές προσήμου στην πρώτη στήλη του πίνακα, άρα το σύστημα είναι ασταθές.

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί αν το σύστημα με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12$$

είναι ευσταθές ή ασταθές.

s^5	1	11	28
s^4	5	23	12
s^3	32/5	128/5	0
s^2	3	12	0

s^1		0	0	0
s^0				

Στην περίπτωση που μία γραμμή αποτελείται ολόκληρη από μηδενικά στοιχεία, πηγαίνουμε στην ακριβώς άνωθεν αυτής γραμμή και γράφουμε το αντίστοιχο πολυώνυμο $q(s)$. Εν προκειμένω, $q(s) = 3s^2 + 12$. Βάλαμε s^2 και s^0 διότι η ακριβώς άνωθεν ευρισκομένη γραμμή περιέχει τους συντελεστές c_1 και c_2 οι οποίοι πρέπει να πολλαπλασιάσουν το s^2 και s^0 αντίστοιχα. Αυτό ισχύει διότι τα c_1 και c_2 βρίσκονται στη γραμμή του s^2 .

Εν συνεχεία παραγωγίζουμε το $q(s)$ ως προς s , οπότε λαμβάνουμε ένα πολυώνυμο $q_1(s)$ τους συντελεστές του οποίου ενθέτουμε στη γραμμή που αρχικά είχε παντού μηδέν. Στο προκείμενο παράδειγμα ο πίνακας Routh γίνεται:

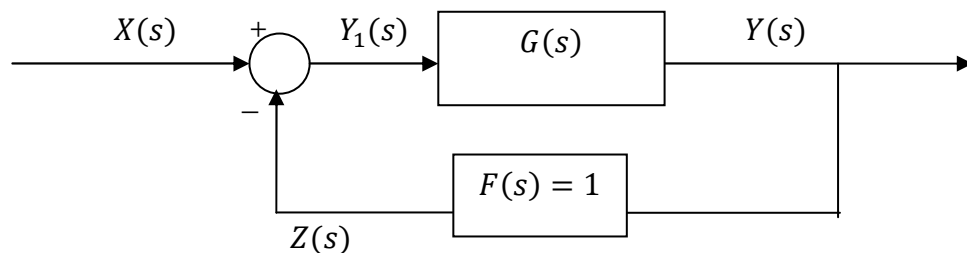
s^5		1	11	28
s^4		5	23	12
s^3		32/5	128/5	0
s^2		3	12	0
s^1		6	0	0
s^0		12	0	0

Παράδειγμα παραμετρικό

Έστω το κάτωθι σύστημα κλειστού βρόχου με συνάρτηση μεταφοράς στον ευθύ κλάδο

$$G(s) = \frac{6k}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

και συνάρτηση μεταφοράς στον κλάδο ανάδρασης $F(s) = 1$.



Τότε το συνολικό σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου

$$H(s) = \frac{\frac{6k}{(s+1)(s+2)(s+3)}}{1 + \frac{6k}{(s+1)(s+2)(s+3)}}$$

Ισοδυνάμως,

$$H(s) = \frac{6k}{(s+1)(s+2)(s+3) + 6k}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$p(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6(k+1)$$

s^3		1	11
s^2		6	$6(k+1)$
s^1		$10-k$	0
s^0		$6(k+1)$	0

Για να είναι ευσταθές το σύστημα πρέπει

$10 - k > 0$ και $6(k+1) > 0$, άρα πρέπει $-1 < k < 10$.

Παράδειγμα 6

$$C(s) = s^3 + 3ks^2 + 2ks + 5 + k$$

Να ελεγχθεί για ποιες τιμές του k , το πολυώνυμο αυτό είναι ευσταθές για $s < -2$.

Λύση

Προσδιορίζουμε τους συντελεστές a_3, a_2, a_1, a_0 τέτοιους ώστε το πολυώνυμό μας να ταυτίζεται με την εξής πολυωνυμική παράσταση

$$C(s) \equiv a_3(s+2)^3 + a_2(s+2)^2 + a_1(s+2) + a_0$$

Συνεπώς ισχύει:

$$a_0 = C(-2) = 9k - 3.$$

Παραγωγίζοντας μία φορά την ανωτέρω ταυτότητα το δεξί μέλος γίνεται

$$3a_3(s+2)^2 + 2a_2(s+2) + a_1$$

Οπότε

$$a_1 = \frac{dC}{ds}(-2) = 12 - 10k.$$

Παραγωγίζοντας μία φορά ακόμα την ταυτότητα το δεξί μέλος αυτής γίνεται

$$6a_3(s+2) + 2a_2$$

Συνεπώς

$$2a_2 = \frac{d^2C}{ds^2}(-2) = 6k - 12 \Leftrightarrow a_2 = 3k - 6$$

Τέλος παραγωγίζοντας μια φορά ακόμα λαμβάνουμε

$$6a_3 = \frac{d^3C}{ds^3}(-2) = 6 \Leftrightarrow a_3 = 1$$

Εν συνεχεία θέτοντας $s' = s + 2$ το νέο πολυώνυμο γίνεται

$$C_1(s') = s'^3 + (3k - 6)s'^2 + (12 - 10k)s' + 9k - 3$$

$$\begin{array}{c|cc} s'^3 & 1 & 12 - 10k \\ s'^2 & 3k - 6 & 9k - 3 \\ s'^1 & -10k^2 + 29k - 23 & 0 \\ \hline s'^0 & k - 2 & 9k - 3 \end{array}$$

Για την ευστάθεια του συστήματος απαιτούμε:

$$3k - 6 > 0 \Rightarrow k > 2$$

$$\frac{-10K^2+29K-23}{K-2} > 0 \text{ Αδύνατο } \forall k \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς το εν λόγω σύστημα δεν μπορεί να είναι ευσταθές για $s < -2$

Παράδειγμα 7

Έστω ένα σύστημα ΓΧΑ με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + s - 1}$$

- Είναι το σύστημα ευσταθές; Χρειάζεται πίνακας Routh για να αποφανθούμε;
- Τι βαθμού κατ' ελάχιστον πρέπει να είναι ο ελεγκτής $F(s)$ στον κλάδο ανάδρασης για να έχουμε ελπίδες να καταστήσουμε το σύστημα ευσταθές;
- Έστω $F(s) = k(s + 1)$. Είναι ευσταθές το σύστημα τώρα;

Λύση

- Το σύστημα είναι ασταθές, επειδή υπάρχουν ετερόσημοι συντελεστές. Ο ελεγκτής $F(s)$ πρέπει να είναι τουλάχιστον μηδενικού βαθμού.
- Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος είναι

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)}$$

η οποία, με $F(s) = k$, γίνεται:

$$H(s) = \frac{2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + s - 1}{2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + s + (k - 1)}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$p(s) = 2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + s + (k - 1)$$

$$\begin{array}{c|cccc} s^6 & 2 & 4 & 5 & k - 1 \end{array}$$

s^5	3	6	1	0
s^4	0			

Αντικαθιστούμε το μηδενικό στην πρώτη στήλη του πίνακα Routh με ποσότητα $\varepsilon > 0$ και εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh βρίσκοντας τα όρια για $\varepsilon \rightarrow 0$. Δηλαδή ο παραπάνω πίνακας Routh διαμορφώνεται ως εξής:

s^7	2	4	5	$k - 1$
s^6	3	6	1	0
s^5	ε	$\frac{13}{3}$	$k - 1$	0
s^4	$6 - \frac{13}{\varepsilon}$			

Παρατηρούμε ότι το όριο $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(6 - \frac{13}{\varepsilon}\right)$ είναι αρνητικό, άρα το εν λόγω σύστημα κλειστού βρόχου παραμένει ασταθές για οποιοδήποτε k . (Πως θα καταστήσουμε το σύστημα ευσταθές;)

Θα αυξήσουμε το βαθμό του πολωνύμου του $F(s)$. Έστω αυτό

$$F(s) = k(s + 1)$$

Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει πλέον ως εξής

$$p(s) = 2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + s - 1 + k(s + 1) \Leftrightarrow$$

$$p(s) = 2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + s(k + 1) + (k - 1)$$

Συνεπώς ο νέος πίνακας Routh έχει ως εξής:

s^6	2	4	5	$k - 1$
s^5	3	6	$k + 1$	0
s^4	ε	$\frac{13 - 2k}{3}$	$k - 1$	0
s^3	$6 - \frac{13 - 2k}{\varepsilon}$	$k + 1 - \frac{3(k - 1)}{\varepsilon}$	0	0
s^2	$-\frac{\varepsilon^2(k + 1) - 3\varepsilon(k - 1)}{6\varepsilon - 13 + 2k} + \frac{13 - 2k}{3}$			
s^1				
s^0				

Παρατηρούμε ότι ούτε το $F(s) = k(s + 1)$ καθιστά το σύστημα ευσταθές.

Δοκιμάζουμε επομένως ελεγκτή π.χ. τον

$$F(s) = k(s^3 + s^2 + 2s + 3)$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι το

$$p(s) = 2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 5s^2 + s - 1 + k(s^3 + s^2 + 2s + 3) \Leftrightarrow$$

$$p(s) = 2s^6 + 3s^5 + 4s^4 + (6 + k)s^3 + (5 + k)s^2 + s(2k + 1) + (3k - 1)$$

Συνεπώς ο νέος πίνακας Routh έχει ως εξής:

s^6	2	4	5+k	3k - 1
s^5	3	6 + k	k + 1	0
s^4	$\frac{k}{3}$	$\frac{13 - k}{3}$	3k - 1	0
s^3	$6 + k - \frac{39 - 3k}{k}$	$k + 1 - \frac{27k - 9}{k}$	0	0
s^2				
s^1				
s^0				