

3. Μια πρώτη προσέγγιση στην επίλυση των κανονικών μορφών Δ. Ε.

Στην εισαγωγή δείξαμε ότι η διαφορική εξίσωση του γραμμικού, χρονικά αναλλοίωτου συστήματος μιας εισόδου μιας εξόδου με διαφορική εξίσωση την (4)

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) + 6\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 11\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = 7z(t), \quad (4)$$

της παραγράφου 1 μπορεί ισοδυνάμως να γραφεί ως το κάτωθι σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}z(t) \quad (3.1)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$$

Όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]. \quad (3.2)$$

Ας θεωρήσουμε, χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας, ότι η είσοδος $z(t)$ είναι η βηματική συνάρτηση $u(t)$. Με αυτή την είσοδο και με χρήση των θεωρημάτων της γραμμικής άλγεβρας που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, θα λύσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (3.1).

Όντως, θα βρούμε, κατ' αρχήν, τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

δηλαδή ισοδυνάμως θα λύσουμε το σύστημα

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\Lambda} = \lambda \cdot \boldsymbol{\Lambda} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_3) \cdot \boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{0} \Rightarrow \quad (3.3)$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_3) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6 & -11 & -6-\lambda \end{bmatrix} \right) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \quad (3.4)$$

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0 \quad (3.5)$$

Παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση (Eigen equation) έχει άμεση σχέση με τη διαφορική εξίσωση από την οποία εκκινήσαμε. Η (3.5) έχει ρίζες $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$, οι οποίες είναι οι ιδιοτιμές (Eigen values) του πίνακα A , όπως προκύπτει άμεσα από τους διαιρέτες του σταθερού όρου της (3.5). Οι ιδιοτιμές αυτές είναι οι πόλοι της αρχικής συνάρτησης μεταφοράς.

Εν συνεχεία, θα βρούμε τα ιδιοδιανύσματα (Eigen vectors), τα οποία αντιστοιχούν στις τρεις αυτές ιδιοτιμές, λύνοντας τρεις φορές το γραμμικό σύστημα (3.3) για τις τρεις διαφορετικές ιδιοτιμές, όπως περιεγράφη προηγουμένως:

α) Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ ισχύει:

$$A - \lambda_1 \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Όπως ήταν αυστηρά αναμενόμενο, η ορίζουσα του πίνακα (3.6) είναι μηδέν, αλλά η πάνω αριστερά υποορίζουσά του $2 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ είναι διάφορη του μηδενός. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε τις δύο πρώτες συνιστώσες του αντιστοιχίου ιδιοδιανύσματος συναρτήσει της τρίτης συνιστώσας με μοναδικό τρόπο, δηλαδή, εάν το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$ είναι, έστω,

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix},$$

τότε η (3.3) γίνεται, εν προκειμένω,

$$\mu_1 + \mu_2 = 0 \quad (3.7\alpha)$$

$$\mu_2 = -\mu_3, \quad (3.7\beta)$$

όπου η τρίτη εξίσωση παρελείφθη, αφού έχουμε θεμελιώσει-απαιτήσει να είναι γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων (3.7). Επομένως, τελικά λαμβάνω:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_3 \\ -\mu_3 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_3. \quad (3.8)$$

Δηλαδή, το σύνολο των πινάκων που ικανοποιούν την ιδιοεξίσωση (3.3) για $\lambda_1 = -1$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διάστασης 1 (“μία ευθεία”) με βάση το $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$ ισχύει:

$$A - \lambda_2 \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -11 & -4 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Όπως ήταν αυστηρά αναμενόμενο, η ορίζουσα του πίνακα (3.9) είναι μηδέν, αλλά η πάνω αριστερά υποορίζουσά του $2 \times 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ είναι διάφορη του μηδενός. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε τις δύο πρώτες συνιστώσες του αντιστοιχού ιδιοδιανύσματος συναρτήσει της τρίτης συνιστώσας με μοναδικό τρόπο, δηλαδή, εάν το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$ είναι, έστω,

$$A_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix},$$

τότε η (3.3) γίνεται, εν προκειμένω,

$$2\xi_1 + \xi_2 = 0$$

$$2\xi_2 + \xi_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\xi_1 = \frac{\xi_3}{4} \quad (3.10\alpha)$$

$$\xi_2 = -\frac{\xi_3}{2} \quad (3.10\beta)$$

όπου η τρίτη εξίσωση παρελείφθη, αφού έχουμε θεμελιώσει-απαιτήσει να είναι γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων (3.10). Επομένως, τελικά λαμβάνω:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\xi_3}{4} \\ -\frac{\xi_3}{2} \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \xi_3. \quad (3.11)$$

Δηλαδή, το σύνολο των πινάκων που ικανοποιούν την ιδιοεξίσωση (3.3) για $\lambda_2 = -2$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$, διάστασης 1 (“μία ευθεία”) με

βάση το $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

β) Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = -3$ ισχύει:

$$A - \lambda_3 \cdot I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -6 & -11 & -3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Όπως ήταν αυστηρά αναμενόμενο, η ορίζουσα του πίνακα (3.12) είναι μηδέν, αλλά η πάνω αριστερά υποορίζουσά του $2 \times 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ είναι διάφορη του μηδενός. Για να μην θεωρηθεί, όμως, ότι διαλέγουμε πάντα αυτήν, επιλέγουμε μία άλλη υποορίζουσα 2×2 διάφορη του μηδενός και συγκεκριμένα την κάτω δεξιά, δηλαδή την $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -11 & -3 \end{vmatrix}$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε τις δύο τελευταίες συνιστώσες του αντιστοίχου ιδιοδιανύσματος συναρτήσει της πρώτης συνιστώσας με μοναδικό τρόπο, δηλαδή, εάν το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_3 = -3$ είναι, έστω,

$$A_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

τότε η (3.3) γίνεται, εν προκειμένω,

$$3v_2 + v_3 = 0$$

$$-6v_1 - 11v_2 - 3v_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$v_3 = 9v_1 \quad (3.13\alpha)$$

$$v_2 = -3v_1 \quad (3.13\beta)$$

όπου η πρώτη εξίσωση παρελείφθη, αφού έχουμε θεμελιώσει-απαιτήσει να είναι γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων (3.13). Επομένως, τελικά λαμβάνω:

$$A_3 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -3v_1 \\ 9v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} v_1. \quad (3.14)$$

Δηλαδή, το σύνολο των πινάκων που ικανοποιούν την ιδιοεξίσωση (3.3) για $\lambda_3 = -3$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{R}^3$, διάστασης 1 (“μία ευθεία”) με βάση το $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Θέτοντας $\mu_3 = \xi_3 = v_3 = 1$ λαμβάνουμε τις βάσεις των αντίστοιχων υποχώρων, τις οποίες αν συνενώσουμε ωςάν στήλες σε έναν ενιαίο πίνακα P έχουμε:

$$P = [A_1 \quad A_2 \quad A_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1 \\ -1 & -1/2 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ είναι διαφορετικές, τα ιδιοδιανύσματα-βάσεις A_1, A_2, A_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η ορίζουσα του P είναι διάφορη του μηδενός (πράγματι, $\det(P) = -0.5$). Επιπλέον, ο P διαγωνοποιεί τον A μέσω της σχέσεως

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot P^{-1}, \quad (3.16)$$

όπου ο διαγώνιος πίνακας έχει στη διαγώνιο τις ιδιοτιμές με την ίδια σειρά με την οποία τοποθετήσαμε τα A_1, A_2, A_3 , ώστε να σχηματίσουν τον πίνακα P στη σχέση (3.15).

Επανερχόμενοι στην επίλυση της εξίσωσης (3.1), με βάση τα ανωτέρω, αυτό γράφεται ισοδυνάμως

$$\frac{dX}{dt} = P \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} u(t). \quad (3.17)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (3.17) από αριστερά με τον πίνακα P^{-1} , λαμβάνουμε

$$P^{-1} \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot X + P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} u(t). \quad (3.18)$$

Στο σημείο αυτό:

i) Παρατηρούμε ότι όλα τα στοιχεία του P^{-1} είναι ανεξάρτητα του χρόνου, άρα $P^{-1} \frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} (P^{-1} \cdot X)$

ii) Ορίζουμε $Y = P^{-1} \cdot X$

iii) Ορίζουμε τον πίνακα $\tilde{B} = P^{-1} \cdot B = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -28 \\ 7/2 \end{bmatrix}$.

Με χρήση των ανωτέρω, η εξίσωση (3.18) γίνεται:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Y} + \tilde{\mathbf{B}}u(t), \quad (3.19)$$

ή εάν θεωρήσουμε ότι $\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$, ισοδυνάμως,

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\psi_1 + \frac{7}{2}u(t) \quad (3.20\alpha)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -2\psi_2 - 28u(t) \quad (3.20\beta)$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -3\psi_3 + \frac{7}{2}u(t). \quad (3.20\gamma)$$

Δηλαδή, μέσω της διαγωνοποίησης του πίνακα A , επιτύχαμε αποσύμπλεξη των διαφορικών εξισώσεων στο σύστημά τους.

Εδώ υπενθυμίζουμε ότι κάθε μία από τις εξισώσεις (3.20) έχει γενική λύση, η οποία είναι άθροισμα της γενικής λύσεως της ομογενούς συν μία ειδική λύση. Η γενική λύση της ομογενούς είναι της μορφής $ce^{\rho t}$, όπου ρ ο συντελεστής του εκάστοτε ψ_i . Επομένως, οι εξισώσεις (3.20) έχουν τις λύσεις

$$\psi_1(t) = c_1 e^{-t} + \frac{7}{2}u(t), \quad t > 0 \quad (3.21\alpha)$$

$$\psi_2(t) = c_2 e^{-2t} - 14u(t), \quad t > 0 \quad (3.21\beta)$$

$$\psi_3(t) = c_3 e^{-3t} + \frac{7}{6}u(t), \quad t > 0 \quad (3.21\gamma)$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2, c_3 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες στο 0^+ και οι

$$\frac{7}{2}u(t), -14u(t) \text{ και } \frac{7}{6}u(t)$$

είναι οι ειδικές λύσεις των αντιστοίχων αποσυμπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων.

Οι ειδικές αυτές λύσεις προέκυψαν αντικαθιστώντας στις αποσυμπλεγμένες διαφορικές εξισώσεις $\psi_i(t) = \alpha u(t) + \beta$, και απαιτώντας ταυτοτική ικανοποίησή τους $\forall t > 0^+$.

Προσοχή: Ενώ οι αρχικές συνθήκες στον Laplace υπολογίζονται από τις τιμές της αντίστοιχης συναρτήσεως στο 0^- , εδώ οι αρχικές συνθήκες δίνονται στο 0^+ . Αυτό είναι συμβατό με την απαίτηση ότι οι γνωστοί όροι $\tilde{\mathbf{B}}z(t)$ των εξισώσεων (3.20) πρέπει να είναι συνεχείς στο διάστημα που ισχύουν οι λύσεις (3.21) (η βηματική συνάρτηση $u(t)$ είναι συνεχής μόνο για $t > 0$).

Με βάση τα ανωτέρω, εάν θέσουμε

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

τότε η λύση (3.21) γράφεται σε μητρική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/2 \\ -14 \\ 7/6 \end{bmatrix} u(t) \Leftrightarrow \\ \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/2 \\ -14 \\ 7/6 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.22) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον πίνακα $\mathbf{P}$ και τα δύο μέλη της ανωτέρω εξίσωσης και λόγω του ορισμού $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{X}$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} 7/2 \\ -14 \\ 7/6 \end{bmatrix} u(t) \Leftrightarrow \quad (3.23) \\ \mathbf{X}(t) &= \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

Επειδή πολύ συχνά είναι απαραίτητο να συνδέουμε το $\mathbf{X}(t)$ με το $\mathbf{X}(0^+)$, προς το σκοπό αυτό θέτουμε $t = 0^+$ στην ανωτέρω εξίσωση οπότε λαμβάνουμε :

$$\mathbf{X}(0^+) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(0^+)$$

Επειδή, δε, $u(0^+) = 1$ λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(0^+) - \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Κατά συνέπεια η λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων γράφεται και ως εξής:

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot X(0^+) - P \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Τονίζεται ότι στη ανωτέρω εξίσωση οι όροι

$$-P \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

αποτελούν μία ειδική λύση του αρχικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων, διαφορετική

της $\begin{bmatrix} 7/2 \\ -14 \\ 7/6 \end{bmatrix} u(t)$. Πράγματι

$$P \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7e^{-t}}{2} - \frac{7e^{-2t}}{2} + \frac{7e^{-3t}}{6} \\ 7e^{-2t} - \frac{7e^{-t}}{2} - \frac{7e^{-3t}}{2} \\ \frac{7e^{-t}}{2} - 14e^{-2t} + \frac{21e^{-3t}}{2} \end{bmatrix}$$

Οπότε, η νέα ειδική λύση είναι η

$$X^e(t) = - \begin{bmatrix} \frac{7e^{-t}}{2} - \frac{7e^{-2t}}{2} + \frac{7e^{-3t}}{6} \\ 7e^{-2t} - \frac{7e^{-t}}{2} - \frac{7e^{-3t}}{2} \\ \frac{7e^{-t}}{2} - 14e^{-2t} + \frac{21e^{-3t}}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με απευθείας εισαγωγή των ειδικών λύσεων $x_1^e(t), x_2^e(t), x_3^e(t)$ ότι αυτές είναι πράγματι ειδικές λύσεις του αρχικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Επανερχόμενοι στην εξίσωση (3.23)

$$X(t) = P \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

κάνουμε χρήση της πασίγνωστης ιδιότητας

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} = 1 + \frac{\lambda t}{1!} + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} \dots \quad (3.24)$$

και αντικαθιστώντας στη σχέση (3.23) προκύπτει

$$\begin{aligned} & \mathbf{X} = \\ & \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3 t^3}{3!} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_2^3 t^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_3 t + \frac{\lambda_3^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_3^3 t^3}{3!} + \dots \end{bmatrix} \\ & \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} 7/2 \\ -14 \\ 7/6 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.25) \end{aligned}$$

Επικεντρώνοντας την προσοχή μας μόνο στο $\mathbf{P} \cdot \Delta \cdot \mathbf{P}^{-1}$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_1^3 t^3}{3!} + \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_2 t + \frac{\lambda_2^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_2^3 t^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \lambda_3 t + \frac{\lambda_3^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda_3^3 t^3}{3!} + \dots \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ & = \mathbf{P} \left(\mathbf{I} + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \frac{t^2}{2!} + \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{bmatrix} \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \mathbf{P}^{-1} \quad (3.26) \end{aligned}$$

Αλλά, εκ κατασκευής,

$$\mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{A}$$

ενώ

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

άρα

$$P \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} P^{-1} = AA = A^2$$

Ομοίως,

$$P \begin{bmatrix} \lambda_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^3 \end{bmatrix} P^{-1} = A^3$$

οπότε η σχέση (3.25) γίνεται

$$X = \left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 7/2 \\ -14 \\ 7/6 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.27)$$

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε ότι η άπειρη σειρά πινάκων εντός της παρενθέσεως, δηλαδή η μήτρα $\left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots \right)$

έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το ανάπτυγμα σε σειρά της $e^{\lambda t}$. Γι' αυτό το λόγο ορίζουμε ένα νέο πίνακα που το συμβολίζουμε με e^{At} μέσω της προφανούς ισότητας

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (3.28)$$

Θα δείξουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο ότι ο πίνακας e^{At} διατηρεί πολλές από τις τυπικές ιδιότητες της πραγματικής συνάρτησης $e^{\lambda t}$.

3.1 Μερικές βασικές ιδιότητες της e^{At}

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A $n \times n$ ορίζουμε τον κάτωθι πίνακα, όταν η σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει.

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots \quad (3.29)$$

$$1. \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$$

προκύπτει άμεσα από παραγώγιση της σχέσης (3.29)

$$2. e^{A0} = I$$

πάλι προκύπτει άμεσα με αντικατάσταση $t = 0$ στη σχέση (3.29)

$$3. e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$$

προκύπτει από την (3.29) εάν εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα και ομαδοποιήσουμε σε δυνάμεις του $(t_1 + t_2)$.

$$4. e^{At} \cdot e^{-At} = I$$

είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων αν θέσουμε $t_1 = t$ και $t_2 = -t$. Η σχέση αυτή σημαίνει ότι εάν ο πίνακας e^{At} ορίζεται για κάθε t , τότε έχει πάντα αντίστροφο ο οποίος είναι ο e^{-At} .

$$5. (e^{At})^n = e^{Ant}$$

προκύπτει με άμεση επαγωγή

$$6. \text{Εάν } A = P \cdot B \cdot P^{-1}, \text{ τότε } e^{At} = P \cdot e^{Bt} \cdot P^{-1}$$

η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη με τη μετάβαση από τη σχέση (3.26) στην (3.28)

$$7. e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

Απόδειξη

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}e^{At}\right) = \mathcal{L}(Ae^{At}) \Leftrightarrow s\mathcal{L}(e^{At}) - e^{At}|_{t=0^-} = A\mathcal{L}(e^{At}) \Leftrightarrow$$

$$(sI - A)\mathcal{L}(e^{At}) = e^{At}|_{t=0^-} = I \Leftrightarrow \mathcal{L}(e^{At}) = (sI - A)^{-1} \Leftrightarrow e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

Προσοχή! Αυτή η ιδιότητα συνιστά μία εναλλακτική μέθοδο υπολογισμού της e^{At} , μέσω του υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα του $(sI - A)$ και εν συνεχεία με εφαρμογή του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace στο $(sI - A)^{-1}$.

Επιπλέον ο πίνακας $(sI - A)^{-1}$ μπορεί επίσης να προσφέρει τη συνάρτηση μεταφοράς από τις εξισώσεις καταστάσεως καθώς

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + Bz(t)$$

$$\text{και } y(t) = C \cdot X$$

όπου

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ και η πρώτη γραμμή του } A \text{ έστω η } [\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \dots \quad \alpha_{1n}]. \text{ Τότε}$$

η πρώτη γραμμή της ανωτέρω συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως γράφεται

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1z(t) \quad (3.30)$$

Θεωρώντας όλες τις αρχικές συνθήκες μηδέν στο $t = 0^-$ προκύπτει

$$\mathcal{L}\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = \mathcal{L}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1z(t)) \Leftrightarrow$$

$$sX_1(s) = a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \dots + a_{1n}X_n(s) + b_1Z(s) \Leftrightarrow$$

$$sX_1(s) = [\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \dots \quad \alpha_{1n}] X^{\mathcal{L}}(s) + b_1Z(s)$$

Όπου

$$X^{\mathcal{L}}(s) = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία και για τις άλλες διαφορικές εξισώσεις του αρχικού συστήματος Δ.Ε. προκύπτει συνολικά η σχέση

$$\begin{aligned}
s\mathbf{X}^L(s) &= \mathbf{A}\mathbf{X}^L(s) + \mathbf{B}\mathbf{Z}(s) \Leftrightarrow \\
s\mathbf{X}^L(s) - \mathbf{A}\mathbf{X}^L(s) &= \mathbf{B}\mathbf{Z}(s) \Leftrightarrow \\
(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}^L(s) &= \mathbf{B}\mathbf{Z}(s) \Leftrightarrow \\
\mathbf{X}^L(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Z}(s)
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την ανωτέρω σχέση στην

$$y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$$

λαμβάνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος με μία είσοδο $Z(s)$ και μία έξοδο $Y(s)$:

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \mathbf{C} \cdot (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

8. $e^{At} \cdot e^{Bt} = e^{(A+B)t}$ εάν και μόνο εάν ισχύει $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

3.3 Χρήση του πίνακα e^{At} για την επίλυση του συστήματος των κανονικών διαφορικών εξισώσεων

Έστω το ΓΧΑ σύστημα μιας εισόδου μιας εξόδου

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}z(t), \quad \mathbf{X}(0^+) = \mathbf{X}_0$$

όπου $\mathbf{X} \rightarrow N \times 1$, $\mathbf{A} \rightarrow N \times N$, $\mathbf{B} \rightarrow N \times 1$, $z(t)$ γνωστή συνάρτηση εισόδου συνεχής στο $(0, \infty)$, π.χ. η βηματική συνάρτηση.

Τότε πολλαπλασιάζοντας και τα 2 μέλη με e^{-At} προκύπτει

$$e^{-At} \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) - e^{-At}\mathbf{A}\mathbf{X}(t) = e^{-At}\mathbf{B}z(t)$$

Όμως από την ιδιότητα 1 που δόθηκε παραπάνω και τον κανόνα παραγωγισής του γινομένου

$$e^{-At} \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) - e^{-At}\mathbf{A}\mathbf{X}(t) = \frac{d}{dt}(e^{-At}\mathbf{X}(t)) = e^{-At}\mathbf{B}z(t)$$

Οπότε ολοκληρώνοντας από $t = 0^+$ έως κάποιο t και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 2. του e^{At} ισχύει

$$e^{-At}\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}(0^+) = \int_{0^+}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}z(\tau)d\tau$$

Οπότε από την ιδιότητα 4. του e^{At} οι $\mathbf{X}(t)$ έχουν τη μορφή

$$\mathbf{X}(t) = e^{At}\mathbf{X}(0^+) + e^{At} \int_{0^+}^t e^{-A\tau}\mathbf{B}z(\tau)d\tau$$

Προσοχή 1: Σε αυτή την τυπική μορφή λύσης του ΓΧΑ συστήματος διαφορικών εξισώσεων η μήτρα e^{At} πολλαπλασιάζει τον πίνακα $\mathbf{X}(t)$ υπολογισμένο στο $t = 0^+$. Αυτό είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με το γεγονός ότι η $e^{At}\mathbf{X}(0^+)$ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}^O = \mathbf{A} \mathbf{X}^O,$$

ενώ η γενική λύση είναι της μορφής

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^O(t) + \mathbf{X}^E(t)$$

Όπου $\mathbf{X}^E(t)$ είναι η ειδική λύση

$$\mathbf{X}^E(t) = e^{\mathbf{A}t} \int_{0^+}^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$$

Εάν βρούμε εμείς μια ειδική λύση $\mathbf{V}(t)$ του αποσυμπλεγμένου συστήματος εξισώσεων με επισκόπηση, δηλαδή διαισθητικά, όπως κάναμε στη λύση του συστήματος (3.22) τότε η γενική λύση είναι της μορφής

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}(t)$$

όπου $\mathbf{P}$ ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων του $\mathbf{A}$ και $\mathbf{\Gamma}$ πίνακας στήλη, όπως ακριβώς αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο από την σχέση (3.22) έως τη σχέση (3.23) που υπολογίζεται εάν στην ανωτέρω εξίσωση θέσουμε $t = 0^+$. Οπότε $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{X}(0^+) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{V}(0^+)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Παράδειγμα 3.1

Δίνεται το σύστημα μιας εισόδου $z(t)$ και μιας εξόδου $y(t)$, το οποίο περιγράφεται από τις κάτωθι εξισώσεις:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X} + D z(t)$$

Όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{53}{12} & -\frac{25}{6} & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{37}{6} & -\frac{11}{3} & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \quad D = 2$$

Να λυθεί το ανωτέρω σύστημα :

A) για $z(t) = u(t)$ και

B) για $z(t) = t^3$

Επίλυση

Βήμα 1ο:

Βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση και τις ιδιοτιμές του A , δηλαδή λύνουμε την

$$\det(A - \lambda I) = 0. \text{ Πράγματι}$$
$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} - \lambda & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} - \lambda & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{53}{12} & -\frac{25}{6} - \lambda & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{37}{6} & -\frac{11}{3} & -3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Οπότε λαμβάνουμε ισοδυνάμως

$$\lambda^4 + \frac{39}{4}\lambda^3 + 31\lambda^2 + \frac{159}{4}\lambda + \frac{35}{2} = 0.$$

Κάνουμε όλους τους συντελεστές ακεραίους πολλαπλασιάζοντας με τον αριθμό 4.

Άρα η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$4\lambda^4 + 39\lambda^3 + 124\lambda^2 + 159\lambda + 70 = 0$$

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής p/q , όπου p διαιρέτης του σταθερού όρου και q διαιρέτης του συντελεστή του μεγιστοβαθμίου, δηλαδή εν προκειμένω $p = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 7, \pm 10, \pm 35, \pm 70$ ενώ $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Αυτό έχει 4 ρίζες οι οποίες είναι $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -5, \lambda_4 = -7/4$, οι οποίες ευρέθησαν με την σειρά που αναφέρονται.

Βήμα 2ο: Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα του A τα οποία είναι 4 και γραμμικώς ανεξάρτητα αφού οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι όλες διαφορετικές.

A) Ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$

Λύνουμε το σύστημα

$$(A + I)X_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cccccc} -\frac{4}{3}x_1 & -\frac{11}{3}x_2 & \frac{5}{3}x_3 & +1x_4 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 & -\frac{3}{4}x_2 & -\frac{1}{4}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & = & 0 \\ -\frac{1}{6}x_1 & +\frac{53}{12}x_2 & -\frac{19}{6}x_3 & -1x_4 & = & 0 \\ -\frac{5}{3}x_1 & +\frac{37}{6}x_2 & -\frac{11}{3}x_3 & -2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Επιλέγουμε τυχαία την κάτω δεξιά υποορίζουσα 3×3 , η οποία είναι διάφορη του μηδενός. Άρα επιλύουμε το άνωθεν σύστημα με ελεύθερο άγνωστο το x_1 , τον οποίο επιλέξαμε γιατί δεν πολλαπλασιάζει κανένα στοιχείο της υποορίζουσας αυτής:

Με μέθοδο απαλοιφής Gauss προκύπτει η λύση και άρα το ιδιοδιάνυσμα

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -3x_1 \\ -\frac{5x_1}{2} \\ -\frac{11x_1}{2} \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -\frac{5}{2} \\ -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

Ή διαλέγοντας $x_1 = 2$ προκύπτει

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -5 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Β) Ιδιοτιμή $\lambda_2 = -2$

Λύνουμε το σύστημα

$$(A + 2I)X_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cccccc} -\frac{1}{3}x_1 & -\frac{11}{3}x_2 & \frac{5}{3}x_3 & +1x_4 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 & \frac{3}{4}x_2 & -\frac{1}{4}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & = & 0 \\ -\frac{1}{6}x_1 & +\frac{53}{12}x_2 & -\frac{13}{6}x_3 & -1x_4 & = & 0 \\ -\frac{5}{3}x_1 & +\frac{37}{6}x_2 & -\frac{11}{3}x_3 & -1x_4 & = & 0 \end{array}$$

Διαλέγουμε την πάνω αριστερά υποορίζουσα 3×3 , η οποία είναι διάφορη του μηδενός. Άρα επιλύουμε το άνωθεν σύστημα με ελεύθερο άγνωστο το x_4

Με μέθοδο απαλοιφής Gauss προκύπτει η λύση και άρα το ιδιοδιάνυσμα

$$X_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_4}{2} \\ 0x_4 \\ -\frac{x_4}{2} \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ή διαλέγοντας $x_4 = 2$ προκύπτει

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Γ) Ιδιοτιμή $\lambda_3 = -5$

Λύνουμε το σύστημα

$$(A + 5I)X_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{8}{3}x_1 & -\frac{11}{3}x_2 & \frac{5}{3}x_3 & +1x_4 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 & \frac{19}{4}x_2 & -\frac{1}{4}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & = & 0 \\ -\frac{1}{6}x_1 & +\frac{53}{12}x_2 & \frac{5}{6}x_3 & -1x_4 & = & 0 \\ -\frac{5}{3}x_1 & +\frac{37}{6}x_2 & -\frac{11}{3}x_3 & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

Διαλέγουμε πάλι τυχαία την πάνω αριστερά υποορίζουσα 3×3 , και βρίσκουμε ότι είναι διάφορη του μηδενός. Άρα επιλύουμε το άνωθεν σύστημα με ελεύθερο άγνωστο το x_4

Με μέθοδο απαλοιφής Gauss προκύπτει η λύση και άρα το ιδιοδιάνυσμα

$$X_3 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 \\ 0x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ή διαλέγοντας $x_4 = 1$ προκύπτει

$$X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Δ) Ιδιοτιμή $\lambda_4 = -\frac{7}{4}$

Λύνουμε το σύστημα

$$\left(A + \frac{7}{4}I\right)X_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{rrcrcl} -\frac{7}{12}x_1 & -\frac{11}{3}x_2 & \frac{5}{3}x_3 & +1x_4 & = & 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 & \frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{4}x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & = & 0 \\ -\frac{1}{6}x_1 & +\frac{53}{12}x_2 & -\frac{29}{12}x_3 & -1x_4 & = & 0 \\ -\frac{5}{3}x_1 & +\frac{37}{6}x_2 & -\frac{11}{3}x_3 & -\frac{5}{4}x_4 & = & 0 \end{array}$$

Επιλέγουμε τυχαία την κάτω αριστερά υποορίζουσα που είναι διάφορη του μηδενός. Άρα επιλύουμε το άνωθεν σύστημα με ελεύθερο άγνωστο το x_4 .

Με μέθοδο απαλοιφής Gauss προκύπτει η λύση και άρα το ιδιοδιάνυσμα

$$X_4 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0x_4 \\ \frac{1}{2}x_4 \\ \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ή διαλέγοντας $x_4 = 1$ προκύπτει

$$X_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα συνενώνοντας τα X_1, X_2, X_3, X_4 , σχηματίζεται ο πίνακας $P = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]$. Επομένως ο πίνακας είναι

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -5 & -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -11 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να υπενθυμίσουμε ότι: Επειδή οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -5$, $\lambda_4 = -\frac{7}{4}$ είναι διαφορετικές, τα ιδιοδιανύσματα-βάσεις X_1, X_2, X_3, X_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αυτό ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η ορίζουσα του P είναι διάφορη του μηδενός (πράγματι, $\det(P) = -4.5$). Επιπλέον, ο P διαγωνοποιεί τον A μέσω της σχέσεως

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A = P \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} \cdot P^{-1},$$

Τώρα επιστρέφουμε στην επίλυση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης. Με βάση τα ανωτέρω, αυτή γράφεται ισοδυνάμως ως

$$\frac{dX}{dt} = P \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} z(t). \Leftrightarrow$$

$$\frac{d(P^{-1} \cdot X)}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} P^{-1} \cdot X + P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} z(t).$$

Θέτοντας τον βοηθητικό πίνακα $Y = P^{-1} \cdot X$ και $\tilde{B} = P^{-1}B = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{7}{3} \\ 8 \end{bmatrix}$

έχουμε:

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} \end{bmatrix} \cdot Y + \tilde{B}z(t), \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\psi_1 + \frac{2}{3}z(t) \quad (3.3\alpha)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -2\psi_2 + z(t) \quad (3.3\beta)$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -5\psi_3 + \frac{7}{3}z(t) \quad (3.3\gamma)$$

$$\frac{d\psi_4}{dt} = -\frac{7}{4}\psi_4 + 8z(t). \quad (3.3\delta)$$

A) Για $z(t) = u(t)$ (τη βηματική συνάρτηση)

Εδώ υπενθυμίζουμε ότι κάθε μία από τις εξισώσεις (3.3) έχει γενική λύση, η οποία είναι άθροισμα της γενικής λύσεως της ομογενούς συν μία ειδική λύση. Η γενική λύση της ομογενούς είναι της μορφής $ce^{\rho t}$, όπου ρ ο συντελεστής του εκάστοτε ψ_i . Επομένως, οι εξισώσεις (3.3) έχουν τις λύσεις

$$\psi_1(t) = c_1 e^{-t} + \frac{2}{3}u(t), \quad t > 0 \quad (3.4\alpha)$$

$$\psi_2(t) = c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2}u(t), \quad t > 0 \quad (3.4\beta)$$

$$\psi_3(t) = c_3 e^{-5t} + \frac{7}{15}u(t), \quad t > 0 \quad (3.4\gamma)$$

$$\psi_4(t) = c_4 e^{-\frac{7}{4}t} + \frac{32}{7}u(t), \quad t > 0 \quad (3.4\delta)$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2, c_3, c_4 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες στο 0^+ ενώ οι

$$\frac{2}{3}u(t), \frac{1}{2}u(t), \frac{7}{15}u(t), \frac{32}{7}u(t)$$

είναι οι ειδικές λύσεις των αντιστοίχων αποσυμπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες επελέγησαν δοκιμάζοντας ειδική λύση της μορφής $\alpha \cdot u(t) + \beta$ και προσδιορίζοντας τα α, β , ούτως ώστε κάθε εξίσωση χωριστά να ικανοποιείται ταυτοτικά. Θέτοντας

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

προκύπτει

$$\text{Οπότε } \mathbf{X} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{-1t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{7}{4}t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} + \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{15}{32} \\ \frac{7}{7} \end{bmatrix} \cdot u(t) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{41}{30} \\ \frac{12}{7} \\ -\frac{227}{210} \\ -\frac{136}{105} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

Επειδή πολύ συχνά είναι απαραίτητο να συνδέουμε το $\mathbf{X}(t)$ με το $\mathbf{X}(0^+)$, προς το σκοπό αυτό θέτουμε $t = 0^+$ στην ανωτέρω εξίσωση οπότε λαμβάνουμε :

$$\mathbf{X}(0^+) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{41}{30} \\ \frac{12}{7} \\ -\frac{227}{210} \\ -\frac{136}{105} \end{bmatrix} u(0^+)$$

Επειδή, δε, $u(0^+) = 1$ λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(0^+) - \begin{bmatrix} \frac{41}{30} \\ \frac{12}{7} \\ -\frac{227}{210} \\ -\frac{136}{105} \end{bmatrix}$$

Τότε η λύση της διαφορικής γίνεται

$$\mathbf{X}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{X}(0^+) - e^{At} \begin{bmatrix} \frac{41}{30} \\ \frac{12}{7} \\ -\frac{7}{227} \\ -\frac{210}{136} \\ -\frac{105}{105} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{41}{30} \\ \frac{12}{7} \\ -\frac{7}{227} \\ -\frac{210}{136} \\ -\frac{105}{105} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\mathbf{X}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{X}(0^+) + \begin{bmatrix} \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{7}{15}e^{-5t} \\ \frac{16}{7}e^{-\frac{7}{4}t} - 4e^{-t} \\ \frac{7}{15}e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{10}{3}e^{-t} + \frac{16}{7}e^{\frac{7}{4}t} \\ 1e^{-2t} - \frac{22}{3}e^{-t} + \frac{7}{15}e^{-5t} + \frac{32}{7}e^{-\frac{7}{4}t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{41}{30} \\ \frac{12}{7} \\ -\frac{7}{227} \\ -\frac{210}{136} \\ -\frac{105}{105} \end{bmatrix} u(t)$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε υπολογίσει την ειδική λύση μέσω του τύπου

$$\mathbf{X}(t) = e^{At} \mathbf{X}(0^+) + e^{At} \int_{0^+}^t e^{-A\tau} \mathbf{B}z(\tau) d\tau$$

στον οποίον αυτή η ειδική λύση είναι η

$$\mathbf{E}(t) = e^{At} \int_{0^+}^t e^{-A\tau} \mathbf{B}z(\tau) d\tau = \int_{0^+}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}z(\tau) d\tau \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{E}(t) = \int_{0^+}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}z(\tau) d\tau$$

Αλλά εξ ορισμού

$$e^{A(t-\tau)} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-\tau)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5(t-\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2e^{-(t-\tau)} + e^{-5(t-\tau)}}{3} & \frac{3e^{-5(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)}}{3} & \frac{2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}}{3} & \frac{e^{-2(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}}{3} \\ \frac{2e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)}}{6e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - 5e^{-(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}} & \frac{2e^{-(t-\tau)} - e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)}}{5e^{-(t-\tau)} - 3e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} - 3e^{-5(t-\tau)}} & \frac{2e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - 2e^{-(t-\tau)}}{6e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - 5e^{-(t-\tau)} + e^{-2(t-\tau)} + e^{-5(t-\tau)}} & 0 \\ \frac{4e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - 11e^{-(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}}{3} & \frac{11e^{-(t-\tau)} - 2e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)} - e^{-5(t-\tau)}}{3} & \frac{12e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - 11e^{-(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)} + e^{-5(t-\tau)}}{3} & \frac{e^{-5(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}}{3} \\ 2e^{-2(t-\tau)} + e^{-5(t-\tau)} & & & \end{bmatrix}$$

$$\text{Ενώ } e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{4e^{-(t-\tau)}}{3} + e^{-2(t-\tau)} - \frac{7e^{-5(t-\tau)}}{3} \\ 4e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - 4e^{-(t-\tau)} \\ 4e^{-(t-\tau)} - \frac{10e^{-(t-\tau)}}{3} - e^{-2(t-\tau)} + \frac{7e^{-5(t-\tau)}}{3} \\ 8e^{-\frac{7}{4}(t-\tau)} - \frac{22e^{-(t-\tau)}}{3} + 2e^{-2(t-\tau)} + \frac{7e^{-5(t-\tau)}}{3} \end{bmatrix}$$

Οπότε ολοκληρώνοντας τη τελευταία στήλη λαμβάνουμε την ειδική λύση $\mathbf{E}(t)$. Είναι προφανές ότι αυτή η διαδικασία είναι πολύ χρονοβόρα και επίπονη, σε αντίθεση με την ειδική λύση μέσω επισκοπήσεως που προτείναμε αρχικά.

Β) Για $z(t) = t^3$

Υπενθυμίζουμε ότι με τη μέθοδο διαγωνοποίησης οδηγηθήκαμε στο σύστημα των αποσυνπλεγμένων εξισώσεων

$$\frac{d\psi_1}{dt} = -\psi_1 + \frac{2}{3}z(t) \quad (3.3\alpha)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = -2\psi_2 + z(t) \quad (3.3\beta)$$

$$\frac{d\psi_3}{dt} = -5\psi_3 + \frac{7}{3}z(t) \quad (3.3\gamma)$$

$$\frac{d\psi_4}{dt} = -\frac{7}{4}\psi_4 + 8z(t). \quad (3.3\delta)$$

όπου, εκ νέου, κάθε μία από τις 4 παραπάνω εξισώσεις έχει γενική λύση, η οποία είναι άθροισμα της γενικής λύσεως της ομογενούς συν μία ειδική λύση. Η γενική λύση της ομογενούς είναι της μορφής $ce^{\lambda t}$, όπου λ ο συντελεστής του εκάστοτε ψ_i . Για την ειδική λύση, παρατηρούμε ότι η είσοδος είναι $z(t) = t^3$, άρα δοκιμάζουμε ως ειδική λύση πλήρες πολυώνυμο τρίτου βαθμού, δηλαδή

$$\psi^{e(t)} = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta,$$

Όπου η $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι προσδιοριστέοι συντελεστές. Για να τους προσδιορίσουμε, αντικαθιστούμε αυτή την ειδική λύση στην γενική μορφή κάθε μιας από τις αποσυνπλεγμένες διαφορικές εξισώσεις, δηλαδή στην

$$\frac{d\psi}{dt} = \lambda\psi + bz(t)$$

Όπου b είναι κάποιο από τα στοιχεία του $\tilde{\mathbf{B}}$ όπου $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B}$

$$\text{Όντως } 3\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = \lambda \alpha t^3 + \lambda \beta t^2 + \lambda \gamma t + \lambda \delta + b t^3$$

Και επειδή η ανωτέρω σχέση πρέπει να ικανοποιείται ταυτοτικά για κάθε t , οι συντελεστές των ομωνύμων όρων πρέπει να είναι ίσοι.

Άρα

$$\lambda \alpha = -b \Leftrightarrow \alpha = -\frac{b}{\lambda}$$

$$3\alpha = \lambda \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{3\alpha}{\lambda} = -\frac{3b}{\lambda^2}$$

$$2\beta = \lambda \gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{2\beta}{\lambda} = -\frac{6b}{\lambda^3}$$

$$\lambda \delta = \gamma \Leftrightarrow \delta = -\frac{6b}{\lambda^4}$$

Επομένως, για τον συγκεκριμένο $\tilde{\mathbf{B}}$ και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -5$, $\lambda_4 = -\frac{7}{4}$ οι ειδικές λύσεις είναι :

- i) Για $\lambda = \lambda_1 = -1$ και $b = \tilde{\mathbf{B}}(1) = \frac{2}{3}$, $a = \frac{2}{3}$, $\beta = -2$, $\gamma = 4$, $\delta = -4$
- ii) Για $\lambda = \lambda_2 = -2$ και $b = \tilde{\mathbf{B}}(2) = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{3}{4}$, $\gamma = \frac{3}{4}$, $\delta = -\frac{3}{8}$
- iii) Για $\lambda = \lambda_3 = -5$ και $b = \tilde{\mathbf{B}}(3) = \frac{7}{3}$, $a = \frac{7}{15}$, $\beta = -\frac{7}{25}$, $\gamma = \frac{14}{125}$, $\delta = -\frac{14}{625}$
- iv) Για $\lambda = \lambda_4 = -\frac{7}{4}$ και $b = \tilde{\mathbf{B}}(4) = 8$, $a = \frac{32}{7}$, $\beta = -\frac{384}{49}$, $\gamma = \frac{3072}{343}$, $\delta = -\frac{12288}{2401}$

Άρα το διάνυσμα των ειδικών λύσεων των αποσυμπλεγμένων εξισώσεων είναι :

$$\mathbf{y}^e(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t - 4 \\ \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{8} \\ \frac{7}{15}t^3 - \frac{7}{25}t^2 + \frac{14}{125}t - \frac{14}{625} \\ \frac{32}{7}t^3 - \frac{384}{49}t^2 + \frac{3072}{343}t - \frac{12288}{2401} \end{bmatrix}$$

Επομένως η λύση της διαφορικής εξίσωσης γίνεται :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} + \mathbf{P}\mathbf{Y}^{e(t)} = e^{\mathbf{A}t} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t - 4 \\ \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{8} \\ \frac{7}{15}t^3 - \frac{7}{25}t^2 + \frac{14}{125}t - \frac{14}{625} \\ \frac{32}{7}t^3 - \frac{384}{49}t^2 + \frac{3072}{343}t - \frac{12288}{2401} \end{bmatrix}$$

Επειδή πολύ συχνά είναι απαραίτητο να συνδέουμε το $\mathbf{X}(t)$ με το $\mathbf{X}(0^+)$, προς το σκοπό αυτό θέτουμε $t = 0^+$ στην ανωτέρω εξίσωση οπότε λαμβάνουμε :

$$\mathbf{X}(0^+) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix}.$$

Η λύση της εξίσωσης είναι:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{X}(0^+) + \mathbf{P} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t - 4 \\ \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{4}t - \frac{3}{8} \\ \frac{7}{15}t^3 - \frac{7}{25}t^2 + \frac{14}{125}t - \frac{14}{625} \\ \frac{32}{7}t^3 - \frac{384}{49}t^2 + \frac{3072}{343}t - \frac{12288}{2401} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 3.2

Δίνεται το σύστημα μιας εισόδου $z(t)$ και μιας εξόδου $y(t)$, το οποίο περιγράφεται από τις κάτωθι εξισώσεις:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X} + D z(t)$$

Όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -11 & 1 & 1 \\ 2 & -10 & 2 \\ 1 & 1 & -11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} \text{ πίνακας } 1 \times 3, \quad \mathbf{D} \text{ πίνακας } 3 \times 1$$

Να λυθεί το σύστημα για είσοδο τη βηματική συνάρτηση $u(t)$