

1. Πρώτο μηχανικό παράδειγμα. Ελατήριο με βάρος και τριβή.

1.1 Περιγραφή του συστήματος μέσω ολοκληρωτικοδιαφορικής εξίσωσης.

α) Έστω ελατήριο σταθεράς k χωρίς καμία τάση επ' αυτού, με φυσικό μήκος l_0 . β) Εξαρτούμε από το ελατήριο μάζα m και αφήνουμε το ελατήριο να ισορροπήσει. Στη θέση ισορροπίας ισχύει

$$\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\zeta} = 0 \Rightarrow$$

$$\text{κατά μήκος του άξονα των } y \text{ ισχύει } -k\Delta l + mg = 0 \Leftrightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}.$$

γ) Ασκούμε δύναμη, έστω $\vec{F}(t)$ επί της μάζας m . Τότε σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα ισχύει $\Sigma \vec{F}_{\varepsilon\zeta} = m\vec{\gamma} \Rightarrow$ κατά μήκος του άξονα των y ισχύει

$$-k(\Delta l + y) + mg + F(t) = m\ddot{y}$$

όπου το y μετράται αλγεβρικά από τη θέση ισορροπίας με τα θετικά προς τα κάτω και προφανώς εξαρτάται από το χρόνο. Αν λάβουμε υπ' όψιν και την εξίσωση ισορροπίας, τότε η ανωτέρω κινηματική εξίσωση γίνεται:

$$m\ddot{y} + ky = F(t)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση περιγράφει ένα σύστημα με είσοδο $F(t)$ έξοδο y και παραμέτρους m και k .

δ) Ας υποθέσουμε ότι η μάζα m έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, δύο απέναντι πλευρές του οποίου είναι σε επαφή με τοιχώματα φρεατίου, με συντελεστή τριβής η . Κατά τα γνωστά, η τριβή έχει διεύθυνση παράλληλη προς την κίνηση/ταχύτητα και φορά αντίθετη αυτής, υποθέτουμε δε ότι στην περίπτωση μας είναι ανάλογη της ταχύτητας. Επομένως, η κινηματική εξίσωση πλέον έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} -k(\Delta l + y) + mg - 2\eta\dot{y} + F(t) &= m\ddot{y} \Rightarrow \\ m\ddot{y} + 2\eta\dot{y} + ky &= F(t) \end{aligned} \quad (1)$$

Αυτό είναι ένα νέο σύστημα με είσοδο $F(t)$ έξοδο y και παραμέτρους m, k, η .

Για την πλήρη γνώση του συστήματος αυτού απαιτείται η γνώση των κάτωθι αρχικών συνθηκών κάποια χρονική στιγμή έναρξης t_0 .

$$y(t_0), \dot{y}(t_0)$$

(επειδή η διαφορική εξίσωση είναι δευτέρας τάξεως/βαθμού απαιτείται η γνώση μέχρι και της πρώτης παραγώγου).

Το ανωτέρω σύστημα είναι γραμμικό; Ναι ή όχι και γιατί.

Γιατί πρέπει να αποδείξουμε τη γραμμικότητα και δεν χρησιμοποιούμε τα συμπεράσματα της προηγούμενης ενότητας;

Απάντηση

Διότι οι διαφορικοί τελεστές $\left(\frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}\right)$ στην προηγούμενη ανάλυση δρούσαν στην είσοδο του συστήματος, ενώ εδώ δρουν στην έξοδο του συστήματος. Για να εφαρμόσουμε, επομένως, τα προηγούμενα συμπεράσματα πρέπει πρώτα να θεμελιώσουμε τη γραμμικότητα και το

χρονικά αναλλοίωτο του συστήματος. Αυτό θα μπορούσε να γίνει και μέσω του ορισμού του αντίστροφου τελεστή που δρα στην είσοδο, αφού αποδείξουμε ότι αυτός είναι ΓΧΑ. Εν τούτοις θα ακολουθήσουμε τον ακόλουθο, μάλλον ευκολότερο, δρόμο.

Το σύστημα είναι γραμμικό.

Απόδειξη: έστωσαν $F_1(t)$ και $F_2(t)$ δύο διαφορετικές είσοδοι, εν προκειμένω δύο διαφορετικές εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις. Οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα με τριβή, είναι :

$$m\ddot{y}_1 + 2\eta\dot{y}_1 + ky_1 = F_1(t) \quad (2)$$

$$m\ddot{y}_2 + 2\eta\dot{y}_2 + ky_2 = F_2(t) \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις κατά μέλη και εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι οι συντελεστές είναι σταθεροί και ταυτόσημοι, ως και ότι η παράγωγος είναι γραμμικός τελεστής, προκύπτει άμεσα

$$m \frac{d^2}{dt^2} (y_1 + y_2) + 2\eta \frac{d}{dt} (y_1 + y_2) + k(y_1 + y_2) = F_1(t) + F_2(t) \quad (4)$$

Άρα, η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το προκύπτον σύστημα είναι η ίδια ακριβώς με αυτήν που προκύπτει εάν θέσουμε $y = y_1 + y_2$. **Προφανώς, αντίστοιχα κατάλληλες σχέσεις πρέπει να ισχύουν και για τις αρχικές συνθήκες του συνολικού συστήματος.**

Εντελώς ανάλογα, με απλό πολλαπλασιασμό της εξίσωσης $m\ddot{y} + 2\eta\dot{y} + ky = F(t)$ με α προκύπτει ότι αν η είσοδος είναι $\alpha F(t)$ τότε και η έξοδος είναι $\alpha y(t)$ για ανάλογες αρχικές συνθήκες.

Προφανώς αν όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν εξασφαλίζεται και η προσθετική και η πολλαπλασιαστική ιδιότητα των αρχικών συνθηκών.

Το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο; Ναι ή όχι και γιατί.

Είναι χρονικά αναλλοίωτο για κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Απόδειξη:

Πρέπει να αποδείξουμε ότι το σύστημα με είσοδο $F(t + \delta)$ έχει έξοδο $y(t + \delta)$. Προς το σκοπό αυτό ας θεωρήσουμε ξανά τη διαφορική εξίσωση (1) με άγνωστο όμως τώρα τη συνάρτηση $z(t)$ απλά και μόνο για λόγους καλύτερης εποπτείας :

$$m\ddot{z} + 2\eta\dot{z} + kz = F(t + \delta)$$

Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτή η λύση αυτής της εξίσωσης είναι η $y(t + \delta)$ για κατάλληλες αρχικές συνθήκες.

Όντως θέτοντας $\tau = t + \delta$ και εκμεταλλευόμενοι το χρονικά αναλλοίωτο των παραγώγων (που βασίζεται στο $\frac{d\tau}{dt} = 1$) προκύπτει η ίδια ακριβώς εξίσωση με την (1) με παράμετρο τ αντί για t .

$$m \frac{d^2}{d\tau^2} z(\tau - \delta) + 2\eta \frac{d}{d\tau} z(\tau - \delta) + kz(\tau - \delta) = F(\tau) \quad (5)$$

Προφανώς η τελευταία εξίσωση είναι ίδια με την εξίσωση (1) με ανεξάρτητη μεταβλητή την τ . Αν και οι αρχικές συνθήκες ικανοποιούν την ανάλογη ιδιότητα (δηλαδή $x(t) = y(t) = 0$ για $t \leq -\delta^-$), συμπεριλαμβανομένης της χρονικής μετάθεσης, τότε η μοναδικότητα της λύσης αυτών των διαφορικών εξισώσεων, μας εγγυάται ότι η λύση είναι η $y(\tau) = y(t + \delta)$.

1.2 Περιγραφή του συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων s , μέσω μετασχηματισμού Laplace.

Εάν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace των $x(t)$ και (t) μετασχηματίζοντας την εξίσωση (1) κατά Laplace και λόγω της γραμμικότητας του τελεστή $\mathcal{L}$

Λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\left\{m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\eta \frac{dy(t)}{dt} + ky(t)\right\} = \mathcal{L}\{F(t)\} \Leftrightarrow$$
$$m\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} + 2\eta\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + k\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{F(t)\}$$

Θέτοντας

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} \text{ και } F^{\mathcal{L}}(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$$

και αφού σύμφωνα με τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace ισχύει

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = s^2 Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-)$$

και

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0^-)$$

λαμβάνουμε

$$ms^2 Y(s) - msy(0^-) - m\dot{y}(0^-) + 2\eta sY(s) - 2\eta y(0^-) + kY(s) = F^{\mathcal{L}}(s) \Leftrightarrow$$
$$Y(s)(ms^2 + 2\eta s + k) - y(0^-)(ms + 2\eta) - m\dot{y}(0^-) = F^{\mathcal{L}}(s) \quad (6)$$

Για να είναι το σύστημα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο, πρέπει το πηλίκο $\frac{Y(s)}{F^{\mathcal{L}}(s)}$ να είναι ανεξάρτητο της εισόδου $F^{\mathcal{L}}(s)$ και της εξόδου $Y(s)$. Παρατηρούμε από την (6) ότι εδώ είναι καθοριστικός ο ρόλος των αρχικών συνθηκών. Εάν όμως θέσουμε όλες τις αρχικές συνθήκες μηδέν, δηλαδή

$$y(0^-) = \dot{y}(0^-) = 0$$

τότε το πηλίκο $\frac{Y(s)}{F^{\mathcal{L}}(s)}$ είναι πράγματι ανεξάρτητο της εισόδου και καθορίζεται **μόνο** από τις παραμέτρους του συστήματος (στο προκείμενο m, k, η) και συγκεκριμένα

$$\frac{Y(s)}{F^{\mathcal{L}}(s)} \equiv H(s) = \frac{1}{ms^2 + 2\eta s + k} \quad (7)$$

Άρα τότε το σύστημα είναι σίγουρα γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο με συνάρτηση μεταφοράς την $H(s)$.

1.3 Περιγραφή του συστήματος μέσω της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ στο πεδίο του χρόνου.

Αφού έχουμε θεμελιώσει ότι το σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο, τότε αυτό καθορίζεται πλήρως στο πεδίο του χρόνου από την κρουστική απόκρισή του, $h(t)$, δηλαδή την έξοδό του όταν θέσουμε σαν είσοδο στο σύστημα τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(t)$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$$

και, τότε, για τυχούσα είσοδο $F(t)$ στο σύστημα, η έξοδος $y(t)$ θα είναι

$$y(t) = h(t) * F(t).$$

Θα δείξουμε αυτή τη μέθοδο παράστασης με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Έστω $m = 1 \text{ kg}$, $\eta = 3 \frac{\text{kg}}{\text{sec}}$, $k = 8 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{sec}^2}$. Τότε,

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + 2\eta s + k} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8} \equiv \frac{1}{(s+2)(s+4)} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} \right)$$

Άρα

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4} \right) \right\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+4} \right\}$$

Αλλά, από τους πίνακες του μετασχηματισμού Laplace διαπιστώνουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+\alpha} \right\} = e^{-\alpha t} u(t),$$

Οπότε

$$h(t) = \frac{u(t)}{2} (e^{-2t} - e^{-4t})$$

και, για τυχούσα είσοδο $F(t)$, έχει έξοδο $y(t)$ που δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \frac{u(t)}{2} (e^{-2t} - e^{-4t}) * F(t) \Leftrightarrow \\ y(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(w) (e^{-2w} - e^{-4w}) F(t-w) dw = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-2w} - e^{-4w}) F(t-w) dw$$