

Τυπική μορφή συστήματος 2^{ας} τάξης

Έστω το γενικό σύστημα 2^{ας} τάξεως με σταθερό αριθμητή

$$G(s) = \frac{c_1}{as^2 + \beta s + \gamma} \quad (1)$$

Είθισται αυτό να γράφεται σε συγκεκριμένη μορφή, την εξής: θέτουμε $\pm\omega_0^2 = \frac{\gamma}{a}$, επιλέγοντας το πρόσημο ούτως ώστε το ω_0 να είναι πραγματικός, $2\zeta\omega_0 = \frac{\beta}{a}$ και

$c = \frac{c_1}{a}$ οπότε η (1) γίνεται

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2)$$

Μελετώντας αυτή τη μορφή, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν ζεύγη τιμών ($\zeta, \pm\omega_0$) για τα οποία το σύστημα είναι ευσταθές, π.χ. τέτοια ώστε για κάθε φραγμένη είσοδο $x(t)$ αυτό να γεννά φραγμένη έξοδο $y(t)$.

Αντιστρόφως υπάρχουν ζεύγη τιμών ($\zeta, \pm\omega_0$) για τα οποία το σύστημα γίνεται ασταθές, δηλαδή γεννά έξοδο τιμών που προϊόντος του χρόνου τείνουν στο άπειρο.

(Παραδείγματα τέτοιων ευσταθών και ασταθών συστημάτων υπάρχουν στο [meleti_aniktou_SAE_taxis2.m](#))

Δύο τέτοια ασταθή συστήματα είναι αυτά που παρουσιάζονται στο MATLAB με συναρτήσεις μεταφοράς

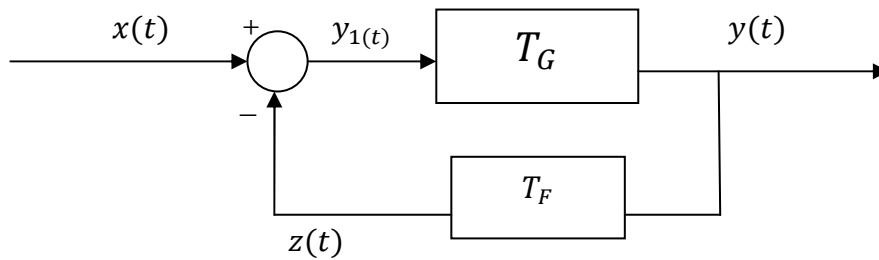
$$G_1(s) = \frac{1}{s^2 - 0.4s + 1} \quad (\text{με } \zeta = -0.2, \omega_0 = 1) \quad (3)$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 - 1.6s + 1} \quad (\text{με } \zeta = -0.8, \omega_0 = 1) \quad (4)$$

Κεντρική ιδέα του αυτομάτου ελέγχου

Στόχος του γνωστικού πεδίου του Αυτομάτου Ελέγχου είναι να καταστήσει ένα σύστημα ευσταθές, ακόμα και όταν τείνει προς την αστάθεια, ενώ ταυτόχρονα, εξασφαλίζει τη σύγκλιση σε επιθυμητή κατάσταση και με επιθυμητές ιδιότητες της απόκρισης του συστήματος τόσο στο πεδίο του χρόνου όσο και στο πεδίο της συχνότητας.

Μια μέθοδος υλοποίησης των ανωτέρω είναι εκείνη που βασίζεται στην ανατροφοδότηση της εξόδου στην είσοδο του συστήματος μέσω άλλων συστημάτων και αφαίρεση της σχετικής πληροφορίας. Για παράδειγμα, έστω ένα ΓΧΑ σύστημα T_G μίας εισόδου $x(t)$ και μίας εξόδου $y(t)$, με συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ όχι ευσταθές. Για ένα κλάδο ανάδρασης που έχει ένα ΓΧΑ σύστημα T_F με συνάρτηση μεταφοράς $F(s)$, δημιουργούμε το κύκλωμα-βρόχο που παρουσιάζεται κατωτέρω.



Το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα T_G έχει κρουστική απόκριση $g(t)$ ενώ το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα T_F έχει κρουστική απόκριση $f(t)$. Τότε ισχύει

$$y(t) = g(t) * y_1(t) \quad (5)$$

και
$$z(t) = f(t) * y(t) \quad (6)$$

Συνεπώς έχουμε

$$y_1(t) = x(t) - z(t) \Leftrightarrow y_1(t) = x(t) - f(t) * y(t) \quad (7)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * (x(t) - f(t) * y(t)) \Leftrightarrow y(t) = g(t) * x(t) - g(t) * f(t) * y(t) \Leftrightarrow \\ y(t) + g(t) * f(t) * y(t) &= g(t) * x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace την τελευταία σχέση λαμβάνουμε

$$\mathcal{L}\{y(t) + g(t) * f(t) * y(t)\} = \mathcal{L}\{g(t) * x(t)\} \Leftrightarrow$$

$$Y(s) + \mathcal{L}\{g(t) * f(t) * y(t)\} = G(s)X(s) \Leftrightarrow$$

$$Y(s) + G(s)F(s)Y(s) = G(s)X(s) \Leftrightarrow$$

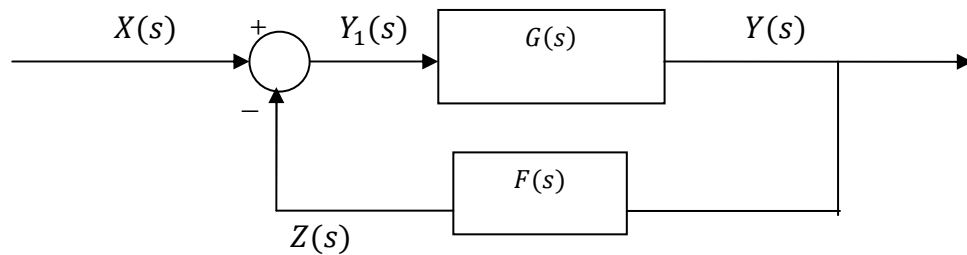
$$Y(s)(1 + G(s)F(s)) = G(s)X(s) \Leftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{G(s)X(s)}{1 + G(s)F(s)} \quad (8)$$

Θέτοντας $H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$ (9)

παρατηρούμε ότι το πηλίκο $\frac{Y(s)}{X(s)}$ παραμένει ίσο με $H(s)$ ανεξαρτήτως του $X(s)$. Άρα είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι το όλο σύστημα είναι γραμμικό με συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ και κρουστική απόκριση $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$.

Συμβολικά,



Αυτό ισχύει επακριβώς, δηλαδή το σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο, για συναρτήσεις μεταφοράς που είναι πηλίκα πολυωνύμων και με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Πράγματι, ας θεωρήσουμε το σύστημα 2^{ας} τάξεως ανοιχτού βρόχου με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

και τη συνάρτηση ανάδρασης $F(s) = k(s + 1)$, $k \in \mathbb{R}^+$.

Τότε η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου $H(s)$ έχει ως εξής.

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)F(s)} = \frac{\frac{1}{s^2+2\zeta\omega_0s+\omega_0^2}}{1+\frac{k(s+1)}{s^2+2\zeta\omega_0s+\omega_0^2}}. \quad (10)$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή με $s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2$ λαμβάνουμε

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + (2\zeta\omega_0 + k)s + \omega_0^2 + k} \Leftrightarrow$$

$$s^2Y(s) + (2\zeta\omega_0 + k)sY(s) + (\omega_0^2 + k)Y(s) = X(s). \quad (11)$$

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της (11) και έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^2Y(s)\} + (2\zeta\omega_0 + k)\mathcal{L}^{-1}\{sY(s)\} + (\omega_0^2 + k)\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}.$$

Αλλά, από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0^-) \quad (12)$$

και

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) \quad (13).$$

και επειδή οι αρχικές συνθήκες είναι όλες μηδέν, δηλαδή $y(0^-) = \dot{y}(0^-) = 0$ τότε

$$\mathcal{L}^{-1}\{sY(s)\} = \frac{dy}{dt} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}^{-1}\{s^2Y(s)\} = \frac{d^2y(t)}{dt^2},$$

οπότε η (12) γίνεται

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2\zeta\omega_0 + k)\frac{dy(t)}{dt} + (\omega_0^2 + k)y(t) = x(t). \quad (14)$$

Έχουμε όμως ήδη αποδείξει ότι το σύστημα που περιγράφεται από μία διαφορική εξίσωση του τύπου της (14) με μηδενικές αρχικές συνθήκες είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο.

Η γενική περίπτωση ενός συστήματος ενός κλειστού βρόχου

Εν γένει, θα θεωρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος ανοιχτού βρόχου (δηλαδή στον οποίο δεν εφαρμόζεται ανάδραση) είναι της μορφής

$$G(s) = a_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)}, \quad (15)$$

όπου τα $z_1, z_2, \dots, z_n$ λέγονται μηδενικά (zeros) ανοιχτού βρόχου και τα $p_1, p_2, \dots, p_m$ πόλοι όπου κατά κανόνα θεωρούμε ότι $m > n$.

Τότε εάν η συνάρτηση ανάδρασης $F(s)$ είναι $k(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_\mu)$ όπου $\mu + n < m$ τότε η συνάρτηση κλειστού βρόχου είναι η

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)} \Leftrightarrow$$

$$H(s) = \frac{a_0 \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)}}{1 + a_0 F(s) \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με $(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m)$ προκύπτει.

$$H(s) = \frac{\alpha_0(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_m) + k\alpha_0(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_\mu)(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_n)} \quad (16)$$

όπου $\mu + n < m$.

Το δεξί σκέλος της ισότητας στον τύπο (16) είναι ένα πηλίκο πολυωνύμων, δηλαδή ισχύει

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n}{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m} \quad (17)$$

όπου προφανώς, οι συντελεστές α_i b_i προκύπτουν άμεσα από τα μηδενικά και τους πόλους της συνάρτησης ανοιχτού βρόχου και από τις ρίζες ρ_i της συνάρτησης ανάδρασης $F(s)$.

Η (17) γράφεται ισοδυνάμως

$$s^m Y(s) + b_1 s^{m-1} Y(s) + \dots + b_{m-1} s Y(s) + b_m Y(s) =$$

$$\alpha_0 s^n X(s) + \alpha_1 s^{n-1} X(s) + \dots + \alpha_{n-1} s X(s) + \alpha_n X(s)$$

και αφού δράσουμε με τον τελεστή $\mathcal{L}^{-1}$ και στα δύο μέλη προκύπτει

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^m Y(s)\} + b_1 \mathcal{L}^{-1}\{s^{m-1} Y(s)\} + \dots + b_{m-1} \mathcal{L}^{-1}\{s Y(s)\} + b_m \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$\alpha_0 \mathcal{L}^{-1}\{s^n X(s)\} + \alpha_1 \mathcal{L}^{-1}\{s^{n-1} X(s)\} + \dots + \alpha_{n-1} \mathcal{L}^{-1}\{s X(s)\} + \alpha_n \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}. \quad (18)$$

Αλλά, για οποιαδήποτε συνάρτηση $y(t)$ που έχει της αντίστοιχης τάξης παραγώγους και για οποιαδήποτε τέτοια τάξη $i + 1$, ισχύει:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(i+1)}}{dt^{(i+1)}}y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}}y(t)\right)\right\} = s\mathcal{L}\left\{\left(\frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}}y(t)\right)\right\} - \frac{d^{(i)}}{dt^{(i)}}y(0^-).$$

Επομένως, με απλή επαγωγή προκύπτει ότι εάν

$$y(0^-) = \frac{d}{dt}y(0^-) = \dots = \frac{d^{(m-1)}}{dt^{(m-1)}}y(0^-) = 0$$

τότε

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(i+1)}}{dt^{(i+1)}}y(t)\right\} = s^{i+1}Y(s), \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Προφανώς αντιστοίχως αν

$$x(0^-) = \frac{d}{dt}x(0^-) = \dots = \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}x(0^-) = 0$$

τότε

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^{(i+1)}}{dt^{(i+1)}}x(t)\right\} = s^{i+1}X(s), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Επομένως η (18) γράφεται ισοδυνάμως

$$\begin{aligned} & \frac{d^{(m)}}{dt^{(m)}}y(t) + b_1 \frac{d^{(m-1)}}{dt^{(m-1)}}y(t) + \dots + b_{m-1} \frac{d}{dt}y(t) + b_m y(t) = \\ & a_0 \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}}x(t) + a_1 \frac{d^{(n-1)}}{dt^{(n-1)}}x(t) + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dt}x(t) + a_n x(t) \end{aligned} \quad (19)$$

Με τρόπο ανάλογο με αυτόν της απόδειξης για συστήματα $2^{ας}$ τάξεως, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η διαφορική εξίσωση (19) περιγράφει ένα σύστημα T γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο. Άρα και το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ένα ΓΧΑ σύστημα.