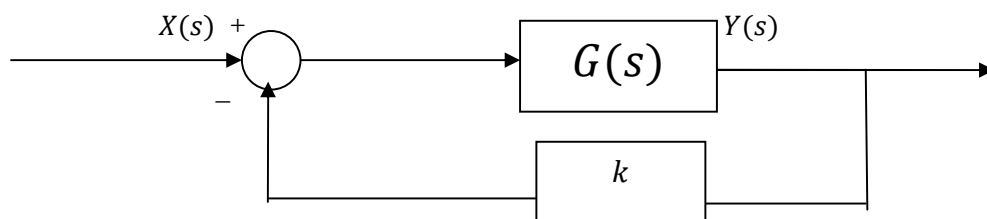


Παράδειγμα 1

Δίνεται ο κάτωθι κλειστός βρόχος αρνητικής ανάδρασης με

$$G(s) = \frac{8s^2 + 14s + 2}{2s^3 + 4s^2 + 3s + 3} \quad (1.1)$$



Σχήμα 1

Στο οποίο εφαρμόζουμε αρνητική ανάδραση κέρδους k

Ζητείται:

A) Γράψτε το σύστημα ευθέως κλάδου σε κανονική παρατηρήσιμη μορφή στο χώρο καταστάσεων. Το σύστημα σε αυτή τη μορφή είναι ελέγξιμο; Προκύπτει από αυτή τη μορφή ότι είναι ευσταθές;

B) Γράψτε το σύστημα ευθέως κλάδου σε κανονική ελέγξιμη μορφή στο χώρο καταστάσεων και επιβεβαιώστε ότι είναι ελέγξιμο. Το σύστημα σε αυτή τη μορφή είναι παρατηρήσιμο; Προκύπτει από αυτή τη μορφή ότι είναι ευσταθές;

Γ) Γράψτε το πλήρες σύστημα κλειστού βρόχου σε κανονική παρατηρήσιμη μορφή στο χώρο καταστάσεων. Για ποιες τιμές του k το σύστημα σε αυτή τη μορφή είναι ελέγξιμο και για ποιες ευσταθές; Για $k = 1$, είσοδο βηματική απόκριση και αρχικές συνθήκες $y_0^+ = 1$, $\frac{d}{dt}y_0^+ = -1$ και $\frac{d^2}{dt^2}y_0^+ = -2$ βρείτε την εξέλιξή του στο χρόνο.

Δ) Γράψτε το πλήρες σύστημα κλειστού βρόχου σε κανονική ελέγξιμη μορφή στο χώρο καταστάσεων. Για ποιες τιμές του k το σύστημα σε αυτή τη μορφή είναι παρατηρήσιμο και για ποιες ευσταθές; Για $k = \frac{1}{2}$, είσοδο βηματική απόκριση και αρχικές συνθήκες $y_0^+ = 1$, $\frac{d}{dt}y_0^+ = -1$ και $\frac{d^2}{dt^2}y_0^+ = -2$ βρείτε την εξέλιξή του στο χρόνο.

Ε) Σύγκριση των δύο χρονικών εξελίξεων.

Απάντηση

Ερώτημα Α:

Για τη συνάρτηση μεταφοράς ευθέως κλάδου ισχύει

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{8s^2 + 14s + 2}{2s^3 + 4s^2 + 3s + 3} \Leftrightarrow$$

$$(2s^3 + 4s^2 + 3s + 3)Y(s) = (8s^2 + 14s + 2)Z(s)$$

Και με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και με μηδενικές αρχικές συνθήκες στο 0^- , τελικά λαμβάνουμε την διαφορική εξίσωση του ΓΧΑ συστήματος ευθέως κλάδου

$$2 \frac{d^3}{dt^3} y(t) + 4 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 3 \frac{d}{dt} y(t) + 3y(t) = 8 \frac{d^2}{dt^2} z(t) + 14 \frac{d}{dt} z(t) + 2z(t) \quad (1.2)$$

Για να γράψουμε αυτό το ΓΧΑ σύστημα σε κανονική παρατηρήσιμη μορφή, μεταφέρουμε όλους τους όρους στο αριστερό μέρος, κάνουμε το συντελεστή του όρου της μέγιστης τάξης παραγώγισης μονάδα και ομαδοποιούμε ανά τελεστή, οπότε:

$$\frac{d^3}{dt^3} y + \frac{d^2}{dt^2} (2y - 4z) + \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2}y - 7z \right) + \frac{3}{2}y - z = 0 \quad (1.3)$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές καταστάσεως με τη γνωστή αναδρομή:

$$x_1 = y \quad (1.4a)$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} + (2y - 4z) \quad (1.4\beta)$$

$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} + \left(\frac{3}{2}y - 7z \right) \quad (1.4\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις στις οποίες δρουν οι διαφορικοί τελεστές στην (1.3) μέσω των (1.4) λαμβάνουμε

$$\frac{d^3}{dt^3} x_1 + \frac{d^2}{dt^2} \left(x_2 - \frac{dx_1}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left(x_3 - \frac{dx_2}{dt} \right) + \left(\frac{3}{2}x_1 - x_3 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{3}{2}x_1 + x_3 \quad (1.4\delta)$$

Ή αν θέσουμε $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, οι σχέσεις (1.4) γράφονται

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 + 4z = [-2 \quad 1 \quad 0]\mathbf{X} + 4z$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{3}{2}x_1 + x_3 + 7z = \left[-\frac{3}{2} \quad 0 \quad 1\right]\mathbf{X} + 7z$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \left[-\frac{3}{2} \quad 0 \quad 0\right]\mathbf{X} + z$$

Και σε μητρική μορφή

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}z(t) \quad (1.5\alpha)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \quad (1.5\beta)$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Για να ελέγξουμε εάν το σύστημα αυτό είναι ευσταθές λύνουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών της $\mathbf{A}$

Δηλαδή

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2} = 0 \quad (1.6)$$

Όπως αναμέναμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας $\mathbf{A}$ του συστήματος ταυτίζεται με τον παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς ευθέως κλάδου $G(s)$ και άρα οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}$ ταυτίζονται με τους πόλους της $G(s)$. Αυτό διαισθητικά μάλλον αναμενόταν αφού οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}$ και οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς μεταφέρουν την ουσιαστική, φυσικού περιεχομένου, πληροφορία του συστήματος ευθέως κλάδου.

Ακολούθως, προκειμένου να διαπιστώσουμε αν το σύστημα είναι ευσταθές, είτε εφαρμόζουμε κριτήριο Routh στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο είτε βρίσκουμε τις ρίζες του.

Εφαρμόζοντας κριτήριο Routh έχουμε

λ^3	1	$\frac{3}{2}$
λ^2	2	$\frac{3}{2}$
λ^1	$\frac{3}{4}$	0

$$\lambda^0 \quad \left| \quad \frac{3}{2} \quad 0 \right.$$

Όποτε και διαπιστώνουμε ότι το σύστημα ευθέως κλάδου είναι ευσταθές αφού όλα τα στοιχεία του πίνακα Routh είναι θετικοί αριθμοί.

Για να διαπιστώσουμε εάν το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος εκπεφρασμένο στη μορφή (1.5α) είναι ελέγξιμο γράφουμε τον πίνακα

$$S = [B, AB, A^2 B] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 7 & -5 & -4.5 \\ 1 & -6 & 1.5 \end{bmatrix}$$

και $\det(S) = -12 \neq 0$

Συνεπώς το διάνυσμα κατάστασης του συστήματος είναι ελέγξιμο.

Ερώτημα Β:

Προφανώς ισχύει πάλι η διαφορική εξίσωση (1.2) από την οποία, αφού καταστήσουμε το συντελεστή του όρου της μέγιστης τάξης παραγώγισης μονάδα, προκύπτουν οι τελεστές

$$D_y = \left(\frac{d^3}{dt^3} + 2 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{d}{dt} + \frac{3}{2} \right)$$

$$D_z = \left(4 \frac{d^2}{dt^2} + 7 \frac{d}{dt} + 1 \right)$$

Ορίζουμε την πρώτη μεταβλητή κατάστασης x_1 πεπλεγμένα μέσω της σχέσεως,

$$D_y(x_1) = z(t) \Leftrightarrow \left(\frac{d^3}{dt^3} + 2 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{d}{dt} + \frac{3}{2} \right) x_1 = z(t) \quad (1.7\alpha)$$

και τις επόμενες μεταβλητές κατάστασης αναδρομικά μέσω των σχέσεων

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} \quad (1.7\beta)$$

$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} \quad (1.7\gamma)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace τόσο την διαφορική εξίσωση (1.2) όσο και τον τύπο ορισμού της x_1 (1.7α) λαμβάνουμε στο πεδίο των s την σχέση $Y(s) = (4s^2 + 7s + 1)x_1(s)$.

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην ανωτέρω σχέση λαμβάνουμε

$$y(t) = D_z(x_1) = 4 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 7 \frac{dx_1}{dt} + 2x_1 = 4x_3 + 7x_2 + x_1 \quad (1.8)$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω μεταβλητές κατάστασης στην εξίσωση ορισμού (1.6) της x_1 προκύπτει

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3}{dt^3} + 2 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{d}{dt} + \frac{3}{2} \right) x_1 &= z(t) \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + 2 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{3}{2} x_1 &= z(t) \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} x_3 + 2x_3 + \frac{3}{2} x_2 + \frac{3}{2} x_1 &= z(t) \quad (1.9) \end{aligned}$$

Θέτοντας εκ νέου $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, οι σχέσεις (1.7), (1.8), (1.9) γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= [0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{X} \\ \frac{dx_2}{dt} &= [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{X} \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_1 + z(t) = \left[-\frac{3}{2} \quad -\frac{3}{2} \quad -2 \right] \mathbf{X} + z(t) \end{aligned}$$

Και σε μητρική μορφή

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}z(t) \\ y(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{C} = [1 \quad 7 \quad 4]$$

Πάλι εάν υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας $\mathbf{A}$ τώρα που είμαστε σε ελέγξιμη μορφή θα προκύψει το ίδιο πολυώνυμο (1.6) όπως από φυσική διαίσθηση αναμενόταν.

Για την επιβεβαίωση του γεγονότος ότι το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{X}$ είναι ελέγξιμο γράφουμε τη μήτρα

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2.5 \end{bmatrix} \text{ και υπολογίζουμε την } \det(\mathbf{S}) = -1 \neq 0. \text{ Άρα το διάνυσμα κατάστασης είναι ελέγξιμο.}$$

Για τον έλεγχο της παρατηρησιμότητας του συστήματος σε αυτή τη μορφή γράφουμε τον πίνακα

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -6 & -5 & -1 \\ 1.5 & -4.5 & -3 \end{bmatrix} \text{ και υπολογίζουμε την } \det(\mathbf{R}) = 12 \neq 0. \text{ Άρα το σύστημα}$$

είναι και παρατηρήσιμο.

Για να ελέγξουμε εάν το σύστημα αυτό είναι ευσταθές λύνουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών της $\mathbf{A}$ και απλά διαπιστώνουμε ότι προκύπτει η ίδια χαρακτηριστική εξίσωση.

Ερώτημα Γ: Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ κλειστού βρόχου είναι κατά τα γνωστά η

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + kG(s)} = \frac{\frac{8s^2 + 14s + 2}{2s^3 + 4s^2 + 3s + 3}}{1 + k \frac{8s^2 + 14s + 2}{2s^3 + 4s^2 + 3s + 3}} \Leftrightarrow$$

$$H(s) = \frac{8s^2 + 14s + 2}{2s^3 + 4s^2 + 3s + 3 + k(8s^2 + 14s + 2)} \quad (1.10)$$

Τότε πάλι

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) \Leftrightarrow (2s^3 + 4s^2 + 3s + 3 + k(8s^2 + 14s + 2))Y(s) = (8s^2 + 14s + 2)X(s)$$

Και με εφαρμογή του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace προκύπτει η σχέση (1.11)

$$2 \frac{d^3}{dt^3} y(t) + (4 + 8k) \frac{d^2}{dt^2} y(t) + (3 + 14k) \frac{d}{dt} y(t) + (3 + 2k)y(t) = 8 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 14 \frac{d}{dt} x(t) + 2x(t) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^3}{dt^3} y(t) + (2 + 4k) \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \left(\frac{3}{2} + 7k\right) \frac{d}{dt} y(t) + \left(\frac{3}{2} + k\right) y(t) = 4 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 7 \frac{d}{dt} x(t) + x(t).$$

Για να γράψουμε το σύστημα που περιγράφεται από αυτή την εξίσωση σε κανονική μορφή, μεταφέρουμε όλους τους όρους στο αριστερό μέρος, και ομαδοποιούμε ανά τελεστή, όποτε:

$$\frac{d^3}{dt^3} y + \frac{d^2}{dt^2} ((2 + 4k)y - 4x) + \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{3}{2} + 7k\right)y - 7x \right) + \left(\frac{3}{2} + k\right)y - x = 0 \quad (1.12)$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές καταστάσεως με τη γνωστή αναδρομή:

$$x_1 = y \quad (1.13a)$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} + ((2 + 4k)y - 4x) \quad (1.13\beta)$$

$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} + \left(\left(\frac{3}{2} + 7k\right)y - 7x\right) \quad (1.13\gamma)$$

Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις στις οποίες δρουν οι διαφορικοί τελεστές στην (1.12) μέσω των (1.13) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3}x_1 + \frac{d^2}{dt^2}\left(x_2 - \frac{dx_1}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\left(x_3 - \frac{dx_2}{dt}\right) + \left(\frac{3}{2} + k\right)y - x = 0 &\Leftrightarrow \\ \frac{dx_3}{dt} = -\left(\frac{3}{2} + k\right)x_1 + x &\quad (1.13\delta) \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, οι σχέσεις (1.13) γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(2 + 4k)x_1 + x_2 + 4x = [-2 - 4k \quad 1 \quad 0]\mathbf{X} + 4x \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\left(\frac{3}{2} + 7k\right)x_1 + x_3 + 7x = \left[-\frac{3}{2} - 7k \quad 0 \quad 1\right]\mathbf{X} + 7x \\ \frac{dx_3}{dt} &= \left[-\frac{3}{2} - k \quad 0 \quad 0\right]\mathbf{X} + x \end{aligned}$$

Και σε μητρική μορφή

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}x(t) \\ y(t) &= \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} \end{aligned}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 - 4k & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} - 7k & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} - k & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι το διάνυσμα κατάστασης σε αυτή τη μορφή είναι ελέγξιμο γράφουμε τη μήτρα ελεγχιμότητας

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 4 & -16k - 1 & 64k^2 + 8k - 3 \\ 7 & -28k - 5 & 112k^2 + 27k - 4.5 \\ 1 & -4k - 6 & 16k^2 + 25k + 1.5 \end{bmatrix}$$

και $\det(\mathbf{S}) = -12 \neq 0$ γεγονός που σημαίνει ότι το διάνυσμα κατάστασης είναι ελέγξιμο $\forall k$.

Για να ελέγξουμε εάν το σύστημα αυτό είναι ευσταθές λύνουμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών της $\mathbf{A}$

$$\text{δηλαδή } \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + (2 + 4k)\lambda^2 + \left(\frac{3}{2} + 7k\right)\lambda + \left(\frac{3}{2} + k\right) = 0.$$

Όπως αναμέναμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας $\mathbf{A}$ του συστήματος ταυτίζεται με τον παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου $H(s)$ και άρα οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}$ ταυτίζονται με τους πόλους της $H(s)$. Αυτό διαισθητικά μάλλον αναμενόταν αφού οι ιδιοτιμές της $\mathbf{A}$ και οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς μεταφέρουν την ουσιαστική, φυσικού περιεχομένου, πληροφορία του συστήματος.

Εφαρμόζουμε κριτήριο Routh στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο για να βρούμε τις τιμές του k , για τις οποίες το σύστημα είναι ευσταθές.

λ^3	1	$\frac{3}{2} + 7k$
λ^2	$2 + 4k$	$\frac{3}{2} + k$
λ^1	$\frac{28k^2 + 19k + \frac{3}{2}}{2 + 4k}$	0
λ^0	$\frac{3}{2} + k$	0

Για την ευστάθεια του συστήματος απαιτούμε όλες οι ποσότητες στην πρώτη στήλη του σχετικού πίνακα να είναι θετικές, αφού το στοιχείο (1,1) είναι θετικό. Άρα θα πρέπει

$$2 + 4k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{2}$$

$$\frac{28k^2 + 19k + \frac{3}{2}}{2 + 4k} > 0 \Rightarrow 28k^2 + 19k + \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow k > -0.0912 \text{ και } k < -0.5874$$

Ενώ προφανώς $\forall k > 0$ ισχύει $\frac{3}{2} + k > 0$

Άρα θα πρέπει να ισχύει $k > 0$

Άρα $\forall k > 0$ το σύστημα είναι ευσταθές.

Για να βρούμε τις τιμές του k για τις οποίες το σύστημα γραμμένο σε αυτή τη μορφή είναι και ελέγξιμο, εργαζόμαστε ως εξής:

Για να αντιμετωπίσουμε την ειδική περίπτωση που ζητείται, με $k = 1$, είσοδο βηματική απόκριση και αρχικές συνθήκες $y_0^+ = 1$, $\frac{d}{dt}y_0^+ = -1$ και $\frac{d^2}{dt^2}y_0^+ = -2$, εργαζόμαστε ως εξής:

Κατ' αρχήν γράφουμε τον πίνακα A και βρίσκουμε τις ιδιοτιμές ως και τα ιδιοδιανύσματά του.

$$i) \quad A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ -8.5 & 0 & 1 \\ -2.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $-\lambda^3 - 6\lambda^2 - \frac{17}{2}\lambda - \frac{5}{2}$ και ιδιοτιμές $\lambda_1 = -4,06$, $\lambda_2 = -1,54$ και $\lambda_3 = -0,40$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$X_1 = [0,44 \quad 0,86 \quad 0,27]^T, X_2 = [-0,21 \quad -0,92 \quad -0,33]^T, X_3 = [0,12 \quad 0,66 \quad 0,74]^T,$$

οπότε η μήτρα P που διαγωνοποιεί τον A είναι η

$$P = [X_1 \quad X_2 \quad X_3] = \begin{bmatrix} 0,44 & -0,21 & 0,12 \\ 0,86 & -0,92 & 0,66 \\ 0,27 & -0,33 & 0,74 \end{bmatrix}$$

$$\text{Προφανώς ισχύει } \Delta = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

ii) Τώρα κατά τα γνωστά ορίζουμε

$$Y = P^{-1} \cdot X \quad (1.14)$$

$$\tilde{B} = P^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 9,49 \\ -0,45 \\ -2,33 \end{bmatrix} \quad (1.15).$$

Οπότε με την χρήση των ανωτέρω, η εξίσωση $\frac{dX}{dt} = A \cdot X + Bu(t)$ γίνεται:

$$\frac{dY}{dt} = \Delta \cdot Y + \tilde{B}u(t), \quad (1.16)$$

Το ανωτέρω σύστημα διαφορικών εξισώσεων αποτελείται από τρεις αποσυμπλεγμένες εξισώσεις που η κάθε μία έχει λύση της μορφής

$$\psi_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} - \frac{\tilde{B}(1)}{\lambda_1} u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + 2,34u(t), \quad t > 0 \quad (1.17\alpha)$$

$$\psi_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{\tilde{B}(2)}{\lambda_2} u(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} - 0,29u(t), \quad t > 0 \quad (1.17\beta)$$

$$\psi_3(t) = c_3 e^{\lambda_3 t} - \frac{\tilde{B}(3)}{\lambda_3} u(t) = c_3 e^{\lambda_3 t} - 5,85u(t), \quad t > 0 \quad (1.17\gamma)$$

όπου τα c_1, c_2, c_3 προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες στο 0^+ κατά τα γνωστά ως εξής:

Εάν θέσουμε

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

τότε οι λύσεις (1.17) γράφονται σε μητρική μορφή

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,34 \\ -0,29 \\ -5,85 \end{bmatrix} u(t) \Leftrightarrow \\ \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2,34 \\ -0,29 \\ -5,85 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.18) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με τον πίνακα $\mathbf{P}$ και τα δύο μέλη της ανωτέρω εξίσωσης και λόγω του ορισμού $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{X}$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \mathbf{P} \begin{bmatrix} 2,34 \\ -0,29 \\ -5,85 \end{bmatrix} u(t) \Leftrightarrow \\ \mathbf{X}(t) &= \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,38 \\ -1,58 \\ -3,60 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.19) \end{aligned}$$

Επειδή απαιτείται να συνδέουμε το $\mathbf{X}(t)$ με το $\mathbf{X}(0^+)$, προς το σκοπό αυτό θέτουμε $t = 0^+$ στην ανωτέρω εξίσωση οπότε λαμβάνουμε :

$$\mathbf{X}(0^+) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,38 \\ -1,58 \\ -3,60 \end{bmatrix} u(0^+)$$

Επειδή, δε, $u(0^+) = 1$ λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \mathbf{X}(0^+) - \begin{bmatrix} 0,38 \\ -1,58 \\ -3,60 \end{bmatrix}.$$

Κατά συνέπεια η λύση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων γράφεται και ως εξής:

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{X}(0^+) - \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0,38 \\ -1,58 \\ -3,60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,38 \\ -1,58 \\ -3,60 \end{bmatrix} u(t)$$

Τονίζεται ότι στη ανωτέρω εξίσωση οι δύο τελευταίοι προσθετέοι συνιστούν την τυπική (formal) ειδική

λύση $e^{At} \int_{0^+}^t e^{-A\tau} \mathbf{B}u(\tau) d\tau$, όπου βεβαίως $e^{At} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}$

- iii) Απομένει τώρα ο προσδιορισμός των αρχικών συνθηκών $X(0^+)$ από τις αρχικές συνθήκες της εξόδου. Αλλά ισχύει

$$x_1 = y \Rightarrow x_1(0^+) = y(0^+) \Rightarrow x_1(0^+) = 1$$

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} + (6y - 4u(t)) \Rightarrow x_2(0^+) = \frac{dy(0^+)}{dt} + 6y(0^+) - 4u(0^+) = -1 + 6 - 4 \Rightarrow x_2(0^+) = 1$$

$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} + \left(\left(\frac{3}{2} + 7 \right) y - 7u(t) \right) \Rightarrow x_3(0^+) = \frac{d^2 y(0^+)}{dt^2} + \frac{17}{2} y(0^+) - 7u(0^+) = -2 + \frac{17}{2} - 7 \\ \Rightarrow x_3(0^+) = -\frac{1}{2}$$

Ερώτημα Δ:

Προφανώς ισχύει πάλι η διαφορική εξίσωση (1.11)

$$\frac{d^3}{dt^3} y(t) + (2 + 4k) \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \left(\frac{3}{2} + 7k \right) \frac{d}{dt} y(t) + \left(\frac{3}{2} + k \right) y(t) = 4 \frac{d^2}{dt^2} x(t) + 7 \frac{d}{dt} x(t) + x(t).$$

στην οποία έχουμε καταστήσει το συντελεστή του όρου της μέγιστης τάξης παραγώγισης μονάδα. Χρησιμοποιούμε τους τελεστές

$$D_y = \left(\frac{d^3}{dt^3} + (2 + 4k) \frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{3}{2} + 7k \right) \frac{d}{dt} + \left(\frac{3}{2} + k \right) \right)$$

$$D_z = \left(4 \frac{d^2}{dt^2} + 7 \frac{d}{dt} + 1 \right)$$

Ορίζουμε την πρώτη μεταβλητή κατάστασης x_1 πεπλεγμένα μέσω της σχέσεως,

$$D_y(x_1) = x(t) \Leftrightarrow \left(\frac{d^3}{dt^3} + (2 + 4k) \frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{3}{2} + 7k \right) \frac{d}{dt} + \left(\frac{3}{2} + k \right) \right) x_1 = x(t) \quad (1.20a)$$

και τις επόμενες μεταβλητές κατάστασης αναδρομικά μέσω των σχέσεων

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt} \quad (1.20\beta)$$

$$x_3 = \frac{dx_2}{dt} \quad (1.20\gamma)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace τόσο την διαφορική εξίσωση (1.11) όσο και τον τύπο ορισμού της x_1 λαμβάνουμε στο πεδίο των s την σχέση $Y(s) = (4s^2 + 7s + 1)x_1(s)$.

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην ανωτέρω σχέση λαμβάνουμε

$$y(t) = D_z(x_1) = 4 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + 7 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 4x_3 + 7x_2 + x_1$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω μεταβλητές κατάστασης στην εξίσωση ορισμού της x_1 προκύπτει

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3}{dt^3} + (2+4k) \frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{3}{2} + 7k \right) \frac{d}{dt} + \left(\frac{3}{2} + k \right) \right) x_1 &= x(t) \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} \right) + (2+4k) \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \left(\frac{3}{2} + 7k \right) \frac{dx_1}{dt} + \left(\frac{3}{2} + k \right) x_1 &= x(t) \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dt} x_3 + (2+4k)x_3 + \left(\frac{3}{2} + 7k \right) x_2 + \left(\frac{3}{2} + k \right) x_1 &= x(t) \end{aligned}$$

Θέτοντας εκ νέου $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, οι παραπάνω σχέσεις γράφονται

$$\frac{dx_1}{dt} = [0 \quad 1 \quad 0] \mathbf{X}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = [0 \quad 0 \quad 1] \mathbf{X}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -(2+4k)x_3 - \left(\frac{3}{2} + 7k \right) x_2 - \left(\frac{3}{2} + k \right) x_1 + x(t) = \left[-\frac{3}{2} - k \quad -\frac{3}{2} - 7k \quad -2 - 4k \right] \mathbf{X} + x(t)$$

Και σε μητρική μορφή

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}x(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{2} - k & -\frac{3}{2} - 7k & -2 - 4k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{C} = [1 \quad 7 \quad 4]$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μήτρας $\mathbf{A}$ είναι το ίδιο με αυτό του πίνακα $\mathbf{A}$ της παρατηρήσιμης μορφής όπως από φυσική διαίσθηση αναμενόταν.

Για $k = 1$, για την επιβεβαίωση του γεγονότος ότι το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{X}$ είναι ελέγξιμο γράφουμε τη μήτρα

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 27.5 \end{bmatrix} \text{ και υπολογίζουμε την } \det(\mathbf{S}) = -1 \neq 0. \text{ Άρα το διάνυσμα κατάστασης είναι ελέγξιμο.}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της A προκύπτει ίδιο με αυτό της παρατηρήσιμης μορφής κλειστού βρόχου, άρα και οι ιδιοτιμές είναι ίδιες και τα περί ευστάθειας συμπεράσματα ταυτόσημα.

Προκειμένου να εντοπίσουμε για $k = 1$ τις αρχικές συνθήκες των συνιστωσών του $X(0^+)$ από τις αρχικές συνθήκες της εξόδου εργαζόμαστε ως εξής:

Ισχύει

$$y(t) = 4x_3(t) + 7x_2(t) + x_1(t) \Rightarrow \quad (1.21a)$$

$$y(0^+) = 4x_3(0^+) + 7x_2(0^+) + x_1(0^+) \quad (1.21\beta)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (1.21a) προκύπτει

$$y'(t) = 4 \frac{d}{dt} x_3(t) + 7 \frac{d}{dt} x_2(t) + \frac{d}{dt} x_1(t) \Rightarrow$$

$$y'(t) = 4 \left(-\frac{5}{2} x_1(t) - \frac{17}{2} x_2(t) - 6x_3(t) + x(t) \right) + 7x_3(t) + x_2(t) \Rightarrow$$

$$y'(t) = -10x_1(t) - 33x_2(t) - 17x_3(t) + 4x(t) \quad (1.22a)$$

$$y'(0^+) = -10x_1(0^+) - 33x_2(0^+) - 17x_3(0^+) + 4x(0^+) \quad (1.22\beta)$$

Παραγωγίζοντας τώρα την (1.22a) λαμβάνουμε

$$y''(t) = -10 \frac{d}{dt} x_1(t) - 33 \frac{d}{dt} x_2(t) - 17 \frac{d}{dt} x_3(t) + 4 \frac{d}{dt} x(t) =$$

$$= -10x_2(t) - 33x_3(t) - 17 \left(-\frac{5}{2} x_1(t) - \frac{17}{2} x_2(t) - 6x_3(t) + x(t) \right) + 4 \frac{d}{dt} x(t) \Rightarrow$$

$$y''(t) = 42.5x_1(t) + 134.5x_2(t) + 69x_3(t) - 17x(t) + 4x'(t) \quad (1.23a)$$

$$y''(0^+) = 42.5x_1(0^+) + 134.5x_2(0^+) + 69x_3(0^+) - 17x(0^+) + 4x'(0^+) \quad (1.23\beta)$$

Υπευθυμίζουμε ότι η συνάρτηση εισόδου $x(t)$ είναι μία γνωστή συνάρτηση τόσο αυτή όσο και οι παράγωγοί της. Κατά συνέπεια, και γνωρίζοντας τις αρχικές συνθήκες $y(0^+)$, $y'(0^+)$ και $y''(0^+)$, οι εξισώσεις (a. 2), (b. 2), (c. 2) αποτελούν ένα σύστημα 3×3 ως προς τα

$x_1(0^+)$, $x_2(0^+)$, $x_3(0^+)$.

$$x_1(0^+) + 7x_2(0^+) + 4x_3(0^+) = y(0^+)$$

$$-10x_1(0^+) - 33x_2(0^+) - 17x_3(0^+) = y'(0^+) - 4x(0^+)$$

$$42.5x_1(0^+) + 134.5x_2(0^+) + 69x_3(0^+) = y''(0^+) + -17x(0^+) - 4x'(0^+) \quad (1.24)$$

Και σε μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ -10 & -33 & -17 \\ 42.5 & 134.5 & 69 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \\ x_3(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(0^+) \\ y'(0^+) - 4x(0^+) \\ y''(0^+) + -17x(0^+) - 4x'(0^+) \end{bmatrix}$$

Σε μορφή πινάκων η ανωτέρω διαδικασία τυπικά γράφεται ως εξής:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}x(t)$$

$$y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}$$

$$y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(t) \Rightarrow (1.25\alpha)$$

$$y(0^+) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(0^+) \Rightarrow (1.25\beta)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (1.25α) και χρησιμοποιώντας το σύστημα εξισώσεων

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}x(t)$$

λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}x(t)) \Rightarrow (1.26\alpha)$$

$$y'(0^+) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(0^+) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}x(0^+) \Rightarrow (1.26\beta)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (1.26α) και χρησιμοποιώντας το σύστημα εξισώσεων $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}x(t)$

λαμβάνουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}x(t)) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \frac{d}{dt}x(t) \Rightarrow (1.27\alpha)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{X}(t) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}x(t) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \frac{d}{dt}x(t)$$

ή θέτοντας όπου $t = 0^+$

$$y''(0^+) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{X}(0^+) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}x(0^+) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \frac{d}{dt}x(0^+) (1.27\beta)$$

Άρα τελικά λαμβάνουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} \cdot X(0^+) = \begin{bmatrix} y(0^+) \\ y'(0^+) \\ y''(0^+) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ C \cdot Bx(0^+) \\ C \cdot A \cdot Bx(0^+) + C \cdot Bx'(0^+) \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται το σύστημα μιας εισόδου $z(t)$ και μιας εξόδου $y(t)$ με

$$\frac{d}{dt}X(t) = \begin{bmatrix} \delta & 2 & -1 \\ -1 & -4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t), \quad y(t) = [1 \quad -1 \quad 2]X(t)$$

A) Να ελεγχθεί για ποιες τιμές του δ το σύστημα είναι ελέγξιμο, για ποιες παρατηρήσιμο και για ποιες ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Είναι το σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές;

B) Εφαρμόζουμε ανάδραση στις καταστάσεις στο πεδίο του χρόνου της μορφής $z(t) = w(t) - [K_1 \quad K_2 \quad 0]X(t)$, όπου $w(t)$ η είσοδος στο σύστημα κλειστού βρόχου. Ορίζοντας $\delta = -1$, να γραφούν οι νέες εξισώσεις καταστάσεων του συστήματος κλειστού βρόχου και να γραφεί η χαρακτηριστική του εξίσωση (ή ιδιοεξίσωση, eigen-equation). Να ελεγχθεί η σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα K_1, K_2 ώστε το σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Γ) Για $K_1 = -4$ και $K_2 = -8$, να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου στο πεδίο των s , $H(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$, και να διαπιστωθεί η σχέση της $H(s)$ και της ιδιο-εξίσωσης του συστήματος στο πεδίο του χρόνου.

Δ) Για $K_1 = -4$ και $K_2 = -8$ να βρεθεί αν το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και να υπολογιστεί η εξέλιξη στο χρόνο του συστήματος κλειστού βρόχου στο χώρο καταστάσεων για αρχικές συνθήκες $y(0) = -5$, $y'(0) = 5.5$, $y''(0) = -5$ και είσοδο $w(t) = u(t) = \text{βηματική συνάρτηση}$.

Απάντηση

A) Η παρατηρησιμότητα ελέγχεται μέσω του παρακάτω πίνακα R ο οποίος, αν το σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο, πρέπει να έχει γραμμικά ανεξάρτητες στήλες.

$$R = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ \delta + 1 & 6 & 3/2 \\ \delta^2 + \delta - 6 & 2\delta - 22 & -\delta - 5/2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Για να έχει λοιπόν ο R γραμμικά ανεξάρτητες στήλες θα πρέπει $\det R \neq 0$.

$$\det(R) = -\frac{21}{2}\delta^2 - 66\delta + \frac{105}{2} \neq 0 \Rightarrow \delta \neq \frac{66 \pm \sqrt{66^2 + 105 \cdot 21}}{21}$$

Η ελεγχιμότητα του συστήματος προσδιορίζεται μέσω του παρακάτω πίνακα S ο οποίος, αν το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο, πρέπει να έχει γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές.

$$S = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} -1 & -\delta - 1 & -\delta^2 - \delta \\ 0 & 1/2 & \delta - 3/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(S) = -\frac{\delta^2}{2} + 2\delta - \frac{1}{2} \neq 0$$

Για να έχει λοιπόν ο R γραμμικά ανεξάρτητες στήλες θα πρέπει $\det R \neq 0$.

$$\det(S) = -\frac{\delta^2}{2} + 2\delta - \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \delta \neq 2 \pm \sqrt{3}$$

Η ευστάθεια του συστήματος προσδιορίζεται από τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{bmatrix} \delta & 2 & -1 \\ -1 & -4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Το σύστημα λοιπόν έχει χαρακτηριστική εξίσωση

$$\det\left(\lambda I - \begin{bmatrix} \delta & 2 & -1 \\ -1 & -4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (s-1)(\lambda^2 + (4-\delta)s + 2-4\delta) = 0 \quad (2.2)$$

Το σύστημα έχει ιδιοτιμή το $s = 1$, άρα είναι ασταθές.

Β) Από την ανάδραση $z(t) = w(t) - [K_1 \quad K_2 \quad 0]X(t)$ προκύπτει

$$Bz(t) = Bw(t) - B[K_1 \quad K_2 \quad 0]X(t) = Bw(t) - \begin{bmatrix} -K_1 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & 0 \end{bmatrix} X(t)$$

Συνεπώς το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\frac{d}{dt}X(t) = \begin{bmatrix} \delta & 2 & -1 \\ -1 & -4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) + Bz(t) = \begin{bmatrix} \delta & 2 & -1 \\ -1 & -4 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X(t) - \begin{bmatrix} -K_1 & -K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & 0 \end{bmatrix} X(t) + Bw(t)$$

ή ισοδυνάμως

$$\frac{d}{dt}X(t) = \begin{bmatrix} K_1 - 1 & K_2 + 2 & -1 \\ -1 & -4 & -\frac{1}{2} \\ -K_1 & -K_2 & 1 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t), \quad y(t) = [1 \quad -1 \quad 2]X(t)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του νέου συστήματος προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση ιδιοτιμών

$$\det \left(\lambda I - \begin{bmatrix} K_1 - 1 & K_2 + 2 & -1 \\ -1 & -4 & -\frac{1}{2} \\ -K_1 & -K_2 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda^3 + (4 - K_1)\lambda^2 + \left(1 - 4K_1 + \frac{K_2}{2}\right)\lambda - \left(K_1 + \frac{K_2}{2} + 6\right) = 0 \quad (2.3)$$

Για να προσδιορίσουμε τις συνθήκες ευστάθειας του συστήματος κλειστού βρόχου γράφουμε τον πίνακα Routh

$$\begin{array}{c|cc} \lambda^3 & 1 & 1 - 4K_1 + \frac{K_2}{2} \\ \lambda^2 & 4 - K_1 & -K_1 - \frac{K_2}{2} - 6 \\ \lambda^1 & b_1 & 0 \\ \lambda^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

Όπου οι b_1, c_1 δίνονται από

$$b_1 = \frac{(4 - K_1)\left(1 - 4K_1 + \frac{K_2}{2}\right) + K_1 + \frac{K_2}{2} + 6}{4 - K_1}, \quad c_1 = -\left(K_1 + \frac{K_2}{2} + 6\right)$$

Για να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές το σύστημα πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες

$$4 - K_1 > 0 \quad (2.4\alpha)$$

$$b_1 > 0 \Leftrightarrow (4 - K_1)\left(1 - 4K_1 + \frac{K_2}{2}\right) + K_1 + \frac{K_2}{2} + 6 > 0 \quad (2.4\beta)$$

$$c_1 > 0 \Leftrightarrow K_1 + \frac{K_2}{2} + 6 < 0 \Leftrightarrow -K_1 - \frac{K_2}{2} - 6 > 0 \quad (2.4\gamma)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.4α) και (2.4β) λαμβάνουμε

$$(4 - K_1)\left(1 - 4K_1 + \frac{K_2}{2}\right) > 0 \quad (2.4\delta)$$

Και λόγω της (2.4α) τελικά προκύπτει

$$1 - 4K_1 + \frac{K_2}{2} > 0 \quad (2.4\epsilon)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.4γ) και (2.4ε) λαμβάνουμε

$$-5 - 5K_1 > 0 \Leftrightarrow K_1 < -1 \quad (2.4\sigma\tau)$$

Και

$$K_2 > 2K_1 - 1 \quad (2.4\zeta)$$

Γ) Για $K_1 = -4$ και $K_2 = -8$ το σύστημα γίνεται

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -1 \\ -1 & -4 & -\frac{1}{2} \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad (2.5)$$

Για να παράξουμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς $\frac{Y(s)}{W(s)}$ από τις εξισώσεις κατάστασης εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στις διαφορικές εξισώσεις των καταστάσεων παίρνοντας

$$\left(s\mathbf{I} - \begin{bmatrix} -5 & -6 & -1 \\ -1 & -4 & -\frac{1}{2} \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathcal{L}[\mathbf{X}(t)] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} W(s)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace και στην εξίσωση της εξόδου έχουμε

$$Y(s) = [1 \quad -1 \quad 2] \left(\begin{bmatrix} s+5 & 6 & 1 \\ 1 & s+4 & \frac{1}{2} \\ -4 & -8 & s-1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} W(s) = \frac{1}{2} \frac{2s^2 + 11s + 3}{s^3 + 8s^2 + 13s + 2} W(s)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τα K_1, K_2 στην εξίσωση ιδιοτιμών του συστήματος κλειστού βρόχου (2.3) ανωτέρω προκύπτει το πολυώνυμο

$$s^3 + 8s^2 + 13s + 2 \quad (2.9)$$

Οι ιδιοτιμές λοιπόν του συστήματος ΔΕ των καταστάσεων συμπίπτουν με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος εισόδου – εξόδου.

Δ) Οι τιμές $K_1 = -4$ και $K_2 = -8$ ικανοποιούν τις εξισώσεις (2.4στ) και (2.4ζ) άρα το σύστημα είναι ευσταθές. Επίσης οι εξισώσεις καταστάσεων για τις συγκεκριμένες τιμές των K_1, K_2 γίνονται:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -6 & -1 \\ -1 & -4 & -1/2 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t) \quad , \quad y(t) = [1 \quad -1 \quad 2] \mathbf{X}(t)$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος αυτού δίνονται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής του εξίσωσης (2.9) και είναι οι

$$\rho_1 = -2, \quad \rho_2 = -3 + 2\sqrt{2}, \quad \rho_3 = -3 - 2\sqrt{2}$$

Το σύστημα εξισώσεων αυτό λύνεται κατά τα γνωστά.

Επειδή οι ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι διακριτές ο A διαγωνοποιείται με τον πίνακα ιδιοδιανυσμάτων του P στη

μορφή $A = P \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 \end{bmatrix} P^{-1}$. Οπότε $e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\rho_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\rho_3 t} \end{bmatrix} P^{-1}$ και η λύση του συστήματος γράφεται

$$\begin{aligned} X(t) = & P \begin{bmatrix} e^{\rho_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\rho_3 t} \end{bmatrix} P^{-1} X(0^+) + P \begin{bmatrix} e^{\rho_1 t}/\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\rho_2 t}/\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\rho_3 t}/\rho_3 \end{bmatrix} P^{-1} B \\ & + P \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho_3} \end{bmatrix} P^{-1} B u(t) \quad (2.10a) \end{aligned}$$

Η λύση αυτή του συστήματος Δ.Ε. είναι ακριβώς της μορφής

$$X(t) = e^{At} X(0^+) + \int_{0^+}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (2.10\beta)$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα ο πίνακας ιδιοδιανυσμάτων για τις ιδιοτιμές ρ_1, ρ_2, ρ_3 του συστήματος είναι

$$P = \begin{bmatrix} \rho_1 & 2 \frac{\rho_2+1}{\rho_2^2-5^2} & \frac{\rho_3+1}{\rho_3^2-5^2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \frac{\rho_2-1}{\rho_2-5} & -\frac{1}{2} \frac{\rho_3-1}{\rho_3-5} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τις αρχικές συνθήκες της Δ.Ε. των καταστάσεων γνωρίζοντας τις αρχικές συνθήκες της εξόδου πρέπει να λύσουμε το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$y(0^+) = C X(0^+) \quad (2.11\alpha),$$

$$y'(0^+) = C A X(0^+) + C B w(0^+) \quad (2.11\beta),$$

$$y''(0^+) = C A^2 X(0^+) + C A B w(0^+) + C B w'(0^+) \quad (2.11\gamma)$$

Το οποίο σε μητρική μορφή γράφεται

$$\begin{bmatrix} y(0^+) \\ y'(0^+) - C B w(0^+) \\ y''(0^+) - C A B w(0^+) - C B w'(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ C A^2 \end{bmatrix} X(0^+) = R X(0^+)$$

Όπου $\mathbf{R}$ ο πίνακας παρατηρησιμότητας. Επομένως αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο η παραπάνω εξίσωση λύνεται αντιστρέφοντας τον $\mathbf{R}$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η $\mathbf{R}$ γράφεται

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 14 & 1.5 \\ -28 & -68 & -9.5 \end{bmatrix}$$

και αν η είσοδος είναι η βηματική συνάρτηση τότε η παραπάνω εξίσωση έχει λύση

$$\mathbf{X}(0^+) = [-2 \quad 1 \quad -1]^T.$$

Συνεπώς η $\mathbf{X}(t)$ γράφεται

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{7} \left(\frac{23}{2} e^{\rho_1 t} + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right) e^{\rho_3 t} - \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) e^{\rho_2 t} \right) \\ \frac{1}{7} \left(\frac{23}{4} e^{\rho_1 t} + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) e^{\rho_3 t} + \frac{1}{2} \left(3 + \frac{5\sqrt{2}}{2} \right) e^{\rho_2 t} \right) \\ \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2 \right) e^{\rho_3 t} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2 \right) e^{\rho_2 t} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Παράδειγμα 3

Δίνεται το σύστημα συνεχούς χρόνου:

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}z(t) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) \quad (3.2)$$

$$\text{Όπου } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

αντίστοιχο διάνυσμα εξόδου:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

και είσοδο τη βηματική συνάρτηση $z(t) = u(t)$

α) Να εξεταστεί για ποιες τιμές της παραμέτρου α :

- I. Το σύστημα είναι ελέγξιμο,
- II. Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο από την έξοδο $y_1(t)$
- III. Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο από την έξοδο $y_2(t)$
- IV. Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

β) Για την αντιστάθμιση του συστήματος εφαρμόζεται ανάδραση εξόδου, δηλαδή εφαρμόζεται ο ακόλουθος νόμος ελέγχου :

$$u(t) = r(t) - k_1 y_1(t) - k_2 y_2(t),$$

όπου $r(t)$ είναι η είσοδος του αντισταθμισμένου συστήματος (είσοδος αναφοράς) και k_1, k_2 πραγματικοί αριθμοί (κέρδη). Να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης του αντισταθμισμένου συστήματος.

γ) Να ευρεθεί η μήτρα συναρτήσεων μεταφοράς $G(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{R(s)} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix}$ του αντισταθμισμένου συστήματος

δ) Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος Routh , να ευρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα κέρδη k_1 και k_2 ώστε το αντισταθμισμένο σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

ε) Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα του ερωτήματος (δ), να εξετάσετε τα ακόλουθα:

- I. Είναι το μη αντισταθμισμένο σύστημα ασυμπτωτικά ευσταθές ή όχι;
- II. Αν η παράμετρος α έχει την τιμή $\alpha = -1$ και αν επιλεγεί $k_1 = 0.5$, να ευρεθεί για ποιες τιμές του k_2 εξασφαλίζεται η ασυμπτωτική ευστάθεια του αντισταθμισμένου συστήματος .

Λύση

α)

- I. Για το σύστημα με $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ προκύπτει ότι:

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A^2 B = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha - 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Οπότε
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Το διάνυσμα κατάστασης είναι ελέγξιμο δεδομένου ότι $\det(S) = -1 \neq 0$. Άρα για όλα τα α το σύστημα είναι ελέγξιμο.

- II. Για την έξοδο $y_1(t)$ διαλέγω την πρώτη γραμμή του πίνακα C έστω C_1 όπως προκύπτει άμεσα από την εξίσωση (3.2). Άρα

$$C_1 = [0 \quad 1 \quad -1]$$

Επιπλέον Ισχύει $C_1 \cdot A = [\alpha - 3 \quad -1 \quad -1]$, $C_1 \cdot A^2 = [\alpha - 9 \quad \alpha - 4 \quad 1]$

Οπότε,

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \alpha - 3 & -1 & -1 \\ \alpha - 9 & \alpha - 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο από την έξοδο y_1 , αφού ο πίνακας R_1 είναι 3x3, πρέπει και αρκεί η

$$\det(R_1) \neq 0 \Leftrightarrow -a^2 + 4a + 9 \neq 0 \Rightarrow a_1 \neq 5.6056 \text{ και } a_2 \neq -1.6056 .$$

- III. Ομοίως για την έξοδο $y_2(t)$ διαλέγω τη δεύτερη γραμμή του πίνακα C έστω C_1 όπως προκύπτει άμεσα από την εξίσωση (3.2). Άρα

$$C_2 = [2 \quad 1 \quad 0]$$

Επιπλέον ισχύει:

$$C_2 \cdot A = [\alpha + 4 \quad 2 \quad -1] ,$$

$$C_2 \cdot A^2 = [4\alpha + 5 \quad \alpha + 3 \quad -2]$$

Οπότε,

$$R_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \alpha + 4 & 2 & -1 \\ 4\alpha + 5 & \alpha + 3 & -2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο αναφορικά με την έξοδο y_2 , αφού ο πίνακας R_2 είναι 3x3, πρέπει και αρκεί η $\det(R_2) \neq 0 \Leftrightarrow 1 \neq 0$. Άρα για όλα τα a το σύστημα, είναι παρατηρήσιμο αναφορικά με έξοδο $y_2(t)$.

- IV. Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο από το ζεύγος των δύο εξόδων για όλες τις τιμές του a , διότι ο πίνακας R έχει πάντα τρεις στήλες γραμμικώς ανεξάρτητες. Δηλαδή ακόμα και αν μας δοθεί ένα $a = 5.6056$ ή ένα $a = -1.6056$, γεγονός που καθιστά την $y_1(t)$ μη παρατηρήσιμη, εντούτοις το συνολικό σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Για να το κατανοήσουμε αυτό φυσικά, πέρα από το γεγονός ο $R^T R$ είναι αντιστρέψιμος, αφού ο R έχει τρεις στήλες γραμμικώς ανεξάρτητες, σκεπτόμεθα ως εξής:

Κάθε χρονική στιγμή , μας δίνεται το διάνυσμα Ω διαστάσεων 6x1, το οποίο αφορά και τις δύο εξόδους $y_2(t), y_1(t)$. Από το διάνυσμα αυτό, πρέπει με μοναδικό τρόπο να προσδιορίσουμε το διάνυσμα αρχικών τιμών $X(0^+)$. Αλλά τρία στοιχεία του Ω , αυτά που σχετίζονται με την έξοδο $y_2(t)$, μονοσήμαντα προσφέρουν το $X(0^+)$ άρα και του διανύσματος Ω .

Άρα το σύστημα είναι συνολικά παρατηρήσιμο για όλα τα α .

β)

Για είσοδο εφαρμόζεται ο ακόλουθος νόμος ελέγχου :

$$u(t) = r(t) - k_1 y_1(t) - k_2 y_2(t),$$

Οπότε οι εξισώσεις κατάστασης είναι:

$$Y(t) = CX \quad (3.5)$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(r(t) - k_1 y_1(t) - k_2 y_2(t)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + Br(t) - B[k_1 \quad k_2] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + Br(t) - B[k_1 \quad k_2]CX \quad (3.6)$$

Ο πίνακας $B[k_1 \quad k_2]C$ είναι 3×3 , διότι $(3 \times 1) \times (1 \times 2) \times (2 \times 3) \Leftrightarrow 3 \times 3$, οπότε οι νέες εξισώσεις κατάστασης γίνονται :

$$\frac{dX}{dt} = [A - B[k_1 \quad k_2]C]X + Br(t) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \alpha - 2k_2 & -k_1 - k_2 & k_1 - 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (3.7\alpha)$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(t) \quad (3.7\beta)$$

$$\text{Όπου } A_{new} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \alpha - 2k_2 & -k_1 - k_2 & k_1 - 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

γ)

$$\text{Στην εξίσωση} \quad \frac{dX(t)}{dt} = A_{new}X(t) + Br(t)$$

εφαρμόζοντας Laplace έχουμε :

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}_{new}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}R(s) \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{new})^{-1} \mathbf{B}R(s) \quad (3.5a)$$

Επιπλέον εφαρμόζοντας Laplace στην $\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t)$ έχουμε ότι:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) \Leftrightarrow \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{new})^{-1} \mathbf{B}R(s) \quad (3.5\beta) \Rightarrow$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{R(s)} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{Y}(s)}{R(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{new})^{-1} \mathbf{B} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(s^2 - 3s - 1)}{s^3 + s^2(k_1 + k_2 - 2) + s(1 - a - k_1) + 1 - k_1} \\ \frac{s^2}{s^3 + s^2(k_1 + k_2 - 2) + s(1 - a - k_1) + 1 - k_1} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

δ)

Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει η πρώτη στήλη του πίνακα Routh να μην αλλάζει πρόσημο. Άρα έχουμε :

s^3	1	$1 - a - k_1$
s^2	$k_1 + k_2 - 2$	$1 - k_1$
s^1	$\frac{(k_1 + k_2 - 2)(1 - a - k_1) - 1 + k_1}{k_1 + k_2 - 2}$	0
s^0	$\frac{((k_1 + k_2 - 2)(1 - a - k_1) - 1 + k_1) \cdot (1 - k_1)}{k_1 + k_2 - 2}$	0

Για να είναι το σύστημα ευσταθές πρέπει:

$$k_1 + k_2 - 2 > 0 \Rightarrow k_1 > 2 + k_2 \quad (3.7\alpha)$$

$$(k_1 + k_2 - 2)(1 - a - k_1) - 1 + k_1 > 0 \quad (3.7\beta)$$

$$((k_1 + k_2 - 2)(1 - a - k_1) - 1 + k_1) \cdot (1 - k_1) > 0 \Rightarrow \text{Αρκεί } (1 - k_1) > 0 \quad (3.7\gamma)$$

Προσθέτω τις (3.7β) και (3.7γ)

$$(k_1 + k_2 - 2)(1 - a - k_1) > 0. \text{ Λόγω της (1) αρκεί } (1 - a - k_1) > 0$$

Άρα πρέπει να συναληθεύουν οι εξής ανισώσεις:

$$k_1 + k_2 - 2 > 0 \Rightarrow k_2 > 2 - k_1 \quad (3.8\alpha)$$

$$(1 - a - k_1) > 0 \Rightarrow k_1 < 1 - a \quad (3.8\beta)$$

$$(1 - k_1) > 0 \Rightarrow k_1 < 1 \quad (3.8\gamma)$$

Άρα πρέπει να συναληθεύουν και οι τρεις παραπάνω ανισώσεις, οι οποίες είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι το σύστημα ευσταθές.

ε)

- I. Η ευστάθεια του μη αντισταθμισμένου συστήματος προκύπτει όταν $k_1 = k_2 = 0$. Από τις παραπάνω ικανές και αναγκαίες συνθήκες, και συγκεκριμένα από τη πρώτη, παρατηρείται ότι $0 > 2$. ΆΤΟΠΟ. Επομένως το μη αντισταθμισμένο σύστημα δεν είναι ευσταθές
- II. Σύμφωνα με την εκφώνηση, για $a = -1$ και αν επιλεγεί $k_1 = 0.5$, έχουμε για τις παραπάνω εξισώσεις ότι :

$$k_2 > 2 - k_1 \Rightarrow k_2 > 1.5 \quad (3.9)$$

$$k_1 < 1 - a \Rightarrow 0.5 < 2$$

$$k_1 < 1$$

Άρα για $k_2 > 1.5$ το σύστημα είναι ευσταθές.

