

Βηματική απόκριση ενός γενικού συστήματος δευτέρας τάξεως

Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (1)$$

όπου $\omega_0 > 0$. (Το ω_0 συχνά λέγεται κυκλική (φυσική) ιδιοσυχνότητα του συστήματος)

Ισχύει $Y(s) = G(s) \frac{1}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{c}{s(s-\rho_1)(s-\rho_2)}$ όπου έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2.$$

1) Το σύστημα προκύπτει ευσταθές για $\zeta > 0$.

1α) $0 < \zeta < 1$. Σε αυτή την περίπτωση για τις ρίζες του τριωνύμου

$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ ισχύει: $\rho_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm j\Delta_1)$, όπου $\Delta_1 = \sqrt{1 - \zeta^2} \in \mathbb{R}$. Άρα εφαρμόζοντας απλά κλάσματα προκύπτει

$$\frac{c}{s(s-\rho_1)(s-\rho_2)} = c \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{(s-\rho_1)} + \frac{\Gamma}{(s-\rho_2)} \right) \Leftrightarrow$$

$$1 = A(s - \rho_1)(s - \rho_2) + Bs(s - \rho_2) + \Gamma s(s - \rho_1)$$

1) Θέτοντας $s=0$ προκύπτει ότι $A = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{\omega_0^2}$

2) Θέτοντας $s=\rho_1$ προκύπτει ότι $B = -\frac{1}{2\omega_0^2(\Delta_1^2 + j\zeta\Delta_1)}$

3) Θέτοντας $s=\rho_2$ προκύπτει ότι $\Gamma = -\frac{1}{2\omega_0^2(\Delta_1^2 - j\zeta\Delta_1)}$

Προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2(\Delta_1^2 + j\zeta\Delta_1)(s - \rho_1)} - \frac{1}{2(\Delta_1^2 - j\zeta\Delta_1)(s - \rho_2)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$\frac{c}{\omega_0^2} \left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(\Delta_1^2 + j\zeta\Delta_1)(s - \rho_1)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(\Delta_1^2 - j\zeta\Delta_1)(s - \rho_2)}\right\} \right) \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t + j\omega_0 \Delta_1 t}}{2(\Delta_1^2 + j\zeta \Delta_1)} - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t - j\omega_0 \Delta_1 t}}{2(\Delta_1^2 - j\zeta \Delta_1)} \right) =$$

$$\frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t}}{2} \left(\frac{e^{j\omega_0 \Delta_1 t}}{\Delta_1^2 + j\zeta \Delta_1} + \frac{e^{-j\omega_0 \Delta_1 t}}{\Delta_1^2 - j\zeta \Delta_1} \right) \right), \quad t \geq 0^-$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $e^{-jw} = \cos(w) + j\sin(w)$ και κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα εντός της εσωτερικής παρενθέσεως λαμβάνουμε

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - e^{-\omega_0 \zeta t} \left(\cos(\omega_0 \Delta_1 t) + \frac{\zeta}{\Delta_1} \sin(\omega_0 \Delta_1 t) \right) \right) \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t}}{\Delta_1} (\Delta_1 \cos(\omega_0 \Delta_1 t) + \zeta \sin(\omega_0 \Delta_1 t)) \right)$$

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές του συνημίτονου και του ημιτόνου Δ_1 και ζ αντιστοίχως ικανοποιούν τη σχέση $\Delta_1^2 + \zeta^2 = 1$ ενώ εξ υποθέσεως $0 < \zeta < 1$. Άρα υπάρχει

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \cos(\varphi) = \zeta \text{ και } \sin(\varphi) = \Delta_1$$

Οπότε

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t}}{\Delta_1} \sin(\omega_0 \Delta_1 t + \varphi) \right) \quad (2)$$

Ένας ορισμός της ευστάθειας ενός συστήματος είναι εκείνος σύμφωνα με τον οποίο για κάθε φραγμένη είσοδο το σύστημα γεννά φραγμένη έξοδο (Bounded Input Bounded Output-BIBO). Στο προκείμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι όταν η είσοδος είναι η βηματική απόκριση τότε το σύστημα συμπεριφέρεται ευσταθώς. Θα διαπιστώσουμε στα επόμενα ότι το εν λόγω σύστημα είναι όντως ευσταθές κατά BIBO, γεγονός που συνδέεται καθοριστικά με το ότι οι πόλοι του (οι ρίζες του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς) έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

1β) $\zeta=1$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \frac{c}{(s + \omega_0)^2}$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\mathcal{L}^{-1}$ και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσεως και από τους σχετικούς πίνακες για τον τελεστή $\mathcal{L}^{-1}$ προκύπτει

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{c}{(s + \omega_0)^2}\right\} \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} [u(t) - (\omega_0 t + 1)e^{-\omega_0 t}], \quad t \geq 0^- \quad (3)$$

Παρατηρούμε ότι το σύστημα συμπεριφέρεται ευσταθώς με είσοδο $u(t)$, εφ' όσον του $t \rightarrow \infty$ τότε $y(t) = \frac{c}{\omega_0^2}$.

Το σύστημα έχει ένα διπλό πόλο στο $-\omega_0$, δηλαδή στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, γεγονός που, όπως θα δείξουμε στα επόμενα, συνδέεται καθοριστικά με το ότι το σύστημα είναι γενικώς ευσταθές κατά BIBO.

1γ) $\zeta > 1$. Σε αυτή την περίπτωση εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία που εφαρμόστηκε στην περίπτωση 1α). Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$.

Για αυτές ισχύει $\rho_{1,2} = \omega_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$, όπου το υπόριζο $\zeta^2 - 1$ είναι πάντα θετικό, γεγονός που σημαίνει ότι οι ρίζες είναι και οι δύο πραγματικές. Επιπλέον, δε, είναι αμφότερες αρνητικές. Θέτουμε $\Delta_2 = \sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Εφαρμόζοντας απλά κλάσματα προκύπτει

$$\frac{c}{s(s-\rho_1)(s-\rho_2)} = c \left(\frac{A}{s} + \frac{B}{(s-\rho_1)} + \frac{\Gamma}{(s-\rho_2)} \right) \Leftrightarrow$$

$$1 = A(s - \rho_1)(s - \rho_2) + Bs(s - \rho_2) + \Gamma s(s - \rho_1)$$

1) Θέτοντας $s=0$ προκύπτει ότι $A = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{\omega_0^2}$

2) Θέτοντας $s=\rho_1$ προκύπτει ότι $B = \frac{1}{2\omega_0^2(\Delta_2^2 - \zeta\Delta_2)}$

3) Θέτοντας $s=\rho_2$ προκύπτει ότι $\Gamma = \frac{1}{2\omega_0^2(\Delta_2^2 + \zeta\Delta_2)}$

Άρα

$$Y(s) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2(\Delta_2^2 - \zeta\Delta_2)(s - \rho_1)} - \frac{1}{2(\Delta_2^2 + \zeta\Delta_2)(s - \rho_2)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$\frac{c}{\omega_0^2} \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2(\Delta_2^2 - \zeta \Delta_2)(s - \rho_1)} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2(\Delta_2^2 + \zeta \Delta_2)(s - \rho_2)} \right\} \right) \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - \frac{e^{\rho_1 t}}{2(\Delta_2^2 - \zeta \Delta_2)} - \frac{e^{\rho_2 t}}{2(\Delta_2^2 + \zeta \Delta_2)} \right) \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι καθώς $t \rightarrow \infty$ και επειδή τα ρ_1, ρ_2 είναι πραγματικοί αρνητικοί αριθμοί, το σύστημα τείνει στο $\frac{c}{\omega_0^2}$.

1δ) $\zeta=0$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s} \frac{c}{s^2 + \omega_0^2} \Leftrightarrow$$

$$Y(s) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $\mathcal{L}^{-1}$ και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσεως και από τους σχετικούς πίνακες για τον τελεστή $\mathcal{L}^{-1}$ προκύπτει

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} (u(t) - \cos(\omega_0^2 t)) \quad (5)$$

2) Το σύστημα προκύπτει ασταθές για $\zeta < 0$.

Π.χ. Για $-1 < \zeta < 0$, προκύπτει πάλι

$$Y(s) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{2(\Delta_1^2 + j\zeta \Delta_1)(s - \rho_1)} - \frac{1}{2(\Delta_1^2 - j\zeta \Delta_1)(s - \rho_2)} \right) \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} =$$

$$\frac{c}{\omega_0^2} \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2(\Delta_1^2 + j\zeta \Delta_1)(s - \rho_1)} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2(\Delta_1^2 - j\zeta \Delta_1)(s - \rho_2)} \right\} \right) \Leftrightarrow$$

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t + j\omega_0 \Delta_1 t}}{2(\Delta_1^2 + j\zeta \Delta_1)} - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t - j\omega_0 \Delta_1 t}}{2(\Delta_1^2 - j\zeta \Delta_1)} \right) =$$

$$\frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t}}{2} \left(\frac{e^{j\omega_0 \Delta_1 t}}{\Delta_1^2 + j\zeta \Delta_1} + \frac{e^{-j\omega_0 \Delta_1 t}}{\Delta_1^2 - j\zeta \Delta_1} \right) \right)$$

Αλλά προχωρώντας όπως ακριβώς στην περίπτωση 1α) προκύπτει ότι

$$y(t) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t) - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t}}{\Delta_1} \sin(\omega_0 \Delta_1 t + \varphi) \right) \quad (6)$$

όπου $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \cos(\varphi) = \zeta$ και $\sin(\varphi) = \Delta_1$.

Επομένως υπάρχει άπειρο πλήθος χρονικών υπακολουθιών για τις οποίες η χρονική απόκριση του συστήματος απειρίζεται αφού ο εκθέτης στον όρο $e^{-\omega_0 \zeta t}$ είναι πάντα θετικός.

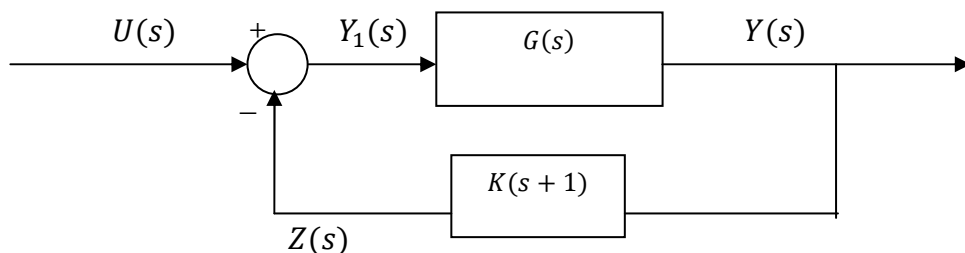
$$\text{Ισοδυνάμως } \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = \infty.$$

Από αυτή την ανάλυση γίνεται κατανοητό γιατί όταν κάποια ρίζα του παρονομαστή (κάποιος πόλος) έχει πραγματικό μέρος στο δεξί ημιεπίπεδο, τότε το σύστημα είναι ασταθές με την έννοια ότι για φραγμένη είσοδο γεννά απειριζόμενη έξοδο καθώς το t τείνει στο άπειρο. Ισοδυνάμως, το σύστημα δεν έχει την ιδιότητα φραγμένης εξόδου για κάθε φραγμένη είσοδο (Bounded Input Bounded Output – BIBO)

Πως γίνεται ευσταθές ένα ασταθές σύστημα 2^{ης} τάξης

Θα καταστήσουμε ευσταθές ένα ασταθές σύστημα 2^{ης} τάξης, με $\zeta = -0.2$, $\omega_0 = 2$ και $c = 1$ και άρα με συνάρτηση μεταφοράς $G(s) = \frac{1}{s^2 - 0.8s + 4}$.

Προς το σκοπό αυτό πραγματοποιούμε ανάδραση με $F(s) = K(s+1)$. Δηλαδή:



Τότε, η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου είναι $H(s) = \frac{1}{s^2 + (K-0.8)s + K+4}$,

η οποία για $K=$ είναι ευσταθής και έχει την ίδια μόνιμη απόκριση. Θα δείξουμε στα επόμενα συστηματικούς τρόπους για να υπολογίζουμε τέτοια K .

Χαρακτηριστικά της απόκρισης ενός συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Εξειδίκευση στη βηματική απόκριση συστήματος 2^{ας} τάξης και τρόπος υπολογισμού αυτών.

X1). Μεταβατική και μόνιμη απόκριση

Μεταβατική απόκριση ενός συστήματος είναι το κομμάτι της απόκρισης το οποίο μηδενίζεται προϊόντος του χρόνου, δηλαδή καθώς $t \rightarrow \infty$.

Μόνιμη απόκριση (μόνιμη κατάσταση) ενός συστήματος είναι το κομμάτι της απόκρισης το οποίο παραμένει αφού το μεταβατικό μέρος έχει εξασθενήσει σημαντικά. Μια τέτοια απόκριση μπορεί να είναι μια σταθερή ποσότητα, μια ημιτονοειδής ή περιοδική ποσότητα με σταθερό πλάτος, καθώς και οποιαδήποτε συνάρτηση.

Από τους παραπάνω ορισμούς προκύπτει για την απόκριση $y(t)$ του συστήματος

$$y(t) = y_{\mu\epsilon\tau.}(t) + y_{\mu\omicron\nu.}(t)$$

Για την περίπτωση του συστήματος δευτέρας τάξεως που μελετήθηκε προηγούμενα,

$$y_{\mu\omicron\nu.}(t) = \frac{c}{\omega_0^2} u(t)$$

$$\text{και } y_{\mu\epsilon\tau.}(t) = \frac{e^{-\omega_0 \zeta t}}{\Delta_1} \sin(\omega_0 \Delta_1 t + \varphi) \text{ για } 0 < \zeta < 1$$

$$\text{ή } y_{\mu\epsilon\tau.}(t) = \frac{c}{\omega_0^2} (\omega_0 t + 1) e^{-\omega_0 t} \text{ για } \zeta = 1$$

$$\text{ή } y_{\mu\epsilon\tau.}(t) = \frac{c}{\omega_0^2} \left(-\frac{e^{\rho_1 t}}{2(\Delta_2^2 - \zeta \Delta_2)} - \frac{e^{\rho_2 t}}{2(\Delta_2^2 + \zeta \Delta_2)} \right) \text{ για } \zeta > 1.$$

X2). Μέγιστη υπερέψωση (overshoot).

Ορισμός: Είναι η διαφορά της μέγιστης τιμής από την τιμή της μόνιμης κατάστασης.

Τρόπος υπολογισμού για ένα σύστημα 2^{ας} τάξης με $0 < \zeta < 1$:

Στα σημεία μεγίστου ισχύει

$$y'(t) = 0 \Leftrightarrow (e^{-\omega_0 \zeta t} \sin(\omega_0 \Delta_1 t + \varphi))' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\zeta \sin(\omega_0 \Delta_1 t + \varphi) - \Delta_1 \cos(\omega_0 \Delta_1 t + \varphi) = 0 \Leftrightarrow \tan(\omega_0 \Delta_1 t + \varphi) = \frac{\Delta_1}{\zeta} = \tan(\varphi)$$

Και συνεπώς $\omega_0 \Delta_1 t = \lambda \pi$ με $\lambda \in \mathbb{N}$ αφού $t > 0$.

Τα τοπικά μέγιστα επισυμβαίνουν για $\lambda = 2\mu + 1$ $\mu \in \mathbb{N}_0$, ενώ τα τοπικά ελάχιστα

για $\lambda = 2\mu$ $\mu \in \mathbb{N}$, όπως προκύπτει άμεσα από το πρόσημο της $y''(t)$.

Οι τιμές των τοπικών μεγίστων είναι φθίνουσα συνάρτηση του λ (το αντίστοιχο του χρόνου), λόγω του πολλαπλασιασμού με τη γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $e^{-\omega_0 \zeta t}$ η οποία παίζει το ρόλο της περιβάλλουσας. Επομένως το απόλυτο μέγιστο επισυμβαίνει για $\lambda = 1$ ή $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \Delta_1}$.

Δυϊκώς αντίστοιχα, τα τοπικά ελάχιστα γνησίως αυξάνουν συναρτήσει του λ .

Σχέση ζ , ω_0 , και μέγιστης υπερέψωσης σε ένα σύστημα 2^{ας} τάξης:

$$\begin{aligned} y_{\mu\epsilon\gamma} &= \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t_1) - \frac{e^{-\omega_0 \zeta t_1}}{\Delta_1} \sin\left(\omega_0 \Delta_1 \frac{\pi}{\omega_0 \Delta_1} + \varphi\right) \right) = \\ &= \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t_1) - \frac{e^{-\zeta \frac{\pi}{\Delta_1}}}{\Delta_1} \sin(\pi + \varphi) \right) = \\ &= \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t_1) + \frac{e^{-\zeta \frac{\pi}{\Delta_1}}}{\Delta_1} \sin(\varphi) \right) = \\ &= \frac{c}{\omega_0^2} \left(u(t_1) + e^{-\zeta \frac{\pi}{\Delta_1}} \right) \\ v &= y_{\mu\epsilon\gamma} - y_{\mu\omicron\nu} = \frac{c}{\omega_0^2} e^{-\zeta \frac{\pi}{\Delta_1}} \end{aligned}$$

X3). Ποσοστό μέγιστης υπερύψωσης.

$$v_{\%} = 100 \left[\frac{y_{\text{μεγ}} - y_{\text{τελικό}}}{y_{\text{τελικό}}} \right]$$

Για ένα σύστημα 2^{ης} τάξης

$$v_{\%} = 100 \frac{y \left(\frac{\pi}{\omega_0 \Delta_1} \right) - \frac{c}{\omega_0^2}}{\frac{c}{\omega_0^2}} = 100 \left(e^{\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} - 1 \right)$$

X4).Χρόνος καθυστέρησης (T_d). .

Είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει η απόκριση $y(t)$ στο μισό της τελικής τιμής της αποκρίσεως.

X5).Χρόνος ανύψωσης (T_r). .

Είναι ο χρόνος που απαιτείται προκειμένου η απόκριση να ανυψωθεί από το 10% στο 90% της τελικής τιμής.

X6).Χρόνος αποκατάστασης (T_s).

Είναι ο χρόνος που απαιτείται προκειμένου η απόκριση να φτάσει και να παραμείνει εντός ενός συγκεκριμένου εύρους τιμών (2%-5%) εκατέρωθεν της τελικής τιμής.