

1. Έννοια παρατηρησιμότητας.

Ας θεωρήσουμε ένα ΓΧΑ σύστημα τάξης n , κατ' αρχήν μιας εξόδου $y(t)$ και μιας εισόδου $z(t)$. Έχουμε ήδη θεμελιώσει ότι ένα οποιοδήποτε ΓΧΑ σύστημα μπορεί να περιγραφεί από τις εξισώσεις

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + Bz(t) \quad (1. \alpha)$$

$$y(t) = C \cdot X + Dz(t) \quad (1. \beta)$$

όπου A ένας πίνακας διαστάσεων $n \times n$, B ένας πίνακας διαστάσεων $n \times 1$, C ένας πίνακας διαστάσεων $1 \times n$, D μια σταθερά και $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ το γνωστό διάνυσμα κατάστασης

που σε κάθε χρονική στιγμή περιλαμβάνει τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$. Τότε ένα τέτοιο σύστημα λέγεται παρατηρήσιμο όταν η γνώση των συναρτήσεων εξόδου $y(t)$ και εισόδου $z(t)$ κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ οδηγεί σε γνώση των αρχικών συνθηκών του διανύσματος κατάστασης $X(0^+)$. Η παρατηρησιμότητα ενός συστήματος μπορεί να αφορά και αρχικές συνθήκες στο t_0^+ , και μπορεί να ελεγχθεί με τα ίδια ακριβώς κριτήρια που θα περιγραφούν παρακάτω.

Πρώτο κριτήριο παρατηρησιμότητας: Για να ποσοτικοποιήσουμε την έννοια της παρατηρησιμότητας ας θεωρήσουμε κατ' αρχήν ότι η έξοδος $y(t)$ είναι τουλάχιστον $n - 1$ φορές παραγωγίσιμη. Τονίζουμε ότι κάνουμε αυτή την επιλογή για μεγαλύτερη ευκολία στις σχετικές διαδικασίες και για καλύτερη κατανόηση αυτών. Όμως τα τελικά συμπεράσματα ισχύουν και για ασθενέστερες απαιτήσεις για την $y(t)$ όπως π.χ. το να είναι συνεχής. Η απόδειξη των συμπερασμάτων σε αυτή την περίπτωση μπορεί να γίνει επί τη βάση του θεωρήματος Cayley-Hamilton, με τρόπο πολύ ανάλογο με αυτόν που θα περιγραφεί στην ελεγκσιμότητα. Επομένως, ας θεωρήσουμε το διάνυσμα

$$\Omega = \left[y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \right]^T$$

δηλαδή το διάνυσμα που περιλαμβάνει σε κάθε χρονική στιγμή t την τιμή της εξόδου $y(t)$ και τις τιμές όλων των παραγώγων της μέχρι τάξεως $n - 1$.

Η φορμαλιστική λύση αυτού του συστήματος Δ.Ε. (1. α) και η (1. β) γράφονται εν γένει στη μορφή:

$$\mathbf{X}(t) = e^{At} \cdot \mathbf{X}(0^+) + \mathbf{X}^e(t) \quad (2. a)$$

$$y(t) = \mathbf{C}e^{At} \cdot \mathbf{X}(0^+) + \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^e(t) + Dz(t) \quad (2. \beta)$$

Όπου η ειδική λύση $\mathbf{X}^e(t)$ είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με την είσοδο του συστήματος $z(t)$.

Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (2. a) και (2. β) λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}e^{At}\mathbf{X}(0^+) + \frac{d}{dt}\mathbf{X}^e(t) \quad (3. a)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}e^{At}\mathbf{X}(0^+) + \mathbf{C}\frac{d}{dt}\mathbf{X}^e(t) + D\frac{d}{dt}z(t) \quad (3. \beta)$$

Παραγωγίζοντας μια φορά ακόμα τις ανωτέρω σχέσεις λαμβάνουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}^2e^{At}\mathbf{X}(0^+) + \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}^e(t) \quad (4. a)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2e^{At}\mathbf{X}(0^+) + \mathbf{C}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}^e(t) + D\frac{d^2}{dt^2}z(t) \quad (4. \beta)$$

και γενικά για την i – οστή παράγωγο $i \leq n - 1$

$$\frac{d^i}{dt^i}\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}^ie^{At}\mathbf{X}(0^+) + \frac{d^i}{dt^i}\mathbf{X}^e(t) \quad (5. a)$$

$$\frac{d^i}{dt^i}y(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^ie^{At}\mathbf{X}(0) + \mathbf{C}\frac{d^i}{dt^i}\mathbf{X}^e(t) + D\frac{d^i}{dt^i}z(t) \quad (5. \beta)$$

Σε μορφή πινάκων οι σχέσεις (2. β), (3. β) και (4. β) γράφονται

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} e^{At}\mathbf{X}(0^+) + \begin{bmatrix} \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}^e(t) \\ \mathbf{C} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{X}^e(t) \\ \mathbf{C} \cdot \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}^e(t) \\ \vdots \\ \mathbf{C} \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\mathbf{X}^e(t) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} z(t) \\ \frac{d}{dt}z(t) \\ \frac{d^2}{dt^2}z(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}z(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Επειδή η ειδική λύση $\mathbf{X}^e(t)$ είναι γνωστή και άμεσα συνδεδεμένη με την είσοδο $z(t)$, ο πίνακας $\mathbf{X}(0^+)$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο συναρτήσει της εισόδου $z(t)$, της εξόδου

$y(t)$ και των παραγώγων τους μέχρι τάξη $n - 1$, όταν και μόνον όταν ο πίνακας $\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$

διαστάσεων $n \times n$ είναι αντιστρέψιμος.

Κάνουμε τις προφανείς πλην χρήσιμες παρατηρήσεις ότι ο πίνακας παρατηρησιμότητας έχει τόσες στήλες όσο και το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης που είναι και το πλήθος γραμμών του e^{At} . Άλλωστε μόνο έτσι είναι εφικτός ο πολλαπλασιασμός μεταξύ των πινάκων παρατηρησιμότητας και e^{At} . **Επίσης έχει τόσες γραμμές όσες προκύπτουν από το γινόμενο του πλήθους των εξόδων και της τάξης του συστήματος.**

Σε αυτή την περίπτωση και επειδή ο e^{At} , όταν υπάρχει, είναι πάντα αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον e^{-At} ο πίνακας $X(0^+)$ υπολογίζεται ευθύγραμμα από τη σχέση

$$X(0^+) = e^{-At} \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \left(\Omega - \begin{bmatrix} C \cdot X^e(t) \\ C \cdot \frac{d}{dt} X^e(t) \\ C \cdot \frac{d^2}{dt^2} X^e(t) \\ \vdots \\ C \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} X^e(t) \end{bmatrix} - D \begin{bmatrix} z(t) \\ \frac{d}{dt} z(t) \\ \frac{d^2}{dt^2} z(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} z(t) \end{bmatrix} \right) \quad (7)$$

Είθισται η μήτρα $\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$ να ονομάζεται R δηλαδή

$$R = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Παράδειγμα 1.1.1

Έστω το σύστημα μίας εισόδου μίας εξόδου, που παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, το οποίο και περιγράφεται από τις κάτωθι εξισώσεις κατάστασης

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} z(t) \quad (9)$$

και

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] \cdot X$$

Εν προκειμένω, προφανώς,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0 \quad 0] \text{ και } D = 0.$$

Εάν θεωρήσουμε ότι η είσοδος του συστήματος είναι η βηματική συνάρτηση, τότε, όπως έχουμε δείξει, η λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (9) είναι η ακόλουθη

$$X = P \cdot \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 7/2 \\ -14 \\ 7/6 \end{bmatrix} z(t).$$

Ελέγχουμε αν ο πίνακας $\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Στο προκείμενο παράδειγμα ισχύει

$$\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και κατά συνέπεια το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Παράδειγμα 2

Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z(t),$$

$$y(t) = [1 \quad -2 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

Όπου $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = [1 \quad -2 \quad -1]$ και $D = 0$.

Ο πίνακας παρατηρησιμότητας γράφεται

$$R = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -10 & 0 & -2 \\ 12 & -32 & 0 \end{bmatrix}$$

και έχει τάξη $\text{rank}(\mathbf{R}) = 3$ αφού οι στήλες του $\mathbf{R}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες ή ισοδυνάμως η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός. Συνεπώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

1.2 Παρατηρησιμότητα συστήματος πολλών εξόδων.

Θα περιγράψουμε τη μέθοδο στην περίπτωση που το σύστημα έχει πολλές εξόδους και μία είσοδο με προφανή επέκταση στην περίπτωση πολλών εισόδων. Ειδικότερα, θα περιγράψουμε αναλυτικά την περίπτωση των τριών εξόδων μίας εισόδου, θα διατυπώσουμε το γενικό κριτήριο παρατηρησιμότητας και θα δώσουμε ένα παράδειγμα με δύο εξόδους και μία είσοδο. Πράγματι, έστω το ΓΧΑ σύστημα 3^{ης} τάξης με πίνακα

καταστάσεων κατά τα γνωστά $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ τρεις εξόδους $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$, αντίστοιχο

διάνυσμα εξόδου $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix}$ και είσοδο $z(t)$ το οποίον περιγράφεται από το σύστημα

διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}z(t) \quad (10. \alpha)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{D}z(t) \quad (10. \beta)$$

Προφανώς, εν προκειμένω, ο πίνακας $\mathbf{C}$ είναι διαστάσεων 3×3 και ο πίνακας $\mathbf{D}$ διαστάσεων 3×1 . Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων των μεταβλητών κατάστασης έχει πάλι λύση της μορφής

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{X}(0^+) + \mathbf{X}^e(t) \quad (11)$$

όπου $\mathbf{X}^e(t)$ μια ειδική λύση άρρηκτα συνδεδεμένη με τη $z(t)$. Εκ νέου, σύμφωνα με τον ορισμό, για να είναι το σύστημα αυτό παρατηρήσιμο πρέπει η γνώση των συναρτήσεων εξόδου $\mathbf{Y}(t)$ και της εισόδου $z(t)$ κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$ να οδηγεί σε γνώση των αρχικών συνθηκών του διανύσματος κατάστασης $\mathbf{X}(0^+)$. Ορίζουμε εκ νέου τον πίνακα $\mathbf{\Omega}$ διαστάσεων $3n \times 1$

$$\Omega = \begin{bmatrix} Y \\ \frac{dY}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}Y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & \frac{dy_1(t)}{dt} & \frac{dy_2(t)}{dt} & \frac{dy_3(t)}{dt} & \dots & \frac{d^{n-1}y_1(t)}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_2(t)}{dt^{n-1}} & \frac{d^{n-1}y_3(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix}^T$$

Ορίζοντας όπως πριν τη μήτρα

$$R = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix},$$

διαστάσεων τώρα $3n \times n$ παρατηρούμε πάλι με απλή παραγωγή, ότι ισχύει η σχέση

$$\Omega = R \cdot e^{At} X(0^+) + \begin{bmatrix} C \cdot X^e \\ C \cdot \frac{dX^e}{dt} \\ \vdots \\ C \cdot \frac{d^{n-1}X^e}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \cdot z \\ D \cdot \frac{dz}{dt} \\ \vdots \\ D \cdot \frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη παρατηρησιμότητας: Για να είναι ένα σύστημα πολλών εξόδων παρατηρήσιμο, πρέπει και αρκεί να διαπιστωθεί ότι ισχύει μία εκ των κάτωθι δύο ισοδυνάμων προτάσεων:

A) Οι στήλες του R να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και

B) Ο τετραγωνικός πίνακας $R^T \cdot R$ να είναι αντιστρέψιμος δηλαδή $\det(R^T \cdot R) \neq 0$

Απόδειξη:

Για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο θα πρέπει το $X(0^+)$ να προκύπτει εξ' ολοκλήρου από τη γνώση του Ω , δηλαδή του $Y(t)$, και της εισόδου $z(t)$.

Αλλά τα Ω και $z(t)$ συνδέονται μέσω της ανωτέρω σχέσεως (10), η οποία μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής.

$$\Omega - \begin{bmatrix} C \cdot X^e \\ C \cdot \frac{dX^e}{dt} \\ \vdots \\ C \cdot \frac{d^{n-1}X^e}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \cdot z \\ D \cdot \frac{dz}{dt} \\ \vdots \\ D \cdot \frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} = R \cdot e^{At} X(0^+)$$

Πολλαπλασιάζω και τα δύο μέλη της ανωτέρω σχέσεως με R^T οπότε λαμβάνω

$$R^T \cdot \left(\Omega - \begin{bmatrix} C \cdot X^e \\ C \cdot \frac{dX^e}{dt} \\ \vdots \\ C \cdot \frac{d^{n-1}X^e}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \cdot z \\ D \cdot \frac{dz}{dt} \\ \vdots \\ D \cdot \frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \right) = R^T \cdot R \cdot e^{At} X(0^+).$$

Αλλά ο πίνακας $R^T \cdot R$ είναι πάντα τετραγωνικός, άρα για να μπορώ να λύσω την ανωτέρω εξίσωση ως προς $X(0^+)$ και δεδομένου ότι ο e^{At} έχει πάντα αντίστροφο το e^{-At} , πρέπει και αρκεί ο $R^T \cdot R$ να είναι αντιστρέψιμος. Αυτό οδηγεί στον προσδιορισμό του $X(0^+)$ μέσω της σχέσεως

$$X(0^+) = e^{-At} \cdot (R^T \cdot R)^{-1} \cdot R^T \cdot \left(\Omega - \begin{bmatrix} C \cdot X^e \\ C \cdot \frac{dX^e}{dt} \\ \vdots \\ C \cdot \frac{d^{n-1}X^e}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \cdot z \\ D \cdot \frac{dz}{dt} \\ \vdots \\ D \cdot \frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \right) \quad (11)$$

(Προσοχή!! Το $\cdot (R^T \cdot R)^{-1}$ ΔΕΝ ισούται με $(R^T)^{-1} \cdot R^{-1}$, διότι απλά οι πίνακες R και R^T εν γένει ΔΕΝ είναι τετραγωνικοί άρα δεν έχει νόημα να μιλάμε για τον αντίστροφό τους)

Θα αποδείξουμε εν συνεχεία ότι ισχύει το κάτωθι:

Θεώρημα 1: Η αντιστρεψιμότητα του $R^T \cdot R$ είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι οι στήλες του R είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Απόδειξη:

Πράγματι, για να ισχύει η γραμμική ανεξαρτησία των στηλών πρέπει και αρκεί να ισχύει η ισοδυναμία

$$R \cdot w = 0 \Leftrightarrow w = 0 \quad (12)$$

όπου w ένα διάνυσμα στήλη διαστάσεων $n \times 1$.

Πολλαπλασιάζοντας τώρα από αριστερά με R^T την εξίσωση $R \cdot w = 0$ έχουμε

$$R \cdot w = 0 \Rightarrow R^T \cdot R \cdot w = 0.$$

Εάν ο πίνακας $R^T \cdot R$ είναι αντιστρέψιμος τότε υποχρεωτικά $w = 0$ και η ευθεία συνεπαγωγή απεδείχθη, δηλαδή οι στήλες του R είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή θεωρούμε δεδομένο ότι η εξίσωση $R \cdot w = 0$ έχει μοναδική λύση την $w = 0$ δηλαδή ότι οι στήλες του R είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και πρέπει να αποδείξουμε ότι ο πίνακας $R^T \cdot R$ είναι αντιστρέψιμος. Αυτό ισοδυναμεί με το να αποδείξουμε ότι η $R^T \cdot R \cdot w = 0$ έχει μοναδική λύση την $w = 0$.

Αλλά, πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με w^T την εξίσωση $R^T \cdot R \cdot w = 0$, λαμβάνουμε

$$w^T \cdot R^T \cdot R \cdot w = 0 \Leftrightarrow (R \cdot w)^T \cdot (R \cdot w) = 0 \Leftrightarrow \|R \cdot w\| = 0 \Leftrightarrow R \cdot w = 0 \Rightarrow w = 0$$

Ο.Ε.Δ.

Παράδειγμα 3

Θεωρούμε το σύστημα τάξης 3, τριών εξόδων και δύο εισόδων που περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot X + BZ(t) \quad (13. \alpha)$$

$$Y(t) = C \cdot X + DZ(t) \quad (13. \beta)$$

Όπου

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & -3 & 2 \\ -16 & -10 & 8 & -1 \\ -8 & -6 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

B πίνακας διαστάσεων 4×2 , D πίνακας διαστάσεων 3×2

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \text{ και } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ισχύει } C \cdot A = \begin{bmatrix} 22 & 3 & -9 & 8 \\ -20 & -27 & 14 & 6 \\ 20 & 30 & -10 & -7 \end{bmatrix}, C \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 260 & 102 & -106 & 65 \\ 132 & 62 & -38 & 5 \\ -214 & -112 & 93 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\text{και } \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 1946 & 656 & -747 & 613 \\ 642 & 248 & -199 & 217 \\ -1114 & -464 & 479 & -349 \end{bmatrix} \text{ οπότε}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 22 & 3 & -9 & 8 \\ -20 & -27 & 14 & 6 \\ 20 & 30 & -10 & -7 \\ 260 & 102 & -106 & 65 \\ 132 & 62 & -38 & 5 \\ -214 & -112 & 93 & -11 \\ 1946 & 656 & -747 & 613 \\ 642 & 248 & -199 & 217 \\ -1114 & -464 & 479 & 349 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5572186 & 2012563 & -2168181 & 1740819 \\ 2012563 & 735568 & -785930 & 625711 \\ -2168181 & -785930 & 848759 & -676292 \\ 1740819 & 625711 & -676292 & 549208 \end{bmatrix}$$

$$\text{και προφανώς(!!)} \quad \det(\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R}) = 8,6639 \cdot 10^{17} \neq 0.$$

Άρα το σύστημα είναι παρατηρήσιμο. Παρατηρούμε ότι για τον έλεγχο της παρατηρησιμότητας το πλήθος των εισόδων δεν έπαιξε κανένα ρόλο. Αντιθέτως, το πλήθος των εξόδων και η τάξη του συστήματος καθόρισαν τις διαστάσεις του $\mathbf{C}$ ο οποίος, μαζί με τον $\mathbf{A}$, καθόρισαν τον $\mathbf{R}$ και την παρατηρησιμότητα. Ειδικότερα αναφέρουμε ότι αν ο αριθμός των εξόδων ισούται με την τάξη του συστήματος (την κοινή διάσταση του $\mathbf{A}$) τότε αρκεί και πρέπει να ελέγξουμε την ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{C}$ (γιατί;)(υπενθυμίζεται ότι μόνο στη συγκεκριμένη περίπτωση ο $\mathbf{C}$ είναι τετραγωνικός). Ακριβώς επειδή οι πράξεις στη ανωτέρω μέθοδο είναι πολύπλοκες, ιδίως όταν γίνονται χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή, αξίζει να κοιτάξει κανείς αν είναι «τυχερός» στο να εντοπίσει μία υποορίζουσα $n \times n$ του $\mathbf{R}$ διάφορη του μηδενός. Εναλλακτικά, μπορεί ενδεχομένως να ελέγξει την παρατηρησιμότητα μέσω του συστήματος αποσυμπλεγμένων εξισώσεων, όπως περιγράφει το κάτωθι πόρισμα του γενικού κριτηρίου που προαναφέρθηκε.

Πόρισμα: Α) Έστω ένα σύστημα μίας εισόδου μίας εξόδου του οποίου η μήτρα κατάστασης $\mathbf{A}$ διαγωνοποιείται σε διαγώνιο πίνακα $\mathbf{\Delta}$ μέσω της σχέσεως $\mathbf{\Delta} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$, όπου $\mathbf{P}$ ο αντιστρέψιμος πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του $\mathbf{A}$. Τότε, οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος διαγωνοποιούνται στη μορφή

$$\frac{dY}{dt} = \Delta \cdot Y + \tilde{B}z(t) \quad (14),$$

όπου $Y = P^{-1} \cdot X$,

Άλλα έχουμε αποδείξει ότι

$$X(t) = e^{At}X(0^+) + X^e(t) = P \cdot Y$$

Με χρήση της Y η έξοδος δίνεται μέσω της σχέσεως

$$y(t) = C \cdot X + Dz(t) = C \cdot P \cdot Y(t) + Dz(t)$$

Σε αυτή τη διαγωνοποιημένη μορφή ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο είναι ο πίνακας γραμμή $\tilde{C} = C \cdot P$ να μην έχει κανένα μηδενικό στοιχείο.

Στην περίπτωση συστημάτων πολλών εξόδων, αναγκαία συνθήκη για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο είναι ο πίνακας $\tilde{C} = C \cdot P$ να μην έχει καμία στήλη εξ' ολοκλήρου με μηδενικά στοιχεία.

Β) Σε περίπτωση που η μήτρα κατάστασης A του συστήματος γράφεται σε κανονική μορφή Jordan , μέσω της σχέσεως $\Delta^J = P^{-1} \cdot A \cdot P$, όπου τώρα P ο αντιστρέψιμος πίνακας των **γενικευμένων** ιδιοδιανυσμάτων του A και ο πίνακας Δ^J έχει μόνο Jordan blocks τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, εκ νέου ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο είναι ο πίνακας γραμμή $\tilde{C} = C \cdot P$ να μην έχει κανένα μηδενικό στοιχείο.

Ομοίως με πριν, στην περίπτωση συστημάτων πολλών εξόδων, αναγκαία συνθήκη για να είναι το σύστημα παρατηρήσιμο είναι ο πίνακας $\tilde{C} = C \cdot P$ να μην έχει καμία στήλη εξ' ολοκλήρου με μηδενικά στοιχεία.

Σχετικά παραδείγματα παρατηρήσιμων και μη συστημάτων:

Παράδειγμα 4 (Αντιστοιχεί στο προηγούμενο παράδειγμα 2.3.3)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -8 & -5 & 4 \\ -4 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Τότε Α)

Αν
$$C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Τότε $\tilde{C} = C \cdot P = [1 \quad -1 \quad 0]$

Συνεπώς το σύστημα **δεν** είναι παρατηρήσιμο.

Β) Αν όμως $C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & \frac{13}{4} & -\frac{11}{4} \end{bmatrix}$

Τότε $\tilde{C} = C \cdot P = [1 \quad -1 \quad 1]$

Συνεπώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Παράδειγμα 5 (Αντιστοιχεί στο προηγούμενο παράδειγμα 2.3.4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Τότε Α)

Αν $C = [2 \quad -2 \quad 1]$.

Τότε $\tilde{C} = C \cdot P = [1 \quad 0 \quad -1]$

Συνεπώς το σύστημα **δεν** είναι παρατηρήσιμο.

Β) Αν όμως $C = \frac{1}{2} [5 \quad -7 \quad 3]$

Τότε $\tilde{C} = C \cdot P = [1 \quad -1 \quad -1]$

Συνεπώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Παράδειγμα 6 (Αντιστοιχεί στο προηγούμενο παράδειγμα 2.3.5)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -4 & 12 & 4 \\ 7 & -2 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -\frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta^J = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Τότε Α)

Αν $\mathbf{C} = \frac{1}{2}[-13 \quad 4 \quad -3].$

Τότε $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = [-2 \quad 1 \quad 0]$

Συνεπώς το σύστημα **δεν** είναι παρατηρήσιμο.

Β) Αν όμως $\mathbf{C} = [10 \quad -4 \quad 1]$

Τότε $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = [-1 \quad -1 \quad 1]$

Συνεπώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

Παράδειγμα 7 (Αντιστοιχεί στο προηγούμενο παράδειγμα 2.3.6)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 6 & -\frac{25}{3} & -10 \\ -\frac{1}{3} & -3 & \frac{4}{3} & 2 \\ \frac{7}{3} & 3 & -\frac{16}{3} & -4 \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 14 & -2 & -1 & -11 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 14 & -2 & -7 & -14 \\ -7 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\Delta^J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Τότε Α)

Αν $\mathbf{C} = \frac{1}{3}[1 \quad -\frac{3}{8} \quad -\frac{17}{8} \quad -\frac{9}{4}].$

Τότε $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{P} = [0 \quad -1 \quad 1 \quad 1]$

Συνεπώς το σύστημα **δεν** είναι παρατηρήσιμο.

Β) Αν όμως
$$C = \frac{1}{7} [0 \quad -3 \quad -5 \quad -9]$$

Τότε
$$\tilde{C} = C \cdot P = [-1 \quad -2 \quad -1 \quad 1]$$

Συνεπώς το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

1.3 Συστηματικός τρόπος που μετατρέπει τη διαφορική εξίσωση ενός συστήματος ΓΧΑ σε παρατηρήσιμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων (Παρατηρήσιμη κανονική μορφή)

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε ένα συστηματικό τρόπο, με τον οποίον μπορούμε να μετατρέψουμε μία τυχούσα διαφορική εξίσωση σε ένα σύστημα της μορφής 1, ώστε αυτό το σύστημα να είναι πάντα παρατηρήσιμο.

Παράδειγμα 1.3.1 Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2} y + 5 \frac{d}{dt} y + 6y = \frac{d}{dt} z + z$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^+) = y_0$, και $\frac{d}{dt} y(0^+) = y'_0$.

Η παρατηρήσιμη κανονική μορφή προκύπτει επιτελώντας τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Ομαδοποιούμε τα διάφορα μεγέθη στην αντίστοιχη τάξη της παραγώγου.

$$\frac{d^2}{dt^2} (y - 0 \cdot z) + \frac{d}{dt} (5y - z) + (6y - z) = 0 \quad (15)$$

Το $0 \cdot z$ στην 2^η παράγωγο μπαίνει για να υπάρχει πλήρης σύνδεση μεταξύ των παραγώγων y και z

Βήμα 2: Επιλογή των μεταβλητών κατάστασης ώστε να οδηγηθούμε σε 1^η κανονική μορφή

Παίρνω τον όρο της παραγώγου της μεγαλύτερης τάξεως στην εξίσωση (15) και θέτω αυτόν ίσο με την πρώτη μεταβλητή κατάστασης. Στο προκείμενο ισχύει

$$x_1 = y - 0 \cdot z \quad (16)$$

Την δεύτερη μεταβλητή κατάστασης την δημιουργώ ως εξής: παραγωγίζω την μεταβλητή x_1 και προσθέτω σε αυτήν τους όρους στην αμέσως επόμενη τάξη παραγωγίσιμης της (15).

Ακολουθώ αντικαθιστώ τα μεγέθη της έκφρασης που συσχετίζονται με τις προηγούμενες μεταβλητές κατάστασης. Στο προκείμενο

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{d}{dt} x_1 + 5y - z \Rightarrow \\ x_2 &= \frac{d}{dt} x_1 + 5(x_1 + 0 \cdot z) - z \quad (17) \end{aligned}$$

Για τον όρο που δεν έχει τάξη παραγωγίσιμης εργαζόμαστε ως εξής:

Βήμα 3: Αντικαθιστούμε τις ανωτέρω μεταβλητές κατάστασης στην αρχική διαφορική εξίσωση ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} x_1 + \frac{d}{dt} \left(x_2 - \frac{d}{dt} x_1 \right) + (6y - z) &= 0 \Leftrightarrow \\ (6y - z) &= -\frac{d}{dt} x_2 \end{aligned}$$

Και μέσω και της (16) έχουμε τελικά

$$6(x_1 + 0 \cdot z) - z = -\frac{d}{dt} x_2. \quad (18)$$

Παρατήρηση 1: παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της σχέσης (18) προκύπτει από την αναδρομική λογική με την οποία χρησιμοποιήθηκαν οι μεταβλητές κατάστασης. Το εν λόγω σύστημα είναι 2^{ης} τάξης και κατά συνέπεια, στο τελευταίο βήμα, προκύπτει παράγωγος της μεταβλητής x_2 , της μόνης που δεν παραγωγίσαμε κατά τη διαδικασία επιλογής-γραφής των μεταβλητών κατάστασης.

Ομαδοποιούμε το σύστημα εξισώσεων (16), (17), (18) σε μητρική μορφή

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - 5 \cdot 0 \\ 1 \end{bmatrix} z \quad (19)$$

Επίσης εκμεταλλευόμενοι τις αρχικές συνθήκες και τις (16), (17), δηλαδή από τους τύπους ορισμού των μεταβλητών κατάστασης x_1, x_2 προκύπτει η κάτωθι σχέση

$$\begin{bmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' + 5y_0 - z(0^+) \end{bmatrix} \quad (20)$$

Και τελικά έχουμε για το y τη σχέση

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot z$$

δηλαδή,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 - 5 \cdot 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 0] \text{ και } D = 0$$

Παρατήρηση 2: : Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ κατά τα γνωστά, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

Διαπιστώνουμε ότι η ιδιοεξίσωση του πίνακα $\mathbf{A}$ έχει ακριβώς τους ίδιους συντελεστές με αυτούς του αριστερού μέλους της αρχικής εξίσωσης που αφορά το y . Επειδή δε, όπως έχουμε ήδη δείξει, οι συντελεστές αυτοί είναι συντελεστές του παρονομαστή της αντίστοιχης συνάρτησης μεταφοράς, διαπιστώνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι ακριβώς ίδιες με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Παράδειγμα 1.3.2 Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\frac{d^4}{dt^4}y - 7\frac{d^3}{dt^3}y + 13\frac{d^2}{dt^2}y - 2\frac{d}{dt}y - y = 3\frac{d^3}{dt^3}z - 8\frac{d^2}{dt^2}z + \frac{d}{dt}z - 5z \quad (21)$$

με αρχικές συνθήκες

$$y(0^+) = y_0, \frac{d}{dt}y(0^+) = y_0', \frac{d^2}{dt^2}y(0^+) = y_0'', \frac{d^3}{dt^3}y(0^+) = y_0''', \frac{d^4}{dt^4}y(0^+) = y_0''''.$$

Για να το γράψουμε σε πρώτη κανονική μορφή, επιτελούμε τα εξής:

Βήμα 1: Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο αριστερό μέλος και ομαδοποιούμε.

$$\frac{d^4}{dt^4}y + \frac{d^3}{dt^3}(-7y - 3z) + \frac{d^2}{dt^2}(13y + 8z) + \frac{d}{dt}(2y - z) + (-y + 5z) = 0 \quad (22)$$

Βήμα 2: α) Θέτουμε $x_1 = y - 0z = y$

$$\text{b) Θέτουμε } x_2 = \frac{d}{dt}x_1 + (-7y - 3z) \Leftrightarrow x_2 = \frac{d}{dt}x_1 - 7x_1 - 3z$$

$$\text{c) Θέτουμε } x_3 = \frac{d}{dt}x_2 + (13y + 8z) \Leftrightarrow x_3 = \frac{d}{dt}x_2 + 13x_1 + 8z$$

$$\text{d) Θέτουμε } x_4 = \frac{d}{dt}x_3 + (2y - z) \Leftrightarrow x_4 = \frac{d}{dt}x_3 + 2x_1 - z$$

Βήμα 3: Αντικαθιστούμε τις ανωτέρω μεταβλητές κατάστασης στην αρχική διαφορική εξίσωση ως εξής:

$$\text{Ο όρος που δεν παραγωγίζεται γίνεται: } -y + 5z = -x_1 + 5z$$

$$\text{Ο όρος πρώτης παραγώγου γίνεται: } \frac{d}{dt}(2y - z) = \frac{d}{dt}\left(x_4 - \frac{d}{dt}x_3\right)$$

$$\text{Ο όρος δεύτερης παραγώγου γίνεται: } \frac{d^2}{dt^2}(13y + 8z) = \frac{d^2}{dt^2}\left(x_3 - \frac{d}{dt}x_2\right)$$

$$\text{Ο όρος τρίτης παραγώγου γίνεται: } \frac{d^3}{dt^3}(-7y - 3z) = \frac{d^3}{dt^3}\left(x_2 - \frac{d}{dt}x_1\right)$$

$$\text{Ο όρος τετάρτης παραγώγου γίνεται: } \frac{d^4}{dt^4}y = \frac{d^4}{dt^4}x_1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες και εξισώνοντας με μηδέν προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}x_4 - x_1 + 5z = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}x_4 = x_1 - 5z$$

διότι όλες οι άλλες παράγωγοι αλληλοαναιρούνται.

Οπότε σε μητρική μορφή προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}x_1 = 7x_1 + x_2 + 3z \Leftrightarrow \frac{d}{dt}x_1 = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = -13x_1 + x_3 - 8z \Leftrightarrow \frac{d}{dt}x_2 = \begin{bmatrix} -13 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

$$\frac{d}{dt}x_3 = 2x_1 + x_4 + z \Leftrightarrow \frac{d}{dt}x_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} z$$

$$\frac{d}{dt}x_4 = x_1 - 5z \Leftrightarrow \frac{d}{dt}x_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} z$$

Αν θέσουμε $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ προκύπτει η σχέση

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} + \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} z$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη αποτελείται από τους συντελεστές με αντίθετο πρόσημο των όρων της αρχικής διαφορικής εξίσωσης από παράγωγο τρίτης τάξης έως μηδενικής.

Επίσης

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

$$\text{Δηλαδή } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ -13 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } D = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα σε αυτή τη μορφή είναι παρατηρήσιμο. Πράγματι, σχηματίζουμε τον πίνακα $\mathbf{R}$

Σημαντική παρατήρηση: Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ κατά τα γνωστά, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \left(\begin{bmatrix} 7 - \lambda & 1 & 0 & 0 \\ -13 & -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^4 - 7\lambda^3 + 13\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

Διαπιστώσαμε ότι η ιδιοεξίσωση του πίνακα $\mathbf{A}$ έχει ακριβώς τους ίδιους συντελεστές με αυτούς του αριστερού μέλους της αρχικής εξίσωσης που αφορά το y . Επειδή δε, όπως έχουμε ήδη δείξει, οι συντελεστές αυτοί είναι συντελεστές του παρονομαστή της αντίστοιχης συνάρτησης μεταφοράς, διαπιστώσαμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι ακριβώς ίδιες με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος.

Γενίκευση της μεθόδου γραφής της πρώτης κανονικής μορφής για παραγώγους οποιασδήποτε τάξης

Έστω η γενικής μορφής διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i z^{(i)}(t) \quad , \quad a_n = 1, y^{(j)}(0) = y_0^j, j = 0 \dots n-1$$

Η 1^η κανονική μορφή προκύπτει ακολουθώντας τα βήματα που προαναφέραμε θέτοντας στο βήμα 2 $x_1 = y - b_n z$ και γράφοντας αναδρομικά

$$x_{i+1} = \frac{d}{dt} x_i + a_{n-i} y - b_{n-i} z = \frac{d}{dt} x_i + a_{n-i} x_1 + (a_{n-i} b_n - b_{n-i}) z, \quad x_{n+1} = 0, \\ i = 1 \dots n$$

Ομαδοποιούμε τις εξισώσεις αυτές στο σύστημα

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} - a_{n-1} b_n \\ \vdots \\ b_0 - a_0 b_n \end{bmatrix} z, \quad y = [1 \quad 0 \quad \dots] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n z$$

2. Η έννοια της ελεγχιμότητας και σχετικά κριτήρια.

Ένα διάνυσμα $X(t)$ διαστάσεων $n \times 1$ του οποίου οι συνιστώσες $x_i(t)$ έχουν n βαθμούς ελευθερίας, είναι ελέγξιμο αν υπάρχει κάποια κατάλληλη, τμηματικά συνεχής συνάρτηση ελέγχου $z(t)$ ορισμένη στο διάστημα $(0, t]$ (η οποία συνήθως εισάγεται στο σύστημα σαν είσοδος), η οποία δύναται να οδηγήσει το $X(t)$ από την αρχική του συνθήκη $X(0^+)$ στην τελική του τιμή $X(t)$ για ένα πεπερασμένο t . Η ελεγχιμότητα μπορεί να αφορά και αρχικές συνθήκες στο t_0^+ , και μπορεί να ελεγχθεί με τα ίδια ακριβώς κριτήρια που θα περιγραφούν παρακάτω. Εάν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο για όλες τις χρονικές στιγμές t_0^+ λέγεται ολικά ελέγξιμο.

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα τάξης n μίας εισόδου που περιγράφεται από τη σχέση

$$\frac{dX}{dt} = AX + Bz(t) \quad (2.1)$$

και τη λύση αυτής

$$X(t) = e^{At} X(0^+) + e^{At} \int_{0^+}^t e^{-A\tau} Bz(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Λήμμα: Εάν ο A είναι ένας πίνακας διαστάσεων $n \times n$, τότε ο πίνακας e^{At} , όταν ορίζεται, είναι γραμμικός συνδυασμός των πρώτων n δυνάμεων του A , δηλαδή εν γένει

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(t) A^i = I\mu_0(t) + A\mu_1(t) + \dots + A^{n-1}\mu_{n-1}(t). \quad (2.3)$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με το θεώρημα Cayley – Hamilton ο A μηδενίζει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο που είναι τάξης n . Άρα ο A^n γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $A^i, i = 0, 1, \dots, n-1$.

Έστω

$$A^n = I\rho_0 + A\rho_1 + \dots + A^{n-1}\rho_{n-1}.$$

Αλλά, τότε και ο A^{n+1} γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός αυτών των δυνάμεων του A αφού

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \cdot A = A(I\rho_0 + A\rho_1 + \dots + A^{n-1}\rho_{n-1}) = \\ &= A\rho_0 + A^2\rho_1 + \dots + A^n\rho_{n-1}. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας εκ νέου το A^n στον ανωτέρω τύπο, λαμβάνουμε

$$A^{n+1} = I\rho_0\rho_{n-1} + A(\rho_0 + \rho_1\rho_{n-1}) + A^2(\rho_1 + \rho_2\rho_{n-1}) + \dots + A^{n-1}(\rho_{n-2} + \rho_{n-1}^2).$$

Τώρα, με απλή ευθύγραμμη επαγωγή αποδεικνύεται ότι κάθε δύναμη του A μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $A^i, i = 0, 1, \dots, n-1$. Αντικαθιστώντας στο ανάπτυγμα της e^{At} ,

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots$$

προκύπτει ότι, εφόσον αυτό συγκλίνει, ισχύει η (2.3), όπου οι τελικοί συντελεστές $\mu_i(t)$ προκύπτουν από τον δέοντα συνδυασμό γινομένων και αθροισμάτων των $\rho_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ και όρων της μορφής $\frac{t^k}{k!}$.

Ο.Ε.Δ.

Σύμφωνα με τα ανωτέρω και αν η $z(t)$ είναι τμηματικώς συνεχής, η (2.2) γράφεται

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{At}X(0^+) + e^{At} \int_{0^+}^t e^{-A\tau} Bz(\tau) d\tau = \\ &= e^{At}X(0^+) + \int_{0^+}^t e^{A(t-\tau)} Bz(\tau) d\tau = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{At} \mathbf{X}(0^+) + \int_{0^+}^t \left(\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i(t-\tau) \mathbf{A}^i \right) \mathbf{B} z(\tau) d\tau \Leftrightarrow \\
\mathbf{X}(t) &= e^{At} \mathbf{X}(0^+) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^i \mathbf{B} \int_{0^+}^t \mu_i(t-\tau) z(\tau) d\tau \quad (2.4)
\end{aligned}$$

Όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικός τελεστής και εναλλάξαμε αυτό με το άθροισμα, αλλά επίσης βγάλαμε εκτός ολοκληρώματος τα γινόμενα πινάκων $\mathbf{A}^i \mathbf{B}$ εκτός των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων αφού τα στοιχεία των $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ είναι ανεξάρτητα του χρόνου. Στο σημείο αυτό ορίζουμε τους πίνακες:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (2.5)$$

και

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \int_{0^+}^t \mu_0(t-\tau) z(\tau) d\tau \\ \int_{0^+}^t \mu_1(t-\tau) z(\tau) d\tau \\ \vdots \\ \int_{0^+}^t \mu_{n-1}(t-\tau) z(\tau) d\tau \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

όπου ο $\mathbf{S}$ έχει διαστάσεις $n \times n$ και ο $\mathbf{M}(t)$ $n \times 1$.

Οπότε η σχέση (2.4) γίνεται:

$$\mathbf{X}(t) = e^{At} \mathbf{X}(0^+) + \mathbf{S} \mathbf{M}(t) \Leftrightarrow \mathbf{S} \mathbf{M}(t) = \mathbf{X}(t) - e^{At} \mathbf{X}(0^+) \quad (2.7)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το διάνυσμα των n αρχικών συνθηκών $\mathbf{X}(0^+)$ είναι δεδομένο και ότι επιθυμούμε να οδηγήσουμε το σύστημα σε μία γνωστή συναρτησιακή μορφή $\mathbf{X}(t)$, με χρήση μιας κατάλληλης εισόδου $z(t)$, δηλαδή με χρήση της $\mathbf{M}(t)$. Υπενθυμίζεται ότι η μήτρα $\mathbf{A}$ του συστήματος είναι δεδομένη, άρα και η ακριβής μορφή της e^{At} στην (2.3) επομένως και οι συναρτήσεις $\mu_i(t)$ $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Επί τη βάση των ανωτέρω, η $\mathbf{M}(t)$ υπολογίζεται από τα $\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{X}(0^+)$ και το $\mathbf{A}$ εάν και μόνο αν η $\mathbf{S}$ είναι αντιστρέψιμη και δη μέσω της σχέσεως

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{X}(t) - e^{At} \mathbf{X}(0^+) \right) \quad (2.8)$$

Άρα ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα σύστημα μίας εισόδου ελέγξιμο είναι η μήτρα

$$\mathbf{S} = [\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

να είναι αντιστρέψιμη (να έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός.)

Θα ελέγξουμε εάν τα συστήματα προηγούμενων παραδειγμάτων μίας εισόδου είναι ελέγξιμα:

Παράδειγμα 2.1: Για το σύστημα με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Ισχύει $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -42 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ -42 \\ 175 \end{bmatrix}$.

Συνεπώς $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & -42 \\ 7 & -42 & 175 \end{bmatrix}$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο δεδομένου ότι $\det(\mathbf{S}) = -637 \neq 0$. Προφανώς οι γραμμές του $\mathbf{S}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 2.2: Για το σύστημα με

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{53}{12} & -\frac{25}{6} & -1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{37}{6} & -\frac{11}{3} & -3 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Προκύπτει $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8.33 \\ -3.00 \\ -13.33 \\ -22.33 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -53.00 \\ 8.25 \\ 63.25 \\ 83.50 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 282.33 \\ -17.44 \\ -301.77 \\ -343.21 \end{bmatrix}$

Και τελικά

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 8.33 & -53.00 & 282.33 \\ 0 & -3.00 & 8.25 & -17.44 \\ 2 & -13.33 & 63.25 & -301.77 \\ 5 & -22.33 & 83.50 & -343.21 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο δεδομένου ότι $\det(S) = -409.5 \neq 0$.

Οι γραμμές του S είναι και στην περίπτωση αυτή γραμμικώς ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 2.3: Για το σύστημα που οδήγησε σε μορφή Jordan με $A = \dots$ και $B = \dots$ συνάγουμε

Στην περίπτωση πολλών εισόδων $z_i(t)$, έστω πλήθους m , η $Z(t)$ είναι ένα διάνυσμα στήλη $m \times 1$ με

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

και το σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις

$$\frac{dX}{dt} = AX + BZ(t) \quad (2.10)$$

όπου ο B είναι ένας πίνακας διαστάσεων $n \times m$. Κατά συνέπεια ο πίνακας S ο οποίος προκύπτει με εντελώς ανάλογο συλλογισμό είναι διαστάσεων $n \times (nm)$. Πράγματι ο A είναι διαστάσεων $n \times n$ ενώ ο και ο AB είναι διαστάσεων $(nn) \times (nm) = n \times m$. Ιδίως ακριβώς διαστάσεων είναι και οι πίνακες $A^2B, A^3B, \dots, A^{n-1}B$. Άρα ο πίνακας

$$S = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

είναι συνένωση n πινάκων όπου ο καθένας έχει διαστάσεις $n \times m$. Συνεπώς ο πίνακας S έχει n γραμμές και $n \cdot m$ στήλες. Δηλαδή είναι διαστάσεων $n \times (nm)$. Επίσης ο πίνακας $M(t)$, διαστάσεων $nm \times 1$.

Παράδειγμα: έστω το σύστημα με το ίδιο A διαστάσεων 3×3 που αναφέρθηκε προηγούμενα δηλαδή

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix},$$

Αλλά αυτή τη φορά με δύο εισόδους $z_1(t)$ και $z_2(t)$ και αντίστοιχο πίνακα $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Τότε
$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ -5 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{A^2B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 12 \\ 35 & -50 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς συνενώνοντας τους $\mathbf{B}, \mathbf{AB}, \mathbf{A^2B}$ τον έναν **δίπλα** στον άλλο προκύπτει

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -5 & 12 \\ -1 & -2 & -5 & 12 & 35 & -50 \end{bmatrix}$$

και προφανώς διαστάσεων 3×6

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, εάν γράψουμε το $e^{\mathbf{A}t}$ ως

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}\mu_0(t) + \mathbf{A}\mu_1(t) + \mathbf{A^2}\mu_2(t)$$

και επειδή το $\mathbf{BZ}$ είναι πίνακας 3×2 τότε σχηματίζουμε τον πίνακα $\mathbf{M}(t)$, διαστάσεων 6×1 ,

όπου

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \int_{0^+}^t \mu_0(t-\tau)z_1(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^t \mu_0(t-\tau)z_2(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^t \mu_1(t-\tau)z_1(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^t \mu_1(t-\tau)z_2(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^t \mu_2(t-\tau)z_1(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^t \mu_2(t-\tau)z_2(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

Επειδή ότι οι τρεις συνιστώσες του X $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ μπορούν τελικά, μετά την αποσύνθεσή τους, να κινηθούν η καθεμία με δική της ανεξάρτητη συναρτησιακή μορφή, δηλαδή έχουν τρεις βαθμούς ελευθερίας, **πρέπει σε κάθε μία εξίσωση του ανωτέρω συστήματος να μπορώ ανεξάρτητα από τις άλλες να μεταβώ από το $X(0^+)$ στο αντίστοιχο $x_i(t)$, με κατάλληλη επιλογή κάποιων στοιχείων του $M(t)$ δηλαδή με κατάλληλη επιλογή των $z_1(t)$ και $z_2(t)$.** Αυτή την ανεξαρτησία κινήσεως σε τρεις $x_i(t)$ από δεδομένο $X(0^+)$ μπορώ να την επιτύχω εάν και μόνο εάν οι γραμμές του S είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό αυτό, ας υποθέσουμε ότι δύο γραμμές του S είναι γραμμικώς εξαρτημένες, π.χ. η πρώτη και η δεύτερη. Τότε αυτό αμέσως συνεπάγεται ότι από το δεδομένο $X(0^+)$ μπορώ να παράξω $x_1(t)$ και $x_2(t)$ των οποίων η χρονική εξέλιξη είναι αναγκαστικά γραμμικώς εξαρτημένη. Άρα ουσιαστικά δείξαμε την ορθότητα του κάτωθι κριτηρίου:

Πρώτο κριτήριο ελεγχιμότητας για την περίπτωση πολλών εισόδων: Ένα διάνυσμα $X(t)$ διαστάσεων $n \times 1$ του οποίου οι συνιστώσες $x_i(t)$ έχουν n βαθμούς ελευθερίας, είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν οι γραμμές του πίνακα

$$S = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Είναι σαφές ότι η περίπτωση του κριτήριο ελεγχιμότητας συστήματος μίας εισόδου είναι ειδική περίπτωση του παρόντος κριτηρίου.

Όσον αφορά το συγκεκριμένο παράδειγμα, στο οποίο ο πίνακας S υπολογίστηκε ως

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -5 & 12 \\ -1 & -2 & -5 & 12 & 35 & -50 \end{bmatrix},$$

παρατηρούμε ότι ο πίνακας έχει την όλο αριστερά 3×3 υποορίζουσα διάφορη του μηδενός, άρα έχει όλες τις γραμμές του γραμμικώς ανεξάρτητες. Συνεπώς, το διάνυσμα κατάστασης $X(t)$ που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.10) είναι πλήρως ελέγξιμο.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να αναφέρουμε ότι υπάρχει ένα επιπλέον, ισοδύναμο κριτήριο με αυτό της παρατηρησιμότητας, το εξής:

Θεώρημα 2 - δεύτερο κριτήριο ελεγχιμότητας για την περίπτωση πολλών εισόδων: Ένας πίνακας S έχει όλες τις γραμμές του γραμμικώς ανεξάρτητες αν και μόνο αν ο πίνακας $S \cdot S^T$ είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς, αν η ορίζουσα του $S \cdot S^T$ είναι διάφορη του μηδενός, τότε το ΓΧΑ σύστημα με πίνακα ελεγχιμότητας S είναι ελέγξιμο.

Η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη μα αυτήν του θεωρήματος 1 ανωτέρω.

Θεώρημα 3 –ικανή και αναγκαία συνθήκη ελεγχιμότητας για σύστημα μιας εισόδου, όταν ο πίνακας A έχει διακριτές ιδιοτιμές: Έστω ένα σύστημα μίας εισόδου μίας εξόδου του οποίου η μήτρα κατάστασης A διαγωνοποιείται σε διαγώνιο πίνακα Δ μέσω της σχέσεως $\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P$, όπου P ο αντιστρέψιμος πίνακας ιδιοδιανυσμάτων του A . Τότε, οι διαφορικές εξισώσεις του συστήματος διαγωνοποιούνται στη μορφή

$$\frac{dY}{dt} = \Delta \cdot Y + \tilde{B}z(t)$$

όπου $Y = P^{-1} \cdot X$, και $\tilde{B} = P^{-1} \cdot B$.

Σε αυτή την περίπτωση ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το διάνυσμα κατάστασης X ελέγξιμο, είναι ο πίνακας $\tilde{B}$ να μην έχει κανένα μηδενικό στοιχείο.

2.1 Συστηματικός τρόπος που μετατρέπει τη διαφορική εξίσωση ενός συστήματος ΓΧΑ σε ελέγξιμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων (Ελέγξιμη κανονική μορφή)

Σε αυτή την παράγραφο θα περιγράψουμε ένα συστηματικό τρόπο, με τον οποίον μπορούμε να μετατρέψουμε μία τυχούσα διαφορική εξίσωση σε ένα σύστημα της μορφής των εξισώσεων (1. α) και (1. β), ώστε αυτό το σύστημα να είναι πάντα ελέγξιμο.

Παράδειγμα 2.1.1 Ας θεωρήσουμε εκ νέου το ΓΧΑ σύστημα

$$\frac{d^2}{dt^2}y + 5\frac{d}{dt}y + 6y = \frac{d}{dt}z + z \quad (2.1.1)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^+) = y_0$, και $\frac{d}{dt}y(0^+) = y'_0$.

Η ελέγξιμη κανονική μορφή προκύπτει επιτελώντας τα εξής βήματα:

Βήμα 1: Γράφουμε την εξίσωση σε τελεστική μορφή ως εξής:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 5\frac{d}{dt} + 6\right)y(t) = \left(\frac{d}{dt} + 1\right)z(t) \quad (2.1.2)$$

και ορίζουμε την πρώτη μεταβλητή κατάστασης x_1 μέσω της σχέσεως

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 5\frac{d}{dt} + 6\right)x_1(t) = z(t) \quad (2.1.3)$$

Δηλαδή, εάν θεωρήσουμε τους τελεστές που δρουν στην έξοδο $y(t)$ και στην είσοδο $z(t)$ στην αρχική διαφορική εξίσωση

$$D_y = \left(\frac{d^2}{dt^2} + 5 \frac{d}{dt} + 6 \right) \quad (2.1.4a) \text{ και } D_z = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) \quad (2.1.4b),$$

τότε η μεταβλητή x_1 ορίζεται μέσω της εξισώσεως

$$D_y x_1 = z(t) \quad (2.1.4c)$$

Βήμα 2: Επιλέγουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές κατάστασης μέσω αναδρομικών σχέσεων.

Εν προκειμένω,

$$x_2 = \frac{d}{dt} x_1 \quad (2.1.5)$$

Βήμα 3: Βρίσκουμε τη σχέση της εξόδου $y(t)$ και των μεταβλητών κατάστασης. Στη γενική περίπτωση, αυτή η σχέση προσδιορίζεται με χρήση μετασχηματισμού Laplace της αρχικής Δ.Ε. ως και του ορισμού της x_1 . Πράγματι, μετασχηματίζοντας κατά Laplace την αρχική διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε

$$Y(s) = \frac{(s+1)Z(s)}{(s^2+5s+6)} \quad (2.1.6),$$

ενώ μετασχηματίζοντας κατά Laplace τη σχέση ορισμού του x_1 λαμβάνουμε

$$X_1(s) = \frac{Z(s)}{(s^2+5s+6)} \quad (2.1.7)$$

Συνδυάζοντας τις (2.1.6) και (2.1.7) λαμβάνουμε

$$Y(s) = (s+1)X_1(s) \quad (2.1.8)$$

Και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace λαμβάνουμε

$$y(t) = \frac{d}{dt} x_1 + x_1 \Leftrightarrow \\ y(t) = D_z x_1(t)$$

Στο προκείμενο

$$y(t) = x_1 + x_2$$

Βήμα 4: Αντικαθιστούμε τις ανωτέρω μεταβλητές κατάστασης στην εξίσωση ορισμού του x_1 ως εξής:

$$(2.1.3) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} x_1(t) \right) + 5 \frac{d}{dt} x_1(t) + 6x_1(t) = z(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} x_2(t) + 5x_2(t) + 6x_1(t) = z(t)$$

Άρα, συνδυάζοντας αυτήν και τον ορισμό της x_2 έχουμε

$$\frac{d}{dt} x_1 = x_2$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = -6x_1(t) - 5x_2(t) + z(t)$$

Ή σε μορφή πινάκων

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z ,$$

$$y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot z$$

δηλαδή, τελικά

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \quad 1] \text{ και } D = 0$$

Για να υπολογίσουμε τις αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix}$ συναρτήσει των $y(0^+), y'(0^+)$

χρησιμοποιούμε τη σχέση $y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ καθώς και την παράγωγό της και αντικαθιστούμε στο $t = 0^+$.

Επομένως

$$y(0^+) = x_1(0^+) + x_2(0^+) ,$$

ενώ

$$\frac{d}{dt} y(t) = \mathbf{C} \frac{d}{dt} \mathbf{X} = \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t))$$

$$y'(t) = [1 \quad 1] \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(0^+)$$

Θέτοντας στην ανωτέρω σχέση $t = 0^+$ λαμβάνουμε

$$y'(0^+) - z(0^+) = -4x_2(0^+) - 6x_1(0^+)$$

Και συνολικά, σε μητρική μορφή λαμβάνουμε

$$\begin{bmatrix} y(0^+) \\ y'(0^+) - z(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0^+) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix}$$

Οπότε, εάν ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$, ο πίνακας παρατηρησιμότητας $\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}$, είναι αντιστρέψιμος οι αρχικές συνθήκες των μεταβλητών κατάστασης x_1, x_2 προκύπτουν άμεσα. ()

Παρατήρηση: Ας υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ κατά τα γνωστά, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

Διαπιστώνουμε ότι η ιδιοεξίσωση του πίνακα $\mathbf{A}$ έχει ακριβώς τους ίδιους συντελεστές με αυτούς του αριστερού μέλους της αρχικής εξίσωσης που αφορά το y . Επειδή δε, όπως έχουμε ήδη δείξει, οι συντελεστές αυτοί είναι συντελεστές του παρονομαστή της αντίστοιχης συνάρτησης μεταφοράς, διαπιστώνουμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι ακριβώς ίδιες με τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του συστήματος, όπως ακριβώς και στην περίπτωση της παρατηρησιμότητας. Αυτό σημαίνει ότι η αλλαγή της παράστασης του συστήματος, δεν επηρεάζει το φυσικό περιεχόμενο αυτού όπως ακριβώς θα έπρεπε.

Παράδειγμα 1.3.2 Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\frac{d^4}{dt^4}y - 7\frac{d^3}{dt^3}y + 13\frac{d^2}{dt^2}y - 2\frac{d}{dt}y - y = 3\frac{d^3}{dt^3}z - 8\frac{d^2}{dt^2}z + \frac{d}{dt}z - 5z \quad (2.1.9)$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^+) = y_0$, $\frac{d}{dt}y(0^+) = y'_0$, $\frac{d^2}{dt^2}y(0^+) = y''_0$, $\frac{d^3}{dt^3}y(0^+) = y'''_0$, .

Για να το γράψουμε σε πρώτη κανονική μορφή, επιτελούμε τα εξής:

Βήμα 1: Γράφουμε την εξίσωση σε τελεστική μορφή ως εξής:

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} - 7\frac{d^3}{dt^3} + 13\frac{d^2}{dt^2} - 2\frac{d}{dt} - 1 \right) y(t) = \left(3\frac{d^3}{dt^3} - 8\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt} - 5 \right) z(t) \quad (2.1.10)$$

Και ορίζουμε την πρώτη μεταβλητή κατάστασης x_1 ως

$$D_y x_1 = z(t) \quad (2.1.11)$$

Βήμα 2: Επιλέγουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές κατάστασης μέσω αναδρομικών σχέσεων.

Εν προκειμένω,

$$x_2 = \frac{d}{dt} x_1 \quad (2.1.12a)$$

$$x_3 = \frac{d}{dt} x_2 = \frac{d^2}{dt^2} x_1 \quad (2.1.12b)$$

$$x_4 = \frac{d}{dt} x_3 = \frac{d^2}{dt^2} x_2 = \frac{d^3}{dt^3} x_1 \quad (2.1.12c)$$

Βήμα 3: Βρίσκουμε τη σχέση της εξόδου $y(t)$ και των μεταβλητών κατάστασης. Στη γενική περίπτωση, αυτή η σχέση προσδιορίζεται με χρήση μετασχηματισμού Laplace της αρχικής Δ.Ε. ως και του ορισμού της x_1 . Πράγματι, μετασχηματίζοντας κατά Laplace την αρχική διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε

$$Y(s) = \frac{(3s^3 - 8s^2 + s - 5)Z(s)}{(s^4 - 7s^3 + 13s^2 - 2s - 1)} \quad (2.1.13),$$

ενώ μετασχηματίζοντας κατά Laplace τη σχέση ορισμού του x_1 λαμβάνουμε

$$X_1(s) = \frac{Z(s)}{(s^4 - 7s^3 + 13s^2 - 2s - 1)} \quad (2.1.14)$$

Συνδυάζοντας τις (2.1.13) και (2.1.14) λαμβάνουμε

$$Y(s) = (3s^3 - 8s^2 + s - 5)X_1(s) \quad (2.1.15)$$

και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$y(t) = 3 \frac{d^3}{dt^3} x_1 - 8 \frac{d^2}{dt^2} x_1 + \frac{d}{dt} x_1 - 5x_1 \Leftrightarrow$$

$$y(t) = D_z x_1(t) \Leftrightarrow \quad (2.1.16a)$$

Στο προκείμενο

$$y(t) = 3x_4 - 8x_3 + x_2 - 5x_1$$

Βήμα 4: Αντικαθιστούμε τις ανωτέρω μεταβλητές κατάστασης στην εξίσωση ορισμού του x_1 ως εξής:

$$\begin{aligned}(2.1.10) &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{d^3}{dt^3} x_1(t) \right) - 7 \frac{d^3}{dt^3} x_1(t) + 13 \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) - 2 \frac{d}{dt} x_1(t) - x_1(t) = z(t) \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} x_4(t) - 7x_4(t) + 13x_3(t) - 2x_2(t) - x_1(t) = z(t) \Leftrightarrow \\ &\frac{d}{dt} x_4(t) = x_1(t) + 2x_2(t) - 13x_3(t) + 7x_4(t) + z(t)\end{aligned}$$

Άρα, συνδυάζοντας αυτήν και τους ορισμούς των μεταβλητών κατάστασης έχουμε

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = x_2(t) \quad , \quad \frac{d}{dt} x_2(t) = x_3(t) \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt} x_3(t) = x_4(t)$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t) \quad \text{και} \quad y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}$$

Όπου

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -13 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{C} = [-5 \quad 1 \quad -8 \quad 3]$$

Υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{A}$ κατά τα γνωστά, δηλαδή

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^4 - 7\lambda^3 + 13\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

Διαπιστώνουμε εκ νέου ότι η ιδιοεξίσωση του πίνακα $\mathbf{A}$ έχει ακριβώς τους ίδιους συντελεστές με αυτούς του αριστερού μέλους της αρχικής εξίσωσης που αφορά το y .

Για να υπολογίσουμε τις αρχικές συνθήκες $x_1(0^+), x_2(0^+), x_3(0^+), x_4(0^+)$, συναρτήσεων των y_0, y'_0, y''_0, y'''_0 χρησιμοποιούμε τη σχέση $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}$ καθώς και τις παραγώγους της και αντικαθιστούμε στο $t = 0^+$.

Παραγωγίζοντας την $y(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}$ προκύπτει

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t)) \Leftrightarrow$$

$$\frac{d}{dt}y(t) - \mathbf{B}z(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

Παραγωγίζοντας την $\frac{d}{dt}y(t) = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{X}}{dt}$ προκύπτει

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \mathbf{C} \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{C} \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t)) = \mathbf{C} \left(\mathbf{A} \frac{d}{dt}\mathbf{X} + \mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) \right) =$$

$$\mathbf{C}\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t)) + \mathbf{C}\mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{X} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}z(t) + \mathbf{C}\mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}z(t) - \mathbf{C}\mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{X}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία παραγωγίζοντας τη σχέση $\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \mathbf{C} \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}$ προκύπτει

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) = \mathbf{C} \frac{d^3\mathbf{X}}{dt^3} = \mathbf{C} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{d\mathbf{X}}{dt} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t)) \right) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{C} \left(\mathbf{A} \frac{d}{dt}\mathbf{X} + \mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) \right) \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{X} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}z(t) + \mathbf{C}\mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) \right) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) + \mathbf{C}\mathbf{B} \frac{d^2}{dt^2}z(t) =$$

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^2 \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) + \mathbf{C}\mathbf{B} \frac{d^2}{dt^2}z(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{X} + \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}z(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) + \mathbf{C}\mathbf{B} \frac{d^2}{dt^2}z(t) \Rightarrow$$

$$\frac{d^3}{dt^3}y(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}z(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \frac{d}{dt}z(t) - \mathbf{C}\mathbf{B} \frac{d^2}{dt^2}z(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^3\mathbf{X}$$

Συνολικά και με αντικατάσταση στο $t = 0^+$ προκύπτει

$$\begin{bmatrix} y(0^+) \\ y'(0^+) - \mathbf{B}z(0^+) \\ y''(0^+) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}z(0^+) - \mathbf{C}\mathbf{B}z'(0^+) \\ y'''(0^+) - \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B}z(0^+) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}z'(0^+) - \mathbf{C}\mathbf{B}z''(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^3 \end{bmatrix} \mathbf{X}(0^+)$$

Επίσης με όμοιο τρόπο, αν η τάξη του συστήματος είναι ίση με n επαγωγικά προκύπτει

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) - \mathbf{CA}^{n-2}\mathbf{B}z(t) - \mathbf{CA}^{n-3}\mathbf{B}z'(t) - \dots - \mathbf{CB}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}z(t) = \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{X}$$

Γενική περίπτωση κανονικής ελέγχιμης μορφής.

Έστω η γενικής μορφής διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i z^{(i)}(t) \quad , \quad a_n = 1, y^{(j)}(0) = y_0^j, j = 0 \dots n-1$$

Στα συστήματα που μελετούμε εδώ $b_n = 0$.

Βήμα 1: ορίζουμε τους τελεστές

$$D_y = (a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0)$$

$$D_z = (b_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + b_0)$$

Καθώς και την πρώτη μεταβλητή κατάστασης x_1 μέσω της σχέσεως

$$D_y x_1 = z(t)$$

Βήμα 2: Επιλέγουμε τις υπόλοιπες μεταβλητές κατάστασης μέσω αναδρομικών σχέσεων.

Εν προκειμένω,

$$x_2 = \frac{d}{dt} x_1$$

$$x_3 = \frac{d}{dt} x_2 = \frac{d^2}{dt^2} x_1$$

$$x_4 = \frac{d}{dt} x_3 = \frac{d^2}{dt^2} x_2 = \frac{d^3}{dt^3} x_1$$

⋮

$$x_n = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x_1$$

Βήμα 3: Με χρήση μετασχηματισμού Laplace και αντιστρόφου θεμελιώνουμε ότι

$$y(t) = D_z x_1(t)$$

Με χρήση του ορισμού των μεταβλητών κατάστασης γράφουμε το $y(t)$ σε γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Βήμα 4: Γράφουμε τις ανωτέρω σχέσεις στη γνωστή μητρική μορφή.

Παρατήρηση: Εάν μας δίνουν τις αρχικές συνθήκες της εξόδου πρέπει να γράψουμε τη σχέση αυτών με το $X(0^+)$, με διαδοχικές παραγωγίσεις της σχέσεως

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}z(t)$$

και αντικατάσταση σε αυτές του t με 0^+ δεδομένου ότι η έξοδος, στην κανονική ελέγξιμη μορφή, είναι γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών κατάστασης. Πρέπει όμως να ελέγχουμε ότι το προκύπτον σύστημα έχει (μοναδική) λύση.

3^η κανονική μορφή (ελέγξιμη μορφή): Προκύπτει από την έκφραση $u(t) = \sum_{i=0}^n a_i x_1^{(i)}(t)$ και γράφοντας αναδρομικά $x_{i+1} = \frac{d}{dt} x_i$ και $u = \frac{d}{dt} x_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}$. Οπότε το y προκύπτει μέσω του μετασχηματισμού Laplace ως $Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \sum_{i=0}^n a_i s^i X_1(s) \Leftrightarrow y(t) = \sum_{i=0}^n b_i x_1^{(i)}(t) = b_n \frac{d}{dt} x_n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_{i+1}$

Ομαδοποιούμε τις εξισώσεις αυτές στο σύστημα

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u ,$$

$$y = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \cdots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

3^η κανονική μορφή (ελέγξιμη μορφή): Προκύπτει από την έκφραση $u = \frac{d^2}{dt^2} x_1 + 5 \frac{d}{dt} x_1 + 6x_1$ και γράφοντας αναδρομικά $x_2 = \frac{d}{dt} x_1$ και $\frac{d}{dt} x_2 = \frac{d^2}{dt^2} x_1 = u - 5x_2 - 6x_1$. Οπότε το y προκύπτει από $\frac{d}{dt} u + u = \frac{d^2}{dt^2} (x_2 + x_1) + 5 \frac{d}{dt} (x_2 + x_1) + 6(x_2 + x_1) = \frac{d^2}{dt^2} y + 5 \frac{d}{dt} y + 6y \Leftrightarrow y = x_1 + x_2$ Ομαδοποιούμε τις εξισώσεις αυτές στο σύστημα

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u , \quad y = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 \cdot u ,$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 3 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}$$

Κανονική μορφή Jordan: Προκύπτει από την ανάλυση της συνάρτησης μεταφοράς σε απλά κλάσματα:

$$Y(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} U(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)} U(s) = \left(\frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \right) U(s)$$

Ορίζουμε $X_1(s) = \frac{U(s)}{s+2}$, $X_2(s) = \frac{U(s)}{s+3} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u , \quad y = [-1 \quad 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u ,$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}$$

Γενίκευση της μεθόδου γραφής της πρώτης κανονικής μορφής για παραγώνους οποιασδήποτε τάξης

Έστω η γενικής μορφής διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i z^{(i)}(t) \quad , \quad a_n = 1, y^{(j)}(0) = y_0^j, j = 0 \dots n-1$$

3^η κανονική μορφή (ελέγξιμη μορφή): Προκύπτει από την έκφραση $u(t) = \sum_{i=0}^n a_i x_1^{(i)}(t)$ και γράφοντας αναδρομικά $x_{i+1} = \frac{d}{dt} x_i$ και $u = \frac{d}{dt} x_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}$. Οπότε το y προκύπτει μέσω του μετασχηματισμού Laplace ως $Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \sum_{i=0}^n a_i s^i X_1(s) \Leftrightarrow y(t) = \sum_{i=0}^n b_i x_1^{(i)}(t) = b_n \frac{d}{dt} x_n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x_{i+1}$

Ομαδοποιούμε τις εξισώσεις αυτές στο σύστημα

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad ,$$

$$y = [b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \cdots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_n u$$

Κανονική μορφή Jordan: Προκύπτει από την ανάλυση της συνάρτησης μεταφοράς σε απλά κλάσματα:

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s) = \left(b_n + \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (b_i - b_n a_i) s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \right) U(s) = \left(b_n + \frac{P_b(s)}{P_a(s)} \right) U(s)$$

$$= \left(b_n + \sum_{j=1}^v \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{q_{j,k}}{(s - \lambda_j)^{m_j-k}} \right) U(s)$$

Όπου το λ_j είναι ρίζα του $P_a(s)$ με πολλαπλότητα m_j . Οι συντελεστές $q_{j,k}$ μπορούν να υπολογιστούν πολλαπλασιάζοντας το άθροισμα των κλασμάτων με τον κατάλληλο όρο $(s - \lambda_j)^{m_j}$ ο οποίος αφήνει το άθροισμα απλών κλασμάτων στη μορφή $O((s - \lambda_j)^{m_j}) + \sum_{k=0}^{m_j-1} q_{j,k} O((s - \lambda_j)^k)$. Οπότε παραγωγίζοντας p φορές και αντικαθιστώντας $s = \lambda_j$ απομονώνεται το $q_{j,p}$.

$$\left. \frac{d^p}{ds^p} \frac{(s - \lambda_i)^{m_i} P_a(s)}{P_a(s)} \right|_{s=\lambda_i} = \frac{d^p}{ds^p} \sum_{j=1}^v \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{q_{j,k} (s - \lambda_i)^{m_i}}{(s - \lambda_j)^{m_j-k}} \bigg|_{s=\lambda_i} = \frac{d^p}{ds^p} \frac{q_{i,p} (s - \lambda_i)^{m_i}}{(s - \lambda_i)^{m_i-p}} \bigg|_{s=\lambda_i} = p! q_{i,p}$$

$$q_{j,k} = \frac{1}{k!} \frac{d^p}{ds^p} \frac{(s - \lambda_j)^{m_j} P_a(s)}{P_a(s)} \bigg|_{s=\lambda_j}$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μεταβλητές κατάστασης $X_{j,k} = \frac{U(s)}{(s - \lambda_j)^{m_j-k}} \Leftrightarrow (s - \lambda_j)^{m_j-k} X_{j,k} = U(s)$ οπότε αναδρομικά έχουμε $(s - \lambda_j) X_{j,m_j-1} = U(s)$ και $X_{j,k+1} = (s - \lambda_j) X_{j,k}$. Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε τις εξισώσεις καταστάσεων

$$\frac{d}{dt} x_{j,k} = \lambda_j x_{j,k} + x_{j,k+1}, \quad k = 0 \dots m_j - 2, \quad \frac{d}{dt} x_{j,m_j-1} = \lambda_j x_{j,m_j-1} + u$$

Διατάσσοντας τις $x_{j,k}$ σε διάνυσμα στήλη στην ουσία βάζουμε στη σειρά όλα τα k για κάθε j και διατάσσουμε ως προς j . Τότε το ΓΧΑ σύστημα γράφεται

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{1,m_1-1} \\ \vdots \\ x_{N,0} \\ \vdots \\ x_{N,m_N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \mathbf{J}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{1,m_1-1} \\ \vdots \\ x_{N,0} \\ \vdots \\ x_{N,m_N-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = [q_{1,0} \cdots q_{1,m_1-1} \quad \cdots \quad q_{N,0} \cdots q_{N,m_N-1}] \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ \vdots \\ x_{1,m_1-1} \\ \vdots \\ x_{N,0} \\ \vdots \\ x_{N,m_N-1} \end{bmatrix} + b_n$$

Όπου οι πίνακες $\mathbf{J}_i$ είναι πίνακες Jordan διαστάσεων $m_i \times m_i$ δηλαδή $\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 1 & 0 \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$

