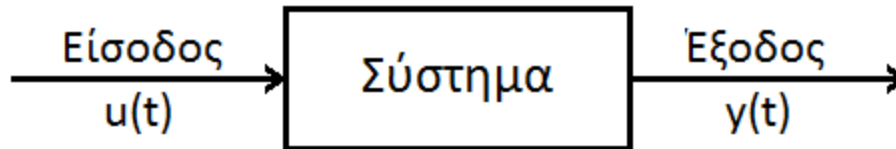


1. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΜΙΑΣ ΕΞΟΔΟΥ



Από αυστηρά μαθηματικής απόψεως, ένα οποιοδήποτε αναλογικό σύστημα είναι ένας τελεστής που δρα σε συναρτήσεις που θεωρούνται ως είσοδοι, παράγοντας έναν αριθμό εξόδων.

Θα επικεντρωθούμε, τουλάχιστον καταρχήν, σε συστήματα μιας εισόδου-μίας εξόδου. Ένα τέτοιο σύστημα είναι γραμμικό, όταν και μόνον όταν περιγράφεται από ένα γραμμικό τελεστή. Ισοδυνάμως, ισχύει ο εξής ορισμός:

ΟΡΙΣΜΟΣ (1) ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΙΑΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΜΙΑΣ ΕΞΟΔΟΥ

Ένα τέτοιο αναλογικό σύστημα $T(\cdot)$ λέγεται γραμμικό όταν για δύο οποιεσδήποτε εισόδους $x_1(t)$, $x_2(t)$ και δύο οποιαδήποτε βαθμωτά μεγέθη (δηλαδή αριθμούς) α , β ισχύει:

$$T(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha T(x_1(t)) + \beta T(x_2(t))$$

Σε εναλλακτική διατύπωση, εάν το σύστημα $T(\cdot)$, δεχόμενο σαν είσοδο την $x_1(t)$, παράγει σαν έξοδο την $y_1(t)$, ενώ με είσοδο την $x_2(t)$, παράγει σαν έξοδο την $y_2(t)$, τότε όταν το σύστημα δέχεται σαν είσοδο την $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ παράγει σαν έξοδο το $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

Προσοχή: Τα ανωτέρω πρέπει να ισχύουν για δύο οποιοσδήποτε συναρτήσεις $x_1(t)$, $x_2(t)$ και για κάθε ζεύγη αριθμών $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$.

Η μεταβλητή t κατά κανόνα παίρνει τιμές σε ένα διάστημα που είναι υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Παραδείγματα γραμμικών αναλογικών συστημάτων μιας εισόδου μιας εξόδου

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Ένα σύστημα τέτοιο ώστε $T(x(t)) = 3x(t)$ είναι προφανώς γραμμικό. (Το σύστημα $T(x(t)) = 3x(t) + 5$ είναι γραμμικό;)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Το σύστημα τέτοιο ώστε $T_D(x(t)) = \frac{dx(t)}{dt}$ είναι γραμμικό, όπως προκύπτει άμεσα από τη γραμμικότητα της παραγώγου, δηλαδή από την ταυτότητα:

$$\frac{d}{dt}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha \frac{dx_1(t)}{dt} + \beta \frac{dx_2(t)}{dt}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

Ένα σύστημα τέτοιο ώστε $T_{D2}(x(t)) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ είναι γραμμικό, όπως προκύπτει άμεσα από τη γραμμικότητα της δευτέρας παραγώγου:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \beta \frac{d^2x_2(t)}{dt^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4:

Ένα σύστημα τέτοιο ώστε $T_{Dn}(x(t)) = \frac{d^nx(t)}{dt^n}$ είναι γραμμικό, όπως προκύπτει άμεσα από τη γραμμικότητα της n-οστής παραγώγου:

$$\frac{d^n}{dt^n}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha \frac{d^nx_1(t)}{dt^n} + \beta \frac{d^nx_2(t)}{dt^n}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5:

Έστωσαν δύο σταθεροί, μη αρνητικοί αριθμοί t_1, t_2 , τότε το σύστημα

$$T_{MA}(x(w)) = \frac{1}{t_1 + t_2} \int_{t-t_1}^{t+t_2} x(w)dw$$

είναι γραμμικό, ως άμεση συνέπεια της γραμμικότητας του ολοκληρώματος. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_1 + t_2} \int_{t-t_1}^{t+t_2} (\alpha x_1(w) + \beta x_2(w))dw \\ &= \alpha \left(\frac{1}{t_1 + t_2} \int_{t-t_1}^{t+t_2} x_1(w)dw \right) + \beta \left(\frac{1}{t_1 + t_2} \int_{t-t_1}^{t+t_2} x_2(w)dw \right) \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.

Εάν το σύστημα T είναι γραμμικό, τότε για ένα πεπερασμένο πλήθος εισόδων $x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t)$, ισχύει

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_k x_k(t)) \\ = \alpha_1 T(x_1(t)) + \alpha_2 T(x_2(t)) + \dots + \alpha_k T(x_k(t)) \end{aligned}$$

Απόδειξη

Με απλή επαγωγή, χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα των πραγματικών συναρτήσεων μαζί με τον ορισμό 1, δηλαδή

$$T\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i(t)\right) = T\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i(t) + \alpha_k x_k(t)\right) = T\left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i(t)\right) + \alpha_k T(x_k(t)) = \dots$$

O.E.Δ.

Σημαντική σημείωση: Η ιδιότητα της γραμμικότητας στην έξοδο ενός γραμμικού συστήματος διατηρείται υπό προϋποθέσεις (ομοιόμορφη σύγκλιση) όταν η είσοδος

αυτού του συστήματος είναι άπειρη σειρά ακολουθιών εισόδου. Επειδή, δε, το ολοκλήρωμα είναι μια άπειρη σειρά στοιχειωδών τραπεζίων, μπορώ να εναλλάξω τη δράση του τελεστή T με το ολοκλήρωμα μιας τυχούσης συναρτήσεως/σήματος $x(t)$. Δηλαδή εάν η σύγκλιση είναι καλή, κάτι που το θεωρώ δεδομένο για τις περισσότερες εφαρμογές, μπορώ να γράψω $T\left(\int_a^b x(w, t)dw\right) = \int_a^b T(x(w, t))dw$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.

Εάν τα συστήματα $T_1, T_2, \dots, T_k$ είναι γραμμικά, τότε ένας οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός αυτών είναι γραμμικό σύστημα.

Απόδειξη

Η απόδειξη θα δοθεί με απλή επαγωγή χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα των πραγματικών συναρτήσεων. Θα δείξουμε μόνο το βήμα της επαγωγής που αφορά δύο γραμμικά συστήματα T_1, T_2 , όπου το συνολικό σύστημα είναι το $T = \lambda T_1 + \mu T_2$. Πράγματι, για κάθε ζεύγος συναρτήσεων εισόδου $x_1(t), x_2(t)$ και κάθε ζεύγος αριθμών α, β ισχύει:

$$\begin{aligned} T(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) &= (\lambda T_1 + \mu T_2)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \\ &= \lambda T_1(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) + \mu T_2(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \\ &= \alpha \lambda T_1(x_1(t)) + \beta \lambda T_1(x_2(t)) + \alpha \mu T_2(x_1(t)) + \beta \mu T_2(x_2(t)) \\ &= \alpha (\lambda T_1(x_1(t)) + \mu T_2(x_1(t))) + \beta (\lambda T_1(x_2(t)) + \mu T_2(x_2(t))) = \\ &= \alpha T(x_1(t)) + \beta T(x_2(t)) \end{aligned}$$

Ο.Ε.Δ.

Αλληλουχία γραμμικών συστημάτων

Ας θεωρήσουμε τα γραμμικά συστήματα $T_1, T_2, \dots, T_k$ και επιπλέον ότι η έξοδος του T_1 γίνεται είσοδος στο T_2 , η έξοδος του T_2 γίνεται είσοδος στο $T_3, \dots$, η έξοδος του T_{k-1} γίνεται είσοδος στο T_k . Σχηματικά,

$$\text{και συμβολικά } T_{AA}(x(t)) = T_k \left(T_{k-1} \left(\dots \left(T_2 \left(T_1(x(t)) \right) \right) \right) \right).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.

Η αλληλουχία $T_{AA}(\cdot)$ k -γραμμικών συστημάτων $T_1, T_2, \dots, T_k$ είναι επίσης γραμμικό σύστημα.

Απόδειξη

Η απόδειξη θα δοθεί, πάλι, με απλή επαγωγή. Θα δείξουμε μόνο το βήμα της επαγωγής που αφορά τρία γραμμικά συστήματα T_1, T_2, T_3 , όπου το συνολικό σύστημα είναι το $T_{AA}(\cdot) = T_3(T_2(T_1(\cdot)))$. Πράγματι, για κάθε ζεύγος συναρτήσεων εισόδου $x_1(t), x_2(t)$ και για κάθε ζεύγος αριθμών α, β ισχύει:

$$\begin{aligned} T_{AA}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) &= T_3 \left(T_2 \left(T_1(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) \right) \right) = \\ &= T_3 \left(T_2 \left(\alpha T_1(x_1(t)) + \beta T_1(x_2(t)) \right) \right) = T_3 \left(\alpha T_2 \left(T_1(x_1(t)) \right) + \beta T_2 \left(T_1(x_2(t)) \right) \right) = \\ &= \alpha T_3 \left(T_2 \left(T_1(x_1(t)) \right) \right) + \beta T_3 \left(T_2 \left(T_1(x_2(t)) \right) \right) = \alpha T_{AA}(x_1(t)) + \beta T_{AA}(x_2(t)) \end{aligned}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (2) ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ ΔΥΟ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ.

Έστωσαν δύο σήματα $x(t)$, $h(t)$.

A) Για **μη**-περιοδικά σήματα, η συνέλιξη $y(t)$ ορίζεται ως:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(w)h(t-w) dw,$$

εφόσον το ολοκλήρωμα συγκλίνει.

B) Για περιοδικά σήματα με περίοδο T , η συνέλιξη $y(t)$ ορίζεται ως:

$$y(t) = \int_0^T x(w)h(t-w) dw$$

Η συνέλιξη, συχνά, συμβολίζεται με $*$. Δηλαδή, $y(t) = x(t) * h(t)$.

[parastasi_synelixis.m](#)

Ιδιότητες συνέλιξης

Αντιμεταθετικότητα: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

Προσεταιριστικότητα: $(x(t) * h(t)) * z(t) = x(t) * (h(t) * z(t))$

Επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση:

$$x(t) * (h(t) + z(t)) = x(t) * h(t) + x(t) * z(t)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. Μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων $x(t)$ και $h(t)$, όπου $x(t) = h(t) = 0$ για $t < 0^-$, ισούται με το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace των δύο συναρτήσεων (όλες οι συγκλίσεις των ολοκληρωμάτων θεωρούνται καλές). Ισοδυνάμως, εάν υπάρχουν οι μετασχηματισμοί

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} \text{ και } Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{x(t) * h(t)\}, \text{ τότε} \\ Y(s) = X(s)H(s).$$

Απόδειξη

Θα δώσουμε την απόδειξη για τη μη-περιοδική περίπτωση, δεδομένου ότι η απόδειξη στην περίπτωση της περιοδικής είναι εντελώς ανάλογη.

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(w)h(t-w) dw \right) dt.$$

Επειδή, τα όρια του δεύτερου ολοκληρώματος δεν εξαρτώνται από τη μεταβλητή t , μπορούμε να ενθέσουμε τον όρο e^{-st} εντός του δευτέρου ολοκληρώματος, οπότε προκύπτει:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_{0^-}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} x(w)h(t-w) dw \right) dt.$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά των ολοκληρωμάτων, εφόσον η σύγκλιση το επιτρέπει, πχ. είναι ομοιόμορφη, και βγάζοντας το $x(w)$ εκτός του ολοκληρώματος ως προς t , λαμβάνουμε:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} h(t-w) dt \right) x(w) dw \quad (1)$$

Αλλά από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

$$\int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} h(t-w) dt = H(s) e^{-sw} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(s) e^{-ws} x(w) dw = \int_{0^-}^{+\infty} H(s) e^{-ws} x(w) dw = \\ &= H(s) \int_{0^-}^{+\infty} e^{-ws} x(w) dw = H(s) X(s) \end{aligned}$$

Ο.Ε.Δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ (3) και διευκρίνιση.

Η βηματική συνάρτηση η οποία συνήθως συμβολίζεται ως $u(t)$, είναι εκείνη η οποία είναι μηδέν για $t < 0^-$ ένα για $t > 0^+$ και εμφανίζει ασυνέχεια στο $t = 0$.

Διευκρινίζεται ότι μία οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση μπορεί να περιοριστεί στους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς ώστε να ισχύει $x(t) = 0$ για $t < 0^-$ εάν την πολλαπλασιάσω με $u(t)$.

2. ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ (TIME INVARIANT) ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ (4) ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΩΝ (TIME INVARIANT) ΑΝΑΛΟΓΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ.

Ένα σύστημα $T(\cdot)$ λέγεται χρονικά αναλλοίωτο, όταν για κάθε ακολουθία εισόδου $x(t)$ ισχύουν τα κάτωθι:

Αν $y(t) = T(x(t))$ και ℓ οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, τότε

$$T(x(t - \ell)) = y(t - \ell).$$

Παράδειγμα 1:

Το σύστημα $y(t) = 3x(t)$ είναι προφανώς χρονικά αναλλοίωτο, αλλά το ίδιο ισχύει και για το σύστημα $y(t) = 3x^2(t)$ το οποίο δεν είναι γραμμικό.

Παράδειγμα 2:

Το σύστημα $T_D(x(t)) = \frac{dx(t)}{dt}$ είναι χρονικά αναλλοίωτο. Πράγματι, εάν στην είσοδο αυτού θέσουμε το $x(t - \ell)$ όπου ℓ οποιοσδήποτε αριθμός, ισχύει

$$T_D(x(t - \ell)) = \frac{dx(t - \ell)}{dt} = \frac{dx(z)}{dz} \Big|_{z=t-\ell} \frac{dz}{dt} \Big|_{z=t-\ell} = y(z)|_{z=t-\ell} \cdot 1 = y(t - \ell)$$

Παράδειγμα 3:

Το σύστημα $T_{Dn}(x(t)) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$ είναι χρονικά αναλλοίωτο. Πράγματι, εάν στην είσοδο αυτού θέσουμε το $x(t - \ell)$ όπου ℓ οποιοσδήποτε αριθμός, αποδεικνύεται με απλή επαγωγή ότι ισχύει:

$$T_{Dn}(x(t - \ell)) = \frac{d^n x(t - \ell)}{dt^n} = \frac{d^n x(z)}{dz^n} \Big|_{z=t-\ell} \frac{dz}{dt} \Big|_{z=t-\ell} = y(z)|_{z=t-\ell} \cdot 1 = y(t - \ell)$$

Παράδειγμα 4:

Έστωσαν δύο σταθεροί, μη αρνητικοί αριθμοί t_1, t_2 , με $t_1 + t_2 > 0$. Τότε το σύστημα

$T_{MA}(x(t)) = \frac{1}{t_1 + t_2} \int_{t-t_1}^{t+t_2} x(w)dw$ είναι χρονικά αναλλοίωτο. Πράγματι, εάν στην είσοδο αυτού θέσουμε το $x(t - \ell)$ όπου ℓ οποιοσδήποτε αριθμός, ισχύει

$$T_{MA}(x(t - \ell)) = \frac{1}{t_1 + t_2} \int_{t-\ell-t_1}^{t-\ell+t_2} x(w - \ell)dw$$

Εάν στο ολοκλήρωμα κάνουμε την αντικατάσταση $z = w - \ell$ και εάν θέσουμε $\tau = t - \ell$, τότε

$$T_{MA}(x(\tau)) = \frac{1}{t_1 + t_2} \int_{\tau-\ell-t_1}^{\tau-\ell+t_2} x(z)dz$$

Ενώ, εξ ορισμού,

$$y(t - \ell) = \frac{1}{t_1 + t_2} \int_{(t-\ell)-t_1}^{(t-\ell)+t_2} x(w)dw$$

Άρα, $T_{MA}(x(t - \ell)) = y(t - \ell)$ και το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο.

3. ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΧΡΟΝΙΚΑ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ/ΓΧΑ (LINEAR TIME INVARIANT/LTI) ΚΑΙ ΛΟΙΠΑ ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Το αιτιατό σύστημα

Αιτιατό ονομάζεται ένα σύστημα η έξοδος του οποίου εξαρτάται από προηγούμενες/παρούσες αλλά όχι από επόμενες χρονικά τιμές των εισόδων. Για παράδειγμα, για να είναι αιτιατό ένα σύστημα $y(t)$, τότε η έξοδος $y(t_0)$ πρέπει να εξαρτάται από εισόδους $x(t)$ μόνο για τιμές του t μικρότερες ή ίσες του t_0 , για κάθε t_0 .

Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο, ΓΧΑ, (linear time invariant/lti) αν είναι γραμμικό και χρονικά αναλλοίωτο ταυτόχρονα.

Παραδείγματα ΓΧΑ αναλογικών συστημάτων

- $T(x(t)) = 3x(t)$
- $T_D(x(t)) = \frac{dx(t)}{dt}$
- $T_{Dn}(x(t)) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$
- $T_{MA}(x(t)) = \frac{1}{t_1+t_2} \int_{t-t_1}^{t+t_2} x(t) dt$

4. ΚΡΟΥΣΤΙΚΗ ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΓΧΑ

Έστω ένα τυχόν γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $T(\cdot)$ και έστω ότι θέτουμε σε αυτό σαν είσοδο τη συνάρτηση $\delta(t)$, οπότε λαμβάνουμε σαν έξοδο την $h(t)$.

Δηλαδή

$$h(t) = T(\delta(t)).$$

Τότε, η γνώση του $h(t)$, που λέγεται *κρουστική απόκριση του συστήματος* T , μας δίνει τη δυνατότητα προσδιορισμού της εξόδου $y(t)$ του συστήματος, για κάθε είσοδο $x(t)$, μέσω της συνέλιξης των $x(t)$ και $h(t)$, όπως υποδεικνύει το κάτωθι:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.

Έστω ένα οποιοδήποτε γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $T(\cdot)$ με κρουστική απόκριση $h(t)$. Τότε, εάν τυχόν $x(t)$ γίνει είσοδος στο σύστημα $T(\cdot)$, προκύπτει έξοδος

$$y(t) = h(t) * x(t),$$

Δηλαδή η συνέλιξη των συναρτήσεων/σημάτων $x(t)$ και $h(t)$.

Απόδειξη θεωρήματος 5

Εκ του ορισμού του δ του Dirac ισχύει :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-w)x(w)dw$$

Αφήνουμε το γραμμικό σύστημα $T(\cdot)$ να δράσει και στα δύο μέλη της ανωτέρω εξίσωσης, όπου τονίζουμε ότι ο $T(\cdot)$ δρα μόνο σε συναρτήσεις του t αφού το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνο του t . Άρα

$$T(x(t)) = T\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-w)x(w)dw\right)$$

Αλλά σύμφωνα με την παρατήρηση που ακολουθεί το θεώρημα 1 του παρόντος κεφαλαίου μπορούμε να εναλλάξουμε τον T με το ολοκλήρωμα οπότε λαμβάνουμε

$$T(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} T(\delta(t-w))x(w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-w)x(w)dw = h(t) * x(t)$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το χρονικά αναλλοίωτο του συστήματος T

ΟΕΔ

Μετασχηματισμός Laplace - Συνάρτηση μεταφοράς ΓΧΑ

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.

Έστω $T(\cdot)$ ένα γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο σύστημα με κρουστική απόκριση $h(t)$ και $x(t)$ ένα σήμα εισόδου με $x(t), h(t) = 0$ για $t < 0^-$. Εάν

$X(s) = \mathcal{L}(x(t)), H(s) = \mathcal{L}(h(t))$ και αν η έξοδος του συστήματος είναι $y(t)$ για είσοδο $x(t)$ και $Y(s) = \mathcal{L}(y(t))$ τότε ισχύει

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s).$$

Απόδειξη: είναι άμεση συνέπεια των θεωρημάτων 5 και 4.

Σημαντικότερη παρατήρηση: Η συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ ενός ΓΧΑ είναι ανεξάρτητη των σημάτων εισόδου και εξόδου. Άρα, αν γνωρίζω το μετασχηματισμό Laplace της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ συστήματος, τότε για τυχούσα είσοδο $x(t)u(t)$ βρίσκω την έξοδο πρώτα στο πεδίο των s και μετά με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στο πεδίο του χρόνου t .

Κρουστική απόκριση και συνάρτηση μεταφοράς ΓΧΑ σε αλληλουχία (cascaded LTI)

Επειδή έχουμε αποδείξει προηγουμένως ότι ένα σύστημα που είναι αλληλουχία γραμμικών συστημάτων είναι και αυτό γραμμικό, υπάρχει μια κρουστική απόκριση $h(t)$ η οποία πλήρως περιγράφει τη συμπεριφορά αυτού του συστήματος.

Ας εξεταστεί πρώτα η περίπτωση δύο γραμμικών συστημάτων σε αλληλουχία: τότε

$$T_{AA}(x(t)) = T_2(T_1(x(t))), \text{ ας θέσουμε}$$

$y_1(t) = T_1(x(t))$ οπότε $y(t) = T_2(y_1(t))$. Άλλα επειδή τα T_1, T_2 είναι γραμμικά ισχύει με κρουστική απόκριση έστω $h_1(t)$ και $h_2(t)$ αντίστοιχα:

$$y_1(t) = h_1(t) * x(t) \quad \text{και} \quad y_2(t) = h_2(t) * y_1(t).$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη σχέση στη δεύτερη λαμβάνουμε

$$y_2(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t)) = (h_2(t) * h_1(t)) * x(t) \equiv h(t) * x(t).$$

Επειδή η ανωτέρω σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε $x(t)$ με $x(t)=0$ για $t < 0^-$ ισχύει τελικά $h(t) = (h_2(t) * h_1(t))$.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση k γραμμικών συστημάτων που δρουν σε αλληλουχία. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$T_{AA}(x(t)) = T_k \left(T_{k-1} \left(\dots \left(T_2 \left(T_1(x(t)) \right) \right) \right) \right)$$

Με απλή επαγωγή και εκμεταλλευόμενοι την προσεταιριστικότητα της συνέλιξης και τη γραμμικότητα των εν λόγω συστημάτων ισχύει τελικά

$$y(t) = (h_k(t) * h_{k-1}(t) * \dots * h_2(t) * h_1(t)) * x(t) \equiv h(t) * x(t).$$

Επειδή η ανωτέρω σχέση πρέπει να ισχύει για κάθε $x(t)$ ισχύει τελικά

$$h(t) = (h_k(t) * h_{k-1}(t) * \dots * h_2(t) * h_1(t)).$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace τις προηγούμενες σχέσεις λαμβάνουμε στο πεδίο των συχνοτήτων s :

Πρώτα για δύο συστήματα: Αφού έχουμε αποδείξει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνέλιξης δύο συναρτήσεων ισούται με το γινόμενο των μετασχηματιζομένων προκύπτουν οι σχέσεις:

$$Y_1(s) = H_1(s)X(s), \quad Y_2(s) = H_2(s)Y_1(s) \quad \text{και}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad \text{όπου} \quad H(s) = H_2(s)H_1(s)$$

Για οποιοδήποτε, δε, αριθμό συστημάτων ισχύει

$$Y_1(s) = H_1(s)X(s), \quad Y_2(s) = H_2(s)Y_1(s), \quad \dots, \quad Y_{k-1}(s) = H_{k-1}(s)Y_{k-2}(s),$$

$$Y(s) = H_k(s)Y_{k-1}(s)$$

και μετά από διαδοχικές αντικαταστάσεις

$$Y(s) = H_k(s)H_{k-1}(s) \dots H_2(s)H_1(s)X(s).$$

Επειδή, δε, το T_{AA} είναι γραμμικό, υπάρχει $H(s)$ τέτοιο ώστε $Y(s) = H(s)X(s)$ για κάθε είσοδο $X(s)$. Άρα $H(s) = H_k(s)H_{k-1}(s) \dots H_2(s)H_1(s)$.

4. ΑΝΑΛΟΓΙΚΑ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΛΩΝ ΕΙΣΟΔΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΕΞΟΔΩΝ

Ένα οποιοδήποτε σύστημα πολλών εισόδων πολλών εξόδων παριστάνεται συνήθως σχηματικά ως εξής.



Για τη διαχείριση ενός τέτοιου συστήματος είθισται να χρησιμοποιούμε τους πίνακες στήλης-διανύσματα

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \chi_1(t) \\ \chi_2(t) \\ \vdots \\ \chi_n(t) \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

Οπότε σε αυτή την περίπτωση το γραμμικό σύστημα ορίζεται ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ (5) ΑΝΑΛΟΓΙΚΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΟΛΛΩΝ ΕΙΣΟΔΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΕΞΟΔΩΝ

Έστω ένα σύστημα $\Sigma(\cdot)$, το οποίον δεχόμενο ως είσοδο το τυχόν διάνυσμα $\mathbf{X}_1(t)$ παράγει σαν έξοδο το $\mathbf{Y}_1(t)$ ενώ με είσοδο το τυχόν $\mathbf{X}_2(t)$ παράγει σαν έξοδο το $\mathbf{Y}_2(t)$. Τότε το σύστημα αυτό λέγεται γραμμικό, όταν δεχόμενο ως είσοδο το διάνυσμα $\alpha\mathbf{X}_1(t) + \beta\mathbf{X}_2(t)$, όπου (α, β) τυχόντες αριθμοί, παράγει σαν έξοδο το διάνυσμα $\alpha\mathbf{Y}_1(t) + \beta\mathbf{Y}_2(t)$.

Προσοχή: Τα ανωτέρω πρέπει να ισχύουν για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{X}_1(t)$, $\mathbf{X}_2(t)$ και για κάθε ζεύγη αριθμών $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$.

Η μεταβλητή t κατά κανόνα παίρνει τιμές σε ένα διάστημα που είναι υποσύνολο των πραγματικών αριθμών.

Θα γίνει μία εισαγωγή στη διαχείριση τέτοιων συστημάτων στην ενότητα περί χώρου καταστάσεων.