

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 1

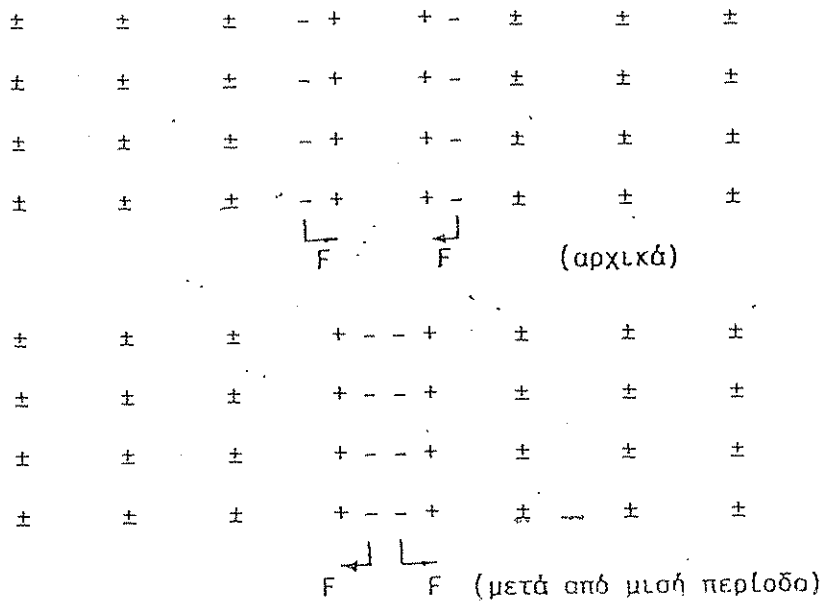
### Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

#### 1.1 Περιγραφικός ορισμός

Ίσως ο απλούστερος τρόπος να ορίσει κανείς το πλάσμα είναι λέγοντας πως "πλάσμα είναι το υλικό μέσο που έχει τις ιδιότητες που αποδίδονται στο πλάσμα". Φυσικά, τέτοιος ορισμός ενοχλεί τον αναγνώστη, μια και ορίζει δια του οριζομένου. Η παρουσίαση αυτού του "ορισμού" γίνεται σκόπιμα, με σκοπό να μεταφέρει το μήνυμα ότι ο μόνος εύκολος τρόπος να κατανοήσει κανείς τι είναι το πλάσμα, είναι πρώτα να εξοικειωθεί με τις ιδιότητές του.

Ο συνηθέστερος ορισμός, και ταυτόχρονα και ο περισσότερο σύγχρονος, περιγράφει ότι "πλάσμα είναι το υλικό μέσο, στο οποίο περιλαμβάνονται ελεύθερα φορτισμένα σωματίδια σε επαρκή αριθμό, ώστε να αναπτύσσονται συλλογικές ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του πλάσματος σε απομακρυσμένες αποστάσεις". Είναι φανερό τον ορισμό ότι οποιοδήποτε υλικό μέσο περιλαμβάνει φορτισμένα σωματίδια δεν ταξινομείται υποχρεωτικά ως πλάσμα. Πρόσθετη προϋπόθεση είναι η ανάπτυξη συλλογικών δυνάμεων. Τέτοιες δυνάμεις μπορούν να αναπτυχθούν επειδή ενώ η ηλεκτρομαγνητική δύναμη ανά σωματίδιο είναι ανάλογη του αντιστρόφου τετραγώνου της απόστασης  $r^{-2}$ , ο αριθμός σωματιδίων (σε μια στερεά γωνία, π.χ.) είναι ανάλογος του όγκου  $r^3$ . Από το γινόμενο αυτών των δύο μεγεθών προκύπτει ότι η συνολική δύναμη μπορεί να δράσει σε μεγάλες αποστάσεις. Σε ακραίες περιπτώσεις αυτή η δύναμη μπορεί να είναι ανάλογη της απόστασης  $r$ . Η ύπαρξη τέτοιων ακραίων περιπτώσεων δεν είναι απαραίτητη για να χαρακτηριστεί ένα υλικό μέσο ως πλάσμα. Αρκεί η εμφάνιση συλλογικών φαινομένων με μεγάλο βεληνεκές. Τέτοια φαινόμενα δε συμβαίνουν σε συνηθισμένα αέρια, όπου τα σωματίδια αλληλεπιδρούν μόνο όταν βρίσκονται σε μικρές αποστάσεις μεταξύ τους.

Ένα απλό παράδειγμα είναι πολύ πιο διαφωτιστικό από μια περιγραφή βασισμένη σε γενικότητες, όσο διεξοδική κι αν είναι αυτή η περιγραφή. Ας υποθέσουμε ότι σε ένα μέσο υπάρχει ίσος αριθμός ελεύθερων ηλεκτρονίων και ιόντων (π.χ. υδρογόνου). Μολονότι το μέσο αυτό μακροσκοπικά φαίνεται ουδέτερο, μικροσκοπικά θα υπάρχουν διαταραχές στην πυκνότητα (κυρίως των ηλεκτρονίων). Ας υποθέσουμε ότι αυτές οι διαταραχές είναι μονοδιάστατες, κατά μήκος του άξονα  $x$ , και μάλιστα περιοδικές. Μεταξύ κάθε πλεονάσματος και κάθε ελλείματος φορτίου αναπτύσσονται ηλεκτρικά πεδία, που τείνουν να μετατοπίσουν το τοπικό πλεονάσμα των ηλεκτρονίων σε χώρους με έλλειμμα ηλεκτρονίων. (Τα βαρεια και βραδυκίνητα ιόντα δεν προλαβαίνουν να αντιδράσουν αισθητά). Αν η κίνηση αυτή των ηλεκτρονίων δεν εμποδισθεί από άλλες αιτίες (π.χ. συγκρούσεις μεταξύ μεμονωμένων σωματιδίων), τότε τα ηλεκτρόνια ξεπερνούν τη θέση ισορροπίας και τελικά καταλήγουν πάλι σε χώρο που αρχικά είχε πλεονάσμα



Σχ. 1.1 Σχηματική απεικόνιση της ταλάντωσης του Langmuir

ηλεκτρονίων. Τότε το φαινόμενο αντιστρέφεται και επαναλαμβάνεται σπεριόριστα. Οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις που συντηρούν αυτή την ταλάντωση οφείλονται στη συλλογική δράση ομάδων (και όχι μεμονωμένων) ηλεκτρικών φορτίων, και το βεληνεκές τους ξεπερνά τα διάφορα χαρακτηριστικά μήκη του πλάσματος (που θα συζητηθούν αργότερα). Η ταλάντωση αυτή ονομάζεται ηλεκτροστατική ταλάντωση (ή ταλάντωση του Langmuir) και είναι παράδειγμα φαινομένου που βασίζεται σε συλλογικές δυνάμεις. Η ταλάντωση αυτή απεικονίζεται στο Σχ. 1.1. Στο σχήμα αυτό, η διάταξη των φορτίων σε κανονικό πλέγμα έγινε μόνο για λόγους εποπτικούς. Σε κανονικό πλάσμα τα ηλεκτρικά φορτία έχουν τυχαία διάταξη στο χώρο.

Αργότερα (στο Κεφ. 2), αφού πρώτα ορισθούν ορισμένα χαρακτηριστικά μεγέθη, θα είναι δυνατός ο ποσοτικός ορισμός του πλάσματος ως μέσου στο οποίο οι τιμές ορισμένων χαρακτηριστικών φυσικών μεγεθών ικανοποιούν ορισμένες σχέσεις. Προς το παρόν θα περιοριστούμε σε μια σύντομη και περιορισμένη παράθεση ορισμένων ιδιοτήτων, που πρόσδίδουν στην επίσημη του πλάσματος μεγάλο επιστημονικό ενδιαφέρον. Ειδικότερα, το πλάσμα:

- (α) Συνήθως είναι σε αέριο κατάσταση, επειδή σ' αυτή τη μορφή είναι πιο προσιτή η διατήρηση ελεύθερων φορτίων. Όμως υλικά στην υγρή (πυκνός ηλεκτρολύτες) ή ακόμα και σε στερεή (ημιαγωγός) κατάσταση μπορούν να συμπεριφερθούν ως πλάσμα.
- (β) Συνήθως είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, όμως με τοπικές και χρονικές διαταραχές, επειδή οι ηλεκτροστατικές δυνάμεις που αναπτύσσονται αν το πλάσμα έχει καθαρό πλεόνασμα φορτίου είναι τόσο ισχυρές, ώστε συνήθως να προκαλέσουν ταχύτατη απομάκρυνση του πλεονάσματος από το χώρο του πλάσματος. Όμως, μπορεί να συντηρηθεί πλάσμα είτε με μερική είτε ακόμα και με ολική άρση της ηλεκτρικής ουδετερότητας, αν π.χ. προσδοθεί ροή σ' ένα συστατικό του πλάσματος (π.χ. στην περίπτωση πυκνών ηλεκτρονικών δεσμών).
- (γ) Συνήθως απέχει από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, επειδή είτε τα διάφορα συστατικά του (π.χ. ηλεκτρόνια και ιόντα) χαρακτηρίζονται από διαφορετικές θερμοκρασίες, είτε ακόμα και του ίδιου συστατικού η συμπεριφορά περιγράφεται από διαφορετική θερμοκρασία ως προς δύο διαφορετικούς άξονες (π.χ. του ηλεκτρονικού πληθυσμού κατά μήκος και εγκάρσια προς μαγνητοστατικό πεδίο).
- (δ) Μπορεί να είναι είτε ομογενές (ευκολότερο στη μελέτη) είτε ανομοιογενές (συνηθέστερο στις εφαρμογές).
- (ε) Μπορεί να είναι είτε ιστροπικό είτε ανιστροπικό και συνεπώς μεγέθη όπως η ειδική αγωγιμότητα ή η επιτρεπτότητα είναι είτε μονόμετρα μεγέθη είτε τανυστές.
- (στ) Είναι φορέας ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με μεγάλη ποικιλία.
- (ζ) Μπορεί είτε να μην επηρεάζεται καθόλου από αλληλεπιδράσεις μικρού βεληνεκού μεταξύ σωματιδίων (πλάσμα υψηλών θερμοκρασιών), είτε να επηρεάζεται λίγο από τέτοιες αλληλεπιδράσεις. Δεν μπορούν όμως αυτές οι αλληλεπιδράσεις να διέπουν τη συμπεριφορά του πλάσματος, επειδή τότε καταστρέφεται η συλλογική δράση και παύει η έννοια του πλάσματος.

Τελειώνοντας αυτή την περιγραφική σπάντηση στο ερώτημα "τι είναι πλάσμα", παρατηρούμε ότι ένας τρόπος να εμφανισθεί αξιόλογος αριθμός ελεύθερων ηλεκτρικών φορτίων σ' έ-

να υλικό μέσο είναι με διαδοχική αύξηση της θερμοκρασίας, που έχει ως αποτέλεσμα αντίστοιχη αύξηση του βαθμού ιονισμού. Αυτή η διαδικασία προκάλεσε την ονομασία "τέταρτη κατάσταση της ύλης" για το πλάσμα, και μάλιστα οδήγησε στην αντιστοίχιση της τετράδας "στέρεο - υγρό - αέριο - πλάσμα" προς τα συστατικά της ύλης "γη - ύδωρ - αήρ - πυρ" του Αριστοτέλη. Αυτή η ονομασία και η αντιστοίχιση έχουν περισσότερο δημοσιολογική αξία, ενώ επιστημονικά είναι αδόκιμες. Οι μεταβάσεις από στερεά σε υγρά και από υγρά (ή κατευθείαν από στερεά) σε αέριο κατάσταση γίνονται σε αυστηρά καθορισμένες καμπύλες  $p(V)$ . Τέτοια καμπύλη δεν υπάρχει για μετάβαση στην υποτιθέμενη κατάσταση του πλάσματος. Αντίθετα, η έννοια του πλάσματος ισχύει ταυτόχρονα με μια (οποιαδήποτε) από τις τρεις καταστάσεις της ύλης. Ανεξάρτητα από αυτά όμως, ο χαρακτηρισμός του πλάσματος ως "τέταρτης κατάστασης της ύλης" έχει έστω και μεταφορική αξία, επειδή αυτός ο χαρακτηρισμός προβάλλει το γεγονός ότι στο πλάσμα εμφανίζονται φαινόμενα που δεν απαντώνται στις συνηθισμένες μορφές της ύλης.

### 1.2 Βασικό θεωρητικό υπόβαθρο για την περιγραφή του πλάσματος

Τα ελεύθερα ηλεκτρικά φορτία που κινούνται μέσα στο πλάσμα, περιγράφονται από μια πυκνότητα φορτίου  $\rho$  και μια πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J}$ . Συνήθως, τα  $\rho$  και  $\vec{J}$  εξαρτώνται από τη συντεταγμένες του χώρου και του χρόνου, δηλ. έχουμε

$$\rho = \rho(\vec{r}, t) \quad \text{και} \quad \vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$$

όπου  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Αυτές οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος προκαλούν την ανάπτυξη ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων, που υπακούουν στις εξισώσεις του Maxwell,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

(1.1)

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

όπου  $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} = 3 \times 10^8$  m/sec είναι η ταχύτητα του φωτός. Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν γραφεί για την περίπτωση του ελεύθερου χώρου, όπου  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  και  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$  (δηλ.  $\epsilon = \epsilon_0$  και  $\mu = \mu_0$ ). Στα συνηθισμένα υλικά η επιτρεπτικότητα και η μαγνητική διαπερατότητα αποκλίνουν από τις τιμές  $\epsilon = \epsilon_0$  και  $\mu = \mu_0$ , επειδή το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  και η μαγνητική επαγωγή  $\vec{B}$  παραμορφώνουν τα ουδέτερα μόρια, προκαλώντας την ανάπτυξη ηλεκτρικών και μαγνητικών διπλών, που τροποποιούν τα πεδία. Αυτές οι τροποποιήσεις λαμβάνονται υπόψη με την επιλογή κατάλληλων τιμών  $\epsilon \neq \epsilon_0$  και  $\mu \neq \mu_0$ . Όμως, στο πλάσμα τέτοια φαινόμενα είναι αμελητέα,

συγκρινόμενα με εκείνα που οφείλονται στην ύπαρξη και κίνηση ελεύθερων φορτίων, που περιγράφονται από τις πυκνότητες  $\rho$  και  $\vec{J}$ . Αυτός είναι και ο λόγος που στο πλάσμα αρκούν οι εξισώσεις Maxwell για τον ελεύθερο χώρο. Φυσικά, αν μέσα στο πλάσμα ή στα όριά του υπάρχουν π.χ. διηλεκτρικά ή μαγνητικά υλικά, τότε στον αντίστοιχο χώρο πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι πλήρεις εξισώσεις του Maxwell, με τις κατάλληλες οριακές συνθήκες για τα πεδία.

Η προηγούμενη ανάλυση θα αρκούσε, αν οι πυκνότητες  $\rho$  και  $\vec{J}$  ήταν γνωστές, π.χ. αν οφείλονταν σε προκαθορισμένα εξωτερικά ελεγχόμενα φορτία. Αυτό δεν συμβαίνει στην επιστήμη του πλάσματος. Αντίθετα, οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος οφείλονται στα φορτισμένα σωματίδια, των οποίων η συμπεριφορά διέπεται από τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, σύμφωνα με την εξίσωση της δύναμης του Lorentz,

$$\vec{F}_v = q_v (\vec{E} + \frac{d\vec{r}_v}{dt} \times \vec{B}) = m_v \frac{d^2 \vec{r}_v}{dt^2} \quad (1.2)$$

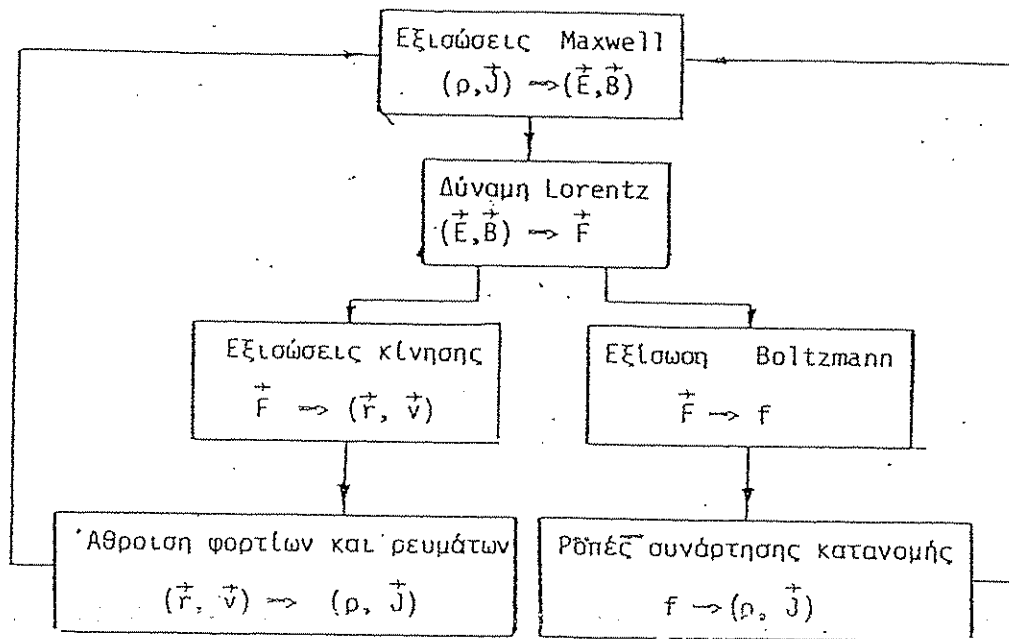
για κάθε (π.χ. το  $\nu$ -στό) φορτισμένο σωματίδιο στο πλάσμα, με μάζα  $m_v$  και ηλεκτρικό φορτίο  $q_v$ , που βρίσκεται τη χρονική στιγμή  $t$  στο σημείο  $\vec{r}_v(t)$ . Αθροίζοντας τα φορτία και τα ρεύματα στοιχειώδη ρεύματα που αντιστοιχούν στα σωματίδια, που τη χρονική στιγμή  $t$  βρίσκονται σε ένα μικρό όγκο  $\Delta V$ , παίρνουμε την πυκνότητα φορτίου και ρεύματος από τις σχέσεις:

$$\rho = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\nu} q_{\nu} \quad (1.3)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\nu} q_{\nu} \frac{d\vec{r}_v}{dt}$$

Ο όγκος  $\Delta V$  λαμβάνεται αρκετά μεγάλος, ώστε να περιλαμβάνει στατιστικά επαρκή αριθμό σωματιδίων, αλλά ταυτόχρονα μικρός σε σχέση με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις του συστήματος ή του φαινομένου που εξετάζεται.

Αν επρόκειτο να εξετασθεί σύστημα με μικρό αριθμό σωματιδίων, οι εξισώσεις του Maxwell και του Lorentz θα μπορούσαν να επιλυθούν, τουλάχιστον αριθμητικά. Αυτό όμως δε συμβαίνει στην περίπτωση του πλάσματος, επειδή ο μικρός αριθμός σωματιδίων αντιβαίνει στην έννοια της συλλογικής δράσης των σωματιδίων. Η αντιμετώπιση του μεγάλου αριθμού σωματιδίων γίνεται με προσφυγή στις μεθόδους της Στατιστικής Μηχανικής. Συγκεκριμένα, για κάθε συστατικό  $\alpha$  του πλάσματος (π.χ. ηλεκτρόνια, ιόντα κλπ.) ορίζεται η συνάρτηση κατανομής  $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , έτσι ώστε τη χρονική στιγμή  $t$  στο σημείο του χώρου  $\vec{r} = (x, y, z)$  και του χώρου ταχυτήτων  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ , η ποσότητα  $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v$  εκφράζει το συνολικό αριθμό σωματιδίων, που βρίσκεται στο στοιχειώδη όγκο  $d^3 r = dx dy dz$  και στο στοιχειώδη όγκο του χώρου ταχυτήτων  $d^3 v = dv_x dv_y dv_z$ . Η συνάρτηση κατανομής  $f_{\alpha}$  υπακούει σε μια από τις διάφορες κινητικές εξισώσεις, που γενικά έχουν τη μορφή της εξίσωσης του Boltzmann,



Σχ.1.2: Αλυσίδα εξισώσεων για την περιγραφή του πλάσματος

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_a + \frac{1}{m_a} \vec{F}_a \cdot \nabla_v f_a = \frac{\delta f_a}{\delta t} = \dot{f}_a \quad (1.4)$$

όπου  $\nabla_v = \hat{e}_x \partial/\partial v_x + \hat{e}_y \partial/\partial v_y + \hat{e}_z \partial/\partial v_z$  είναι ο τελεστής κλίσης (grad) σε χώρο ταχυτήτων,  $\vec{F}_a$  είναι η συνολική δύναμη που ασκείται στα σωματίδια της οικογένειας  $a$  (Η  $\vec{F}_a$  εξαρτάται εν γένει από το χώρο, το χρόνο και τις ταχύτητες),  $\delta f_a / \delta t$  περιγράφει τις μεταβολές στη συνάρτηση κατανομής, που οφείλονται σε αλληλεπιδράσεις που δεν καλύπτονται από τη δύναμη  $\vec{F}_a$ . Ανάλογα με τις τιμές παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το μέσο, υπάρχουν κατάλληλες αναλυτικές εκφράσεις για την ποσότητα  $\delta f_a / \delta t$ . Στο πλάσμα ιδιαίτερα συνηθισμένη είναι η ομογενής περίπτωση κατά την οποία  $\delta f_a / \delta t = 0$ , δηλαδή οι στενές αλληλεπιδράσεις θεωρούνται αμελητέες, ενώ οι μακρινές (συλλογικές) αλληλεπιδράσεις, εκφράζονται μέσω των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων από τη δύναμη Lorentz που περιλαμβάνεται στον όρο  $\vec{F}_a$ . Στην περίπτωση  $\delta f_a / \delta t = 0$ , η εξίσωση (1.4) ονομάζεται εξίσωση του Vlasov. Ανεξάρτητα πάντως από τη συγκεκριμένη κινητική εξίσωση που χρησιμοποιείται κάθε φορά, η επίλυση της δίνει σα λύση τη συνάρτηση κατανομής  $f_a$ , από την οποία για κάθε συστατικό δίνονται η πυκνότητα φορτίου  $\rho$  και η πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J}$  από τις σχέσεις:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_a q_a \int \dots \int f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (1.5)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_a q_a \int \dots \int \vec{v} f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$$

όπου  $d^3v = dv_x dv_y dv_z$  είναι το αντίστοιχο τριδιάστατο διαφορικό. Οι εκφράσεις για τα  $\rho, \vec{J}$  που προκύπτουν από τις σχέσεις (1.5), χρησιμοποιούνται στις εξισώσεις του Maxwell.

Η αλυσίδα που σχηματίζεται από την εξίσωση (1.1), μαζί είτε με τις (1.2) και (1.3) είτε με τις (1.4) και (1.5) αποδίδεται στο Σχ.1.2.

### 1.3 Διεπιστημονικότητα και εφαρμογές της επιστήμης του πλάσματος

Η σύντομη ανάπτυξη που προηγήθηκε, είχε σαν κύριο στόχο να προσδιορίσει το βασικό υπόβαθρο για τη μελέτη της επιστήμης του πλάσματος. Η παρουσίαση περιορίστηκε στις βασικές μόνο εξισώσεις, με σχετικά περιορισμένο σχολιασμό. Σε επόμενα κεφάλαια θα γίνουν διάφορες εξειδικεύσεις των εξισώσεων. Όμως, και από την εισαγωγική αυτή παρουσίαση φαίνεται ότι στην περιγραφή του πλάσματος εμπλέκονται οι βασικοί κλάδοι της φυσικής επιστήμης: ο ηλεκτρομαγνητισμός, η κλασική μηχανική και η ρευστοθερμodynamική (κλασική κινητική). Αυτή η διεπιστημονικότητα έχει σαν αποτέλεσμα, η μελέτη του πλάσματος να διαφέρει τόσο τους μηχανικούς (ηλεκτρολόγους και μηχανολόγους) όσο και τους φυσικούς. σικά, αυτό το ενδιαφέρον προέρχεται από το γεγονός ότι το πλάσμα έχει εφαρμογές σ'όλο αυτούς τους κλάδους της επιστήμης και τεχνολογίας. Όμως, οι δύο περιοχές με την εντοκότερη συγκέντρωση ερευνητικής προσπάθειας είναι οι ακόλουθες:

- (α) Ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη. Αποβλέπει στην κατασκευή και λειτουργία (μετά τα 2000 μΧ) σταθμού παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από τη σύντηξη ελαφρών πυρήνων (συνήθως των βαρέων ισotόπων του υδρογόνου, που είτε σφθονούν στη φύση, είτε παράγον εύκολα. Πρόκειται για προσπάθεια αντιγραφής του μηχανισμού που παράγει την ενέργεια

π.χ. στον ήλιο ή στις βόμβες υδρογόνου, αλλά όμως σε επίγεια εγκατάσταση και με ελεγχόμενη την έκλυση ενέργειας. Οι απαιτούμενες πυκνότητες και θερμοκρασίες για επιτευχθεί αυτή η αντίδραση σε αξιόλογο βαθμό είναι τέτοιες ώστε το μέσο αυτό (το υδρογόνο) να βρίσκεται στην κατάσταση του πλάσματος).

- (β) Μαγνητουδροδυναμικές γεννήτριες. Στα συνθωμένα ηλεκτροπαραγωγικά ζεύγη, σε πρώτη φάση η θερμική και κινητική ενέργεια του αερίου μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια μιας στερεάς κατασκευής και σε δεύτερη φάση σε ηλεκτρική ενέργεια. Η στερεά κατασκευή όμως ουσιαστικά δύο μόνο ιδιότητες καλείται να έχει: να κινείται και να έχει αγωγιμα στοιχεία (που να κλείνουν ηλεκτρικά κυκλώματα). Συνεπώς, αυτή η κατασκευή μπορεί να υποκατασταθεί από το (έτσι και αλλιώς) κινούμενο αέριο, αρκεί αυτό να έχει μία αξιόλογη ηλεκτρική αγωγιμότητα. Η διάταξη που δημιουργείται έτσι είναι μια μαγνητουδροδυναμική γεννήτρια. Η απουσία των κινουμένων μερών αντιπροσωπεύει μια κατασκευαστική απλοποίηση και ενεργειακή βελτίωση από την αποφυγή των απωλειών τριβής. Το κύριο πρόβλημα σ' αυτές τις γεννήτριες σχετίζεται με τα υλικά που πρέπει χρησιμοποιηθούν, στο εχθρικό περιβάλλον του αερίου με υψηλή θερμοκρασία και χημική δραστηριότητα.

#### 1.4. Παρουσίαση της ύλης

Αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο είναι αναγκαστικά κυρίως περιγραφικό και ποιοτικό. Οι κυριότερες έννοιες, τεχνικές και ιδιότητες που χαρακτηρίζουν την επιστήμη του πλάσματος παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια.

Αρχικά στο Κεφ.2 εισάγονται ορισμένες βασικές έννοιες π.χ. συχνότητα πλάσματος, συχνότητα συγκρούσεων και μήκος του Debye) με τις οποίες προσδιορίζονται οι θεμελιώδεις ιδιότητες του πλάσματος, με συνέπεια να ορίζεται ποσοτικά κάτω από ποιές συνθήκες ένα υλικό μέσο συμπεριφέρεται ως πλάσμα. Στη συνέχεια (Κεφ.3) παρουσιάζονται οι βασικές μέθοδοι για τη μελέτη των τροχιών σωματιδίων σε χαρακτηριστικές γεωμετρίες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, διατυπώνονται οι εξισώσεις για τη συμπεριφορά του πλάσματος ως πολλαπλού ρευστού και ειδικότερα μελετάται η διάδοση κυματικών διαταραχών, και τέλος στο Κεφ.5 εισάγονται οι μέθοδοι της στατιστικής θερμοδυναμικής για τη μελέτη φαινομένων συντονισμού σε πλάσμα με θερμική κατανομή των ταχυτήτων.

Για την εμπέδωση της ύλης, το κείμενο αυτό συμπληρώνεται με τρία παραρτήματα. Στο παράρτημα Α γίνεται μια σχολιασμένη παρουσίαση των συστημάτων MKSA (διεθνούς) και Gauss, συνοδευόμενη από πίνακες με τις βασικές εξισώσεις ηλεκτρομαγνητισμού στα δύο συστήματα, το μηχανισμό μετασχηματισμού μεταξύ των δύο συστημάτων και τέλος τις μονάδες μέτρησης, τις τιμές των φυσικών σταθερών, καθώς και τα βασικά μεγέθη του πλάσματος, στα δύο συστήματα. Το κείμενο αυτό χρησιμοποιεί αποκλειστικά το σύστημα MKSA, όμως μεγάλο τμήμα της βιβλιογραφίας της σχετικής με το πλάσμα χρησιμοποιεί το σύστημα Gauss. Για την εμπέδωση της ύλης ακολουθεί το παράρτημα Β με λυμένες ασκήσεις, ταξινομημένα κατά το κεφάλαιο της θεωρίας, στο οποίο αναφέρονται. Τέλος στο παράρτημα Γ γίνεται μια επιλεκτική αλλά και σχολιασμένη παρουσίαση της βιβλιογραφίας, που ελπίζεται ότι θα είναι χρήσιμη στον αναγνώστη που θέλει να επεκτείνει τις γνώσεις του.



## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 2

### ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΟΥ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ

#### 2.1 Μοριακή κίνηση των αερίων

Στην κινητική θεωρία, ένα αέριο εξετάζεται σαν μηχανικό σύστημα που αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό σωματιδίων (μορίων). Η κατάσταση του αερίου, που μακροσκοπικά περιγράφεται από μεγέθη όπως η πυκνότητα, θερμοκρασία και πίεση, στο μικροσκοπικό (μηχανικό) σύστημα περιγράφεται (και συνάγεται) από τις μηχανικές ιδιότητες των μεμονωμένων σωματιδίων, όπως από την απόσταση μεταξύ τους, την ενέργεια, την ταχύτητα κλπ. Αυτά τα μεγέθη συνήθως έχουν διαφορετικές τιμές για κάθε ξεχωριστό σωματίδιο, γιαυτό χρησιμοποιούνται δείκτες που προσδιορίζουν το συγκεκριμένο σωματίδιο, π.χ.  $\vec{v}_\nu$  είναι η ταχύτητα του νουστού σωματιδίου. (Φυσικά, αλλοιώτικοι δείκτες χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν άλλες εξειδικεύσεις του φυσικού μεγέθους, π.χ.  $v_{\nu x}$  είναι η ταχύτητα του σωματιδίου  $\nu$  κατά μήκος του άξονα  $x$ , κλπ).

Συχνά, η μέση τιμή ενός μηχανικού μεγέθους αυτού του συστήματος σωματιδίων, είτε ως προς όλο τον πληθυσμό των σωματιδίων, είτε ως προς ένα καταλληλο τμήμα αυτού του πληθυσμού) αντιπροσωπεύει ένα μακροσκοπικό μέγεθος. Εκφράζοντας τις μέσες τιμές με τις γωνιακές αγκύλες  $\langle \dots \rangle$ , έχουμε για τη μέση τιμή του σωματιδιακού μεγέθους  $A$  τον ορισμό:

$$\langle A_\nu \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N A_\nu \quad (2.1)$$

όπου  $N$  είναι ο συνολικός αριθμός σωματιδίων.

Η ταχύτητα ροής του αερίου, ορίζεται ως η μέση ταχύτητα των επιμέρους σωματιδίων,

$$\vec{V} = \langle \vec{v}_\nu \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^N \vec{v}_\nu \quad (2.2)$$

(Φυσικά, σε διανυσματικά μεγέθη, το σύμβολο  $\Sigma$  περιγράφει διανυσματική άθροιση). Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να συμβαίνει το αέριο να αποτελείται από υποπληθυσμούς σαφώς διακεκριμένους με διαφορετική ταχύτητα ροής ο καθένας. Σε τέτοιες περιπτώσεις διακρίνουμε π.χ. την ταχύτητα  $\vec{V}_i$  των ιόντων σε αντίθεση με την ταχύτητα  $\vec{V}_e$  των ηλεκτρονίων κλπ.

Η τυχαία ταχύτητα ενός συγκεκριμένου σωματιδίου είναι η διαφορά

$$\vec{u}_\nu = \vec{v}_\nu - \vec{V} \quad (2.3)$$

Είναι φανερό από τον ορισμό ότι η μέση τιμή της τυχαίας ταχύτητας ισούται με το μηδέν.

Η εσωτερική ενέργεια ενός αερίου περιλαμβάνει τόσο δυναμική όσο και κινητική ενέργεια (για καθένα, από τα διάφορα είδη κίνησης, δηλ. μετατόπιση, περιστροφή και δόνηση του μορίου). Σε αερία με χαμηλή πυκνότητα, όπως συνήθως συμβαίνει στο πλάσμα, οι α-

ποστάσεις μεταξύ σωματιδίων είναι μεγάλες ώστε οι αντίστοιχες αμοιβαίες δυνάμεις και ο νεπώς και η δυναμική ενέργεια είναι αμελητέες. Σε μονοατομικά τέτοια αέρια η ολική ενέργεια κάθε σωματιδίου οφείλεται μόνο στις μετατοπίσεις του σωματιδίου. Συνεπώς, η ενέργεια του σωματιδίου  $v$  είναι:

$$W_v = \frac{1}{2} m_v |\vec{v}_v|^2 = \frac{1}{2} m_v |\vec{v} + \vec{u}_v|^2 \quad (2.4)$$

όπου  $m_v$  είναι η μάζα του σωματιδίου. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.1) και τη σχέση (2.4) φαίνεται ότι η μέση κινητική ενέργεια κάθε πληθυσμού περιλαμβάνει δύο όρους:

$$\langle W_v \rangle = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} m \langle u_v^2 \rangle \quad (2.5)$$

όπου  $m$  είναι η μάζα κάθε σωματιδίου του πληθυσμού. Ο πρώτος όρος περιγράφει την ενέργεια που σχετίζεται με τη μακροσκοπική κίνηση του αερίου. Ο δεύτερος όρος περιγράφει την ενέργεια που οφείλεται στις τυχαίες αποκλίσεις της ταχύτητας από τη μέση ταχύτητα.

Το μέγεθος  $\langle u_v^2 \rangle$  ονομάζεται θερμική ταχύτητα.

$$u_{\theta}^2 = \langle u_v^2 \rangle \quad (2.6)$$

συνεπώς η εσωτερική ενέργεια ανά σωματίδιο (ο δεύτερος όρος στην (2.5)) μπορεί να γραφεί

$$W_{\theta} = \frac{1}{2} m u_{\theta}^2 \quad (2.7)$$

Με προφανείς πρόσθετους όρους, η εξίσωση (2.7) μπορεί να επεκταθεί ώστε να περιλάβει τις θετικές συμβολές στη θερμική ενέργεια, που οφείλονται σε περιστροφή και σε δονήσεις μοριακών μορίων.

Στην κινητική θεωρία η απόλυτη θερμοκρασία  $T$  είναι μέτρο της θερμικής ενέργειας ανά βαθμό εσωτερικής ελευθερίας κίνησης και ισχύει η σχέση:

$$W_{\theta} = \frac{\epsilon}{2} K_B T \quad (2.8)$$

όπου  $\epsilon$  αντιπροσωπεύει τους βαθμούς ελευθερίας κίνησης. Π.χ. στα μονοατομικά αέρια  $\epsilon=3$  (τους τρεις άξονες μεταφορικής κίνησης, στα διατομικά αέρια οι δύο επιπρόσθετες περιστροφικές κινήσεις δίνουν  $\epsilon=5$ , ενώ σε υψηλές θερμοκρασίες στα διατομικά αέρια εμφανίζεται δομοριακή δόνηση με αποτέλεσμα  $\epsilon=6$ , κλπ. Η σταθερά  $K_B$  είναι το πηλίκο,  $K_B = R/N_A$ , της παγκόσμιας σταθεράς των αερίων,  $R = 8,31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ , και του αριθμού του Avogadro,  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}/\text{mol}$ . Ονομάζεται σταθερά του Boltzmann και έχει την τιμή  $K_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ . Σε ένα μονοατομικό αέριο ( $\epsilon=3$ ), η θερμική ταχύτητα εκφράζεται ως συνάρτηση της θερμοκρασίας από τη σχέση:

$$u_{\theta} = \sqrt{\frac{3K_B T}{m}} \quad (2.9)$$

Η στενή σύνδεση της ενέργειας με τη θερμοκρασία προκάλεσε τη συνήθεια, στην ει-

στήμη του πλάσματος η θερμοκρασία συχνά να μετράται όχι σε Κελβίν, Κ, αλλά σε μονάδες ενέργειας, και μάλιστα σε ηλεκτρονικά βολτ, eV. Η σχέση είναι  $1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$ , συνεπώς όταν  $k_B T = 1 \text{ eV}$ , τότε  $T = 1,16 \times 10^4 \text{ K}$ . Σημειώνεται ότι όταν αναφέρεται πλάσμα με θερμοκρασία τόσα ηλεκτρονικά βολτ, αυτό που δίνεται είναι το μέγεθος  $k_B T$ , από το οποίο προκύπτει η θερμική ενέργεια σύμφωνα με τη σχέση (2.8).

Θυμίζουμε πως ήδη από την εξίσωση (2.5) έχει γίνει μια διάκριση ανάμεσα στους διάφορους πληθυσμούς σωματιδίων που συγκροτούν το πλάσμα και τα μεγέθη  $\langle W_j \rangle$ ,  $W_B$  και  $u_B$  έχουν ορισθεί χωριστά για κάθε πληθυσμό. Αυτό είχε σαν συνέπεια ο ορισμός (2.8) της θερμοκρασίας να αναφέρεται χωριστά σε κάθε συγκεκριμένο πληθυσμό και να υπάρχει συνεπώς η δυνατότητα κάθε συστατικό του πλάσματος να έχει διαφορετική θερμοκρασία, όση προκύπτει από την αντίστοιχη θερμική ταχύτητα. Ακόμα είναι δυνατό, μολονότι δεν έχει περιληφθεί στη ανάλυση, η θερμική ταχύτητα (2.6) να έχει διαφορετική τιμή ως προς διαφορετικές κατευθύνσεις και συνεπώς να ορίζεται και διαφορετική αντίστοιχη θερμοκρασία. Τέτοιες καταστάσεις χαρακτηρίζουν αέρια απομακρυσμένα από την κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας, όπως πολύ συχνά συμβαίνει με το πλάσμα. Αντίθετα, σε αέριο σε θερμοδυναμική ισορροπία ισχύει η ισοκατανομή της θερμικής ενέργειας, που έχει ως αποτέλεσμα, η θερμική ενέργεια να είναι η ίδια σε κάθε βαθμό ελευθερίας κάθε συστατικού.

## 2.2 Συγκρούσεις

Ένα σωματίδιο που κινείται σε ελεύθερο χώρο δηλ. σε χώρο στον οποίο δεν επιδρούν οποιεσδήποτε δυνάμεις, διαγράφει ευθύγραμμη τροχιά. Αντίθετα, όταν βρίσκεται στο πεδίο δράσης κάποιου άλλου σωματιδίου, αυτή η ευθύγραμμη κίνηση διαταράσσεται. Για τις αλληλεπιδράσεις αυτές που διαταράσσουν την ευθύγραμμη κίνηση, χρησιμοποιείται γενικά ο όρος "συγκρούσεις". Οι συγκρούσεις μπορεί να είναι ελαστικές, δηλ. η ενέργεια των π.χ. δύο σωματιδίων που συμμετέχουν σε κάθε σύγκρουση είναι ίση πριν και μετά από τη σύγκρουση (αθροιστικά και για τα δύο σωματίδια), ή μη ελαστικές, όπως όταν η σύγκρουση καταλήξει σε διέγερση ή τα προϊόντα της σύγκρουσης είναι αλλοιώτικα από τα αρχικά σωματίδια (με διαφορετική συνολική μάζα). Στην παράγραφο αυτή μας ενδιαφέρουν αποκλειστικά οι ελαστικές συγκρούσεις. Οι μη ελαστικές συγκρούσεις ενδιαφέρουν την επιστήμη του πλάσματος όταν π.χ. μελετώνται θέματα παραγωγής του πλάσματος με εξιονισμό ή όταν στο πλάσμα συμβαίνουν πυρηνικές αντιδράσεις, όπως στη θερμοπυρηνική σύντηξη.

Η περιγραφή που δόθηκε για να ορισθεί η έννοια των συγκρούσεων είναι λίγο χαλαρή. Ο όρος "σύγκρουση" δεν χρησιμοποιείται σε οποιαδήποτε αλληλεπίδραση μεταξύ σωματιδίων. Ειδικότερα, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων διέπονται από τις δυνάμεις Coulomb, δυνάμεις με μεγάλο βεληνεκές. Αυτές οι αλληλεπιδράσεις συχνά εμπλέκουν ταυτόχρονα ένα μεγάλο αριθμό σωματιδίων, με αποτέλεσμα την εμφάνιση συλλογικών δυνάμεων

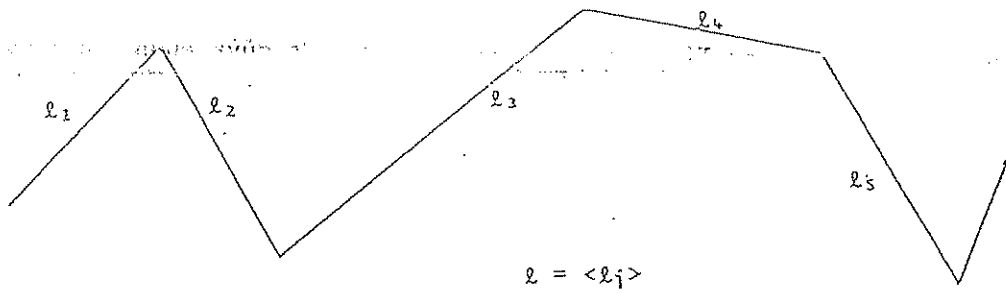
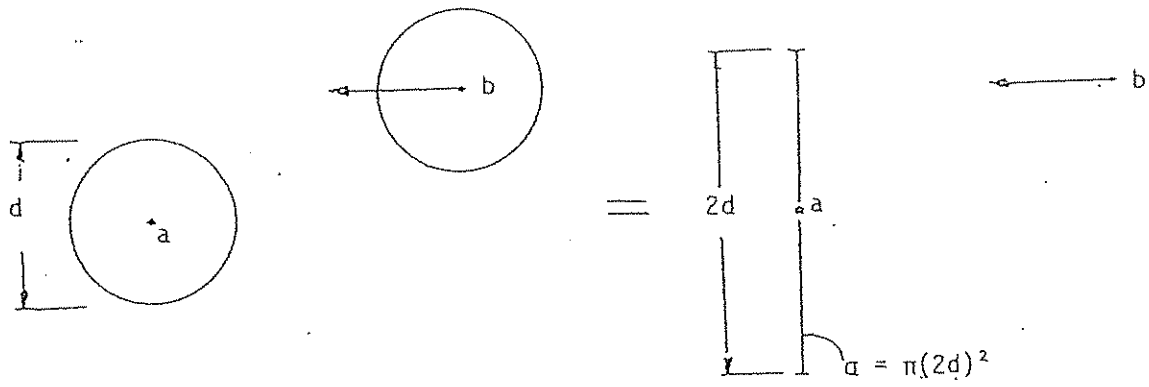
οι οποίες και είναι το καθαυτό αντικείμενο μελέτης της επιστήμης του πλάσματος. Αντίθετα, ο όρος "σύγκρούσεις" διαφυλάσσεται για να περιγράψει εκείνες τις αλληλεπιδράσεις, κατά τις οποίες το χρονικό διάστημα που διαρκεί η εκτροπή της τροχιάς (από το τέλος ενός ευθύγραμμου τμήματος μέχρι την αρχή του επόμενου) είναι μικρό σε σχέση με το χρονικό διάστημα που αντιστοιχεί σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα της τροχιάς.

Η πιθανότητα να συμβεί μια σύγκρουση μεταξύ δύο σωματιδίων είναι το πηλίκο της χρονικής διάρκειας της σύγκρουσης προς τη μέση χρονική διάρκεια των ευθύγραμμων τμημάτων μεταξύ των συγκρούσεων. Στο πλάσμα, η πυκνότητα των σωματιδίων είναι σχετικά μικρή, ώστε η πιθανότητα συγκρούσεων να είναι μικρή. Η πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα δύο συγκρούσεις είναι ακόμα πιο μικρή (το τετράγωνο της πιθανότητας να συμβεί μια σύγκρουση), επειδή αυτό το γεγονός προϋποθέτει ένα σωματίδιο να βρεθεί ταυτόχρονα κοντά σε δύο άλλα σωματίδια. Συνεπώς, οι συγκρούσεις μεταξύ τριών (ή περισσότερων) σωματιδίων συνήθως αγνοούνται. Στην επιστήμη του πλάσματος, όταν εξετάζονται συγκρούσεις, ενδιαφέρουν οι συγκρούσεις μεταξύ το πολύ δύο σωματιδίων, οι δυαδικές συγκρούσεις.

Ανάλογα με τη φύση των σωματιδίων που εμπλέκονται σε κάθε σύγκρουση, οι συγκρούσεις μπορούν να περιγραφούν με διαφορετικά μοντέλα.

- (α) Σύγκρουση μεταξύ στερεών σφαιρών: Αυτή η περίπτωση ταιριάζει όταν το ένα σωματίδιο είναι νετρόνιο και το άλλο ο,τιδήποτε, ή όταν και τα δύο σωματίδια είναι ουδέτερα άτομα. Οι δυνάμεις αναπτύσσονται μόνο όταν τα δύο σωματίδια έρθουν σε επαφή (με την κλασσική έννοια). Οι συγκρούσεις τέτοιου χαρακτήρα είναι αυτές που διέπουν τη συμπεριφορά των συνηθισμένων αερίων.
- (β) Συγκρούσεις μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων: Εκτός από τις συλλογικές δυνάμεις που αναπτύσσονται από τα φορτισμένα σωματίδια, στο πλάσμα τα φορτισμένα σωματίδια μπορούν να αλληλεπιδράσουν και με τη μορφή συγκρούσεων, όταν δύο απ'αυτά τύχει να πλησιάσουν πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Οι δυνάμεις στην περίπτωση αυτή είναι ελκτικές ή απωστικές δυνάμεις Coulomb, και έχουν ένταση ανάλογη προς το αντίστροφο τετράγωνο της απόστασης. Τέτοιες συγκρούσεις συμβαίνουν σε πλήρως εξιονισμένο πλάσμα.
- (γ) Συγκρούσεις φορτισμένου σωματιδίου με άτομο: Όταν ένα φορτισμένο σωματίδιο πλησιάσει ένα ουδέτερο άτομο, προκαλεί μία αναδιάρθρωση του ηλεκτρονιακού σύννεφου γύρω από τον πυρήνα και το άτομο συμπεριφέρεται σαν δίπολο. Το αποτέλεσμα είναι η ανάπτυξη ελκτικών δυνάμεων με ένταση ανάλογη προς την αντίστροφη πέμπτη δύναμη της απόστασης. Τέτοιες συγκρούσεις συμβαίνουν σε μερικώς εξιονισμένο πλάσμα.

Για την περιγραφή των συγκρούσεων χρησιμοποιούνται ορισμένα χαρακτηριστικά μεγέθη. Περιοριζόμαστε στην περίπτωση των στερεών σφαιρών (κι αν περιγράφει αυτό το μοντέλο περισσότερο την κατάσταση των συνηθισμένων αερίων και όχι του πλάσματος), αποκλειστικά και μόνο για λόγους απλούστευσης. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι το μέσο αποτελείται από σωματίδια (στερεές σφαίρες) με διάμετρο  $d$  και πυκνότητα  $n$  (αριθμός σωματιδίων ανά κυβικό μέτρο). Παρακολουθώντας την κίνηση ενός τέτοιου σωματιδίου, είναι φανερό ότι θα υποστεί σύγκρουση όταν το κέντρο ενός άλλου σωματιδίου βρεθεί σε απόσταση μικρότερη από



Σχ. 2.1 Ένεργος διατομή και μέση ελεύθερη διαδρομή

δύο ακτίνες από το κέντρο του σωματιδίου που παρακολουθούμε. Άλλος τρόπος να περιγραφεί αυτό είναι λέγοντας πως το παρατηρούμενο σωματίδιο συνοδεύεται από μια επιφάνεια, με εμβαδό  $\sigma = \pi d^2$  και συγκρούεται με το πρώτο σωματίδιο του οποίου το κέντρο διαπερνά αυτή την επιφάνεια, όπως φαίνεται στο σχ. 2.1. (Ο προσανατολισμός της επιφάνειας είναι εγκάρσια προς τη σχετική ταχύτητα των δύο σωματιδίων). Το εμβαδό αυτό ονομάζεται ενεργός διατομή. Η ενεργός διατομή  $\sigma$  επηρεάζει την πιθανότητα να συμβεί μια σύγκρουση, δεδομένου ότι όσο μεγαλύτερη είναι η ενεργός διατομή, τόσο μεγαλύτερη η πιθανότητα σύγκρουσης.

Το ευθύγραμμο διάστημα μεταξύ συγκρούσεων ονομάζεται ελεύθερη διαδρομή, και η μέση τιμή του ονομάζεται μέση ελεύθερη διαδρομή  $\lambda$ . Παρατηρείται ότι ο κύλινδρος με διατομή  $\sigma$  και μήκος  $\lambda$  περιλαμβάνει κατά μέσο όρο ένα σωματίδιο. Όμως, στο αέριο με πυκνότητα  $n$ , κάθε σωματίδιο καλύπτει κατά μέσο όρο όγκο ίσο με  $n^{-1}$ . Συνεπώς  $\sigma \lambda = n^{-1}$ , δηλαδή η μέση ελεύθερη διαδρομή δίνεται από τη σχέση  $\lambda = (\sigma n)^{-1}$ .

Τελευταίο μέγεθος που ενδιαφέρει, είναι η συχνότητα των συγκρούσεων, δηλαδή πόσες συγκρούσεις συμβαίνουν σε κάθε σωματίδιο στη μονάδα του χρόνου. Συμβολίζοντας με  $\nu$  αυτή τη συχνότητα παρατηρείται ότι η μέση σχετική ταχύτητα μεταξύ συγκρούσεων είναι  $\nu \lambda$ . Όμως, χαρακτηριστική τιμή της σχετικής ταχύτητας είναι η θερμοκίνητη ταχύτητα,  $u_{\theta}$ . Συνεπώς αδιαφορώντας για ενδεχόμενους αριθμητικούς συντελεστές, η συχνότητα συγκρούσεων δίνεται από τη σχέση  $\nu = u_{\theta} / \lambda = \sigma n u_{\theta}$ .

Σε ένα συνηθισμένο αέριο, οι δυαδικές συγκρούσεις παίζουν καθοριστικό ρόλο στη συμπεριφορά του. Αποτελούν το μόνο μηχανισμό ανταλλαγής ενέργειας ανάμεσα στα σωματίδια και η δράση τους έχει σαν αποτέλεσμα την αποκατάσταση θερμοκίνησης ισορροπίας. Μάλιστα, ο ρυθμός αυτής της αποκατάστασης είναι ανάλογος της συχνότητας συγκρούσεων  $\nu$ , και όπως φαίνεται από τη σχέση  $\nu = \sigma n u_{\theta}$ , η αποκατάσταση θερμοκίνησης ισορροπίας είναι ιδιαίτερα γρήγορη στην περίπτωση πυκνού και θερμού αερίου, δεδομένου ότι η ενεργός διατομή είναι σταθερή,  $\sigma = \pi d^2$ . Αντίθετα όμως, ιδιαίτερα στο πλήρως εξιονισμένο πλάσμα κυρίως συμβαίνουν συγκρούσεις μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων. Στην περίπτωση αυτή η ενεργός διατομή είναι μέγεθος με στατιστική έννοια, που προκύπτει ανάλογο προς το  $u_{\theta}^{-4}$ , με συνέπεια η συχνότητα συγκρούσεων να είναι ανάλογη προς τον αντίστροφο κύβο της θερμοκίνησης ταχύτητας. Για αυτό το λόγο σε πλάσμα με υψηλή θερμοκρασία οι συγκρούσεις είναι αμελητέες και το πλάσμα μπορεί να παραμείνει για μεγάλα χρονικά διαστήματα απομακρυσμένο από την κατάσταση θερμοκίνησης ισορροπίας. Τέλος, σε μερικώς εξιονισμένο πλάσμα αξιόλογες είναι και οι συγκρούσεις φορτισμένων σωματιδίων με ουδέτερα άτομα, για τις οποίες η ενεργός διατομή είναι ανάλογη προς το  $u_{\theta}^{-1}$ , δηλαδή η συχνότητα συγκρούσεων είναι ανεξάρτητη από τη θερμοκρασία.

### 2.3 Στοιχεία κινητικής θεωρίας

Όπως έχει αναφερθεί στην Παρ. 1.2, για την περιγραφή του μεγάλου αριθμού σωματιδίων στο πλάσμα χρησιμοποιείται η συνάρτηση κατανομής  $f$ , που υπακούει σε κινητικές εξισώσεις με τη μορφή (1.4). Επειδή στο πλάσμα συνυπάρχουν διάφοροι πληθυσμοί, συνήθως χρησιμοποιούνται περισσότερες από μια συναρτήσεις κατανομής, δηλαδή η  $f_e$  για τα ηλεκτρόνια, διάφορες  $f_i$  για διαφόρων ειδών ιόντα, κλπ.

Ας δώσουμε πρώτα μια θεωρητική αιτιολόγηση της εξίσωσης (1.4). Για να αποφύγουμε

τις έξη διαστάσεις  $(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ , περιοριζόμαστε αρχικά σε μονοδιάστατο πρόβλημα, όπου τα σωματίδια κινούνται μόνο κατά τον άξονα  $x$ . Εξειδικεύοντας την ανάλυση μόνο στα ηλεκτρόνια, εξετάζουμε ένα στοιχειώδη "όγκο"  $\Delta x \Delta v_x$ , τοποθετημένο στο σημείο  $(x, v_x)$ . Τη χρονική στιγμή  $t$  περιλαμβάνονται εκεί  $f_e(x, v_x, t) \Delta x \Delta v_x$  ηλεκτρόνια, (δηλαδή αυτό είναι το πλήθος των ηλεκτρονίων με συντεταγμένη στο διάστημα  $(x, x+\Delta x)$  και ταχύτητα στο διάστημα  $(v_x, v_x+\Delta v_x)$ ). Θέλουμε να προσδιορίσουμε τον αριθμό ηλεκτρονίων τη χρονική στιγμή  $t+\Delta t$ . Εξετάζουμε όλες τις αιτίες που προκαλούν αύξηση ή μείωση του αριθμού των ηλεκτρονίων και έχουμε (Σχ.2-2.):

$$f_e(x, v_x, t+\Delta t) \Delta x \Delta v_x - f_e(x, v_x, t) \Delta x \Delta v_x = f_e(x, v_x, t) (v_x \Delta t) \Delta v_x - f_e(x+\Delta x, v_x, t) (v_x \Delta t) \Delta v_x + f_e(x, v_x, t) \Delta x \left( \frac{F_{ex}}{m_e} \Delta t \right) - f_e(x, v_x+\Delta v_x, t) \Delta x \left( \frac{F_{ex}}{m_e} \Delta t \right) + \sum_a \delta N_{ea} \quad (2.10)$$

όπου  $F_{ex}(x, v_x, t)$  είναι η συλλογική δύναμη που ασκείται στα ηλεκτρόνια και  $m_e$  είναι η μάζα του ηλεκτρονίου. Οι όροι μετά το σύμβολο της ισότητας αντιπροσωπεύουν με τη σειρά:

(α) Τα ηλεκτρόνια των οποίων αυξάνει η τιμή της συντεταγμένης  $x$  λόγω της ταχύτητας τους  $v_x$ , με αποτέλεσμα αυτά τα ηλεκτρόνια να "μπούν (πρώτος όρος) ή να βγούν (δευτερος όρος) από τον χώρο  $\Delta x \Delta v_x$ ,

(β) Τα ηλεκτρόνια των οποίων αυξάνει η ταχύτητα  $v_x$  λόγω της επιτάχυνσης τους  $F_{ex}/m_e$ , με αποτέλεσμα πάλι αυτά τα ηλεκτρόνια να μπουν ή να βγουν από το χώρο  $\Delta x \Delta v_x$ ,

(γ) Τις επιπρόσθετες μεταβολές  $\delta N_{ea}$  του αριθμού ηλεκτρονίων στο χώρο  $\Delta x \Delta v_x$ , που οφείλονται σε συγκρούσεις ηλεκτρονίων με σωματίδια του πληθυσμού  $a$  (δηλ. ηλεκτρόνια, ιόντα, ουδέτερα άτομα κλπ). Αυτό συμβαίνει επειδή οι συγκρούσεις δεν περιγράφονται από δυνάμεις τέτοιες που να μπορούν να περιληφθούν στον όρο  $F_{ex}$ , αλλά αντίθετα η δράση τους είναι λίγο-πολύ ακαριαία και έχει συνήθως ως αποτέλεσμα σημαντικά διαφορετικές τιμές της ταχύτητας πριν και μετά τη σύγκρουση (δηλ., τα ηλεκτρόνια κατά τη σύγκρουση μετατοπίζονται από κάποιο σημείο του χώρου  $\Delta x \Delta v_x$  σε άλλο σημείο, συνήθως απομακρυσμένο, και αντίστροφα).

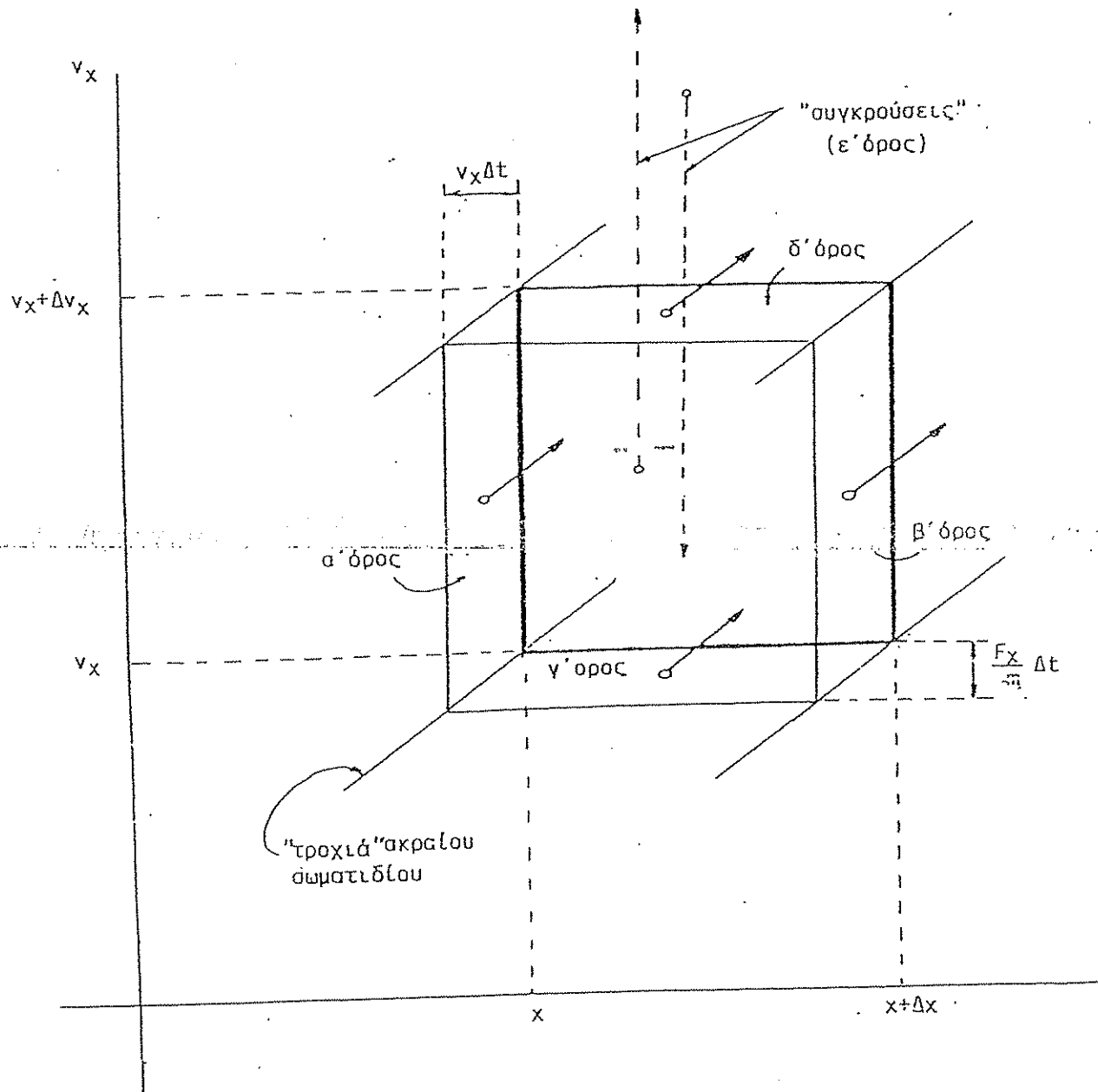
Διαιρώντας τη σχέση (2.10) με  $\Delta x \Delta v_x \Delta t$  και σχηματίζοντας τις μερικές παραγώγους προκύπτει η εξίσωση του Boltzmann για τα ηλεκτρόνια σε μια διάσταση,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_e}{\partial x} + \frac{F_{ex}}{m_e} \frac{\partial f_e}{\partial v_x} = \sum_a \frac{\delta f_{ea}}{\delta t}, \quad (2.11)$$

όπου  $\delta f_{ea}/\delta t$  είναι οι μεταβολές της  $f_e$  λόγω συγκρούσεων με σωματίδια του πληθυσμού  $a$ . Επεκτείνοντας τους προηγούμενους συλλογισμούς στην περίπτωση 6 διαστάσεων, προκύπτει η εξίσωση του Boltzmann για ηλεκτρόνια,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_e + \frac{1}{m_e} \vec{F}_e \cdot \nabla_v f_e = \sum_a \frac{\delta f_{ea}}{\delta t}, \quad (2.12)$$

όπου  $f_e = f_e(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ,  $\nabla = \hat{e}_x \partial/\partial x + \hat{e}_y \partial/\partial y + \hat{e}_z \partial/\partial z$  και  $\nabla_v = \hat{e}_x \partial/\partial v_x + \hat{e}_y \partial/\partial v_y + \hat{e}_z \partial/\partial v_z$ . Με αντικατάσταση του δείκτη  $e$  από άλλους δείκτες προκύπτουν οι εξισώσεις Boltzmann για τα άλλα συστατικά του πλάσματος.



Σχ.2.2: Ισολογισμός αριθμού σωματιδίων που μπαίνουν και βγαίνουν στο χώρο  $\Delta x \Delta v_x$  και εξαγωγή της εξίσωσης του Boltzmann, σε σχέση με την εξίσωση (2.10).



Στην εξίσωση του Boltzmann, όπως έχει λεχθεί και προηγούμενα, οι όροι  $\delta f_{ea}/\delta t$  περιγράφουν τις μεταβολές που δεν καλύπτονται από τον όρο  $\vec{F}_e$ , αλλά οφείλονται σε συγκρούσεις. Εύκολα φαίνεται ότι υπάρχει στενή σύνδεση ανάμεσα στους όρους αυτούς και στις αντίστοιχες συχνότητες συγκρούσεων  $\nu_{ea}$ . Στη γενική περίπτωση  $\nu_{ea} = \nu_{ea}(\vec{r}, \vec{v})$ , δεδομένου ότι οι συγκρούσεις εξαρτώνται από τη δύναμη που ασκείται ανάμεσα στα σωματίδια  $e$  και  $a$  (και αυτή η δύναμη μπορεί να είναι συνάρτηση των  $\vec{r}$  και  $\vec{v}$ ) καθώς και από το  $f_a$ , δηλ. την πυκνότητα και κατανομή ταχυτήτων των σωματιδίων  $a$  (π.χ. αν όλα τα σωματίδια  $a$  έχουν την ίδια ταχύτητα  $\vec{v}$ , τότε προφανώς  $\nu_{ea} = 0$ ). Τότε το γινόμενο  $\nu_{ea}\Delta t$  δίνει τον αριθμό συγκρούσεων που υφίσταται κάθε ηλεκτρόνιο που περιλαμβάνεται στο χώρο  $\Delta x\Delta v_x$ . Επειδή στο χώρο αυτό περιλαμβάνονται  $f_e\Delta x\Delta v_x$  ηλεκτρόνια και κάθε σύγκρουση ενός απ' αυτά οδηγεί στην απομάκρυνση ενός ηλεκτρονίου από το χώρο αυτό (με την υπόθεση ότι  $\Delta x\Delta v_x$  είναι μικρό μέγεθος), συμπεραίνουμε ότι  $-\nu_{ea}f_e\Delta x\Delta v_x\Delta t$  είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων που φεύγουν από το χώρο  $\Delta x\Delta v_x$  με το μηχανισμό των συγκρούσεων. Παράλληλα όμως, κατά το ίδιο χρονικό διάστημα  $\Delta t$  υπάρχει μια εισροή ηλεκτρονίων στο χώρο  $\Delta x\Delta v_x$ , λόγω συγκρούσεων αλλού, που όμως καταλήγουν στο χώρο αυτό. Παρατηρώντας ότι μια σύγκρουση δεν έχει σαν αποτέλεσμα ακαριαία αλλαγή της τιμής του  $x$  αλλά μόνο του  $v_x$ , ορίζουμε με  $\rho_{ea}(x, v_{x1}, v_{x2})$  την πυκνότητα πιθανότητας ένα ηλεκτρόνιο να μεταβάλει την ταχύτητά του από  $v_{x1}$  σε  $v_{x2}$  εξαιτίας μιας σύγκρουσης, δηλ.  $\rho_{ea}\Delta v_{x2}$  είναι η πιθανότητα μια σύγκρουση να μετατοπίσει ένα ηλεκτρόνιο από το σημείο  $v_{x1}$  σε κάποιο σημείο κοντά στο  $v_{x2}$ , σε ζώνη πλάτους  $\Delta v_{x2}$ . Ταυτίζοντας πιθανότητα με ποσοστό ηλεκτρονίων στα οποία συμβαίνει αυτή η μεταβολή, προκύπτει ότι  $(\rho_{ea}\Delta v_x)(f_e\Delta x\Delta v_{x1})(\nu_{ea}\Delta t)$  είναι ο αριθμός ηλεκτρονίων που κατά το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  μετατοπίζονται από το χώρο  $\Delta x\Delta v_{x1}$  γύρω από το σημείο  $(x, v_{x1})$  στο χώρο  $\Delta x\Delta v_x$  γύρω από το σημείο  $(x, v_x)$ . Συνεπώς ο αριθμός των ηλεκτρονίων που μπαίνουν στο χώρο  $\Delta x\Delta v_x$  ανεξάρτητα από πού προέρχονται είναι:

$$\Delta x\Delta v_x\Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{ea}(x, v_{x1}, v_x) f_e(x, v_{x1}) \nu_{ea}(x, v_{x1}) dv_{x1}$$

Συνυπολογίζοντας και αυτά που μπαίνουν, και αυτά που βγαίνουν από το χώρο  $\Delta x\Delta v_x$  και διαρώντας με  $\Delta x\Delta v_x\Delta t$  προκύπτει ο όρος  $\delta f_{ea}/\delta t$  σε μια διάσταση. Γενικεύοντας σε τρεις διαστάσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{\delta f_{ea}}{\delta t} = -\nu_{ea}(\vec{r}, \vec{v}) f_e(\vec{r}, \vec{v}) + \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{ea}(\vec{r}, \vec{v}_1, \vec{v}) f_e(\vec{r}, \vec{v}_1) \nu_{ea}(\vec{r}, \vec{v}_1) d^3v_1 \quad (2.13)$$

Οι εκφράσεις για τις συναρτήσεις  $\nu_{ea}(\vec{r}, \vec{v})$  και  $\rho_{ea}(\vec{r}, \vec{v}_1, \vec{v})$  προκύπτουν από τη μελέτη των δυαδικών συγκρούσεων. Αυτή η μελέτη όμως είναι πέρα από το αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου. Εδώ πάντως μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι σε ψηλές θερμοκρασίες το πλάσμα είναι σχεδόν πλήρως εξιονισμένο και συνεπώς ουσιαστικά δε συμβαίνουν παρά μόνο συγκρούσεις ανάμεσα σε φορτισμένα σωματίδια (Νετρόνια έτσι κι αλλιώς δεν υπάρχουν, εκτός αν έχουν δικιά εισαχθεί στο πλάσμα ή είναι προϊόντα πυρηνικών αντιδράσεων που συμβαίνουν μέσα στι

πλάσμα, π.χ. στην περίπτωση της ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης). Όμως όπως έχει αναφερθεί στο τέλος της παραγράφου 2.2, σε τέτοιες θερμοκρασίες οι συχνότητες συγκρούσεων μεταξύ φορτισμένων σωματιδίων είναι αμελητέες (τα  $v_{ei}$ ,  $v_{ee}$  κλπ. είναι ανάλογα προς την αντίστροφη τρίτη δύναμη της τετραγωνικής ρίζας της θερμοκρασίας). Συνεπώς, σε ψηλές θερμοκρασίες το πλάσμα χαρακτηρίζεται από απουσία συγκρούσεων, δηλ.  $\delta f/\delta t = 0$ . Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση του Βολτ兹μανν καταλήγει στην ομογενή εξίσωση του Vlasov,

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_e + \frac{1}{m_e} \vec{F}_e \cdot \nabla_v f_e = 0 \quad (2.14)$$

και αντίστοιχα για τα ιόνια.

Από πλευρά μαθηματικών, οι εξισώσεις του Βολτ兹μανν και του Vlasov είναι μερικές διαφορικές εξισώσεις ως προς  $f$ , πρώτου βαθμού, ψευδογραμμικές (επειδή η δύναμη  $\vec{F}$  εμπλέκει τα πεδία που μέσω των εξισώσεων του Maxwell εξαρτώνται από το  $f$ , σύμφωνα με τις σχέσεις (1.5)). Σε τέτοιες εξισώσεις η καθιερωμένη μαθηματική διαδικασία για ακριβή επίλυση βασίζεται στη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Συγκεκριμένα, από την εξίσωση (2.14) σχηματίζοντας οι επτά συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού:

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{F_{ex}/m_e} = \frac{dv_y}{F_{ey}/m_e} = \frac{dv_z}{F_{ez}/m_e} = \frac{df_e}{\sum_a \delta f_{ea}/\delta t} \quad (2.15)$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτουν (με αρκετή τύχη) μέχρι επτά πρώτα ολοκληρώματα με τη μορφή  $I_j(\vec{r}, \vec{v}, t, f_e) = \text{σταθ.}$ ,  $j = 1, \dots, 7$ , και οποιαδήποτε συνάρτηση  $\Phi(I_1, I_2, \dots, I_7) = 0$  δίνει σε πλεγμένη μορφή τη λύση  $f_e$  της εξίσωσης (2.12). Η αυθαιρεσία στην επιλογή της  $\Phi$  αίρεται από την επιβολή των αρχικών και οριακών συνθηκών στην οποιαδήποτε λύση  $f_e$ . Στην περίπτωση της ομογενοῦς εξίσωσης (2.14) του Vlasov, ο τελευταίος όρος στην (2.15) δίνει  $df_e/\delta t = dt$ , το έβδομο πρώτο ολοκλήρωμα είναι απλούστατα  $I_7 = f_e$ . Σε τέτοιες περιπτώσεις η συνάρτηση  $\Phi=0$ , θεωρούμενη ως εξίσωση για το  $I_7$ , μπορεί κατ' αρχήν να επιλυθεί οπότε προκύπτει η λύση της (2.14), μια τυχούσα συνάρτηση  $f_e(I_1, I_2, \dots, I_6)$ . Η δυσκολία σε κάθε περίπτωση βρίσκεται στον εντοπισμό των υπόλοιπων πρώτων ολοκληρωμάτων. Όμως, αμέσως φαίνεται ότι οι εξισώσεις (2.15), από τις οποίες πρέπει να προκύψουν αυτά τα πρώτα ολοκληρώματα ταυτίζονται με τις εξισώσεις κίνησης του ηλεκτρονίου;  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$  και  $d\vec{v}/dt = \vec{F}_e/m_e$ . Συνεπώς, η μελέτη της κинηματικής των φορτισμένων σωματιδίων είναι σημαντική βοήθεια στη μελέτη της συμπεριφοράς του πλάσματος. Σε μια τέτοια μελέτη πρόκειται να αφιερωθεί το επόμενο κεφάλαιο 3.

Σε ορισμένες περιπτώσεις δεν ενδιαφέρουν όλες οι λεπτομέρειες που περιλαμβάνονται στη συνάρτηση κατανομής, αλλά αρκεί η περιγραφή του πλάσματος με μεγέθη γνωστά από τη ρευστόθερμοδυναμική, όπως η πυκνότητα, η ταχύτητα ροής, η θερμοκρασία κλπ. Τα μεγέθη αυτά περιγράφονται από κατάλληλες "ροπές" της συνάρτησης κατανομής, π.χ.

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_a q_a \int f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$$

$$n_a(\vec{r}, t) = \int f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$$

$$n_a \vec{V}_a(\vec{r}, t) = \int \vec{v} f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.16)$$

για τη συνολική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου  $\rho$ , καθώς και του αριθμού σωματιδίων  $n_a$  και την ταχύτητα ροής  $\vec{V}_a$  του συστατικού  $a$  ( $q_a$  είναι το φορτίο κάθε σωματιδίου του συστατικού  $a$ ). Τέτοια μεγέθη υπακούουν σε εξισώσεις που προκύπτουν από τις αντίστοιχες ροές της εξίσωσης του Boltzmann (ή του Vlasov). Π.χ. από απλή ολοκλήρωση της εξίσωσης Vlasov προκύπτει:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_a + \nabla \cdot \vec{J}_a = 0 \quad (2.17)$$

η εξίσωση διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου από τον πληθυσμό σωματιδίων  $a$ , με πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου  $\rho_a = q_a n_a$  και πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J}_a = \rho_a \vec{V}_a$ . Αυτές οι εξισώσεις είναι επεκτάσεις των εξισώσεων της θερμοδυναμικής και ρευστοδυναμικής. Η μελέτη του πλάσματος μ' αυτή την προσέγγιση παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 4.

Σε πολλά προβλήματα πλάσματος ενδιαφέρει αν ένα συγκεκριμένο πλάσμα, που περιγράφεται από ορισμένες συναρτήσεις κατανομής για κάθε συστατικό, είναι ευσταθές ως προς διάφορες διαταραχές στην πυκνότητα φορτίου και ρεύματος. Τέτοιες διαταραχές συνεπάγονται την ανάπτυξη ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Σε ασταθές πλάσμα οι διαταραχές αυτές και τα πεδία έχουν εκθετική χρονική αύξηση. Μια τέτοια εξέλιξη συχνά είναι ανεπιθύμητη, επειδή π.χ. η ανάπτυξη των πεδίων απορροφά ενέργεια από το πλάσμα, ή, γενικότερα, η συμπεριφορά του πλάσματος είναι διαφορετική από ό,τι θα ενδιέφερε για συγκεκριμένη εφαρμογή. Σε άλλες πάλι περιπτώσεις, όταν π.χ. ενδιαφέρει η μετατροπή της κινητικής ενέργειας του πλάσματος σε πεδιακή ενέργεια, μια τέτοια εξέλιξη είναι επιθυμητή. Ανεξάρτητα πάντως από την περίπτωση, η καθιερωμένη διαδικασία για την αντιμετώπιση προβλημάτων ευστάθειας βασίζεται στην παρατήρηση ότι αυτές οι διαταραχές αρχικά τουλάχιστον, είναι μικρές. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει να γίνει ανάπτυξη της μορφής  $f = f_0 + f_1$ , όπου  $f_0$  είναι η αδιάταρακτη συνάρτηση κατανομής,  $f_1$  είναι η διαταραχή ( $f_1 \ll f_0$ ), και παρόμοια για τα άλλα μεγέθη (π.χ.  $\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}_1$ ). Αντικαθιστώντας αυτά τα αναπτύγματα στην εξίσωση του Vlasov προκύπτει μια γραμμική σχέση ανάμεσα στα  $f_1$  και  $\vec{F}_1$ , επειδή οι μεν όροι που έχουν μόνο πρώτης τάξης μεγέθη είναι αθροιστικά ίσοι με μηδέν, ενώ όροι με δεύτερης τάξης μεγέθη (π.χ. το γινόμενο  $f_1 \vec{F}_1$ ) είναι αμελητέοι. Μια άλλη γραμμική σχέση που συνδέει τα  $f_1$  και  $\vec{F}_1$  προκύπτει από τις εξισώσεις Maxwell. Από τις δύο αυτές γραμμικές σχέσεις, χρησιμοποιώντας καθιερωμένες τεχνικές μετασχηματισμών Fourier ή Laplace, προκύπτει μια σχέση συμβιβαστότητας, η σχέση διασποράς, από την οποία συνάγονται συμπεράσματα για την ευστάθεια του πλάσματος. Η ανάπτυξη αυτής της διαδικασίας παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 5.

## 2.4 Το μήκος του Debye

Ένα παράδειγμα εφαρμογής της εξίσωσης του Vlasov είναι χρήσιμο στο σημείο αυτό, τόσο για πληρέστερη κατανόηση αυτής της εξίσωσης, όσο και επειδή τα αποτελέσματα αυτής της εφαρμογής έχουν άμεση εφαρμογή στην ανάλυση που θα ακολουθήσει για τον ορισμό του μήκους του Debye, ενός μεγέθους που παίζει κεντρικό ρόλο στην επιστήμη του πλάσματος. Επίδιώκουμε να προσδιορίσουμε την κατανομή των ηλεκτρονίων σε ένα σύστημα με τα εξής χαρακτηριστικά:

- Μόνιμη κατάσταση. Αυτό σημαίνει  $\partial f_e / \partial t = 0$  και  $\delta f_{ea} / \delta t = 0$ . (Η τελευταία σχέση δε σημαίνει αναγκαστικά ότι δε συμβαίνουν συγκρούσεις. Εδώ σημαίνει ότι όσο πιθανή είναι μια μετατόπιση  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , τόσο πιθανή είναι και η αντίστροφη μετατόπιση  $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ ).
- Όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στα ηλεκτρόνια προέρχονται από δυναμική συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι  $\vec{F}_e = -\nabla W_e$ , όπου  $W_e(\vec{r})$  είναι η δυναμική συνάρτηση.
- Η δυναμική συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μια συντεταγμένη, π.χ. τη  $x$ , δηλαδή  $W_e = W_e(x)$  και συνεπώς η  $F_{ex} = -dW_e/dx$  είναι η μοναδική συνιστώσα της δύναμης.
- Στο επίπεδο  $x=0$ , η συνάρτηση κατανομής χαρακτηρίζεται από σταθερή πυκνότητα  $n_0$  και κανονική κατανομή ταχυτήτων (κατανομή των Maxwell - Boltzmann) με θερμοκρασία  $T_e$ . Αυτές οι προδιαγραφές (οριακές συνθήκες), εκφράζονται μαθηματικά από τη συνάρτηση κατανομής:

$$f_e(x=0, y, z, v_x, v_y, v_z, t) = n_{e0} \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp \left[ - \frac{m_e (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T_e} \right] \quad (2.18)$$

όπου  $m_e$  είναι η μάζα του ηλεκτρονίου και  $k_B$  είναι η σταθερά του Boltzmann. (Η κανονική κατανομή των ταχυτήτων είναι απόρροια της παραδοχής  $\delta f_{ea} / \delta t = 0$  που αναφέρθηκε παραπάνω).

- Σε κάθε σημείο του χώρου, η συνάρτηση κατανομής είναι ανεξάρτητη των  $(x, y)$ ,  $\partial f_e / \partial y = \partial f_e / \partial z = 0$ .

Επιλύοντας την εξίσωση (2.12) του Boltzmann με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών, σχηματίζονται οι συνήθειες διαφορικές εξισώσεις (2.15), που στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουν τη μορφή:

$$dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = \frac{dv_x}{-\frac{1}{m_e} \frac{dW_e}{dx}} = \frac{dv_y}{0} = \frac{dv_z}{0} = \frac{df_e}{0} \quad (2.19)$$

Παίρνοντας από τις εξισώσεις αυτές κατάλληλα ζεύγη, όπως φαίνεται παρακάτω, είναι δυνατό στο εύκολο αυτό παράδειγμα να βρεθούν και τα επτά πρώτα ολοκληρώματα. Έχουμε, ξεκινώντας από το τέλος,

$$dt = \frac{df_e}{0} \quad \rightarrow \quad I_7 = f_e,$$

$$dt = \frac{dv_z}{0} \quad \rightarrow \quad I_6(v_z) = v_z$$

$$\begin{aligned}
 dt &= \frac{dv_y}{0} \Rightarrow I_5(v_y) = v_y, \\
 \frac{dx}{v_x} &= \frac{dv_x}{-\frac{1}{m_e} \frac{dW_e}{dx}} \Rightarrow I_4(x, v_x) = \frac{1}{2} m_e v_x^2 + W_e(x), \quad (2.20) \\
 dt &= \frac{dz}{I_6} \Rightarrow I_3(z, v_z, t) = \frac{z}{I_6} - t = \frac{z}{v_z} - t \\
 dt &= \frac{dy}{I_5} \Rightarrow I_2(y, v_y, t) = \frac{y}{I_5} - t = \frac{y}{v_y} - t \\
 dt &= \frac{dx}{\left[ \frac{2}{m_e} (I_4 - W_e) \right]^{1/2}} \Rightarrow I_1(x, v_x, t) = \int_{-\infty}^x \frac{d\xi}{\left[ \frac{2}{m_e} (I_4 - W_e(\xi)) \right]^{1/2}} - t = \int_{-\infty}^x \frac{d\xi}{\sqrt{v_x^2 + \frac{2}{m_e} [W_e(x) - W_e(\xi)]}} - t
 \end{aligned}$$

Όπως έχει σημειωθεί προηγουμένως, η λύση της εξίσωσης του Boltzmann είναι οποιαδήποτε συνάρτηση των επτά πρώτων ολοκληρωμάτων. Επειδή το μέγεθος  $f_e$  εμφανίζεται μόνο σε ένα από αυτά τα ολοκληρώματα, η συνάρτηση αυτή μπορεί να επιλυθεί ως προς  $I_7 = f_e$ , και προκύπτει ότι:

$$f_e = f_e(I_1, I_2, \dots, I_6). \quad (2.21)$$

Πρόσθετη εξειδίκευση της λύσης προκύπτει από τη χρήση των πρόσθετων συνθηκών που απαιτείται να ικανοποιεί η συνάρτηση κατανομής. Πρώτα έχουμε τις απαιτήσεις για μόνιμη κατάσταση, δηλ.  $\partial f_e / \partial t = 0$  και για μονοδιάστατη εξάρτηση μόνο από το  $x$ , δηλ.  $\partial f_e / \partial y = 0$  και  $\partial f_e / \partial z = 0$ . Από τις σχέσεις (2.20) φαίνεται ότι μόνο τα ολοκληρώματα  $I_1, I_2$  και  $I_3$  εξαρτώνται από το χρόνο, ενώ παράλληλα μόνο τα ολοκληρώματα  $I_2$  και  $I_3$  εξαρτώνται από τα  $y$  και  $z$  αντίστοιχα. Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_e}{\partial t} &= - \left( \frac{\partial f_e}{\partial I_1} + \frac{\partial f_e}{\partial I_2} + \frac{\partial f_e}{\partial I_3} \right) \\
 \frac{\partial f_e}{\partial y} &= \frac{1}{I_5} \frac{\partial f_e}{\partial I_2} \\
 \frac{\partial f_e}{\partial z} &= \frac{1}{I_6} \frac{\partial f_e}{\partial I_3}
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή τύπων όπως  $\partial f_e / \partial t = \sum_1^6 (\partial I_j / \partial t) (\partial f_e / \partial I_j)$ . Δεδομένου ότι οι συνθήκες του προβλήματος επιτάσσουν ότι οι εξισώσεις (2.22) είναι ίσες με μηδέν, προκύπτει αμέσως ότι ίσες με μηδέν είναι και οι μερικές παράγωγοι του  $f_e$  ως προς  $I_1, I_2$  και  $I_3$ , δηλαδή η λύση περιορίζεται σε συναρτήσεις  $f_e = f_e(I_4, I_5, I_6)$ , δηλαδή  $f_e = f_e \left( \frac{1}{2} m_e v_x^2 + W_e(x), v_y, v_z \right)$ . Συγκρίνοντας όταν  $x=0$  με την εξίσωση (2.18) προκύπτει ότι η λύση είναι:

$$f_e = n_{e0} \left( \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right)^{3/2} \exp \left[ - \frac{m_e (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2 k_B T_e} \right] \exp \left[ \frac{W_e(0) - W_e(x)}{k_B T_e} \right] \quad (2.23)$$

Για τις ανάγκες αυτής της παραγράφου δεν ενδιαφέρουν όλες οι πληροφορίες που περιέχονται στην εξίσωση (2.23). Εκείνο που μόνο ενδιαφέρει είναι η κατανομή της πυ-

κνότητας  $n_e(x,y,z)$  στο χώρο. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (2.23) ως προς  $v_x, v_y, v_z$  προκύπτει η πυκνότητα των ηλεκτρονίων,  $n_e(x,y,z) = \int f_e dv_x dv_y dv_z$ . Ειδικότερα, θεωρώντας ότι η δυναμική συνάρτηση  $W_e$  οφείλεται αποκλειστικά σε ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi(x)$ , δηλ.  $W_e(x) = -e\Phi(x)$ , προκύπτει ότι η πυκνότητα υπακούει στη σχέση:

$$n_e(x,y,z) = n_{e0} \exp \frac{e\Phi(x)}{k_B T_e} \exp \frac{-e\Phi(0)}{k_B T_e} \quad (2.24)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει την τάση των ηλεκτρονίων να συγκεντρώνονται σε περιοχές του χώρου με μεγάλες τιμές του ηλεκτροστατικού δυναμικού.

Ως τώρα δεν έχει εξετασθεί καθόλου η συναρτησιακή εξάρτηση του δυναμικού  $\Phi$  από τη συντεταγμένη  $x$ . Είναι φανερό ότι το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση του Poisson. Δεδομένου ότι εξαρχής έχει υποθεθεί εξάρτηση του δυναμικού από τη συντεταγμένη  $x$  μόνο, η εξίσωση που πρέπει να ικανοποιείται από το δυναμικό  $\Phi$  είναι:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) \quad (2.25)$$

όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου.

Ας αναφερθούμε τώρα σε ένα περισσότερο συγκεκριμένο σύστημα. Υποθέτουμε ότι σε κάποιο χώρο υπάρχει ουδέτερο πλάσμα υδρογόνου, δηλαδή πλάσμα που αποτελείται από ίσο αριθμό ηλεκτρονίων (με στοιχειώδες φορτίο  $-e$ ) και πρωτονίων (με στοιχειώδες φορτίο  $+e$ ). Σε κάποια επιφάνεια  $x=0$  το δυναμικό διατηρείται σταθερό, στην τιμή  $\Phi(x=0) = \Phi_0$ , ενώ στο άπειρο το σύστημα είναι γειωμένο, δηλαδή  $\Phi(x=\infty) = \Phi_\infty = 0$ . Μια τέτοια επιλογή για τις οριακές τιμές του δυναμικού θα μπορούσε να επιτευχθεί συνδέοντας π.χ. ένα επίπεδο μεταλλικό πλέγμα που βρίσκεται στο  $x=0$  με τον πόλο  $\Phi_0$  μιας γειωμένης μπαταρίας. Μόλις πραγματοποιηθεί αυτή η σύνδεση, τα ηλεκτρόνια αρχίζουν να πλησιάζουν ή να απομακρύνονται από το  $x=0$ , ανάλογα με το πρόσημο του  $\Phi_0$ , και ασυμπτωτικά η πυκνότητά τους κατανέμεται σύμφωνα με τη σχέση (2.24). Εξυπηρετεί να τροποποιήσουμε λίγο αυτή τη σχέση, εισάγοντας αντί του  $n_{e0}$  την τιμή της πυκνότητας των ηλεκτρονίων στο  $x=\infty$ , δηλ. το μέγεθος  $n_{e\infty} = n_e(x=\infty)$ . Επειδή  $\Phi(x=0) = \Phi_0$  η σχέση (2.24) παίρνει τη μορφή:

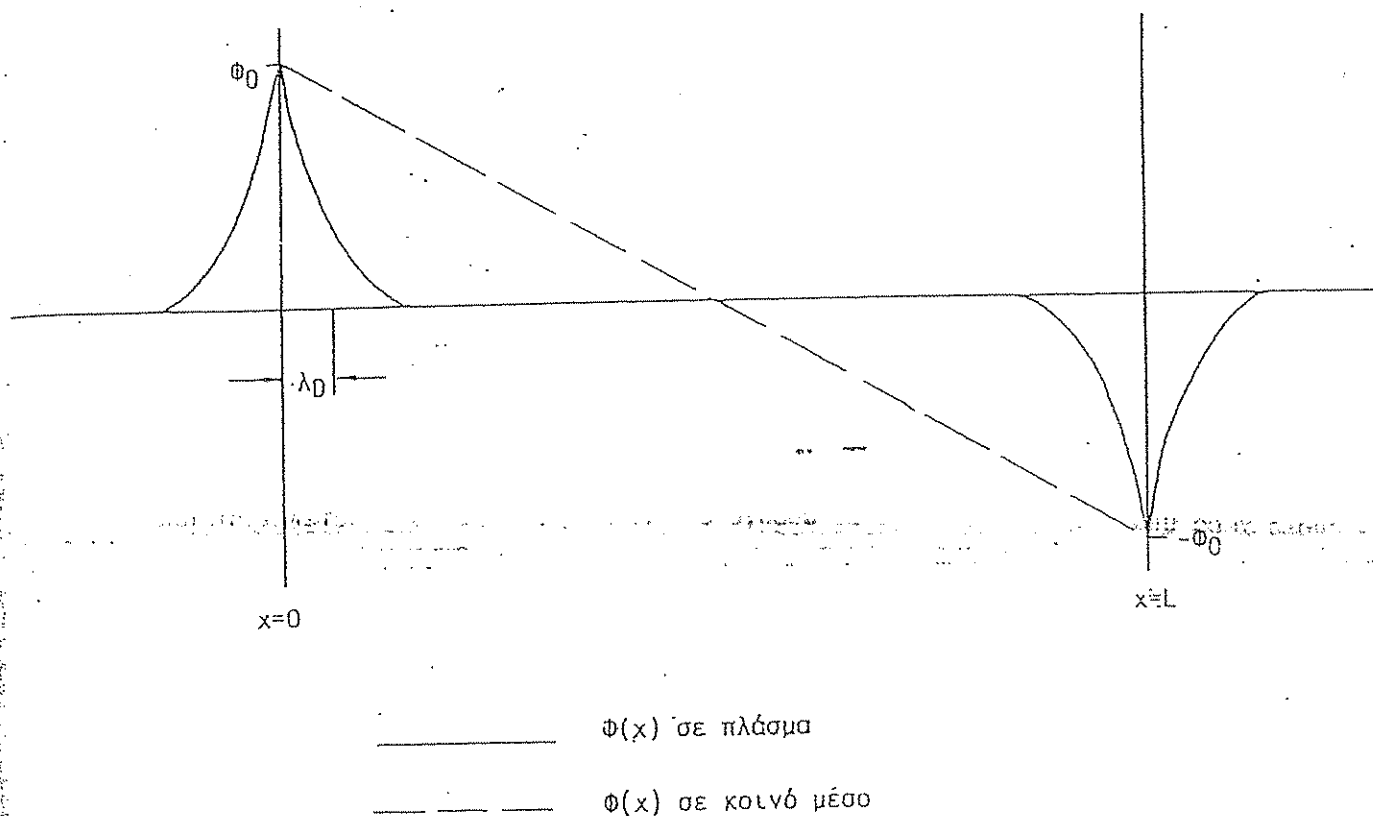
$$n_e(x,y,z) = n_{e\infty} \exp \frac{e\Phi(x)}{k_B T_e}$$

Ταυτόχρονα, και τα ιόντα δέχονται δυνάμεις ίσες και αντίθετες με εκείνες που ασκούνται στα ηλεκτρόνια και συνεπώς τείνουν να κινηθούν αντίθετα απ'ό,τι τα ηλεκτρόνια. Όμως η μάζα των ιόντων είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα των ηλεκτρονίων, με αποτέλεσμα, τα ηλεκτρόνια να προλαβαίνουν να φθάσουν στη μόνιμη κατάσταση που περιγράφεται από τη σχέση (2.24) προτού τα ιόντα απομακρυνθούν αισθητά από την αρχική θέση τους. Αυτό σημαίνει ότι η πυκνότητα των ιόντων μπορεί να θεωρηθεί σταθερή, ίση με:

$$n_i(x,y,z) = n_{i\infty}$$

Όμως, στο  $x=\infty$ , όπου δεν έχει γίνει αισθητή η διαταραχή που οφείλεται στην εφαρμογή του  $\Phi_0$ , το πλάσμα παραμένει μακροσκοπικά ουδέτερο, δηλαδή  $n_{e\infty} = n_{i\infty} = n_\infty$ . Συνεπώς η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου σε κάθε θέση  $x$  είναι  $\rho = en_i - en_e$ , δηλαδή:

$$\rho(x) = en_\infty \left( 1 - \exp \frac{e\Phi(x)}{k_B T_e} \right) \quad (2.26)$$



Σχ.2.3: Απομάκρυνση ηλεκτροστατικών πεδίων από το πλάσμα

Με τη σχέση (2.26) για την πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, η εξίσωση (2.25) μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά, δίνοντας τη λύση με τη μορφή της αντίστροφης συνάρτησης  $x(\Phi)$ . Μια τέτοια σχέση δεν επιτρέπει εύκολα να αναγνωρισθεί τι είδους συμπεριφορά περιγράφεται. Περισσότερο κατανοητή είναι η λύση που προκύπτει αν υποθεθεί ότι  $e\Phi \ll K_B T_e$ , δηλαδή ότι η δυναμική ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι μικρή σε σύγκριση με την κινητική (δηλ. θερμική) ενέργειά τους. Αναπτύσσοντας τότε την εκθετική συνάρτηση της εξίσωσης (2.26) σε σειρά Taylor γύρω από τα σημεία  $x=0$  και  $x=L$  και παίρνοντας μόνο τους πρώτους

όρους, η εξίσωση (2.25) απλοποιείται στη μορφή:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{e^2 n_\infty}{\epsilon_0 K_B T e} \phi \quad (2.27)$$

Φυσική σημασία έχει μόνο η λύση με  $\phi(x \rightarrow \infty) = 0$ . Δεδομένου ότι  $\phi(x=0) = \phi_0$ , αυτή η λύση είναι:

$$\phi = \phi_0 \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda_D}\right) \quad (2.28)$$

όπου  $|x|$  είναι η απόσταση από τη θέση  $x=0$ , δηλαδή από το ηλεκτρόδιο. Το χαρακτηριστικό μήκος  $\lambda_D$  δίδεται από τη σχέση:

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 K_B T}{e^2 n_\infty}\right)^{1/2} \quad (2.29)$$

και ονομάζεται μήκος του Debye. Ενδεικτικές τιμές είναι  $\lambda_D < 1\text{mm}$  σε πλάσματα διάφορων επίγειων εφαρμογών και  $\lambda_D \sim 1\text{m}$  στο διαστημικό πλάσμα; δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι μικρό σε σχέση με τα αντίστοιχα μακροσκοπικά μήκη. Συνεπώς, από τη σχέση (2.28) είναι φανερό ότι το εξωτερικά επιβαλλόμενο ηλεκτροστατικό δυναμικό γίνεται αισθητό από το πλάσμα μόνο στην άμεση γειτονιά του ηλεκτροδίου, σε αποστάσεις με χαρακτηριστικό μήκος  $\lambda_D$ . Αυτή η ιδιότητα επαληθεύει εκ των υστέρων και την παραδοχή ότι τα ιόντα παραμένουν ακίνητα: πράγματι, προτού τα ιόντα συνειδητοποιήσουν την ύπαρξη του ηλεκτρικού πεδίου και αρχίσουν να αντιδρούν σ' αυτό, αυτό πρακτικά μηδενίζεται σχεδόν παντού.

Αν το επιβαλλόμενο δυναμικό έχει καθορισμένες τιμές σε περισσότερα από ένα επίπεδα, π.χ. τις τιμές  $\phi_0$  στο  $x=0$  και  $-\phi_0$  στο  $x=L$ , τότε το δυναμικό προκύπτει από επαλληλία ότι περιγράφεται από τη σχέση:

$$\phi = \phi_0 \left[ \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda_D}\right) - \exp\left(-\frac{|x-L|}{\lambda_D}\right) \right] \quad (2.30a)$$

Αντίθετα, αν ανάμεσα στα δύο ηλεκτρόδια το μέσο ήταν κοινό αέριο, τότε το δυναμικό θα υπάκουε στη σχέση:

$$\phi = \phi_0 \left(1 - 2 \frac{x}{L}\right) \quad (2.30\beta)$$

Η κατανομή του δυναμικού  $\phi$  στις περιπτώσεις πλάσματος και κοινού αερίου φαίνεται γραφικά στο Σχ.2.3. Η δραστική διαφορά στη μεταβολή του δυναμικού στις δύο περιπτώσεις εκφράζει μια αντίστοιχη διαφορά στη συμπεριφορά του πλάσματος, σε σύγκριση με τα συνηθισμένα μέσα. Πεδία που επιβάλλονται από εξωτερικές πηγές σε συνηθισμένα μέσα γίνονται αισθητά σε μεγάλες αποστάσεις. Σε πλάσμα η κινητικότητα των ελεύθερων φορτίων, ιδίως των ηλεκτρονίων, έχει ως αποτέλεσμα να απομονώνει τις εξωτερικές πηγές και να αποκλείει τη διείσδυση των εξωτερικών ηλεκτρικών πεδίων μέσα στον κύριο όγκο του πλάσματος. Τα πεδία αυτά ουσιαστικά περιορίζονται μόνο σε μια στενή περιοχή γύρω από τις εξωτερικές πηγές. Το πάχος αυτής της περιοχής εκφράζεται από το μέγεθος  $\lambda_D$ , το μήκος του Debye.



## 2.5 Η συχνότητα πλάσματος

Ενώ τα εξωτερικά πεδία αποκλείονται από το πλάσμα, μέσα στο πλάσμα μπορούν να αναπτυχθούν πεδία από τη συλλογική δράση των ελεύθερων φορτίων. Ήδη στην εισαγωγή έχει δοθεί ένα παράδειγμα ανάπτυξης τέτοιων πεδίων, οι τάλαντώσεις του Langmuir. Αυτό το παράδειγμα θα αναπτυχθεί σε κάπως μεγαλύτερη έκταση τώρα, για να προσδιορισθεί η χαρακτηριστική χρονική κλίμακα για τις μεταβολές των πεδίων στο πλάσμα.

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, υποθέτουμε ένα ουδέτερο πλάσμα υδρογόνου, που αποτελείται από ίσο αριθμό ηλεκτρονίων και ιόντων. Για να απλουστευθεί το σύστημα, θεωρούμε ότι τα σωματίδια του πλάσματος δεν έχουν αρχικά καθόλου κινητική ενέργεια, δηλαδή, η απόλυτη θερμοκρασία τους είναι μηδενική. Στον ηλεκτρονικά πληθυσμό επιβάλλεται μια μονοδιάστατη διαταραχή της πυκνότητας,  $n_e = n_e(x, t)$ , που συνεπάγεται την ανάπτυξη ενός ηλεκτροστατικού πεδίου  $E(x, t)$  που προκαλεί κίνηση στα ηλεκτρόνια, με ταχύτητα  $V(x, t)$ . Αντίθετα με τα ηλεκτρόνια, τα ιόντα, λόγω της μεγάλης μάζας τους δεν αντιδρούν αισθητά και συνεπώς θεωρούμε ότι παραμένουν ακίνητα και με ομογενή κατανομή στην πυκνότητά τους  $n_0$ , ίση με τη μέση πυκνότητα των ηλεκτρονίων.

Οι εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά αυτής της διαταραχής είναι για το ηλεκτρικό πεδίο η εξίσωση του Gauss,

$$\frac{\partial E}{\partial x} = - \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_0) \quad (2.31)$$

η εξίσωση κίνησης κάθε ηλεκτρονίου,  $m_e dV/dt = -eE$ , δηλαδή

$$\frac{\partial V}{\partial t} + v \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{e}{m_e} E, \quad (2.32)$$

όπου η αριστερή πλευρά είναι το ανάπτυγμα της ολικής παραγώγου  $dV/dt$ , και τέλος, η εξίσωση της συνέχειας, για τα ηλεκτρόνια που στην προκειμένη περίπτωση είναι:

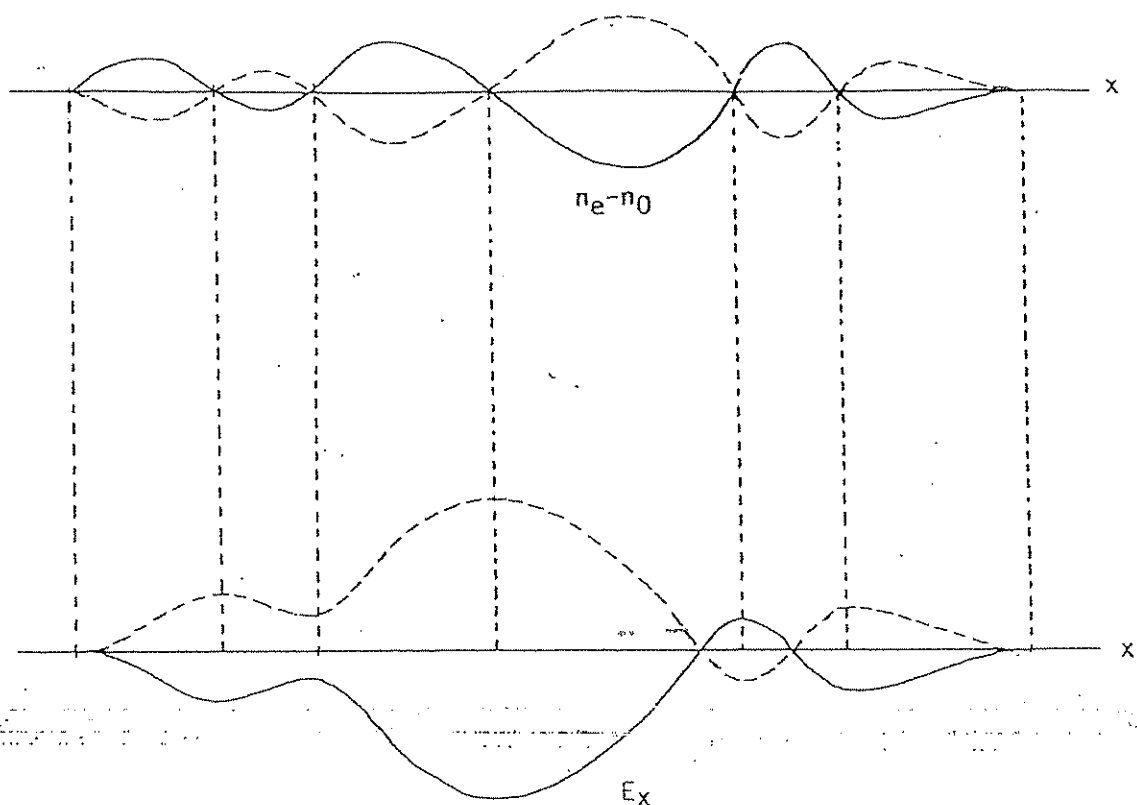
$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + v \frac{\partial n_e}{\partial x} + n_e \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2.33)$$

Ορισμένες διευκρινίσεις χρειάζονται για την τελευταία σχέση. Η σχέση αυτή προκύπτει παρατηρώντας ότι η αύξηση  $\Delta n_e \Delta x$  του αριθμού ηλεκτρονίων σε μια ζώνη πλάτους  $\Delta x$ , κατά τη διάρκεια ενός διαστήματος  $\Delta t$ , ισούται με τα ηλεκτρόνια που μπαίνουν στη ζώνη,  $n_e(x, t) \cdot V(x, t) \Delta t$ , μείον εκείνα που βγαίνουν,  $n_e(x + \Delta x, t) V(x + \Delta x, t) \Delta t$ . Διαιρώντας αυτή την ισότητα με  $\Delta x \Delta t$  προκύπτουν οι μερικές παράγωγοι της εξίσωσης (2.33).

Στις εξισώσεις (2.31)-(2.33) τα μεγέθη  $E$ ,  $V$  και  $(n_e - n_0)$  έχουν την ίδια τάξη μεγέθους. Υποθέτουμε ότι η διαταραχή είναι μικρή, συνεπώς τα γινόμενα οποιωνδήποτε δύο από αυτά τα μεγέθη είναι αμελητέα ποσά. Συνεπώς οι κύριοι όροι των εξισώσεων είναι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= - \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_0) \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= - \frac{e}{m_e} E \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial (n_e - n_0)}{\partial t} = - n_0 \frac{\partial V}{\partial x}$$



Σχ.2.4: Ταλάντωση πυκνότητας και ηλεκτροστατικού πεδίου στις ταλαντώσεις του Langmuir

Στην τελευταία εξίσωση τέθηκε  $n_0 \partial V / \partial x$  αντί  $n_e \partial V / \partial x$  απαλείφοντας έτσι το αμελητέο ποσό  $(n_e - n_0) \partial V / \partial x$ . Πολλαπλασιάζοντας με τους κατάλληλους συντελεστές και προσθέτοντας την πρώτη, την παράγωγο ως προς  $x$  της δεύτερης και την παράγωγο ως προς  $t$  της τρίτης εξίσωσης προκύπτει ότι η διαταραχή της πυκνότητας υπακούει στην εξίσωση του απλού εκκρεμούς

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (n_e - n_0) = -\omega_p^2 (n_e - n_0) \quad (2.35)$$

όπου η κυκλική συχνότητα  $\omega_p$  δίνεται από τη σχέση:

$$\omega_p = \left( \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} \quad (2.36)$$

και ονομάζεται ηλεκτρονική συχνότητα πλάσματος. Συγκρίνοντας τη σχέση (2.36) με τις

σχέσεις (2.7), (2.8) και (2.29) φαίνεται αμέσως ότι η συχνότητα πλάσματος είναι το πηλίκο της θερμικής ταχύτητας (ανά βαθμό ελευθερίας κίνησης) προς το μήκος του Debye, δηλ.  $\omega_{\theta}(\xi=1) = \lambda_{D\omega}$ .

Ένα άλλο παράδειγμα δυναμικής συμπεριφοράς που χαρακτηρίζεται από τη συχνότητα πλάσματος  $\omega_p$ , είναι η περίπτωση μη εξουδετερωμένου πλάσματος. Ας εξετάσουμε την ακραία περίπτωση πλάσματος που αποτελείται μόνο από ηλεκτρονικό πληθυσμό. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή  $t=0$  έχουμε μια άπειρη πλάκα που αποτελείται μόνο από ηλεκτρόνια με πυκνότητα  $n_e(t=0)=n_0$  και καταλαμβάνει το χώρο από  $x_0=-L$  έως  $x_0=L$ . Κάποιος μηχανισμός που περιορίζει τα ηλεκτρόνια κίνητα σ' αυτό το χώρο αίρεται το χρόνο  $t=0$ , με αποτέλεσμα οι απωστικές ηλεκτροστατικές δυνάμεις να τείνουν να διαστείνουν την ηλεκτρονική αυτή πλάκα. Από την εξίσωση του Poisson,  $\nabla \cdot \vec{E} = -(e/\epsilon_0)n_e$ , προκύπτει ότι το ηλεκτροστατικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας έχει μόνο τη συνιστώσα:

$$E_x = -\frac{e}{\epsilon_0} \int_0^x n_e(x,t) dx \quad (2.37)$$

όπου  $n(x,t)$  είναι η πυκνότητα ηλεκτρονίων στη θέση  $x$  το χρόνο  $t$ . Το κάτω όριο της (2.37) λήφθηκε στη θέση  $x=0$ , επειδή εκεί  $E_x = 0$  για λόγους συμμετρίας. Το ολοκλήρωμα της (2.37) αντιπροσωπεύει το συνολικό αριθμό ηλεκτρονίων που περικλείονται ανά μονάδα επιφανείας στο διάστημα από 0 έως  $x$ . Όμως, επειδή τα ηλεκτρόνια είναι αρχικά ακίνητα και το ηλεκτρικό πεδίο (και συνεπώς και η επιτάχυνση των ηλεκτρονίων) είναι ισχυρότερο σε μεγαλύτερες αποστάσεις από το επίπεδο  $x=0$ , τα ηλεκτρόνια που τη χρονική στιγμή  $t$  βρίσκονται στο διάστημα  $(0,x)$  τυτλίζονται με τα ηλεκτρόνια με αρχική θέση στο διάστημα  $(0,x_0)$ , όπου  $x_0$  είναι η αρχική θέση των ηλεκτρονίων που βρίσκονται στο  $x$  το χρόνο  $t$ . Συνεπώς το ολοκλήρωμα στη (2.37) είναι ίσο με  $n_0 x_0$  και από την εξίσωση κίνησης,  $m_e d^2x/dt^2 = -eE_x$  προκύπτει:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e^2 n_0 x_0}{\epsilon_0 m_e} = \omega_{p0}^2 x_0 \quad (2.38)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει ότι τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται το χρόνο  $t$  στη θέση  $x$  έχουν σταθερή επιτάχυνση, δεδομένου ότι η αρχική θέση  $x_0$  είναι σταθερή ποσότητα. Λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες  $x=x_0$  και  $dx/dt = 0$ , η ολοκλήρωση της (2.38) δίνει:

$$x = x_0 \left(1 + \frac{1}{2} \omega_{p0}^2 t^2\right) \quad (2.39)$$

δηλ. κάθε ηλεκτρόνιο και συνεπώς κάθε επίπεδο της ηλεκτρονικής πλάκας, που αρχικά βρίσκεται στο  $x_0$  (στο διάστημα  $-L < x_0 < L$ ) μετατοπίζεται με χαρακτηριστικό χρόνο  $1/\omega_{p0}$ , το αντίστροφο της αρχικής συχνότητας πλάσματος. Η ίδια ποσότητα εμφανίζεται και ως χαρακτηριστικός χρόνος στη σχέση:

$$n_e = \frac{n_0}{1 + \frac{1}{2} \omega_{p0}^2 t^2} \quad (2.40)$$

που περιγράφει την ηλεκτρονική πυκνότητα για χρόνους  $t > 0$ .

Στην παράγραφο αυτή εξετάστηκαν δύο περιπτώσεις δυναμικής συμπεριφοράς, οι ταλα-

ντώσεις του Langmuir και η διαστολή ηλεκτρονικού πλάσματος. Και στις δύο περιπτώσεις, η εξέλιξη του φαινομένου χαρακτηρίζεται από τη συχνότητα πλάσματος,  $\omega_p$ , δηλαδή  $\omega_p^{-1}$  είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος των φαινομένων αυτών. Γενικότερα, σε κάθε πρόβλημα πλάσματος, το τελικό αποτέλεσμα εκφράζεται ιδιαίτερα απλά αν εισαχθεί η έκφραση για τη συχνότητα πλάσματος. Η συχνότητα αυτή είναι ένα από τα βασικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν το πλάσμα.

## 2.6 Ποσοτικός ορισμός του πλάσματος

Στο εισαγωγικό κεφάλαιο ορίσθηκε ότι βασική ιδιότητα του πλάσματος είναι η ανάπτυξη συλλογικών ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, που με τη σειρά τους επηρεάζονται συμπεριφορά του πλάσματος. Στο σημείο εκείνο όμως δεν είχε ακόμα αναπτυχθεί η απαραίτητη υποδομή για την εξειδίκευση αυτής της ιδιότητας με μαθηματικές σχέσεις. Έχοντας τώρα παρουσιάσει, στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου, τις απαραίτητες βασικές έννοιες, αυτή η εξειδίκευση είναι δυνατή.

Αρχίζουμε από το μήκος του Debye. Βλέποντας πέρα από την ανάλυση της παραγράφου 2.4, συμπεραίνουμε μόνο ότι τα εξωτερικά πεδία γίνονται αισθητά μόνο σε μια περιοχή με πάχος  $\lambda_D$ . Η γενίκευση όμως είναι εύκολη. Αντί να θεωρήσουμε ότι στο σημείο  $x=0$  υπάρχει κάποιο μεταλλικό πλέγμα, συνδεδεμένο με κάποια εξωτερική πηγή, μπορούμε να φανταστούμε ότι στο ίδιο σημείο  $x=0$  υπάρχει κάποια (οποιαδήποτε) ειδική διάταξη φορτισμένων σωματιδίων του πλάσματος. Το αποτέλεσμα είναι ανάλογο. Οι λεπτομέρειες από αυτή την ειδική διάταξη φορτισμένων σωματιδίων επηρεάζουν μόνο εκείνα τα σωματίδια του πλάσματος που βρίσκονται κοντά, σε αποστάσεις μέχρι περίπου  $\lambda_D$ . Τα σωματίδια που βρίσκονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις αδιαφορούν για τις λεπτομέρειες αυτές. Αυτά τα απομακρυσμένα σωματίδια επηρεάζονται μόνο από συλλογικά πεδία, δηλαδή πεδία που οφείλονται σε κάποια οργανωμένη διάταξη των σωματιδίων, σε κλίμακα που ξεπερνά το μήκος  $\lambda_D$ . Προφανής προϋπόθεση για να είναι αυτό δυνατό είναι να υπάρχουν τέτοιες διαστάσεις, δηλαδή το χαρακτηριστικό μήκος  $L$  για τις μακροσκοπικές διαστάσεις του πλάσματος να είναι πολύ μεγαλύτερο από το μήκος  $\lambda_D$ . Συνεπώς:

$$\lambda_D \ll L \quad (2.41)$$

είναι μια προϋπόθεση για να χαρακτηριστεί ένα μέσο σαν πλάσμα. Αν η σχέση (2.41) δεν αληθεύει, τότε το μέσο δεν είναι πλάσμα, αλλά μόνο μια συλλογή φορτισμένων σωματιδίων, των οποίων η συμπεριφορά διέπεται από δυαδικές συγκρούσεις και όχι από συλλογικά φαινόμενα. (Εξ άλλου, αν δεν ισχύει η σχέση (2.41) τότε παραβιάζονται ορισμένες υποθέσεις που έχουν γίνει στους υπολογισμούς της παραγράφου 2.4).

Ο υπολογισμός της παραγράφου 2.4 έγινε με βάση τις μεθόδους της στατιστικής μηχανικής. Προϋπόθεση για την ισχύ αυτών των μεθόδων είναι να υπάρχει αρκετά μεγάλος αριθμός σωματιδίων. Ειδικότερα, η εκμηδένιση του εξωτερικού πεδίου σε μήκος της τάξης

του  $\lambda_D$ , προϋποθέτει ότι επαρκής αριθμός σωματιδίων βρίσκεται μέσα στο οριακό στρώμα πάχους  $\lambda_D$ . Σε πλάσμα με πυκνότητα  $n_0$ , μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κατά μέσο όρο κάθε σωματίδιο καταλαμβάνει ένα κύβο με όγκο  $n_0^{-1}$ , συνεπώς η μέση απόσταση ανάμεσα στα σωματίδια είναι ίση με  $n_0^{-1/3}$ . Η απαίτηση ότι στο μήκος του Debye περιλαμβάνεται αξιόλογος αριθμός σωματιδίων μπορεί να γραφεί ως

$$n_0^{-1/3} \ll \lambda_D \quad (2.42)$$

και είναι μια δεύτερη προϋπόθεση για να χαρακτηριστεί ένα μέσο σαν πλάσμα.

Τελευταία προϋπόθεση είναι να είναι δυνατή η διατήρηση (σε κάποιο μέτρο), των συλλογικών φαινομένων. Όπως συζητήθηκε στην παράγραφο 2.5, τα συλλογικά φαινόμενα εξελίσσονται με ρυθμό που χαρακτηρίζεται από τη συχνότητα πλάσματος,  $\omega_p$ . Όμως, σε κάθε μέσο συμβαίνουν συγκρούσεις, που τείνουν να καταστρέψουν την οργανωμένη διάταξη που συνοδεύει τα συλλογικά φαινόμενα. Εισάγοντας πάλι τη συχνότητα συγκρούσεων  $\nu$  προκύπτει ότι

$$\nu \ll \omega_p \quad (2.43)$$

είναι η τρίτη προϋπόθεση για να χαρακτηριστεί ένα μέσο σαν πλάσμα. Αν η σχέση (2.43) παραβιάζεται, τότε οι συχνές συγκρούσεις είναι εκείνες που διέπουν τη συμπεριφορά του μέσου, που δεν είναι πια άλλη από τη συμπεριφορά ενός συνηθισμένου υλικού.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $\lambda = u_{\theta}/\nu$  και  $\lambda_D = u_{\theta}/\omega_p$  για τη μέση ελεύθερη διαδρομή και το μήκος του Debye, η σχέση (2.43) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

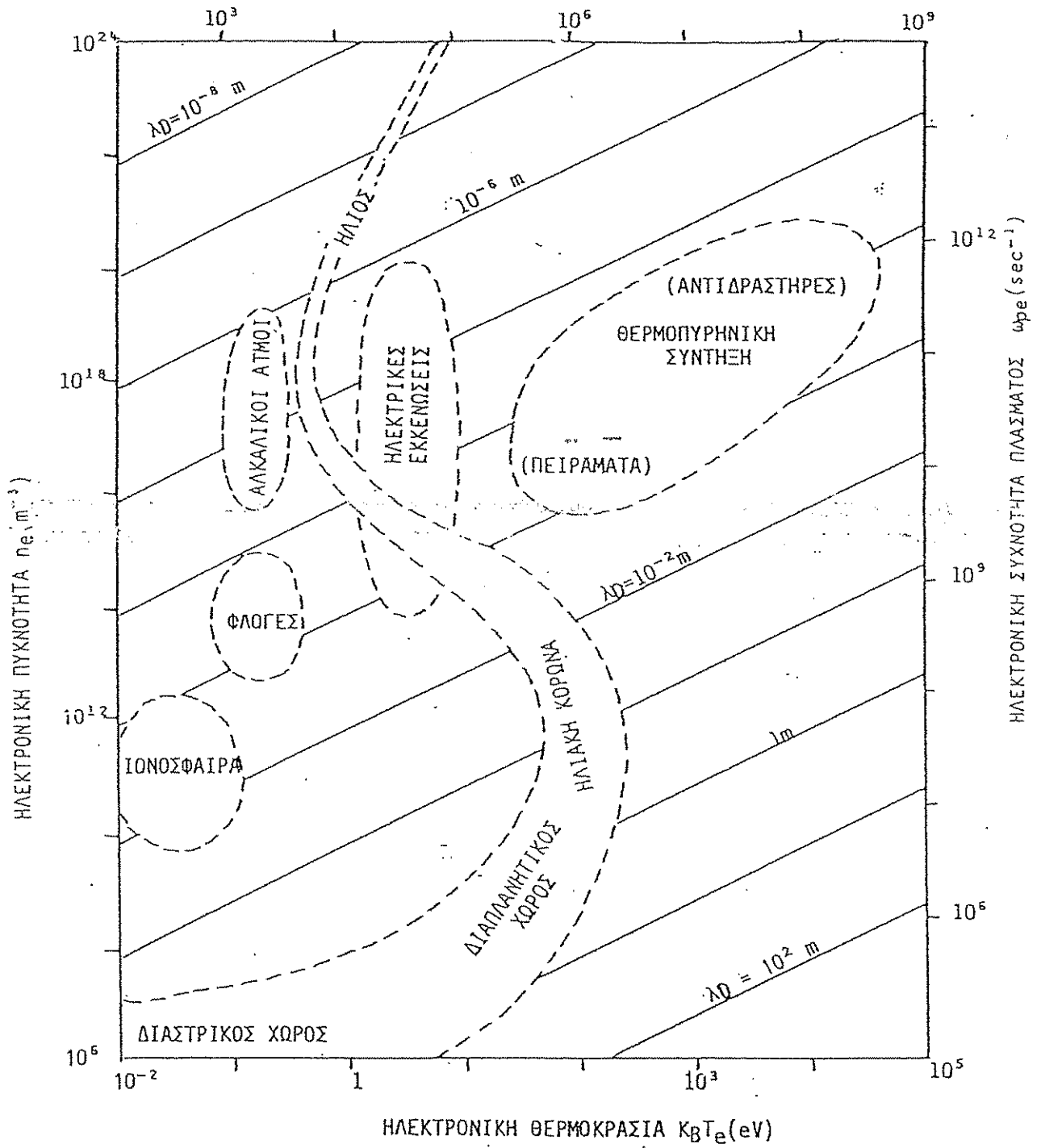
$$\lambda \gg \lambda_D \quad (2.44)$$

Η τελευταία σχέση περιγράφει ότι μεταξύ διαδοχικών συγκρούσεων ένα σωματίδιο διανύει μεγάλες αποστάσεις σε σύγκριση με το μήκος του Debye. Όμως το μήκος του Debye περιγράφει το βεληνεκές των πεδίων που θα μπορούσαν να προκαλέσουν σύγκρουση. Συνεπώς η σχέση (2.44) περιγράφει ότι οι συγκρούσεις στο πλάσμα δεν είναι συχνά φαινόμενο.

Ανακεφαλαιώνοντας, ο ορισμός του πλάσματος μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: "Πλάσμα είναι το υλικό μέσο, που περιλαμβάνει ελεύθερα φορτισμένα ηλεκτρικά φορτία και ικανοποιεί τις σχέσεις  $n_0^{-1/3} \ll \lambda_D \ll L$  και  $\nu \ll \omega_p$  (ή  $\lambda \gg \lambda_D$ )".

Στο Σχ. 2.5 απεικονίζονται προσεγγιστικά οι περιοχές στις τιμές της ηλεκτρονικής πυκνότητας  $n_e$  και θερμοκρασίας  $T_e$  για διάφορα υλικά μέσα (σε αέριο κατάσταση) που μπορούν να ταξινομηθούν ως πλάσματα. Με την πρώτη ματιά φαίνεται ότι τόσο σε φυσική κατάσταση (στην αλυσίδα Ήλιος-κορώνα-διαπλανητικός χώρος-διαστρικός χώρος με τη νηίδα της γήινης ιονόσφαιρας), όσο και στις διάφορες μορφές τεχνητού πλάσματος, οι παράμετροι  $n_e$  και  $T_e$  καλύπτουν περιοχές με πλάτος πολλών τάξεων μεγέθους. Αυτό έρχεται σε άμεση αντίθεση με τα συνηθισμένα υλικά μέσα.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ  $T_e(K)$



Σχ. 2.5 Ενδεικτικές τιμές χαρακτηριστικών παραμέτρων διαφόρων πλάσμάτων

### Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 3

#### ΤΡΟΧΙΕΣ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

##### 3.1 Γενικά

Στην παράγραφο 2.3, όπου παρουσιάσθηκε η εξίσωση του Boltzmann, αναφέρθηκε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες από τις οποίες προσδιορίζεται η λύση της εξίσωσης είναι οι τροχιές των σωματιδίων και δίδονται από τις διαφορικές εξισώσεις (2.15). Αυτό δεν είναι συμπτωματικό, αλλά απλούστατα εκφράζει το γεγονός ότι ο αριθμός των σωματιδίων  $fd^3vd^3r$  παραμένει σταθερός κατά μήκος της τροχιάς μιας ομάδας σωματιδίων. Για το λόγο αυτό είναι φανερό πως μια πρώτη προσέγγιση για την επίλυση ενός προβλήματος του πλάσματος είναι η διερεύνηση των τροχιών των μεμονωμένων φορτισμένων σωματιδίων. Η χρησιμότητα αυτής της μελέτης όμως δεν περιορίζεται μόνο στη διευκόλυνση της επίλυσης της εξίσωσης του Boltzmann. Ιδιαίτερα σημαντική είναι η γνώση της κίνησης μεμονωμένων σωματιδίων για εξαγωγή γενικών συμπερασμάτων, έστω και μόνο ποιοτικών, για τη μακροσκοπική συμπεριφορά του πλάσματος σε κάποια δεδομένη γεωμετρία μαγνητικών κυρίως (αλλά και ηλεκτρικών) πεδίων. Παρουσίαση τέτοιων γενικών συμπερασμάτων θα γίνει στο τέλος αυτού του κεφαλαίου.

Σχεδόν πάντοτε, οι δυνάμεις που επηρεάζουν τη συμπεριφορά του πλάσματος έχουν ηλεκτρομαγνητική προέλευση. Οι δυνάμεις βαρύτητας είναι πολλές τάξεις μεγέθους ασθενέστερες και συνήθως αμελούνται. Στερεά σώματα είτε δεν τοποθετούνται μέσα στο πλάσμα, είτε όταν τοποθετούνται (όπως στην περίπτωση κεραίων ή άλλων ακροδεκτών για διέγερση ή μετρήσεις) έχουν μικρές διαστάσεις και οι αντίστοιχες δυνάμεις είναι πάλι αμελητέες. Τέλος δυνάμεις όπως οι πυρηνικές δυνάμεις είναι ισχυρές, αλλά έχουν πολύ μικρό βεληνεκές, ώστε η επίδραση τους να είναι αντίκειμενο μελέτης μόνο στις δυαδικές συγκρούσεις. Συνεπώς, οι τροχιές προκύπτουν κατά κανόνα μόνο από τις σχέσεις:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Οι εξισώσεις (3.1), μολονότι περικλείουν όλες τις πληροφορίες για την περιγραφή των τροχιών, δεν είναι πάντοτε ο ευκολότερος τρόπος για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος. Κύριο μειονέκτημα αυτών των εξισώσεων είναι ο διανυσματικός χαρακτήρας τους, που κυρίως διευκολύνει μόνο όταν το σύστημα συντεταγμένων είναι καρτεσιανό. Σε καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, παράγωγοι όπως η  $d\vec{v}/dt$  περιλαμβάνουν και όρους που προκύπτουν από τη χρονική μεταβολή των μοναδιαίων διανυσμάτων. Έτσι π.χ. σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $\vec{r} = (r, \varphi, z)$  η ακτινική επιτάχυνση είναι  $\hat{e}_r \cdot d\vec{v}/dt = d^2r/dt^2 - r(d\varphi/dt)^2$ ,

όπου ο τελευταίος όρος προέρχεται από το  $v_{\phi} d\hat{e}_{\phi}/dt$ . Σε πολύπλοκα καμπυλόγραμμα συστήματα, ο προσδιορισμός τέτοιων όρων είναι συχνά αρκετά επίπονη εργασία.

Συχνά, η κίνηση ενός σωματιδίου προσδιορίζεται ευκολότερα με τη μέθοδο του Lagrange. Στη μέθοδο αυτή σχηματίζεται η Λαγκρανζιανή συνάρτηση L,

$$L = W_K - W_{\Delta\gamma\epsilon\nu}, \quad (3.2)$$

όπου  $W_K = mv^2/2$  είναι η κινητική ενέργεια και  $W_{\Delta\gamma\epsilon\nu}$  είναι η γενικευμένη δυναμική ενέργεια, δηλαδή μια συνάρτηση των συντεταγμένων, της ταχύτητας και του χρόνου, τέτοια ώστε η δύναμη να προκύπτει ως:

$$\vec{F} = -\nabla W_{\Delta\gamma\epsilon\nu} + \frac{d}{dt} \nabla_v W_{\Delta\gamma\epsilon\nu}, \quad (3.3)$$

όπου  $\nabla = \hat{e}_x \partial/\partial x + \hat{e}_y \partial/\partial y + \hat{e}_z \partial/\partial z$ . Από τη συνάρτηση L οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τη σχέση:

$$\frac{d}{dt} (\nabla_v L) - \nabla L = \vec{F}_{\lambda} \quad (3.4)$$

όπου  $\vec{F}_{\lambda}$  είναι οι λοιπές δυνάμεις, εκείνες δηλαδή που δεν καλύπτονται από τη σχέση (3.3) και η δράση τους δεν περιλαμβάνεται στην L. Τέτοιες δυνάμεις, όπως π.χ. οι δυνάμεις τριβής, δεν πρόκειται να μας απασχολήσουν.

Όταν η δύναμη  $\vec{F}$  στη σχέση (3.3) είναι η δύναμη του Lorentz, τότε η Λαγκρανζιανή έχει τη μορφή:

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - q(\Phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (3.5)$$

όπου από τα δυναμικά  $\Phi$  και  $\vec{A}$  προκύπτουν τα πεδία από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Για να επιβεβαιώσουμε ότι η μέθοδος του Lagrange δίνει τη σχέση (3.4), εφαρμόζουμε τον τελεστή (3.4) στη σχέση (3.5),

$$\frac{d}{dt} (\nabla_v L) - \nabla L = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) + \frac{d}{dt} (q\vec{A}) + q\nabla\Phi - q\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (3.7)$$

Όμως, χρησιμοποιώντας γνωστές σχέσεις από το διαφορικό λογισμό έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}, \quad (3.8)$$

$$\nabla(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{v}) + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{v}$$

όπου οι τελευταίοι δύο όροι, που έχουν παραγώγους της ταχύτητας, είναι ίσοι με μηδέν, αφού η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη μεταβλητή. Συνδυάζοντας αυτές τις σχέσεις με τις σχέσεις (3.6) προκύπτει η εξίσωση (3.1), επιβεβαιώνοντας έτσι την ισοδυναμία των δύο μεθόδων.



Η μέθοδος του Lagrange είναι ιδιαίτερα ισχυρό και χρήσιμο εργαλείο όταν σε κάποια εφαρμογή δεν ταιριάζει η χρήση του καρτεσιανού συστήματος. Μάλιστα, δεν είναι αναγκαίος ο περιορισμός σε ορθογώνια μόνο συστήματα. Αρκεί η εισαγωγή των γενικευμένων συντεταγμένων  $s_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , από τις οποίες εκφράζονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες  $\vec{r} = \vec{r}(s_1, s_2, s_3)$ . Τότε η εξίσωση (3.4) του Lagrange, γράφεται ως:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} - \frac{\partial L}{\partial s_i} = Q_i \quad (3.9)$$

για  $i = 1, 2, 3$ , όπου  $Q_i = \vec{F}_\lambda \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial s_i}$  είναι η γενικευμένη δύναμη που αντιστοιχεί στη γενικευμένη συντεταγμένη  $s_i$  και περιγράφει τη δράση των λοιπών (μη συντηρητικών) δυνάμεων  $\vec{F}_\lambda$ . Συνήθως εξετάζουμε μόνο περιπτώσεις όπου  $Q_i = 0$ .

Το μεγάλο πλεονέκτημα που παρουσιάζει η μέθοδος του Lagrange είναι η ευελιξία που προσφέρεται στην επιλογή των γενικευμένων συντεταγμένων  $s_i$ . Ειδικότερα, συχνά είναι δυνατή μια τέτοια επιλογή, ώστε  $\partial L / \partial s_i = 0$ , για ένα ή περισσότερα  $i$ . Τότε (εφόσον  $Q_i = 0$ ), αμέσως φαίνεται ότι ένα πρώτο ολοκλήρωμα, δηλαδή: μια σταθερά της κίνησης, είναι το

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_i} = \text{σταθ.}, \quad (3.10)$$

Το μέγεθος  $P_i = \partial L / \partial \dot{s}_i$  ονομάζεται κανονική (ή γενικευμένη) ορμή, συζυγής προς τη συντεταγμένη  $s_i$ .

Ταυτόχρονα, ένα άλλο συχνό πλεονέκτημα της μεθόδου του Lagrange είναι ότι εμπλέκει όχι τα πεδία αλλά τα δυναμικά  $\Phi$  και  $\vec{A}$ . Τα δυναμικά αυτά υπακούουν σε εξισώσεις απλούστερες απ' ό,τι τα πεδία και έτσι συχνά διευκολύνεται η επίλυση των εξισώσεων για τη συμπεριφορά του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Στις επόμενους παραγράφους αυτού του κεφαλαίου μελετώνται οι τροχιές φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορες περιπτώσεις ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων, αρχίζοντας από τις απλούστερες. Όλες οι περιπτώσεις είναι αρκετά στοιχειώδεις, ώστε να μην είναι απαραίτητο για την κατανόησή τους να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του Lagrange, η οποία αποτελεί, όσο αφορά αυτό το κείμενο, απλώς παιδαγωγική παρένθεση.

### 3.2 Στατικό ηλεκτρικό πεδίο

Η απλούστερη μορφή κίνησης είναι σε στατικό ηλεκτρικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή επενεργεί μόνο η δύναμη  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Εισάγοντας το δυναμικό  $\Phi(\vec{r})$ , ώστε  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ , προκύπτει αμέσως ένα πρώτο ολοκλήρωμα, η ολική ενέργεια του σωματιδίου. Συγκεκριμένα, σχηματίζοντας το εσωτερικό γινόμενο της ταχύτητας με τη δύναμη έχουμε:

$$m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -q\vec{v} \cdot \nabla\Phi = -q \frac{d\Phi}{dt}, \quad (3.11)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι  $\partial\Phi/\partial t = 0$ . Ολοκληρώνοντας την (3.11) προκύπτει:

$$\frac{1}{2} m v^2 + q\Phi = W_K + W_\Delta = W = \text{σταθ.}, \quad (3.12)$$

η διατήρηση της ολικής ενέργειας  $W$ , που αποτελείται από την κινητική και τη δυναμική ε-

νέργεια,  $W_K$  και  $W_\Delta$ , αντίστοιχα.

Πρόσθετα πρώτα ολοκληρώματα προκύπτουν από τη Λαγκρανζιανή:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\Phi(\vec{r}) \quad (3.13)$$

όταν σε κάποιο σύστημα γενικευμένων συντεταγμένων ισχύει  $\partial L / \partial s_i = 0$ , δηλαδή  $\partial \Phi / \partial s_i = 0$ .

Παραδείγματα τέτοιων περιπτώσεων είναι:

(α) Σε καρτεσιανό σύστημα, όταν  $\Phi = \Phi(z)$  ( $= -E_0 z$ , όταν η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου είναι μηδέν) έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m v_x = \text{σταθ.} \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m v_y = \text{σταθ.}$$

Στην περίπτωση αυτή, οι γενικευμένες ορμές  $P_x$  και  $P_y$  ταυτίζονται με τις συνήθεις ορμές  $p_x$  και  $p_y$ . Ως προς τον άξονα  $z$ , δεδομένου ότι  $dz = v_z dt$ :

$$\frac{d}{dt}(m v_z) = -q \frac{d\Phi}{dz} \rightarrow W = \frac{1}{2} m v_z^2 + q\Phi(z) = \text{σταθ.} \quad (3.15)$$

Τέλος με άμεση ολοκλήρωση προκύπτουν οι σχέσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$  και  $z(t)$ .

(β) Σε κυλινδρικό σύστημα, όταν  $\Phi = \Phi(r)$  ( $= \Phi_0 \ln(r/R)$ , όταν η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου είναι μηδέν), η Λαγκρανζιανή είναι:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - q\Phi \quad (3.16)$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \rightarrow P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} = \text{σταθ.} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} = \text{σταθ.}$$

Εδώ η γενικευμένη ορμή  $P_\phi$  είναι η ροπή της περιφερειακής ορμής  $m r \dot{\phi}$ , ενώ η γενικευμένη ορμή  $P_z$  ταυτίζεται με την ορμή  $p_z = m v_z$ . Τέλος ως προς την ακτινική συντεταγμένη  $r$  έχουμε, δεδομένου ότι  $dr = \dot{r} dt$ :

$$\frac{d}{dt}(m \dot{r}) = m r \dot{\phi}^2 - q \frac{d\Phi}{dr} \rightarrow W = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) + q\Phi(r) = \text{σταθ.} \quad (3.18)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα προέκυψε χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα ότι  $P_\phi = \text{σταθ.}$  Ολοκληρώνοντας τις σχέσεις αυτές προκύπτουν οι τροχιές  $r(t)$ ,  $\phi(t)$  και  $z(t)$ .

### 3.3 Στατικό ομογενές μαγνητικό πεδίο

Άλλη περίπτωση στοιχειώδους κίνησης είναι σε ομογενές στατικό μαγνητικό πεδίο. Υποθέτουμε ότι  $\vec{B} = B \hat{e}_z$ . Επειδή δεν ασκείται καμιά δύναμη κατά μήκος του άξονα  $z$ , η αντίστοιχη ταχύτητα  $v_z$  παραμένει σταθερή. Ως προς το εγκάρσιο επίπεδο, η δύναμη είναι συνεχώς κάθετη προς την τροχιά,  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ , συνεπώς δρα ως κεντρομόλος και επιβάλλει

κυκλική κίνηση με κυκλική συχνότητα την κυκλοτρονική συχνότητα  $\omega_c = qB/m$ , ταχύτητα με σταθερό μέτρο  $v_{\perp} = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$  και σταθερή ακτίνα περιστροφής (ση με την ακτίνα του Larmor,  $\rho_L = v_{\perp} / |\omega_c|$ ). Ως διάνυσμα, η γωνιακή ταχύτητα είναι  $\vec{\omega}_c = -\omega_c \hat{e}_z$ . Τα πορίσματα αυτά διατυπώνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} x &= x_K + \rho_L \cos(\omega_c t) \\ y &= y_K - \rho_L \sin(\omega_c t) \\ v_x &= -v_{\perp} \sin(\omega_c t) \\ v_y &= v_{\perp} \cos(\omega_c t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

όπου  $x_K$  και  $y_K$  είναι οι συντεταγμένες του κέντρου περιστροφής.

Είναι ενδιαφέρον να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Lagrange για να συναγάγουμε τα ίδια συμπεράσματα. Για το σχηματισμό της Λαγκρανζιανής χρειάζεται το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{A}$  που αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = B\hat{e}_z$ . Επειδή  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , υπάρχει μια σχετική ευελιξία στην επιλογή της συνάρτησης  $\vec{A}$ . Επιλογές όπως

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \hat{e}_y Bx \\ \vec{A} &= -\hat{e}_x By \\ \vec{A} &= \hat{e}_{\varphi} \frac{1}{2} Br \end{aligned} \quad (3.20)$$

ή σταθμισμένα αθροίσματα τέτοιων συναρτήσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας την επιλογή  $\vec{A} = \hat{e}_y Bx$  έχουμε:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2) + q\dot{x}v_y B \quad (3.21)$$

και συνεπώς:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial v_z} = mv_z = \text{σταθ.} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial v_y} = m(v_y + \omega_c x) = \text{σταθ.}$$

Η τρίτη εξίσωση είναι:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} = m \frac{dv_x}{dt} - qBv_y = 0 \quad (3.23)$$

δηλαδή χρησιμοποιώντας και την (3.22β)

$$\frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y = -\omega_c^2 x + \text{σταθ.} \quad (3.24)$$

που περιγράφει αρμονική ταλάντωση. Αντί για τη σχέση (3.23) θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την επιλογή  $\vec{A} = -\hat{e}_x By$  στη Λαγκρανζιανή, οπότε:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial v_x} = m(v_x - \omega_c y) = \text{σταθ.} \quad (3.25)$$

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη με την (3.24). Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.22β) και (3.25) με τις σχέσεις (3.19α) και (3.19β) αντίστοιχα φαίνεται ότι οι σταθερές είναι ίσες προς  $m\omega_c x_K$  και  $-m\omega_c y_K$  αντίστοιχα.

Σε πολικές συντεταγμένες, με την επιλογή  $\vec{A} = \hat{e}_\phi \frac{1}{2} B r$  έχουμε:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} q B r^2 \dot{\phi} \quad (3.26)$$

από την οποία προκύπτει:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m v_z = \text{σταθ.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 (\dot{\phi} + \frac{1}{2} \omega_c) = \text{σταθ.} \quad (3.27)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = m [\ddot{r} - r \dot{\phi} (\dot{\phi} + \omega_c)] = 0$$

Με πρώτη ματιά οι σχέσεις αυτές δεν φαίνεται να μοιάζουν με τις λύσεις (3.19). Όμως σημειώνουμε ότι η αρχή των αξόνων στο πολικό σύστημα συντεταγμένων δεν συμπίπτει αναγκαστικά με το κέντρο περιστροφής. Αν μετατοπισθεί η αρχή των αξόνων κατάλληλα, ώστε  $x_K = y_K = 0$ , τότε  $\dot{r} = 0$  και  $\dot{\phi} = -\omega_c$  είναι συμβιβαστά με τις σχέσεις (3.27).

### 3.4 Ολισθηση $\vec{E}_\perp \times \vec{B}$

Σχετικές επιπλοκές δημιουργούνται στην κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου όταν το ομογενές στατικό μαγνητικό πεδίο συνοδεύεται και από ένα πάλι ομογενές και στατικό ηλεκτρικό πεδίο. Προσανατολίζουμε τους άξονες έτσι ώστε το μαγνητοστατικό πεδίο να είναι κατά τον άξονα z, δηλ.  $\vec{B} = B \hat{e}_z$ , και το ηλεκτροστατικό πεδίο να βρίσκεται στο επίπεδο xz, δηλ.  $\vec{E} = E_\perp \hat{e}_x + E_\parallel \hat{e}_z$ . Τότε τα δυναμικά είναι:

$$\begin{aligned} \Phi &= -E_\parallel z - E_\perp x \\ \vec{A} &= \hat{e}_y B x \end{aligned} \quad (3.28)$$

οπότε η Λαγκρανζιανή δίδεται από τη σχέση:

$$L = \frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + q(E_\parallel z + E_\perp x + B x v_y) \quad (3.29)$$

Από τη Λαγκρανζιανή προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\frac{\partial L}{\partial v_y} = m v_y + q B x = m(v_y + \omega_c x) = \text{σταθ.}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_z} - \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} (m v_z) - q E_\parallel = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m v_x) - q(E_\perp + B v_y) = 0$$

Από τη σχέση (3.30β) φαίνεται ότι ως προς τον άξονα z η κίνηση είναι επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση  $qE_{\parallel}/m$ , ως προς τους άξονες x και y, συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.30α) και (3.30γ) με τις σχέσεις (3.22β) και (3.23) προκύπτει ότι η κυκλική κίνηση (με κυκλική συχνότητα  $\omega_c$ ) συνοδεύεται από μια μετατόπιση κατά μήκος του άξονα y με την ταχύτητα ολίσθησης  $\vec{v}_D = -(E_{\perp}/B)\hat{e}_y$ . Γενικότερα, η ταχύτητα ολίσθησης γράφεται:

$$\vec{v}_D = \frac{1}{B^2} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (3.31)$$

και είναι ιδιότητα μόνο των πεδίων, δηλαδή δεν εξαρτάται ούτε από τη μάζα ούτε από το φορτίο των σωματιδίων. Η ολίσθηση αυτή ονομάζεται "ολίσθηση  $\vec{E} \times \vec{B}$ ".

Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούν να επαληθευθούν και από την εξίσωση του Lorentz. Αναλύοντας  $\vec{v} = \vec{v}_D + \vec{v}_I$  και επειδή  $d\vec{v}_D/dt = 0$  έχουμε:

$$m \frac{d\vec{v}_I}{dt} = q \left[ \vec{E} + \frac{1}{B^2} (\vec{E} \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{v}_I \times \vec{B} \right] = q \left[ \vec{E} + \frac{1}{B^2} (\vec{E} \cdot \vec{B}) \vec{B} - \frac{1}{B^2} (\vec{B} \cdot \vec{B}) \vec{E} + \vec{v}_I \times \vec{B} \right] = q \left[ \vec{E}_{\parallel} + \vec{v}_I \times \vec{B} \right] \quad (3.32)$$

όπου  $\vec{E}_{\parallel} = (\vec{E} \cdot \vec{B})\vec{B}/B^2$  είναι η προβολή του  $\vec{E}$  στο  $\vec{B}$ . Η εξίσωση (3.32) περιγράφει ότι η ταχύτητα  $\vec{v}_I$  έχει μια επιταχυνόμενη συνιστώσα κατά μήκος του  $\vec{B}$  και μια περιστρεφόμενη (με κυκλική συχνότητα  $\omega_c$ ) συνιστώσα στο επίπεδο που είναι εγκάρσιο προς το  $\vec{B}$ . Επειδή έχουμε γράψει  $\vec{v} = \vec{v}_D + \vec{v}_I$ , η ταχύτητα  $\vec{v}$  έχει σαν επιπρόσθετη συνιστώσα και την ταχύτητα ολίσθησης  $\vec{v}_D$ .

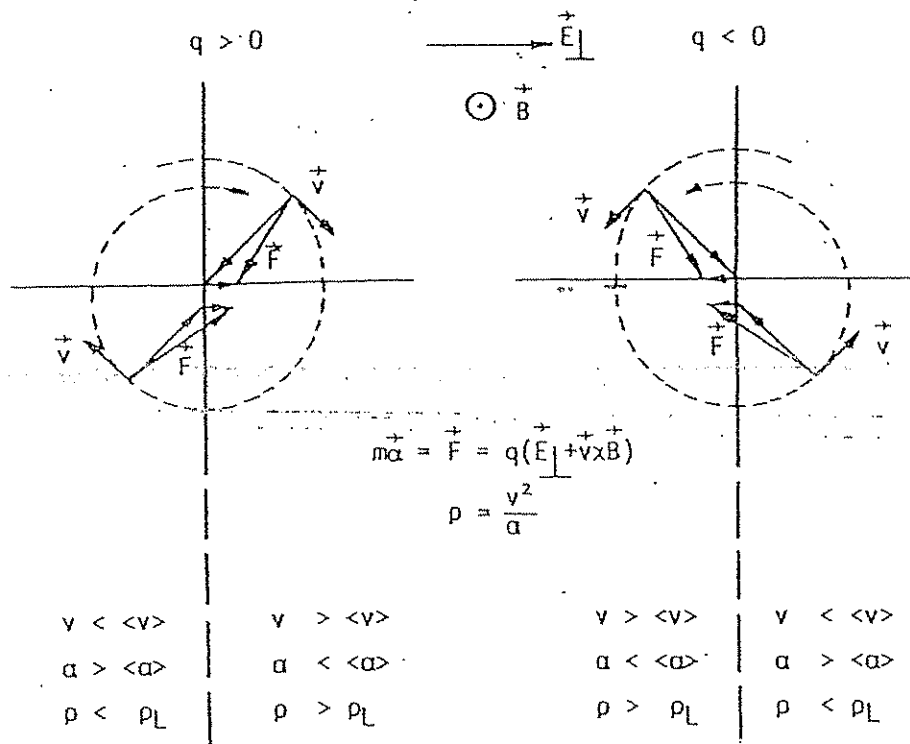
Όπως αναφέρθηκε προηγουμένα, η ταχύτητα  $\vec{v}_D$  είναι ιδιότητα μόνο των πεδίων και μάλιστα συνδέεται με το μετασχηματισμό Lorentz. Όταν σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων τα πεδία είναι  $(\vec{E}, \vec{B})$ , σε άλλο σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}_M$  τα πεδία μετασχηματίζονται σε  $(\vec{E}_M, \vec{B}_M)$  και δίδονται από το μετασχηματισμό Lorentz

$$\vec{E}_M = \vec{E} + \vec{v}_M \times \vec{B} \quad (3.33)$$

$$\vec{B}_M = \vec{B} - \frac{1}{c^2} \vec{v}_M \times \vec{E} = \vec{B}$$

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν σε χαμηλές μόνο ταχύτητες,  $v_M \ll c$ , όπου  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Όταν  $\vec{v}_M = \vec{v}_D = (\vec{E} \times \vec{B})/B^2$ , τότε  $\vec{E}_M = \vec{E}_{\parallel}$  και  $\vec{B}_M = \vec{B}$  (συν αμελητέοι όροι), συνεπώς η τελευταία γραμμή στην εξίσωση (3.32) περιγράφει τη δύναμη Lorentz σε σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο  $E_{\perp}$  έχει μηδενισθεί με την κατάλληλη επιλογή της ταχύτητας μετασχηματισμού,  $\vec{v}_M = \vec{v}_D$ . Παρατηρούμε επίσης ότι δεν είναι δυνατός μετασχηματισμός Lorentz που να αλλάζει την τιμή της παράλληλης συνιστώσας  $E_{\parallel}$ , επειδή ο μετασχηματισμός εμπλέκει το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{v}_M \times \vec{B}$ , που δεν έχει συνιστώσα κατά μήκος του  $\vec{B}$ .

Η φυσική ερμηνεία της ολίσθησης  $\vec{E} \times \vec{B}$  φαίνεται στο Σχ. 3.1. Παίρνοντας τα πεδία  $\vec{B} = B\hat{e}_z$  και  $\vec{E} = E_{\perp}\hat{e}_x$ , όπως δηλαδή στην αρχή της παραγράφου, αλλά με  $E_{\parallel} = 0$ , παρατηρού-



Σχ. 3.1 Φυσική ερμηνεία της ολισθησης  $\vec{E} \times \vec{B}$

με ότι, για  $q > 0$ , όταν  $x > x_K$  συμβαίνουν δύο πράγματα. Πρώτα, λόγω του  $E_{\perp}$ , η ενέργεια αυξάνει, συνεπώς  $v_{\perp}(x > x_K) > v_{\perp}(x = x_K)$ . Επίσης, η κεντρομόλος επιτάχυνση  $a_{\perp}(x > x_K) < a_{\perp}(x = x_K)$  επειδή μεταξύ των δυνάμεων  $\vec{E}$  και  $-\vec{v} \times \vec{B}$  σχηματίζεται αμβλεία γωνία. Επαναλαμβάνοντας τους ίδιους συλλογισμούς στην περιοχή  $x < x_K$ , συμπεραίνουμε ότι η ακτίνα περιστροφής,  $\rho = v_{\perp}^2 / a_{\perp}$  είναι μεγαλύτερη όταν  $x > x_K$  και μικρότερη όταν  $x < x_K$ . Η διαφορά αυτή κατά τη διάρκεια κάθε ολοκληρωμένης περιστροφής μεταφράζεται με ολίσθηση κατά μήκος του άξονα  $-y$ . Αντίστοιχα, όταν  $q < 0$  η ακτίνα περιστροφής είναι μεγαλύτερη όταν  $x < x_K$ , όμως η περιστροφή είναι αντίθετη από την περίπτωση  $q > 0$ , με αποτέλεσμα πάλι η ολίσθηση να είναι κατά μήκος του άξονα  $-y$ .

Τελειώνοντας, σημειώνουμε ότι σ'ολόκληρη σχεδόν την ανάλυση αυτής της παραγράφου δεν είχε ιδιαίτερη σημασία η υφή της δύναμης  $q\vec{E}$  ως ηλεκτρικής δύναμης. Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και αν αυτή η δύναμη υποκατασταθεί από οποιαδήποτε ομογενή μόνιμη δύναμη  $\vec{F}$ , από οποιαδήποτε πηγή και αν προέρχεται. Στην περίπτωση αυτή, η ταχύτητα ολίσθησης είναι:

$$\vec{v}_D = \frac{1}{q} \frac{\vec{F} \times \vec{B}}{B^2} \quad (3.34)$$

και εξαρτάται από το ηλεκτρικό φορτίο, τόσο ως προς το μέτρο όσο και ως προς το πρόσημο.

### 3.5 Μη ομογενές στατικό μαγνητικό πεδίο

#### 3.5.1 Γενικά

Είδαμε πώς η κυκλική (ή ελικοειδής) κίνηση ενός σωματιδίου σε ομογενές μαγνητοστατικό πεδίο περιπλέκεται όταν εισαχθεί κάτι τόσο απλό, όσο ένα ομογενές ηλεκτροστατικό πεδίο. Χωρίς προσεκτική ανάλυση, η πρώτη εκτίμηση θα ήταν ότι π.χ. το ηλεκτρικό πεδίο παρασύρει το φορτισμένο σωματίδιο προς την κατεύθυνσή του. Η σωστή απάντηση, ότι δηλαδή θα προκληθεί εγκάρσια ολίσθηση με ταχύτητα  $\vec{v}_D = (\vec{E} \times \vec{B}) / B^2$  φαίνεται αφύσικη. Ανεξάρτητα πάντως από το μέτρο και την κατεύθυνση αυτής της ολίσθησης, θα μπορούσε να είχε εκτιμηθεί ότι αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι σχετικά ασθενές, τότε η κίνηση του φορτισμένου σωματιδίου θα συνίσταται κατά κύριο λόγο από την κυκλική κίνηση στο μαγνητοστατικό πεδίο, ενώ το ηλεκτροστατικό πεδίο θα προσθέτει μια διαταραχή σ'αυτή την κυκλική κίνηση.

Αυτή η γενική εκτίμηση επεκτείνεται και στην περίπτωση που το μαγνητοστατικό πεδίο δεν είναι ομογενές, αλλά έχει μια ανομοιογένεια που αποδίδεται από τον πίνακα:

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Οι όροι αυτού του πίνακα δεν είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, αλλά συνδέονται με τους νόμους  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  και  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ . Θεωρούμε ότι στην περιοχή που βρίσκεται το σωματίδιο, και ειδικότερα στο κέντρο περιστροφής, το σύστημα συντεταγμένων έχει προσανατολισμό τέτοιο

ώστε  $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ , δηλ.  $B_z = B_0 = \text{σταθ.}$ ,  $B_x = B_y = 0$ , ενώ κοντά στο σημείο αυτό, και μάλιστα στην τροχιά του σωματιδίου, λόγω της ανομοιογένειας  $\vec{B} \neq B_0 \hat{e}_z$ . Αυτή η ανομοιογένεια, εφόσον είναι ασθενής, εκτιμάται ότι δεν θα διαταράξει την (κατά κύριο λόγο) κυκλική κίνηση σε βαθμό που η τροχιά να γίνει αγνώριστη. Συνεπώς δεχόμαστε ότι σε πρώτη προσέγγιση κάθε φορτισμένο σωματίδιο εκτελεί μία ελικοειδή κίνηση, με ταχύτητα  $\omega_c = -qB_0/m$ , ενώ το κέντρο περιστροφής μετατοπίζεται κατά μήκος μιας μαγνητικής γραμμής, είτε αυτή είναι ευθύγραμμη, είτε καμπυλόγραμμη. Δεχόμενοι αυτή την τροχιά ως πρώτη προσέγγιση, προσδιορίζουμε στις επόμενες υποπαραγράφους τις διορθώσεις που απαιτούνται για να είναι ακριβέστερη η περιγραφή της κίνησης. Προϋπόθεση για να αληθεύει αυτή η διαδικασία είναι η ανομοιογένεια να είναι ήπια, δηλ. το χαρακτηριστικό μήκος της ανομοιογένειας να είναι μεγάλο σε σχέση με το χαρακτηριστικό μήκος της τροχιάς,  $B/(\partial B/\partial r) \gg r_L$ , όπου  $\partial B/\partial r$  είναι οποιαδήποτε από τις παραγώγους του πίνακα (3.35).

Στις επόμενες υποπαραγράφους εξετάζονται χωριστά τρεις διαφορετικές περιπτώσεις ανομοιογένειας. Αυτές είναι:

- (α) Μόνο διαμήκης ανομοιογένεια, δηλαδή μόνο  $\partial B_z/\partial z \neq 0$ . Επειδή  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , αυτή η περίπτωση συνοδεύεται από απόπτωση σινητωσών  $B_x$  και  $B_y$ .
- (β) Μόνο εγκάρσια ανομοιογένεια, δηλαδή μόνο  $\partial B_z/\partial x \neq 0$ . Με κατάλληλη στροφή των αξόνων, αυτή η περίπτωση καλύπτει και την περίπτωση  $\partial B_z/\partial y \neq 0$ .
- (γ) Μόνο καμπυλότητα των μαγνητικών γραμμών, δηλαδή μόνο  $\partial B_x/\partial z \neq 0$ . Πάλι, με στροφή των αξόνων καλύπτεται και η περίπτωση  $\partial B_y/\partial z \neq 0$ .

Από τις περιπτώσεις αυτές οι δύο τελευταίες, μολονότι αναφέρονται σε ανομοιογένεια διαφορετικού χαρακτήρα, συνυπάρχουν σε κάθε περίπτωση, επειδή  $\nabla \times \vec{B} = 0$ . Τέλος η περίπτωση κατά την οποία οι μόνοι μη μηδενικοί όροι είναι οι  $\partial B_x/\partial y = \partial B_y/\partial x \neq 0$  δεν καλύπτεται από τις παραπάνω περιπτώσεις αλλά δεν πρόκειται να εξετασθεί, επειδή η αντισυμμετρία του αντίστοιχου πεδίου προκαλεί ουσιαστικά εξουδετέρωση της διαταραχής στα δύο μισά κάθε περιστροφής.

### 3.5.2 Διαμήκης ανομοιογένεια

Όταν  $\partial B_z/\partial z \neq 0$ , τότε η εξίσωση  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  συνεπάγεται ότι  $\partial B_x/\partial x + \partial B_y/\partial y = -\partial B_z/\partial z \neq 0$ . Επιμερίζοντας γράφουμε:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = -\alpha \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = (\alpha - 1) \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

όπου  $\alpha$  είναι μια σταθερά που εκφράζει την ελλειπτικότητα στη συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα δέση μαγνητικών γραμμών. Η τιμή  $\alpha = 0.5$  περιγράφει σύστημα με κυλινδρική συμμετρία. Αναπτύσσοντας τα πεδία αυτά γύρω από το σημείο  $x=y=0$ , έχουμε:

$$B_x = -\alpha \frac{\partial B_z}{\partial z} x \quad (3.37)$$

$$B_y = (\alpha - 1) \frac{\partial B_z}{\partial z} y$$



Η δύναμη Lorentz έχει τη συνιστώσα:

$$F_z = q(v_x B_y - v_y B_x) = q \frac{\partial B_z}{\partial z} [(a-1)v_x y + a v_y x] = q \frac{\partial B_z}{\partial z} [(a-1)\sin^2(\omega_c t) - a \cos^2(\omega_c t)] \rho_L v_{\perp}$$

$$= -\frac{1}{2} q \frac{\partial B_z}{\partial z} [1 + (2a-1)\cos(2\omega_c t)] \rho_L v_{\perp} \quad (3.38)$$

Για να προκύψει η (3.38) χρησιμοποιήθηκαν ως εκτιμήσεις οι λύσεις (3.19) της περίπτωσης ομογενούς πεδίου, με  $x_K=0$  και  $y_K=0$ . Η σχέση (3.38) υποδεικνύει ότι η δύναμη  $F_z$  περιλαμβάνει ένα σταθερό μέρος και ένα εναλλασσόμενο, με κυκλική συχνότητα  $2\omega_c$ . Κυρίως ενδιαφέρει η μακροχρόνια συμπεριφορά των σωματιδίων, σε χρονικά διαστήματα μεγάλα σε σχέση με την περίοδο  $2\pi/\omega_c$ . Για τέτοια χρονικά διαστήματα το εναλλασσόμενο μέρος (με συχνότητα  $2\omega_c$ ) δεν προκαλεί κανένα μόνιμο αποτέλεσμα στις τροχιές των σωματιδίων. Έτσι αρκεί να υπολογισθούν οι τροχιές με βάση το μόνιμο μέρος της δύναμης  $F_z$ , όπως προκύπτει από τη σχέση (3.38) παίρνοντας μέσους όρους για χρονικά διαστήματα μεγάλα σε σχέση με την περίοδο  $2\pi/\omega_c$ :

$$F_z = -\frac{1}{2} q \rho_L v_{\perp} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{1}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.39)$$

Όμως, από την εξίσωση κίνησης, προκύπτει ότι κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών

$$F_z = m \frac{d}{dt} v_{\parallel} = m v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} v_{\parallel} = \frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial z} v_{\parallel}^2 = -\frac{1}{2} m \frac{\partial}{\partial z} v_{\perp}^2 \quad (3.40)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε αντί του χρόνου  $t$  η απόσταση  $z$  ως ανεξάρτητη μεταβλητή και το γεγονός ότι σε μαγνητικό πεδίο η ολική ενέργεια διατηρείται, συνεπώς  $dv_{\parallel}^2 = -dv_{\perp}^2$ .

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο με διαμήκη ανομοιογένεια είναι ελικοειδής γύρω από τη μαγνητική γραμμή, με κυκλική συχνότητα  $\omega_c$ , ενώ παράλληλα οι τιμές των  $v_{\parallel}$  και  $v_{\perp}$  μεταβάλλονται, έτσι ώστε να διατηρούνται σταθερά τα μεγέθη:

$$W_K = W_{\perp} + W_{\parallel} = \frac{1}{2} m (v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) \quad (3.41)$$

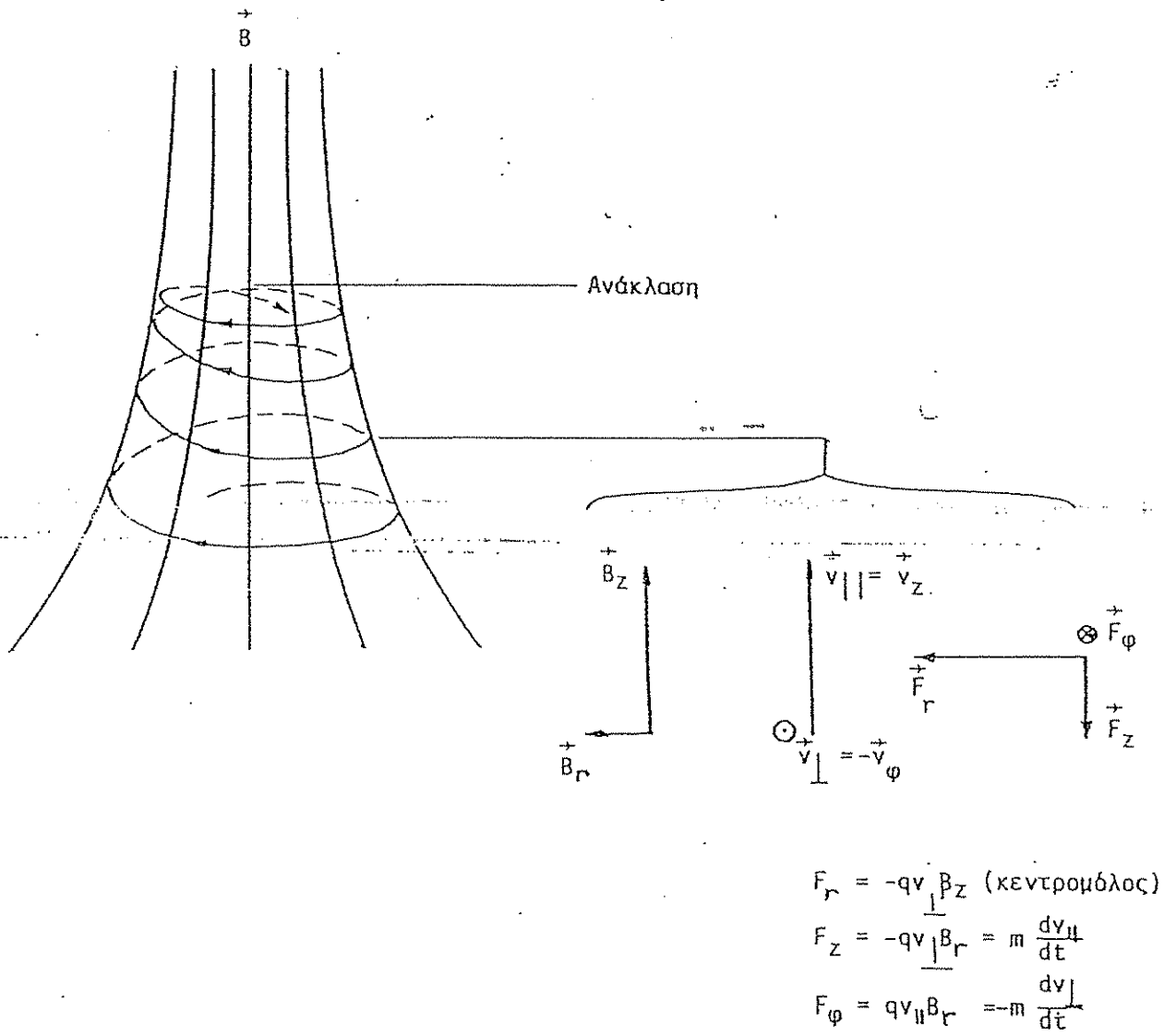
$$\vec{m} = \frac{W_{\perp}}{B_z} \hat{e}_z$$

Η σταθερά  $W_K$  είναι η ολική κινητική ενέργεια, που φυσικά δε μεταβάλλεται επειδή  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \perp \vec{v}$ . Ότι  $|\vec{m}| = \text{σταθ.}$  προκύπτει εξισώνοντας τις δύο τελευταίες εκφράσεις των (3.39) και (3.40) και ολοκληρώνοντας ως προς  $z$ . Η σταθερά  $\vec{m}$  είναι η ροπή μαγνητικού διπόλου  $I \int d\vec{S}$  που προκαλείται από ρεύμα  $I = q(\omega_c/2\pi)$  σε ακτίνα  $\rho_L$ . Η ροπή μαγνητικού διπόλου είναι σταθερή μόνο με την παραδοχή της ήπιας ανομοιογένειας που έχει γίνει σ' αυτή την παράγραφο. Μια τέτοια σταθερά ονομάζεται αδιαβατική αμετάβλητη.

Από την εξίσωση (3.41) προκύπτουν οι αναλογίες:

$$W_{\perp} \sim B_z \quad \rho_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sim B_z^{-1/2} \quad (3.42)$$

$$v_{\perp} \sim B_z^{1/2} \quad \rho_L^2 \sim B_z^{-1}$$



Σχ. 3.2 Κίνηση και ανάκλαση σε μαγνητικό πεδίο με διαμήκη ανομοιογένεια

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι όσο αυξάνει το  $B_z$ , τόσο αυξάνει η εγκάρσια ενέργεια  $W_{\perp}$ . Όμως, η μέγιστη τιμή που μπορεί να έχει το  $W_{\perp}$  είναι  $W_K$ , η ολική κινητική ενέργεια. Όταν φθάσει το σωματίδιο σε σημείο τέτοιο ώστε  $W_{\perp} = W_K$ , τότε η διαμήκης κίνηση σταματά,  $W_{\parallel} = \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = 0$ . Όμως η διαμήκης δύναμη δεν μηδενίζεται, όπως φαίνεται από την εξίσωση (3.39). Συνεπώς το σωματίδιο στο σημείο αυτό αρχίζει να επιστρέφει. (Σχ. 3.2). Ονομάζοντας  $B_{zav}$  την τιμή του  $B_z$  στο σημείο ανάκλασης έχουμε:

$$\frac{B_{zav}}{B_0} = \frac{W_{\perp av}}{W_{\perp 0}} = \frac{W_{\perp 0} + W_{\parallel 0}}{W_{\perp 0}} = 1 + \frac{W_{\parallel 0}}{W_{\perp 0}} \quad (3.43)$$

όπου ο δείκτης 0 συμβολίζει τις τιμές σε κάποιο άλλο σημείο αναφοράς. Από τη σχέση (3.43) φαίνεται ότι η ανάκλαση δεν εξαρτάται από την ενέργεια των σωματιδίων, αλλά μόνο από το λόγο  $W_{\parallel 0}/W_{\perp 0} = (v_{\parallel 0}/v_{\perp 0})^2$ . Φυσικά, προϋπόθεση να συμβεί ανάκλαση είναι να υπάρξει σημείο τέτοιο, ώστε να ικανοποιείται η (3.43). Αν η μορφή του μαγνητικού πεδίου είναι τέτοια, ώστε πουθενά να μην ικανοποιείται η (3.43), τότε το σωματίδιο συνεχίζει να κινείται προς την ίδια κατεύθυνση, με τις τιμές των  $v_{\parallel}$  και  $v_{\perp}$  μεταβαλλόμενες έτσι ώστε τα μεγέθη  $|\vec{m}|$  και  $W_K$  να παραμένουν σταθερά.

### 3.5.3 Εγκάρσια ανομοιογένεια

Όταν το μαγνητικό πεδίο έχει εγκάρσια ανομοιογένεια,  $\partial B_z / \partial x \neq 0$ , το μαγνητικό πεδίο  $B_z = B_0 + (\partial B_z / \partial x)x$  είναι ισχυρότερο όταν  $x > 0$  και ασθενέστερο όταν  $x < 0$ . (Υποθέτουμε ότι  $\partial B_z / \partial x > 0$ ). Αυτό συνεπάγεται ότι η ακτίνα του Larmor,  $\rho_L = v_{\perp} / \omega_c$ , είναι μικρότερη όταν  $x > 0$  και μεγαλύτερη όταν  $x < 0$ . Συνεπώς, με μηχανισμό αντίστοιχο όπως στην ολλοθση  $\vec{E} \times \vec{B}$ , και στην περίπτωση αυτή αναμένεται μια ολλοθση κατά μήκος του άξονα  $y$  όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.3. Έτσι τροποποιούμε τις εξισώσεις (3.39) της περίπτωσης του ομογενούς πεδίου, εισάγοντας την ταχύτητα  $\dot{y}$  για τη μετατόπιση του κέντρου περιστροφής και γράφουμε:

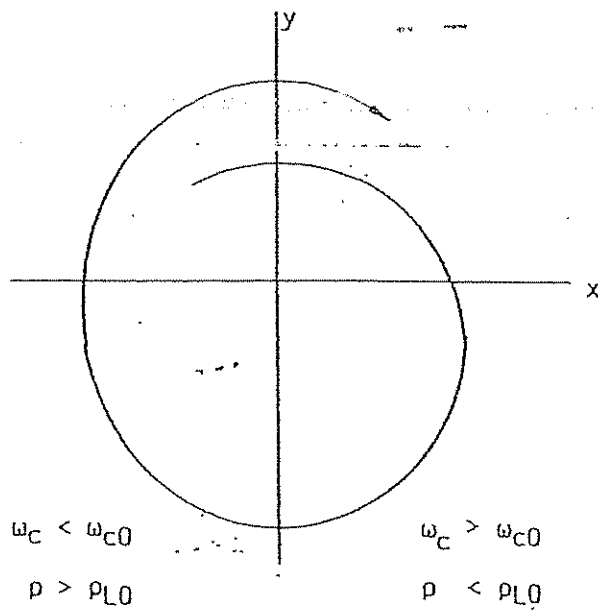
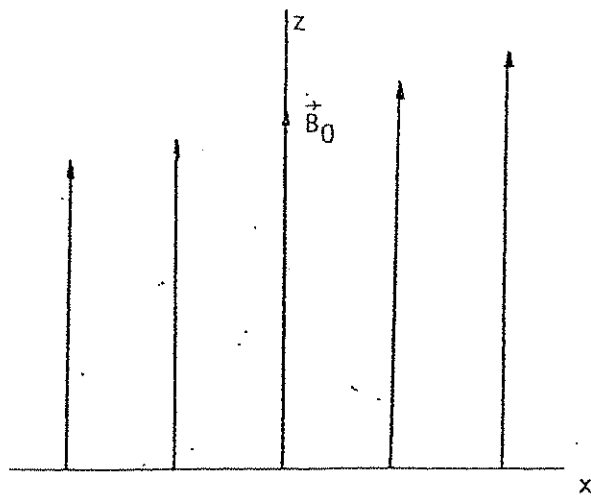
$$\begin{aligned} v_y &= \dot{y} - v_{\perp} \cos(\omega_c t) \\ v_x &= -v_{\perp} \sin(\omega_c t) \\ x &= \rho_L \cos(\omega_c t) \end{aligned} \quad (3.44)$$

όπου  $\omega_{co} = qB_0/m$  είναι η συχνότητα κυκλοτρονίου με βάση το ομογενές τμήμα  $B_0$ . Η εξίσωση για την ταχύτητα  $v_x$  δίνει:

$$\frac{d}{dt} v_x = \omega_{co} \left( 1 + \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} x \right) v_y$$

ή

$$\begin{aligned} -v_{\perp} \omega_{co} \cos(\omega_{co} t) &= \omega_{co} \dot{y} - \omega_{co} v_{\perp} \cos(\omega_{co} t) + \omega_{co} \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \rho_L \dot{y} \cos(\omega_{co} t) \\ -\omega_{co} \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \rho_L v_{\perp} \cos^2(\omega_{co} t) & \end{aligned} \quad (3.45)$$



Σχ. 3.3 Ολίσθηση σε μαγνητικό πεδίο με εγκάρσια ανομοιογένεια

Γράφοντας  $2\cos^2(\omega_c t) = 1 + \cos(2\omega_c t)$  και επιλύοντας ως προς  $y_k$  προκύπτει ότι η ταχύτητα μετατόπισης του κέντρου περιστροφής περιλαμβάνει ένα σταθερό μέρος και ένα εναλλασσόμενο με τις δύο συχνότητες  $\omega_c$  και  $2\omega_c$ . Όπως και στην παρ. 3.5.2 ενδιαφερόμαστε για τη μακροχρόνια συμπεριφορά των σωματιδίων, οπότε παίρνοντας μέσους όρους για χρονικά διαστήματα μεγάλα σε σχέση με την περίοδο  $2\pi/\omega_c$  προκύπτει:

$$\dot{y}_k = \frac{1}{2} \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_z}{\partial x} \rho_L v_{\perp} = \frac{1}{q} \frac{W}{B_0^2} \frac{\partial B_z}{\partial x} \quad (3.46)$$

Η εξίσωση (3.46) περιγράφει την αργή κατά-μέσο όρο ταχύτητα ολίσθησης που προκαλείται από την εγκάρσια ανομοιογένεια  $\partial B_z / \partial x$ . Παρατηρούμε ότι η ολίσθηση αυτή εξαρτάται και από το πρόσημο του ηλεκτρικού φορτίου και τείνει να προκαλέσει αποχωρισμό των θετικών από τα αρνητικά φορτία.

### 3.5.4 Καμπυλότητα πεδίων $\vec{v} \times \vec{B}$

Η τελευταία περίπτωση ανομοιογένειας, που θα εξετασθεί τώρα, αναφέρεται σε μαγνητοστατικά πεδία των οποίων οι πεδριακές γραμμές έχουν καμπυλότητα. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί με την ύπαρξη του όρου  $\partial B_x / \partial z \neq 0$  (ή  $\partial B_y / \partial z \neq 0$ ) στον πίνακα (3.35). Σε αντιστοιχία με τις προηγούμενες περιπτώσεις ανομοιογένειας, δεχόμαστε ότι κατά κύριο λόγο η ταχύτητα αποτελείται από μια συνιστώσα  $\vec{v}_{\parallel}$  κατά μήκος της μαγνητικής γραμμής και μια περιστρεφόμενη συνιστώσα  $\vec{v}_{\perp}$  εγκάρσια.

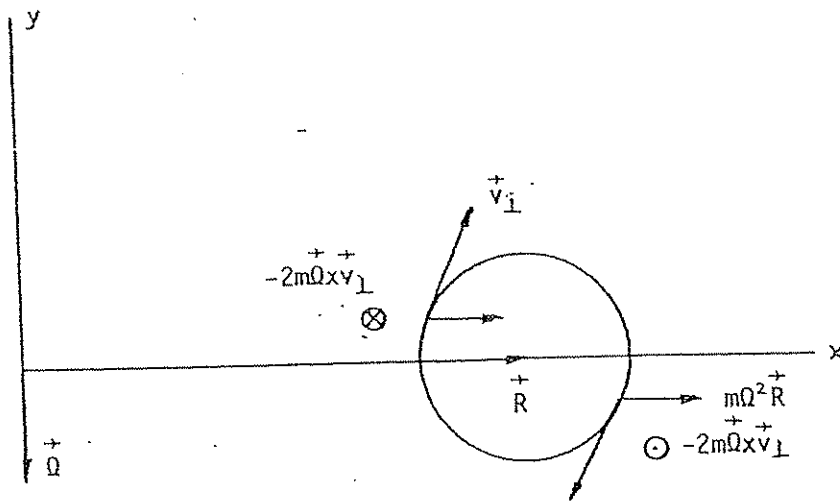
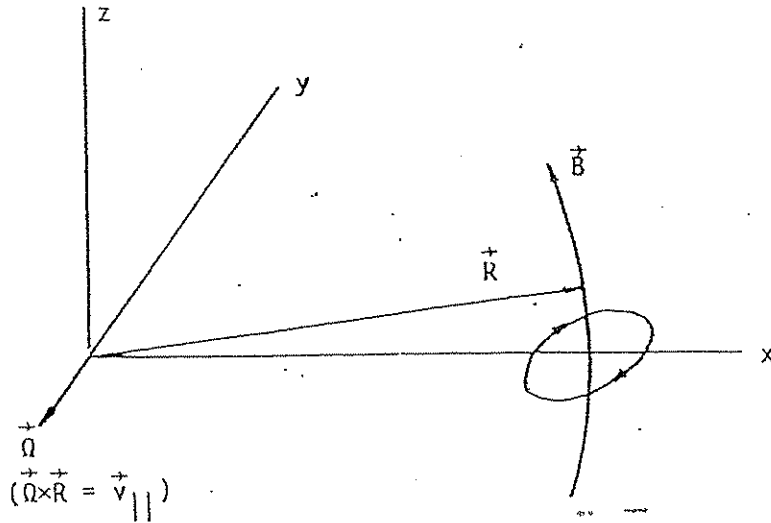
Αυτή η περίπτωση αντιμετωπίζεται ευκολότερα κάνοντας ένα μετασχηματισμό σε σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega = v_{\parallel} / R$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα καμπυλότητας. Ειδικότερα, υποθέτοντας ότι  $\vec{v}_{\parallel} = v_{\parallel} \hat{e}_z$  και  $\vec{R} = R \hat{e}_x$ , η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος είναι  $\vec{\Omega} = -\Omega \hat{e}_y$ . Στο περιστρεφόμενο αυτό σύστημα το φορτισμένο σωματίδιο κινείται κάτω από την επίδραση της δύναμης (Σχ. 3.4):

$$\vec{F} = q \vec{v}_{\perp} \times \vec{B} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\perp} + m \frac{v_{\parallel}^2}{R^2} \vec{R} \quad (3.47)$$

Ο πρώτος όρος στη σχέση (3.47) είναι η δύναμη Lorentz, που προκαλεί την κύρια κυκλική κίνηση με κυκλική συχνότητα  $\omega_c$ . Ο δεύτερος όρος είναι η δύναμη Coriolis. Επειδή η εγκάρσια ταχύτητα είναι περιστρεφόμενο διάνυσμα, αυτή η δύναμη μεταβάλλει συνεχώς πρόσημο, ώστε το συνολικό αποτέλεσμα της να είναι μηδέν. Σε αντίθεση με τη δύναμη Coriolis, ο τελευταίος όρος (η φυγόκεντρος δύναμη) έχει σταθερή διεύθυνση, με αποτέλεσμα να προκαλείται μια ολίσθηση, ανάλογη με την ολίσθηση  $\vec{E} \times \vec{B}$  που δίδεται από τη σχέση (3.34).

Το συμπέρασμα από αυτή τη συζήτηση είναι ότι σε μαγνητικό πεδίο με καμπύλες πεδιακές γραμμές η κυκλική κίνηση με συχνότητα  $\omega_c$  συνοδεύεται και από μια αργή εγκάρσια ολίσθηση, που εκδηλώνεται σε χρονικά διαστήματα μεγάλα σε σχέση με την περίοδο  $2\pi/\omega_c$ . Η ταχύτητα ολίσθησης είναι

$$\vec{v}_R = \frac{m v_{\parallel}^2}{q R^2} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{B^2} = \frac{2W_{\parallel}}{q R B} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{R B} \quad (3.48)$$



(περιστρεφόμενο σύστημα)

Σχ. 3.4 Μετασχηματισμός συντεταγμένων και δυνάμεις όταν υπάρχει καμπυλότητα των πεδιακών γραμμών

### 3.5.5 Σύνγκριση ολισθήσεων

Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήθηκε η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορους απλούς σχηματισμούς στατικών ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Στα αποτελέσματα περιλαμβάνονται και τρεις περιπτώσεις ολισθήσεων. Ορισμένες ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στις τρεις αυτές ολισθήσεις θα συζητηθούν στις αμέσως επόμενες γραμμές.

Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένα, η εγκάρσια ανομοιογένεια και η καμπυλότητα συνυπάρχουν, επειδή  $\nabla \times \vec{B} = 0$ . Παρατηρώντας ότι  $\partial B_z / \partial x = -B_0 / R$  και  $\hat{e}_y = -(\vec{R} \times \vec{B}) / RB$  στην εξίσωση (3.46), συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.46) και (3.48) προκύπτει:

$$\vec{v}_R + \hat{y} \hat{k} e_y = \frac{2W_{||} + W_{\perp}}{qRB} \frac{\vec{R} \times \vec{B}}{RB} \quad (3.49)$$

για την ταχύτητα ολισθήσης λόγω ταυτόχρονα της καμπυλότητας και της εγκάρσιας ανομοιογένειας.

Η εξίσωση (3.49) έχει μια σημαντική ομοιότητα με την εξίσωση (3.31). Και στις δύο περιπτώσεις η ολισθήση είναι εγκάρσια και προς το μαγνητοστατικό πεδίο και προς την κατεύθυνση της διαταραχής, είτε αυτή αντιπροσωπεύεται από ένα ηλεκτροστατικό πεδίο, είτε από εγκάρσια ανομοιογένεια (και συνεπώς καμπυλότητα). Όμως πρέπει να επισημανθούν δύο σημαντικές διαφορές:

- (α) Η ολισθήση  $\vec{E} \times \vec{B}$  δεν εξαρτάται από καμιά ιδιότητα του σωματιδίου. Αντίθετα η ολισθήση λόγω καμπυλότητας και εγκάρσιας ανομοιογένειας εξαρτάται ουσιαστικά από όλες τις ιδιότητες (φορτίο, μάζα, ενέργεια και επιμερισμός της κατά μήκος και εγκάρσια προς το μαγνητοστατικό πεδίο) και, ειδικότερα, σωματίδια με διαφορετικό πρόσημο του φορτίου ολισθαίνουν προς αντίθετες κατευθύνσεις.
- (β) Η εξίσωση (3.31) είναι ακριβής, δηλαδή περιλαμβάνει ολόκληρη τη διαταραχή που προκαλείται από την εισαγωγή του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$ . Αντίθετα η εξίσωση (3.49) είναι ακριβής μόνο κατά μέσο όρο, για χρονικά διαστήματα μεγάλα σε σχέση με την περίοδο  $2\pi/\omega_c$ , και εφόσον η ανομοιογένεια είναι ήπια.

### 3.6 Συγκράτηση πλάσματος με μαγνητικό πεδίο

Για να γίνει πειραματική μελέτη ενός συνηθισμένου αερίου, συνήθως το αέριο περιρρίζεται σε κάποιο δοχείο. Προϋπόθεση για αυτό είναι το δοχείο και το αέριο να βρίσκονται σε θερμική ισορροπία. Στην περίπτωση του πλάσματος αυτή η προϋπόθεση μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο με πλάσμα χαμηλής θερμοκρασίας, της τάξης του 0,1 eV. (1000 K). Σε υψηλότερες θερμοκρασίες, οι συγκρούσεις των σωματιδίων του πλάσματος με τα τοιχώματα του δοχείου προκαλούν σε σύντομο χρόνο αποκατάσταση θερμικής ισορροπίας. Συνήθως αυτό καταλήγει περισσότερο σε ψύξη του πλάσματος και λιγότερο σε θέρμανση των τοιχωμάτων, επειδή συνήθως η πυκνότητα (και η θερμοχωρητικότητα) του πλάσματος είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερη από εκείνη του τοιχώματος, με συνέπεια να μη διατηρείται το πλάσμα στις επιθυμητές ιδιότητες.

Για τη συγκράτηση πλάσματος με υψηλή θερμοκρασία αξιοποιείται η ιδιότητα των φορτισμένων σωματιδίων να κινούνται κατά κύριο λόγο κατά μήκος των πεδιακών γραμμών μαγνητοστατικού πεδίου. Συνεπώς, ως υποκατάστατο του στερεού δοχείου χρησιμοποιείται η μαγνητική μπουκάλια. Ανάλογα με την τοπολογία των μαγνητικών γραμμών, διακρίνονται τα συστήματα συγκράτησης σε ανοικτά και κλειστά συστήματα. ( Σχ. 3.5α και β).

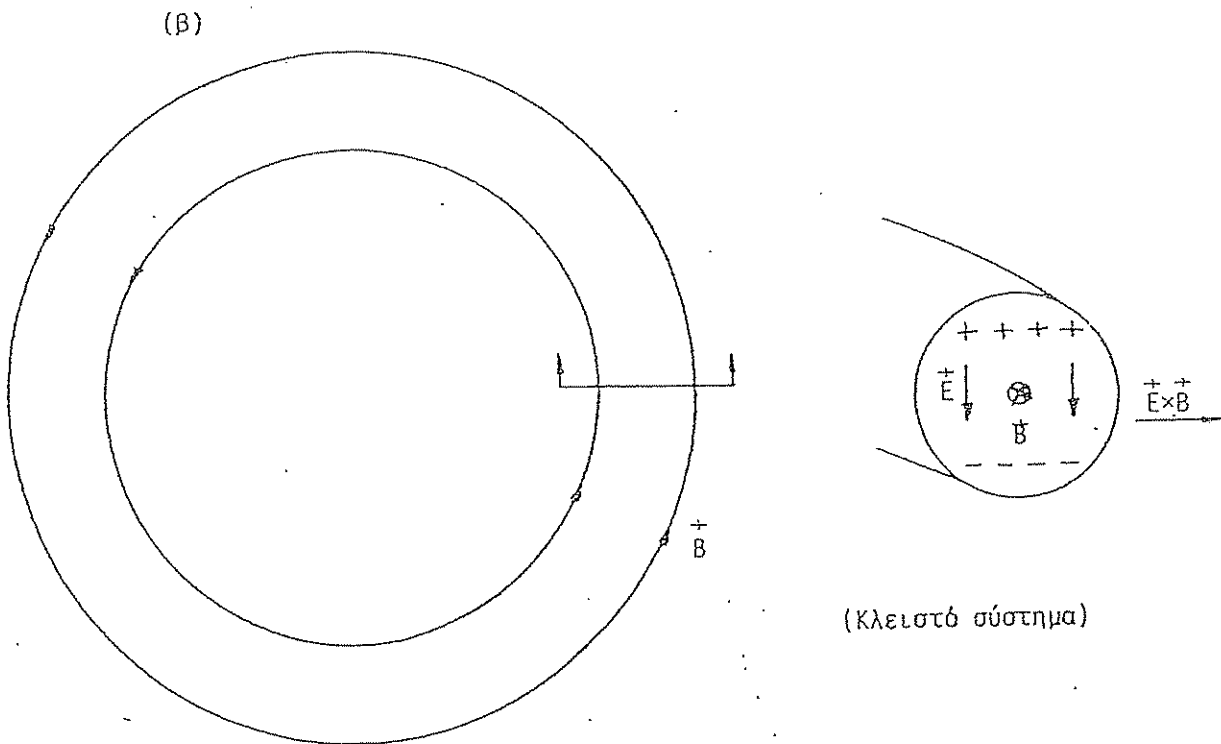
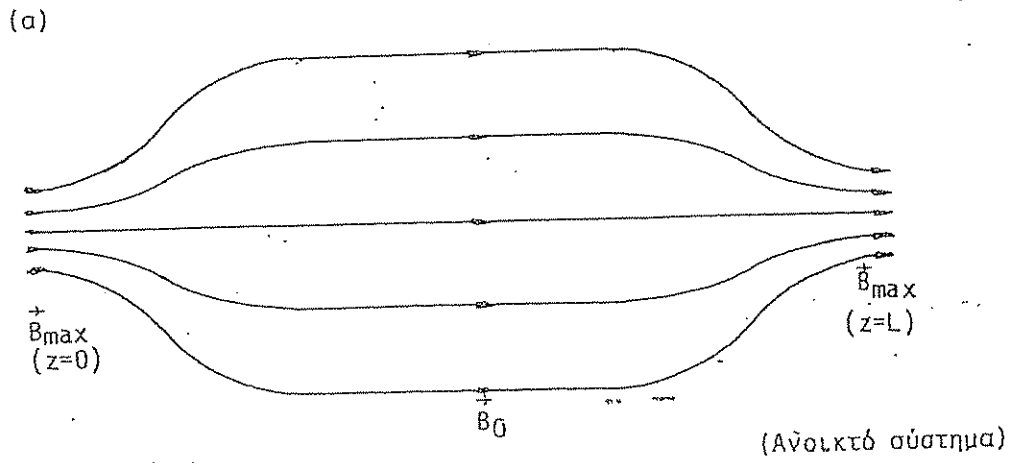
Βασική μορφή ανοικτού συστήματος είναι το ευθύγραμμο σωληνοειδές πεδίο  $B_0$ . Εγκάρσια προς τις μαγνητικές γραμμές επιτυγχάνεται έτσι πολύ καλή συγκράτηση. Για τη διαμήκη συγκράτηση εισάγεται μια διαμήκης ανομοιογένεια στο μαγνητικό πεδίο, έτσι ώστε στα άκρα του συστήματος  $z = 0$  και  $z = L$  η μαγνητική επαγωγή να έχει την τιμή  $B_{max} > B_0$ . Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται και διαμήκης συγκράτηση των σωματιδίων που στο κέντρο του συστήματος έχουν λόγο  $v_{||0}/v_{\perp 0}$  τέτοιο ώστε:

$$\frac{v_{||0}}{v_{\perp 0}} < \left( \frac{B_{max}}{B_0} - 1 \right)^{1/2} \quad (3.50)$$

Σύμφωνα με την ανάπτυξη της παραγράφου 3.5.2, σωματίδια που ικανοποιούν τη σχέση (3.50) ανακλώνται πριν φθάσουν στα άκρα του συστήματος, ενώ εκείνα που παραβιάζουν τη σχέση αυτή φθάνουν στο σημείο  $z = 0$  (ή  $z = L$ ) και διαφεύγουν από το σύστημα. Αποτέλεσμα αυτής της συμπεριφοράς είναι ότι μετά από ένα χρονικό διάστημα της τάξης του  $L/u_B$ , όπου  $u_B$  είναι η θερμική ταχύτητα του πλάσματος, στην κεντρική περιοχή του συστήματος διαμορφώνεται στο πλάσμα μια κατανομή των ταχυτήτων, στην οποία οι διάφορες κατευθύνσεις δεν έχουν ίδια πιθανότητα. Μια τέτοια ανισοτροπική κατανομή των ταχυτήτων προκαλεί κινητικές αστάθειες στο πλάσμα, παρόμοιες με αυτές που θα παρουσιασθούν στο κεφάλαιο 5.

Μια άλλη περιοχή που μπορεί να εξετασθεί είναι λίγο πριν από τα άκρα του συστήματος, όπου οι πεδιακές γραμμές καμπυλώνονται, λόγω της διαμήκης ανομοιογένειας. Η καμπυλότητα και η εγκάρσια ανομοιογένεια στην περιοχή αυτή προκαλούν εγκάρσια ολίσθηση, με ταχύτητα που συνολικά περιγράφεται από τη σχέση (3.49). Σε συστήματα εκ περιστροφής, η ολίσθηση αυτή αντιστοιχεί με αργή περιστροφή των σωματιδίων γύρω από τον άξονα του συ-





Σχ. 3.5 Ανοιχτό και κλειστό σύστημα συγκράτησης πλάσματος

στήματος. Μολονότι η ολίσθηση των ηλεκτρονίων είναι προς διαφορετική κατεύθυνση από εκείνη των ιόντων, δεν προκαλείται αποχωρισμός φορτίων, λόγω της συμμετρίας του συστήματος. Όμως, αν αρχικά το πλάσμα έχει κάποια ανομοιογένεια στην πυκνότητα των ηλεκτρονίων και ιόντων, αυτή η διαταραχή αυξάνει με το χρόνο και προκαλεί εγκάρσια διαρροή του πλάσματος.

Η βασική μορφή κλειστής γεωμετρίας παράγεται από το ευθύγραμμο σωληνοειδές, όταν ενωθούν τα δύο άκρα του και σχηματισθεί μια μαγνητική κουλούρα. Έτσι οι πεδιακές γραμμές κλείνουν στον εαυτό τους και με πρώτη ματιά φαίνεται ότι υπάρχει και εγκάρσια και διαμήκης συγκράτηση. Όμως στο σύστημα υπάρχει καμπυλότητα και εγκάρσια ανομοιογένεια των πεδιακών γραμμών, προκαλώντας την ολίσθηση (3.49). Επειδή αυτή η ολίσθηση εξαρτάται από το πρόσημο του φορτίου, προκαλείται διαχωρισμός φορτίων. Το ηλεκτροστατικό πεδίο που αναπτύσσεται ανάμεσα στα διαχωρισμένα φορτία προκαλεί ολίσθηση  $\vec{E} \times \vec{B}$  και απώλεια σωματιδίων προς την ακτινική κατεύθυνση. Αυτά τα προβλήματα αίρονται με την εισαγωγή μιας περιέλιξης στις μαγνητικές γραμμές, έτσι ώστε κάθε μαγνητική γραμμή διαδοχικά να βρίσκεται άλλοτε στην επάνω και άλλοτε στην κάτω πλευρά της κουλούρας. Τότε η ολίσθηση (3.49) άλλοτε απομακρύνει τα σωματίδια από το κέντρο του πλάσματος και άλλοτε τα επαναφέρει προς το κέντρο, ώστε με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων η μέση απομάκρυνση να μηδενίζεται και να αποφεύγεται ο διαχωρισμός φορτίων.

### 3.7 "Ηλεκτροστατικό" κύμα

Στις προηγούμενες παραγράφους εξετάσθηκαν οι τροχιές φορτισμένων σωματιδίων σε διάφορους σχηματισμούς ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Κοινό χαρακτηριστικό όλων των περιπτώσεων ήταν ότι τα πεδία ήταν μόνιμα. Τώρα θα εξετασθούν δύο περιπτώσεις πεδίων με σχετικά απλή χρονική μεταβολή, που αντιπροσωπεύεται από κυματική διάδοση.

Πρώτα εξετάζουμε το ηλεκτροστατικό κύμα, που έχει ως μόνο όρο το πεδίο:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \hat{e}_z E_0 \sin(\beta z - \omega t) \\ \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.51)$$

όπου  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα και  $\beta$  η σταθερά διάδοσης του κύματος. Με  $E_0 = \text{σταθ.}$ , το πεδίο αυτό ονομάζεται ηλεκτροστατικό, επειδή ικανοποιεί τις εξισώσεις της ηλεκτροστατικής,  $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  και  $\nabla \times \vec{E} = 0$ , όπου  $\rho = \epsilon_0 \beta E_0 \cos(\beta z - \omega t)$  είναι μια διαδιδόμενη διαταραχή της πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου. Η χρονική εξάρτηση που περιέχεται στην πυκνότητα  $\rho$  έχει ως συνέπεια την εμφάνιση και πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος  $\vec{J}_z = \epsilon_0 \omega E_0 \cos(\beta z - \omega t) = (\omega/\beta)\rho$ , όπως προκύπτει από το νόμο της διατήρησης του φορτίου,  $\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Όμως το ρεύμα αυτό εξουδετερώνεται πλήρως από το ρεύμα μετατόπισης (τον όρο  $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ ) στο νόμο Ampere-Maxwell, έτσι ώστε  $\nabla \times \vec{B} = 0$ , σε συνέπεια με την (3.51β). Τα πεδία της εξίσωσης (3.51) περιγράφουν την ταλάντωση του Langmuir, που αναφέρθηκε ήδη στην παρ. 2.5, σε πλάσμα που κινείται με ταχύτητα  $\omega/\beta$ . Επειδή αναφερόμαστε σε κίνηση ύλης, πρέπει να ισχύει  $\omega/\beta < c$ .

Επειδή  $F_x = F_y = 0$ , οι αντίστοιχες ταχύτητες  $v_x$  και  $v_y$  παραμένουν σταθερές. Οι εξισώσεις που απομένουν είναι εκείνες που αναφέρονται στην κίνηση κατά τον άξονα  $z$ ,

$$m \frac{dv_z}{dt} = qE_0 \sin(\beta z - \omega t) \quad (3.52)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

ή εισάγοντας τη φάση  $\phi = \beta z - \omega t$  και τη χρονική μεταβολή της,  $\dot{\phi} = \beta v_z - \omega$ , οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή των εξισώσεων απλού εκκρεμούς:

$$\frac{d}{dt} \dot{\phi} = \omega_E^2 \sin \phi \quad (3.53)$$

$$\frac{d}{dt} \phi = \dot{\phi}$$

όπου  $\omega_E = (q\beta E_0/m)^{1/2}$ . Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (3.53) με  $\dot{\phi}$  και  $\omega_E^2 \sin \phi$  αντίστοιχα και αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$I = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \omega_E^2 \cos \phi = \text{σταθ.} \quad (3.54)$$

Για να προσδιορισθεί η φυσική σημασία της σταθεράς  $I$  μετασχηματίζουμε σε σύστημα συντεταγμένων που κινείται με ταχύτητα  $\omega/\beta$ :

$$z_M = z - \frac{\omega}{\beta} t = \frac{\phi}{\beta}$$

$$v_{zM} = v_z - \frac{\omega}{\beta} = \frac{\dot{\phi}}{\beta}$$

(3.55)

$$E_{zM} = E_0 \sin(\beta z_M) = E_0 \sin \phi$$

$$\Phi_M = \frac{E_0}{\beta} \cos(\beta z_M) = \frac{E_0}{\beta} \cos \phi$$

όπου  $\Phi_M$  είναι το ηλεκτροστατικό δυναμικό. Στο κινητό σύστημα, η σταθερά  $I$  γράφεται:

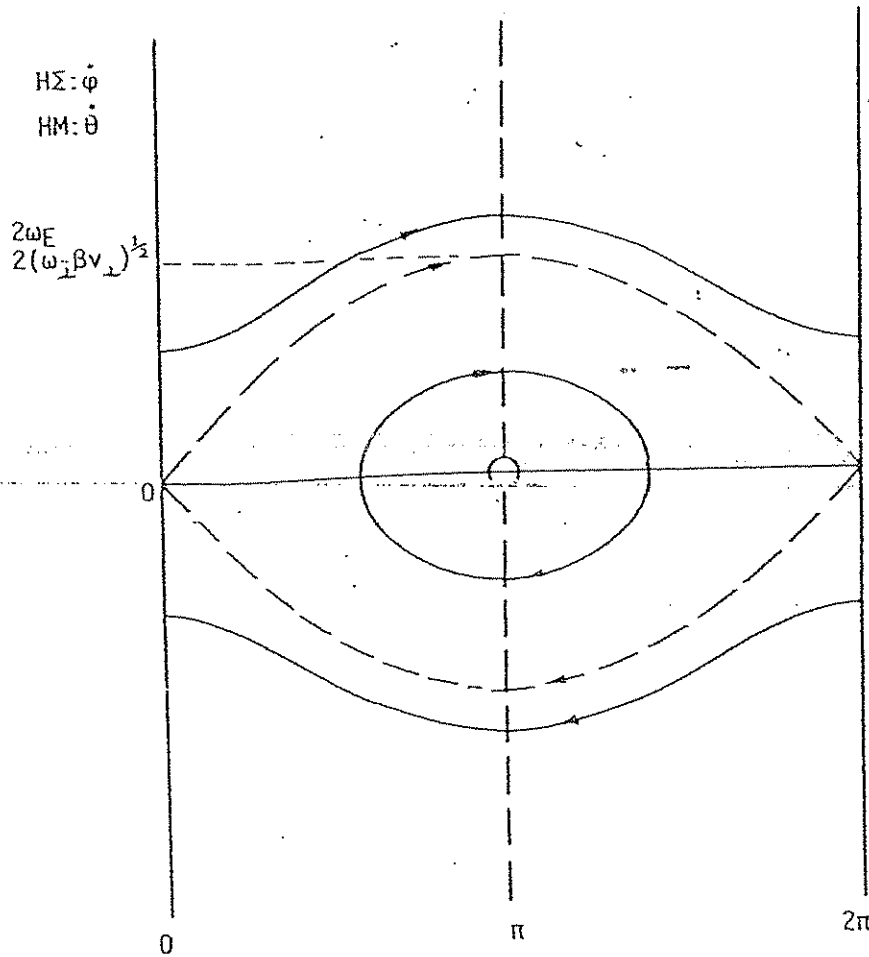
$$I = \frac{\beta^2}{m} (W_{KM} + q\Phi_M). \quad (3.56)$$

Συνεπώς, η σταθερή ποσότητα  $mI/\beta^2$  αντιπροσωπεύει την ολική (κινητική και δυναμική) ενέργεια του σωματιδίου σε σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $\omega/\beta$ .

Με τον προσδιορισμό του πρώτου ολοκληρώματος (3.54) μπορούν να επιλυθούν οι τροχιές. Επιλύοντας τη σχέση (3.54) ως προς  $\phi$  έχουμε την εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών:

$$\frac{d\phi}{\pm \sqrt{2(I - \omega_E^2 \cos \phi)}} = dt \quad (3.57)$$

από την οποία με άμεση ολοκλήρωση προκύπτουν οι τροχιές με τη μορφή  $t = t(\phi)$ . Αυτή η συνάρτηση εκφράζεται με τη βοήθεια ελλειπτικών ολοκληρωμάτων και η αντίστροφη συνάρτηση  $\phi(t)$  μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια ελλειπτικών συναρτήσεων. Μια τέτοια λύση όμως, μολονότι είναι χρήσιμη για αναλυτική επεξεργασία, δυσχεραίνει την κατανόηση της μορφής των τροχιών. Αυτή η κατανόηση διευκολύνεται με τη μελέτη των τροχιών στο φασικό χώρο  $(\phi, \dot{\phi})$ .



ΗΣ:  $\dot{\phi}$

ΗΜ:  $\dot{\theta}$

$\frac{2\omega_E}{2(\omega_{\pm} \beta v_{\pm})^{1/2}}$

0

$\pi$

$2\pi$

$$\text{ΗΣ: } \phi = \beta z - \omega t$$

$$\text{ΗΜ: } \theta = \arctan\left(\frac{v_x}{v_y}\right) - (\beta z - \omega t)$$

Σχ. 3.6: Περιοχή συντονισμού φορτισμένου σωματιδίου με ηλεκτροστατικό (ΗΣ) ή με ηλεκτρομαγνητικό (ΗΜ) κύμα

Στο φασικό χώρο  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , οι τροχιές εκφράζονται από τη σχέση:

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2(I - \omega_E^2 \cos \varphi)} \quad (3.58)$$

που προκύπτει από τη (3.54). Η τιμή της σταθεράς  $I$  υπολογίζεται από τις τιμές  $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$  κάποιου (οποιοδήποτε) σημείου της τροχιάς. Διακρίνονται δύο ομάδες τροχιών (Σχ. 3.6):

(α) Τροχιές που διέρχονται από σημεία  $(\varphi_0=0, \dot{\varphi}_0 \neq 0)$ . Για τις τροχιές αυτές  $I = \omega_E^2 + (1/2)\dot{\varphi}_0^2$  και συνεπώς το όρισμα της τετραγωνικής ρίζας στη σχέση (3.58) είναι πάντοτε θετικό. Αυτό σημαίνει ότι οι τροχιές διατρέχουν όλο το διάστημα από  $\varphi = 0$  έως  $\varphi = 2\pi$ . Παράλληλα, η τιμή της παραγώγου  $\dot{\varphi}$  μεταβάλλεται ανάμεσα στις τιμές  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$  (όταν  $\varphi = 0$ ) και  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \sqrt{1 + 4\omega_E^2/\dot{\varphi}_0^2}$  (όταν  $\varphi = \pi$ ). Σωματίδια που κινούνται σε τέτοιες τροχιές δέχονται σχετικά μικρή επίδραση από το κύμα. Αν δηλαδή  $\dot{\varphi}_0 > 0$ , τότε πάντοτε  $\dot{\varphi} > 0$ , το οποίο σημαίνει  $v_z > \omega/\beta$  και τα σωματίδια συνεχώς προσπερνούν το κύμα. Παρόμοια, αν  $\dot{\varphi}_0 < 0$ , τότε το κύμα συνεχώς προσπερνά τα σωματίδια.

(β) Τροχιές που διέρχονται από σημεία  $(\dot{\varphi}_0 = 0, \varphi_0 \neq 0)$ . Στις περιπτώσεις αυτές  $I = \omega_E^2 \cos^2 \varphi_0$  και συνεπώς η σχέση (3.58) έχει φυσική έννοια μόνο όταν  $\cos \varphi < \cos \varphi_0$ , δηλαδή μεταξύ  $\varphi = \varphi_0$  και  $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ . Αυτό σημαίνει ότι τα σωματίδια εκτελούν μια ταλάντωση γύρω από το σημείο  $\varphi = \pi$ . Ταυτόχρονα, η παράγωγος  $\dot{\varphi}$  μηδενίζεται όταν  $\varphi = \varphi_0$  και  $\varphi = 2\pi - \varphi_0$ , και παίρνει τις ακραίες τιμές  $\dot{\varphi} = \pm 2\omega_E \cos(\varphi_0/2)$  όταν  $\varphi = \pi$ . Ακραία περίπτωση τέτοιας τροχιάς είναι εκείνη που διέρχεται από το σημείο  $\varphi = \pi, \dot{\varphi} = 0$ . Το σωματίδιο που βρίσκεται σ' αυτή την εκφυλισμένη τροχιά παραμένει ακίνητο στο φασικό χώρο. Γενικότερα, τα σωματίδια που κινούνται σε τροχιές αυτής της ομάδας δεσμεύονται από το κύμα και κινούνται κατά μέσο όρο μαζί με το κύμα.

Τα σωματίδια που κινούνται σε τροχιές της ομάδας (β) ονομάζονται παγιδευμένα σωματίδια, ενώ τα σωματίδια που κινούνται σε τροχιές της ομάδας (α) ονομάζονται απαγίδευτα. Η διάκριση σε παγιδευμένα και απαγίδευτα σωματίδια σχετίζεται με τη διατήρηση της ολικής ενέργειας σε σύστημα συντεταγμένων που κινείται με ταχύτητα  $\omega/\beta$ , όπως εκφράζεται από τη σχέση (3.55). Όταν η ολική ενέργεια (στο κινούμενο σύστημα) είναι μικρότερη από τη μέγιστη δυναμική ενέργεια  $q\Phi_{\text{max}} = qE_0/\beta$ , τότε τα σωματίδια παγιδεύονται από το ηλεκτροστατικό δυναμικό, και εκτελούν τις κλειστές τροχιές της ομάδας (β). Αντίστροφα, όταν η ολική ενέργεια επαρκεί, τα σωματίδια μπορούν να ξεπεράσουν το φράγμα του ηλεκτροστατικού δυναμικού, όπως περιγράφεται από τις τροχιές (α). Οι δύο αυτές ομάδες τροχιών διαχωρίζονται από την καμπύλη  $\dot{\varphi} = \pm 2\omega_E \sin(\varphi/2)$ , που διέρχεται από το σημείο  $\varphi = 0, \dot{\varphi} = 0$  και που χαρακτηρίζεται από την τιμή  $I = \omega_E^2$ . Συνεπώς, σε παγιδευμένα σωματίδια η μέγιστη απόκλιση της παραγώγου  $\dot{\varphi}$  από την τιμή  $\dot{\varphi} = 0$  είναι  $\dot{\varphi}_{\text{max}} = 2\omega_E$ .

Η περίπτωση που εξετάστηκε στην παράγραφο αυτή είναι ένα απλό παράδειγμα συντονισμού ανάμεσα σε κύμα και φορτισμένα σωματίδια. Από την αρχή μπορεί να εκτιμηθεί κανείς ότι σωματίδια με ταχύτητα  $v_z$ , που απέχει πολύ από την ταχύτητα του κύματος  $\omega/\beta$ , θα υφίστανται μόνο μια μικρή επίδραση από το κύμα, λόγω της γρήγορης εναλλαγής στο πρό-

σημο του ηλεκτρικού πεδίου. Πράγματι, από το σχολιασμό των τροχιών της ομάδας (α) φαίνεται ότι όταν  $\dot{\phi} \gg \omega_E$ , τότε  $\delta\dot{\phi} = 2\omega_E^2/\dot{\phi}_0$ , δηλαδή η διαταραχή της ταχύτητας έχει μέτρο

$$\delta v_z = \frac{2qE_0}{m\beta(v_z - \frac{\omega}{\beta})} \quad (3.59)$$

Η διαταραχή αυτή είναι ανάλογη προς την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, δηλαδή είναι μικρή όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι ασθενές. Αντίθετα, όταν η ταχύτητα  $v_z$  είναι παραπλήσια με την ταχύτητα  $\omega/\beta$ , τότε το σωματίδιο υφίσταται για παρατεταμένα χρονικά διαστήματα τη δράση του πεδίου του κύματος, βρίσκεται δηλαδή σε συντονισμό με το κύμα. Η ύπαρξη αυτού του συντονισμού φαίνεται και από το μηδενισμό του παρονομαστή στη σχέση (3.59), η οποία φυσικά δεν ισχύει όταν  $v_z = \omega/\beta$ . Από τη συζήτηση για τις τροχιές της ομάδας (β) προκύπτει ότι για τα παγιδευμένα σωματίδια η παράγωγός  $\dot{\phi}$  το πολύ να μεταβάλλεται ανάμεσα στις τιμές  $\dot{\phi} = 2\omega_E$  και  $\dot{\phi} = -2\omega_E$ , δηλαδή  $\delta\dot{\phi} < 4\omega_E$ . Συνεπώς:

$$\delta v_z < 4 \left( \frac{qE_0}{m\beta} \right)^{1/2} \quad (3.60)$$

Αυτή τη φορά, η διαταραχή είναι ανάλογη προς την τετραγωνική ρίζα του ηλεκτρικού πεδίου, μπορεί συνεπώς να είναι αξιόλογη ακόμα και με σχετικά ασθενές ηλεκτρικό πεδίο.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο αναφέροντας ότι τα πεδία της εξίσωσης (3.51) μπορούν να θεωρηθούν ειδική περίπτωση με  $a = 0$  των πεδίων:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \hat{e}_z E_0 (a + \sin(\beta z - \omega t)) \\ \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Από την ανάλυση προκύπτει ότι όταν  $|a| < 1$  πάλι υπάρχει διάκριση ανάμεσα σε παγιδευμένα και απαγίδευτα σωματίδια, όμως η έκταση που καταλαμβάνεται στο φασικό χώρο από τα παγιδευμένα σωματίδια είναι μικρότερη από την ομογενή περίπτωση  $a = 0$  και μηδενίζεται όταν  $|a| = 1$ . Όταν  $|a| > 1$ , όλα τα σωματίδια είναι απαγίδευτα. Σε κάθε περίπτωση, όταν  $a \neq 0$ , τα απαγίδευτα σωματίδια έχουν τροχιές που περνάνε από τη τιμή  $\dot{\phi} = 0$ , λόγω της δράσης του σταθερού πεδίου  $aE_0$ .

### 3.8 Ηλεκτρομαγνητικό κύμα και μαγνητοστατικό πεδίο

Μια άλλη περίπτωση κίνησης φορτισμένου σωματιδίου που καταλήγει σε συντονισμό είναι η περίπτωση ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται κατά μήκος ενός ομογενούς μαγνητοστατικού πεδίου. Τα αντίστοιχα πεδία μπορούν να γραφούν:

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(\beta z - \omega t) & B_x &= B_1 \sin(\beta z - \omega t) \\ E_y &= -E_1 \sin(\beta z - \omega t) & B_y &= B_1 \cos(\beta z - \omega t) \\ E_z &= 0 & B_z &= B_0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

με κυκλική πόλωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Ο νόμος του Faraday,  $\nabla \times \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0$  επιβάλλει τη σχέση  $E_{\perp} = (\omega/\beta) B_{\perp}$  που συνδέει τα πεδία του κύματος. Χρησιμοποιούμε αυτή για την ένταση των πεδίων τις συχνότητες  $\omega_{\perp}$  και  $\omega_c$ , που δίδονται από τις σχέσεις:

$$\omega_{\perp} = \frac{q\beta_{\perp}}{m} \quad (3.63)$$

$$\omega_c = \frac{q\beta_{\parallel}}{m}$$

Οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή:

$$\frac{d}{dt} v_x = -\frac{\omega_{\perp}}{\beta} (\beta v_z - \omega) \cos(\beta z - \omega t) + \omega_c v_y$$

$$\frac{d}{dt} v_y = \frac{\omega_{\perp}}{\beta} (\beta v_z - \omega) \sin(\beta z - \omega t) - \omega_c v_x \quad (3.64)$$

$$\frac{d}{dt} v_z = \omega_{\parallel} [v_x \cos(\beta z - \omega t) - v_y \sin(\beta z - \omega t)]$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις (3.64) με άμεση ολοκλήρωση προκύπτουν δύο πρώτα ολοκληρώματα:

$$I_1 = v_x - \omega_c y + \frac{\omega_{\perp}}{\beta} \sin(\beta z - \omega t) \quad (3.65)$$

$$I_2 = v_y + \omega_c x + \frac{\omega_{\perp}}{\beta} \cos(\beta z - \omega t)$$

Όταν απουσιάζει το κύμα ( $\omega_{\perp} = 0$ ), αναπαράγονται οι σχέσεις (3.22β) και (3.25) και η κίνηση είναι κυκλική, με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_c$ . Όμως, οι σχέσεις (3.65) δείχνουν ότι και στο άλλο όριο, όταν δηλαδή απουσιάζει το μαγνητοστατικό πεδίο, πάλι η κίνηση είναι κυκλική, με γωνιακή ταχύτητα  $\beta v_z - \omega$  (που όμως δεν είναι σταθερή). Και στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος συνεπώς υπάρχει δυνατότητα συντονισμού, όταν αυτές οι δύο συχνότητες είναι ίσες, έστω και προσεγγιστικά. Εξισώνοντας αυτές τις δύο συχνότητες,  $\omega_c = \beta v_z - \omega$ , προκύπτει η τιμή της ταχύτητας για την οποία συμβαίνει συντονισμός. Η ταχύτητα αυτή ονομάζεται ταχύτητα συντονισμού.

$$v_R = \frac{\omega_c + \omega}{\beta} \quad (3.66)$$

Παρατηρούμε ότι όταν  $\omega_c = 0$ , η σχέση αυτή δίνει την ίδια ταχύτητα συντονισμού,  $v_R = \omega/\beta$ , όπως και η σχέση  $\dot{\phi} = 0$  στην περίπτωση των ηλεκτροστατικών κυμάτων. Ανεξάρτητα όμως από αυτή τη σύμπτωση, η μορφή του συντονισμού είναι ριζικά διαφορετική στις δύο περιπτώσεις. Στα ηλεκτροστατικά κύματα, η συνθήκη  $v_z = \omega/\beta$  σημαίνει ότι το φορτισμένο σωματίδιο συντονίζεται με το κύμα επειδή η αξονική ταχύτητά του βρίσκεται σε φάση με το αξονικό ηλεκτρικό πεδίο. Αντίθετα, στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, η συνθήκη  $v_z = v_R$  σημαίνει ότι η εγκάρσια ταχύτητα του σωματιδίου (που περιστρέφεται λόγω του μαγνητοστατικού πεδίου)

βρίσκεται σε φάση με τα περιστρεφόμενα εγκάρσια πεδία του κύματος,

Η ύπαρξη αυτού του συντονισμού υποδεικνύει ότι είναι χρήσιμο η εγκάρσια ταχύτητα να γραφεί με τη μορφή:

$$v_x = -v_{\perp} \sin(\theta + \beta z - \omega t) \quad (3.67)$$

$$v_y = -v_{\perp} \cos(\theta + \beta z - \omega t)$$

Ουσιαστικά, οι σχέσεις (3.67) περιγράφουν την εγκάρσια ταχύτητα σε πολικές συντεταγμένες σε χώρο ταχυτήτων, με την ειδικότερη πρόβλεψη ότι τα πεδία του κύματος περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα  $\beta v_z - \omega$  και συνεπώς εξυπηρετεί η εισαγωγή της πρόσθετης φάσης  $\theta$ . Με το μετασχηματισμό (3.67) οι εξισώσεις (3.64) για την κίνηση του σωματιδίου γράφονται:

$$\frac{d}{dt} v_{\perp} = \frac{\omega_{\perp}}{\beta} (\beta v_z - \omega) \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \theta = \omega_c + \omega - \beta v_z + \frac{\omega_{\perp}}{\beta v_{\perp}} (\beta v_z - \omega) \cos \theta \quad (3.68)$$

$$\frac{d}{dt} v_z = -\omega_{\perp} v_{\perp} \sin \theta$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν δύο ακόμα πρώτα ολοκληρώματα:

$$I_3 = v_{\perp}^2 + (v_z - \frac{\omega}{\beta})^2 \quad (3.69)$$

$$I_4 = \frac{1}{2} (\omega_c + \omega - \beta v_z)^2 + \omega_{\perp} \beta v_{\perp} \cos \theta$$

Το ολοκλήρωμα  $I_3$  αντιπροσωπεύει τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου σε σύστημα συντεταγμένων που κινείται με ταχύτητα  $\omega/\beta$ . (Για τα πεδία (3.62) αυτός ο μετασχηματισμός μηδενίζει το ηλεκτρικό πεδίο). Με τον προσδιορισμό αυτών των ολοκληρωμάτων, ουσιαστικά έχει ολοκληρωθεί η επίλυση του προβλήματος, τουλάχιστον από μαθηματική πλευρά. Οι σχέσεις (3.69) μπορούν να επιλυθούν δίνοντας αλγεβρικές συναρτήσεις  $v_z(v_{\perp})$  και  $\theta(v_{\perp})$ , οπότε η εξίσωση (3.68α) εμπλέκει μόνο το  $v_{\perp}$  (και το χρόνο  $t$ ) και συνεπώς μπορεί καταρχήν να ολοκληρωθεί. Έχοντας τη συνάρτηση  $v_{\perp}(t)$ , από τις σχέσεις (3.69) προκύπτουν οι συναρτήσεις  $\theta(t)$  και  $v_z(t)$ , συνεπώς και η συνάρτηση  $z(t)$ , οπότε από τις (3.67) παίρνουμε τα  $v_x(t)$  και  $v_y(t)$  και από τις (3.65) τα  $x(t)$  και  $y(t)$ . Αυτή η διαδικασία, μολονότι εφικτή, είναι ιδιαίτερα επίπονη και μάλιστα το τελικό αποτέλεσμα είναι τόσο πολύπλοκο ώστε να αποκρύπτει το χαρακτήρα των τροχιών.

Συνήθως, τα κύματα που ενδιαφέρουν είναι ασθενή σε συσχέτιση με το μαγνητοστατικό πεδίο,  $\beta_{\perp} \ll \beta_0$ . Στις περιπτώσεις αυτές μπορούμε να αμελήσουμε τον τελευταίο όρο της (3.68β), οπότε το πρώτο ολοκλήρωμα  $I_4$  γράφεται:

$$I_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \omega_{\perp} \beta v_{\perp} \cos \theta \quad (3.70)$$



έχει δηλαδή την ίδια μορφή με τη σχέση (3.54) της προηγούμενης παραγράφου. Τώρα το ρόλο της συχνότητας  $\omega$  έχει η συχνότητα  $(\omega|\beta v_1|)^{1/2}$ . Όμως και οι δύο αυτές συχνότητες είναι ανάλογες προς την τετραγωνική ρίζα της έντασης των πεδίων του κύματος. Με μικρές προσαρμογές μπορεί να επαναληφθεί η ίδια ανάλυση που έγινε και στην προηγούμενη παράγραφο. Ειδικότερα, και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διακρίνονται παγιδευμένα και απαγίδευτα σωματίδια. Όμως, η παγίδευση τώρα αναφέρεται στη φασική γωνία,  $\theta + \beta z - \omega t$ , των ηλεκτρονίων, που δεσμεύεται και ακολουθεί κατά μέσο όρο τη φασική γωνία  $\beta z - \omega t$  των πεδίων του κύματος.

## Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο 4

### ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

#### 4.1 Ροπές της συνάρτησης κατανομής και της εξίσωσης του Boltzmann

##### 4.1.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην παρ. 2.3, η κατάσταση κάθε συστατικού του πλάσματος περιγράφεται από την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής  $f$ , η οποία υπακούει στην εξίσωση Boltzmann. Αν π.χ. το συγκεκριμένο συστατικό είναι τα ηλεκτρόνια, τότε

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_e + \frac{\vec{F}_e}{m_e} \cdot \nabla_v f_e = \sum_{\alpha} \frac{\delta f_{e\alpha}}{\delta t} \quad (4.1)$$

και με αλλαγή του δείκτη, προκύπτουν αντίστοιχα εξισώσεις για τα υπόλοιπα συστατικά του πλάσματος. Για λόγους απλούστευσης των εξισώσεων, στο υπόλοιπο μέρος της παραγράφου 4.1 θα παραλείψουμε τους δείκτες "e" κλπ.

Συχνά δεν ενδιαφέρουν όλες οι λεπτομέρειες που περιγράφονται από τη συνάρτηση κατανομής, αλλά αρκούν πληροφορίες σχετικά με τη μακροσκοπική συμπεριφορά του πλάσματος. Τέτοιες πληροφορίες είναι η πυκνότητα, η (μακροσκοπική) ταχύτητα ροής, η πίεση, η θερμοκρασία κλπ του πλάσματος. Μεγέθη όπως αυτά, εκφράζονται από "ροπές" της συνάρτησης κατανομής. Στη Μηχανική ο όρος "ροπή" αναφέρεται σε γινόμενο κάποιου φυσικού μεγέθους επί κάποιο μήκος, υψωμένο σε κάποια δύναμη. Π.χ., η ροπή της ορμής είναι γινόμενο ορμής επί απόσταση, ροπή αδρανείας είναι το γινόμενο μάζας επί το τετράγωνο απόστασης (ή επί το γινόμενο δύο αποστάσεων) κλπ. Αντίθετα, στη Στατιστική Ρευστοδυναμική (και στο πλάσμα), ο όρος "ροπή" αναφέρεται στο χώρο ταχυτήτων και είναι το ολοκλήρωμα, ως προς όλες τις ταχύτητες, κάποιας δύναμης της ταχύτητας επί τη συνάρτηση κατανομής. Ταυτόχρονα, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση του Boltzmann με τις αντίστοιχες δυνάμεις της ταχύτητας και ολοκληρώνοντας ως προς την ταχύτητα, προκύπτουν οι εξισώσεις για τις ροπές της συνάρτησης κατανομής. Έτσι σχηματίζεται μια αλυσίδα εξισώσεων, που, όπως θα περιγραφεί παρακάτω, αντιστοιχούν με τις εξισώσεις που διέπουν τη συμπεριφορά ενός ρευστού.

##### 4.1.2 Ροπή μηδενικής τάξης

Η ροπή μηδενικής τάξης της εξίσωσης του Boltzmann προκύπτει απλά από ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.1) ως προς τις ταχύτητες, επειδή  $v^0 = 1$ . Ο πρώτος όρος της εξίσωσης αυτής δίνει

$$\iiint \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v = \frac{\partial}{\partial t} n \quad (4.2)$$

όπου  $n(\vec{r}, t) = \iiint f d^3v$  είναι η πυκνότητα των σωματιδίων κάθε συστατικού του πλάσματος (αριθμός σωματιδίων ανά κυβικό μέτρο). Στο δεύτερο όρο χρησιμοποιείται η ταυτότητα

$\vec{v} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f\vec{v}) - f(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \cdot (f\vec{v})$ , διότι  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$  επειδή η ταχύτητα  $\vec{v}$  είναι ανεξάρτητη μεταβλητή. Συνεπώς ο δεύτερος όρος δίνει

$$\iiint (\vec{v} \cdot \nabla) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v = \nabla \cdot (n \vec{V}) \quad (4.3)$$

όπου  $\vec{V}(\vec{r}, t) = (1/n) \iiint \vec{v} f d^3v$  είναι η ταχύτητα ροής του ρευστού που αποτελείται από το αντίστοιχο συστατικό του πλάσματος. Τέλος, στον τρίτο όρο χρησιμοποιείται η ίδια ταυτότητα όπως πριν, αλλά σε χώρο ταχυτήτων, δηλαδή  $(\vec{F} \cdot \nabla_v) f = \nabla_v \cdot (f\vec{F}) - f(\nabla_v \cdot \vec{F}) = \nabla_v \cdot (f\vec{F})$ , όπου πάλι  $\nabla_v \cdot \vec{F} = q\nabla_v \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{B} \cdot (\nabla_v \times \vec{v}) - q\vec{v} \cdot (\nabla_v \times \vec{B}) = 0$ , επειδή  $\nabla_v \times \vec{v} = 0$  και επίσης το μαγνητικό πεδίο είναι φυσικά ανεξάρτητο από την ταχύτητα. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss στον όρο που απομένει, ώστε να μετατραπεί το τριπλό ολοκλήρωμα σε επιφανειακό (σε χώρο ταχυτήτων) ο τρίτος όρος δίνει

$$\iiint \vec{F} \cdot \nabla_v f d^3v = \iiint \nabla_v \cdot (f\vec{F}) d^3v = \oiint f\vec{F} \cdot d\vec{S}_v \quad (4.4)$$

όπου το επιφανειακό ολοκλήρωμα υπολογίζεται στην επιφάνεια σφαίρας με ακτίνα  $v \rightarrow \infty$ . Δεχόμαστε ότι σε τόσο μεγάλες ταχύτητες δεν υπάρχουν σωματίδια, και ειδικότερα ότι καθώς  $v \rightarrow \infty$ , τότε  $(v^2 f) \rightarrow 0$  για οποιαδήποτε τιμή του εκθέτη  $s$ . Συνεπώς, το ολοκλήρωμα του τρίτου όρου μηδενίζεται. Απομένει το ολοκλήρωμα των όρων  $\vec{E} \cdot \vec{v} f$ . Επειδή οι όροι αυτοί αντιπροσωπεύουν μετατόπιση σωματιδίων μόνο στο χώρο ταχυτήτων, είναι φανερό ότι το ολοκλήρωμα τους ως προς την ταχύτητα είναι μηδέν. Αναλυτικά, το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει ολοκληρώνοντας τη σχέση (2.13), λαμβάνοντας υπόψη ότι  $\int_{\text{Rea}} d^3v = 1$  σύμφωνα με τον ορισμό της  $\text{Rea}$  ως πυκνότητας πιθανότητας.

Με βάση την ανάλυση αυτή, η ροπή μηδενικής τάξης της εξίσωσης του Boltzmann δίνει

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \nabla \cdot (n \vec{V}) = 0 \quad (4.5)$$

την εξίσωση για τη διατήρηση του αριθμού σωματιδίων κάθε συστατικού του πλάσματος (εξίσωση συνέχειας). Η μονοδιάστατη μορφή αυτής της εξίσωσης έχει ήδη χρησιμοποιηθεί στην παρ. (2.5), εξ. (2.32). Οι εξισώσεις για τη διατήρηση μάζας και ηλεκτρικού φορτίου προκύπτουν αμέσως, πολλαπλασιάζοντας την (4.5) με  $m$  και  $q$  (και αθροίζοντας για όλους τους τύπους σωματιδίων).

Η εξίσωση συνέχειας προέκυψε από την εξίσωση Boltzmann. Φυσικά δεν είναι αυτός ο μόνος τρόπος εξαγωγής αυτής της εξίσωσης. Π.χ. εξισώνοντας την αύξηση του αριθμού σωματιδίων σε κάποιο τυχαίο χώρο με την εισροή σωματιδίων από το περίβλημα του χώρου αυτού έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint n d^3r = \iiint \frac{\partial}{\partial t} n d^3r = -\oiint n \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\iiint \nabla \cdot (n \vec{v}) d^3r \quad (4.6)$$

και επειδή ο χώρος  $d^3r$  μπορεί να είναι οποιοσδήποτε, πρέπει και τα ορίσματα των τριπλών ολοκληρωμάτων να είναι μεταξύ τους ίσα, και συνεπώς να ισχύει η σχέση (4.5)

### 4.1.3 Ροπή πρώτης τάξης

Η επόμενη εξίσωση προκύπτει από την ολοκλήρωση της εξίσωσης του Boltzmann, αφού πρώτα η εξίσωση πολλαπλασιασθεί με την ορμή  $m\vec{v}$ . Ο πρώτος όρος δίνει

$$m \iiint \vec{v} \frac{\partial}{\partial t} f d^3v = m \frac{\partial}{\partial t} (n\vec{V}) = m\vec{V} \frac{\partial n}{\partial t} + mn \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \quad (4.7)$$

Στο δεύτερο όρο χρησιμοποιείται πρώτα η ταυτότητα  $\vec{v} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f\vec{v}) - f(\nabla \cdot \vec{v}) = \nabla \cdot (f\vec{v})$  επειδή η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη μεταβλητή και συνεπώς  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ . Κατόπιν χρησιμοποιείται η ταυτότητα για την απόκλιση διαδικτού τανυστή,  $\nabla \cdot (f\vec{v}\vec{v}) = \vec{v}\nabla \cdot (f\vec{v}) + (f\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{v}\nabla \cdot (f\vec{v})$ , πάλι χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η ταχύτητα είναι ανεξάρτητη μεταβλητή. Συνεπώς ο δεύτερος όρος παίρνει τη μορφή

$$m \iiint \vec{v} (\vec{v} \cdot \nabla f) d^3v = m \iiint \vec{v}\nabla \cdot (f\vec{v}) d^3v = m\nabla \cdot \iiint f\vec{v}\vec{v} d^3v \quad (4.8)$$

Πρόσθετες τροποποιήσεις αυτού του όρου γίνονται χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ , όπου  $\vec{V}$  είναι η μέση ταχύτητα (η ταχύτητα ροής) και  $\vec{u}$  η τυχαία ταχύτητα. Τότε, επειδή  $\iiint \vec{u} f d^3v = 0$ , σύμφωνα με τον ορισμό, έχουμε

$$m\nabla \cdot \iiint f\vec{v}\vec{v} d^3v = m\nabla \cdot (n\vec{V}\vec{V}) + \nabla \cdot \vec{P} = m\vec{V}\nabla \cdot (n\vec{V}) + mn(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} + \nabla \cdot \vec{P} \quad (4.9)$$

Στη σχέση (4.9) έχει εισαχθεί το μέγεθος  $\vec{P}(\vec{r}, t)$ , ο τανυστής τάσης (ή πίεσης), για το αντιστοιχείο συστατικό του πλάσματος, στον οποίο οι όροι έχουν μορφή όπως  $P_{xy} = m \iiint u_x u_y f d^3v$ . Ο τανυστής αυτός είναι συμμετρικός, δηλ.  $P_{xy} = P_{yx}$  κλπ. Τα στοιχεία της διαγωνίου αντιπροσωπεύουν τις ορθές τάσεις και τα λοιπά στοιχεία τις διατμητικές. Η στοιχειώδης δύναμη  $d\vec{F}$  που ασκείται σε μια στοιχειώδη επιφάνεια  $d\vec{S}$  είναι  $d\vec{F} = \vec{P} \cdot d\vec{S}$ , δηλαδή  $dF_x = P_{xx}dS_x + P_{xy}dS_y + P_{xz}dS_z$  και αντίστοιχα για τις υπόλοιπες συνιστώσες. Τέλος, η απόκλιση ενός τανυστή όπως του  $\vec{P}$  έχει συνιστώσες  $\hat{e}_x(\partial P_{xx}/\partial x + \partial P_{yx}/\partial y + \partial P_{zx}/\partial z)$  κλπ.

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να δικαιολογηθεί η ονομασία του τανυστή  $\vec{P}$  ως τανυστή τάσης. Παίρνοντας  $d\vec{S} = \hat{e}_x dydz$  και εξετάζοντας μόνο τα διαγώνια στοιχεία (τις ορθές τάσεις), έχουμε  $dF_x = P_{xx}dydz$ . Θεωρούμε ότι μέσα στο πλάσμα βρίσκεται μια στερεή επιφάνεια  $d\vec{S}$  στην οποία ασκείται η πίεση  $P_{xx}$ . Η πίεση αυτή ασκείται επειδή στην επιφάνεια προσκρούουν και ανακλώνται τα σωματίδια. Κάθε σωματίδιο με αρχική ορμή  $m u_x$  έχει μετά την ανάκλαση ορμή  $-m u_x$ , συνεπώς η συνολική μεταβολή της ορμής του είναι ίση με  $2m u_x$ . Σε χρονικό διάστημα  $dt$  προσκρούουν  $(f du_x du_y du_z)(u_x dt) dydz$  σωματίδια με τυχαία ταχύτητα  $(u_x, u_y, u_z)$  και συνολική μεταβολή της ορμής τους (ση με  $2m u_x^2 f du_x du_y du_z dt dydz$ ). Δεδομένου ότι προσκρούουν μόνο τα σωματίδια με  $u_x > 0$ , η συνολική μεταβολή της ορμής όλων των σωματιδίων που προσκρούουν είναι

$$dF_x dt = P_{xx} dydz dt = \iiint_{u_x > 0} 2m u_x^2 f du_x du_y du_z dt dydz \quad (4.10)$$

Όμως, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία από την άλλη πλευρά της επιφάνειας  $d\vec{S}$  προκύπτει πάλι μια σχέση σαν την (4.10), με τη διαφορά ότι τη φορά αυτή η ολοκλήρωση γίνεται στην περιοχή  $u_x < 0$ . Αλλά, η επιφάνεια  $d\vec{S}$  πρέπει να βρίσκεται σε ισορροπία, συνεπώς τα

δύο ολοκληρώματα (όταν  $u_x > / < 0$ ) πρέπει να είναι ίσα μεταξύ τους, και συνεπώς ίσα προς το μισό του ολοκληρώματος από  $u_x = -\infty$  έως  $u_x = +\infty$ . Έτσι προκύπτει ότι  $P_{xx} = \iiint m u_x^2 f d^3u$ , δικαιολογώντας την ονομασία τανυστής τάσης για τον τανυστή  $\vec{P}$ .

Επιστρέφουμε τώρα στον τρίτο όρο της εξίσωσης του Boltzmann. Αφού πολλαπλασιάσουμε με  $m\vec{v}$  χρησιμοποιούμε πρώτα την ταυτότητα  $(\vec{F} \cdot \nabla_v) f = \nabla_v \cdot (f\vec{F})$ , όπου ο όρος  $f \nabla_v \cdot \vec{F}$  δεν έχει περιληφθεί επειδή για την ηλεκτρομαγνητική δύναμη  $\nabla_v \cdot \vec{F} = 0$ . Κατόπιν χρησιμοποιούμε την ταυτότητα  $\nabla_v \cdot (f\vec{F}\vec{v}) = \vec{v} \cdot \nabla_v \cdot (f\vec{F}) + f(\vec{F} \cdot \nabla_v) \vec{v}$ , όπου προφανώς  $(\vec{F} \cdot \nabla_v) \vec{v} = \vec{F}$ , και έχουμε

$$\begin{aligned} \iiint \vec{v} (\vec{F} \cdot \nabla_v) f d^3v &= \iiint \vec{v} \nabla_v \cdot (f\vec{F}) d^3v = \iiint \nabla_v \cdot (f\vec{F}\vec{v}) d^3v - \iiint \vec{F} f d^3v \\ &= \oint (f\vec{F}\vec{v}) \cdot d\vec{S}_v - \iiint \vec{F} f d^3v = -\iiint \vec{F} f d^3v \end{aligned} \quad (4.11)$$

Στη σχέση (4.11) έγινε χρήση του θεωρήματος του Gauss για μετατροπή του τριπλού ολοκληρώματος σε επιφανειακό, το οποίο όμως μηδενίζεται, επειδή στην επιφάνεια που γίνεται η ολοκλήρωση έχουμε  $\vec{v} \rightarrow \infty$  και συνεπώς  $\vec{v} f \rightarrow 0$ .

Συγκεντρώνοντας τους όρους των εξισώσεων (4.7), (4.9) και (4.11) και παρατηρώντας ότι από ένα όρο της (4.7) μαζί με ένα όρο της (4.9) σχηματίζεται η εξίσωση (4.5), η πρώτη μορφή της εξίσωσης του Boltzmann δίνει

$$\left( m n \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla \cdot \vec{P} + n q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \sum_{\alpha} m \iiint \vec{v} \frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} d^3v \right) \quad (4.12)$$

Η εξίσωση (4.12) είναι η εξίσωση για τη διατήρηση της ορμής. Στην ειδική περίπτωση  $\vec{E}=0$ ,  $\vec{B}=0$  και  $\delta f / \delta t = 0$ , η μονοδιάστατη μορφή αυτής της εξίσωσης είναι η (2.33). Χρησιμοποιώντας συλλογισμούς παρόμοιους με εκείνους που χρησιμοποιήθηκαν στο τέλος της παρ. (4.1.2) η εξίσωση αυτή προκύπτει εξετάζοντας τη μεταβολή της ορμής ενός συστατικού του πλάσματος, που βρίσκεται σε όγκο  $d^3r$  περιβαλλόμενο από επιφάνεια  $d\vec{S}$ . Η μεταβολή της ορμής οφείλεται στη ροή ορμής μέσω της επιφάνειας  $d\vec{S}$ , στην πίεση (ορθή και διαμητική), που ασκείται από γειτονικά στοιχεία στην επιφάνεια  $d\vec{S}$ , στην ηλεκτρομαγνητική δύναμη που ασκείται στα σωματίδια στο όλοκληρο το χώρο  $d^3r$  και τέλος στις μεταβολές που προκαλούνται από τις συγκρούσεις. Αυτό εκφράζεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint m n \vec{v} d^3r = - \oint m n \vec{v} \cdot d\vec{S} - \oint \vec{P} \cdot d\vec{S} + \iiint n q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) d^3r + \sum_{\alpha} \iiint m \vec{v} \frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} d^3r d^3v \quad (4.13)$$

Επειδή ο όγκος είναι σταθερός (τα όρια δε μεταβάλλονται με το χρόνο), ο τελεστής  $\partial / \partial t$  μπορεί να μεταφερθεί μέσα στο τριπλό ολοκλήρωμα. Επίσης, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Gauss, κάθε επιφανειακό ολοκλήρωμα μπορεί να μετατραπεί σε τριπλό ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός τανυστή. Τέλος, επειδή η ισότητα ισχύει για οποιοδήποτε όγκο, επεκτείνεται και στα ορίσματα των ολοκληρωμάτων ως προς  $d^3r$ . Έτσι προκύπτει

$$m \frac{\partial}{\partial t} (n \vec{v}) + m \nabla \cdot (n \vec{v} \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{P} + n q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \sum_{\alpha} \iiint m \vec{v} \frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} d^3v \quad (4.14)$$

Αναπτύσσοντας  $(\partial / \partial t)(n \vec{v}) = n \partial \vec{v} / \partial t + \vec{v} \partial n / \partial t$  και  $\nabla \cdot (n \vec{v} \vec{v}) = \vec{v} (\nabla \cdot n \vec{v}) + n (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  και χρησιμοποιώντας την εξίσωση της συνέχειας (4.5) προκύπτει η εξίσωση (4.12).

4.1.4 Ροπές ανώτερης τάξης και κλείσιμο των εξισώσεων

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία, μπορούμε να σχηματίσουμε και τις επόμενες ροπές της εξίσωσης Boltzmann. Έτσι, στη γενική μορφή της, η ροπή δεύτερης τάξης δημιουργείται πολλαπλασιάζοντας με τον ταυυστή  $m(\vec{v})$ . Ειδική περίπτωση αυτής της ροπής έχουμε όταν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση Boltzmann με το μέγεθος  $(m/3)(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2)$ . Τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} p + \frac{3}{2} \nabla \cdot (\vec{v}p) + (\vec{P} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{q} = \sum_{\alpha} \iiint \vec{v} \cdot \vec{u} \frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} d^3v \quad (4.15)$$

όπου  $p = (1/3)(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz})$  είναι η υδροστατική πίεση (η μέση τιμή των ορθών τάσεων) και  $\vec{q} = (m/2) \iiint u^2 \vec{u} f d^3v$  είναι η ροή θερμότητας (δηλ. κινητικής ενέργειας που σχετίζεται με την τυχαία κίνηση των σωματιδίων). Η εξίσωση (4.15) περιγράφει τη διατήρηση της ενέργειας.

4+6+3

Ήδη έχει γίνει φανερό ότι η μέθοδος των ροπών δεν μπορεί να καταλήξει σε κλειστό σύστημα. Η εξίσωση (4.5) εμπλέκει 4 αγνώστους, τα μεγέθη  $n$  και  $\vec{v}$ . Προσθέτοντας τις τρεις εξισώσεις (4.12) εμφανίζονται 6 νέοι άγνωστοι, τα στοιχεία του συμμετρικού ταυυστή  $\vec{P}$ . Προχωρώντας στην εξίσωση (4.15) προσθέτονται ακόμα 3 νέοι άγνωστοι,  $\vec{q}$  κλπ. Αυτό φυσικά οφείλεται στο δεύτερο όρο της εξίσωσης του Boltzmann, στον οποίο εμφανίζεται η ταχύτητα, με αποτέλεσμα η ροπή τάξης  $s$  της εξίσωσης να εμπλέκει τη ροπή τάξης  $s+1$  της συνάρτησης κατανομής.

Ο καθιερωμένος τρόπος για να κλείσουν οι εξισώσεις είναι στη ροπή κάποιας τάξης να επιβληθούν ορισμένες παραδοχές, που έχουν ως αποτέλεσμα να προκύπτουν σχέσεις τέτοιες ώστε να προσδιορίζονται οι επί πλέον άγνωστοι. Παράδειγμα τέτοιας διαδικασίας είναι να υποθεθεί ότι η συνάρτηση κατανομής  $f$  είναι συνάρτηση μόνο των  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $t$  και  $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$  δηλαδή είναι ισοτροπική σε σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$ . Σε μια τέτοια συνάρτηση, όλες οι ροπές που εμπλέκουν κάποια περιττή δύναμη οποιασδήποτε συνιστώσας του  $\vec{u}$  μηδενίζονται και συνεπώς μηδενίζονται οι όροι του ταυυστή  $\vec{P}$  έξω από την κύρια διαγώνιο (οι διατμητικές τάσεις). Ταυτόχρονα όμως και οι όροι της κύριας διαγώνιου του  $\vec{P}$ , δηλαδή οι ορθές τάσεις, είναι ίσοι μεταξύ τους. Συνεπώς ο ταυυστής  $\vec{P}$  μπορεί να γραφεί  $\vec{P} = p\vec{I}$ , όπου  $\vec{I}$  είναι ο μοναδιαίος ταυυστής και  $p$  είναι η υδροστατική πίεση, οπότε στην εξίσωση (4.12) έχουμε  $\nabla \cdot \vec{P} = \nabla p$ , και επίσης στην εξίσωση (4.15) έχουμε  $(\vec{P} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} = p \nabla \cdot \vec{v}$ . Ταυτόχρονα, για τέτοιες συναρτήσεις κατανομής η ροή θερμότητας  $\vec{q}$  μηδενίζεται. Συνεπώς, η εξίσωση (4.15) γράφεται

$$\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} p + \frac{3}{2} p \nabla \cdot \vec{v} + \frac{3}{2} (\vec{v} \cdot \nabla) p + p \nabla \cdot \vec{v} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} p + (\vec{v} \cdot \nabla) p \right] - \frac{5}{2} \frac{p}{n} \left[ \frac{\partial}{\partial t} n + (\vec{v} \cdot \nabla) n \right] = \sum_{\alpha} \iiint \vec{v} \cdot \vec{u} \frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} d^3v \quad (4.16)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η εξίσωση συνέχειας (4.5) για να εκφραστεί το  $\nabla \cdot \vec{v}$  ως συνάρτηση του  $n$ . Έτσι, οι εξισώσεις (4.5), (4.12) (με  $\nabla \cdot \vec{P} = \nabla p$ ) και (4.16) αποτελούν ένα κλειστό σύ-

στημα εξισώσεων για κάθε συστατικό του πλάσματος και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσδιοριστούν οι άγνωστοι  $n$ ,  $\bar{V}$  και  $p$  του αντίστοιχου συστατικού.

⊗ Ειδική περίπτωση είναι όταν στην εξίσωση (4.16) ο όρος που οφείλεται στις συγκρούσεις είναι ίσος με μηδέν. Τότε η εξίσωση αυτή μπορεί να ολοκληρωθεί. Το αποτέλεσμα είναι

$$p n^{-\frac{5}{3}} = \text{σταθ.} \quad (4.17)$$

Η σχέση αυτή είναι η συνθήκη για αδιαβατική μεταβολή, γνωστή από τη θερμοδυναμική. Ο εκθέτης γενικά ισούται με  $(\lambda+2)/\lambda$ , όπου  $\lambda$  είναι οι βαθμοί ελευθερίας κίνησης. (Η τιμή  $\lambda=3$  έχει χρησιμοποιηθεί στις προηγούμενες εξισώσεις, ειδικότερα όταν ορίστηκε για την εξίσωση (4.15) η υδροστατική πίεση). Στη γενική περίπτωση δηλαδή έχουμε

$$p n^{-\gamma} = \text{σταθ.} \quad (4.18)$$

όπου στον εκθέτη έχουμε  $\gamma = (\lambda+2)/\lambda$ . Η συνθήκη για την αδιαβατική μεταβολή χρησιμοποιείται όταν κάποιο φαινόμενο έχει γρήγορη εξέλιξη, έτσι ώστε κατά τη διάρκεια του χαρακτηριστικού χρόνου του φαινομένου κάθε στοιχείο του πλάσματος να μην προλαβαίνει να έχει εναλλαγή ενέργειας μεταξύ γειτονικά στοιχεία. Ανάλογα με τον αριθμό διαστάσεων που εμπλέκονται στο φαινόμενο, παίρνουμε την αντίστοιχη τιμή  $\lambda = 1, 2$  ή  $3$ . (Περιπτώσεις με  $\lambda > 3$  δε συνηθίζονται στο πλάσμα, αντίθετα με τα συνηθισμένα αέρια).

Ως τώρα δεν έχει εισαχθεί η θερμοκρασία. Σύμφωνα με την ανάπτυξη του παραγράφου 2.1, η θερμοκρασία συνδέεται με τη θερμική κινητική ενέργεια των σωματιδίων, με τη σχέση  $W_{th} = (\lambda/2)k_B T$ . Όμως από τον ορισμό της υδροστατικής πίεσης έχουμε για  $\lambda$  βαθμούς ελευθερίας κίνησης τη σχέση  $p = (1/\lambda) n m u_{th}^2$ . Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει η καταστατική εξίσωση των τέλειων αερίων

$$p = n k_B T \quad (4.19)$$

Η εξίσωση αυτή, μολονότι ισχύει γενικότερα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ειδικά σε περιπτώσεις αργών μεταβολών, τέτοιων που κατά τη διάρκεια του φαινομένου να αποκαθίσταται θερμική ισορροπία του συστατικού που εξετάζεται με το περιβάλλον. Σε τέτοιες περιπτώσεις η θερμοκρασία παραμένει σταθερή ( $dT = 0$ ), συνεπώς ισχύει η σχέση

$$p n^{-1} = \text{σταθ.} \quad (4.20)$$

Μολονότι η σχέση αυτή έχει την ίδια μορφή όπως η (4.18), η τιμή  $\gamma = 1$  δε σχετίζεται με βαθμούς ελευθερίας κίνησης.

Τέλος σημειώνουμε ότι με την εξαίρεση της μηδενικής ροπής, στις ροπές της εξίσωσης του Boltzmann εμφανίζονται ροπές της συνάρτησης  $\delta f / \delta t$ , οι οποίες περιγράφουν την εναλλαγή ορμής και ενέργειας ανάμεσα στα διάφορα συστατικά του πλάσματος με το μηχανισμό των συγκρούσεων. Όπως έχει αναφερθεί στην παρ. 2.3, σε πλάσμα υψηλών θερμοκρασιών οι συγκρούσεις είναι ουσιαστικά ανύπαρκτες και συνεπώς αυτοί οι όροι μπορούν να παραλειφθούν. Αυτή είναι η περίπτωση που θα εξετασθεί στις επόμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου.

έλος, στην παρ. 4.6, θα μελετηθεί το πλάσμα όταν τα διάφορα συστατικά του αντιδρούν από κοινού. Στην περίπτωση αυτή δεν ενδιαφέρει η συμπεριφορά κάθε συστατικού του πλάσματος χωριστά, αλλά του πλάσματος σαν ενιαίου ρευστού. Όμως στο ενιαίο, αυτό ρευστό οι συγκρούσεις είναι καθαρά εσωτερικό θέμα, δηλαδή η μεταβολή της συνολικής ορμής και ενέργειας του πλάσματος είναι ίση με το μηδέν, και συνεπώς στις τελικές εξισώσεις για τη συμπεριφορά του ρευστού δεν εμφανίζονται οι όροι που περιγράφουν συγκρούσεις.

## 4.2 Εξισώσεις πλάσματος ως πολλαπλού ρευστού

### 4.2.1 Σύνοψη εξισώσεων

Σύμφωνα με όσα έχουν λεχθεί στην προηγούμενη παράγραφο, για κάθε συστατικό του πλάσματος, που στην κινητική ανάλυση περιγράφεται από μια συνάρτηση κατανομής  $f_a(\vec{r}, \vec{v}, t)$  ορίζονται η πυκνότητα  $n_a(\vec{r}, t)$ , η ταχύτητα ροής  $\vec{V}_a(\vec{r}, t)$  και η υδροστατική πίεση  $p_a(\vec{r}, t)$  από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} n_a(\vec{r}, t) &= \iiint f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \\ \vec{V}_a(\vec{r}, t) &= \frac{1}{n_a} \iiint \vec{v} f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \\ p_a(\vec{r}, t) &= \frac{m_a}{2} \iiint v^2 f_a(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \end{aligned} \quad (4.21a-\gamma)$$

όπου  $m_a$  είναι η μάζα κάθε σωματιδίου του αντίστοιχου συστατικού,  $z_a$  είναι οι βαθμοί ελευθερίας και  $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}_a$ . Παράγωγα των παραπάνω μεγεθών είναι η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου  $\rho_a(\vec{r}, t)$ , η πυκνότητα μάζας  $\rho_{ma}(\vec{r}, t)$ , η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος  $\vec{J}_a(\vec{r}, t)$  και η θερμοκρασία  $T_a(\vec{r}, t)$  κάθε συστατικού, που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \rho_a(\vec{r}, t) &= q_a n_a(\vec{r}, t) \\ \rho_{ma}(\vec{r}, t) &= m_a n_a(\vec{r}, t) \\ \vec{J}_a(\vec{r}, t) &= q_a n_a \vec{V}_a \\ k_B T_a(\vec{r}, t) &= \frac{p_a}{n_a} \end{aligned} \quad (4.21\delta-\eta)$$

όπου  $q_a$  είναι το φορτίο κάθε σωματιδίου του αντίστοιχου συστατικού και  $k_B$  είναι η σταθερά του Boltzmann.

Τα μεγέθη (4.21) υπακούουν στις εξισώσεις ρευστού (4.5), (4.12) και (4.15), που μετά το κλείσιμο του συστήματος αντικαθίστανται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} 1 & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_a \cdot \nabla \right) n_a = -n_a \nabla \cdot \vec{V}_a \\ 3 & m_a n_a \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_a \cdot \nabla \right) \vec{V}_a = -\nabla p_a + \rho_a \vec{E} + \vec{J}_a \times \vec{B} \\ 1 & \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_a \cdot \nabla \right) (p_a n_a^{-\gamma_a}) = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$



όπου ο εκθέτης της τελευταίας σχέσης προσδιορίζεται με βάση το είδος της μεταβολής: Για αδιαβατική μεταβολή έχουμε  $\gamma_\alpha = (\epsilon_\alpha + 2)/\epsilon_\alpha$ , για ισοθερμική μεταβολή έχουμε  $\gamma_\alpha = 1$ , για ασυμπίεστη μεταβολή ( $dn_\alpha = 0$ ), ο όρος  $n_\alpha \gamma_\alpha$  απαλείφεται, πράγμα που ισοδυναμεί με  $\gamma_\alpha = 0$ , κλπ.

Τέλος τα πεδία  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  προκύπτουν απευθείας από τις εξισώσεις του Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{4.23a}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \mu_0 \sum_{\alpha} \vec{J}_{\alpha}$$

με βάση τις πυκνότητες φορτίου και ρεύματος που οφείλονται αθροιστικά σ' όλα τα συστατικά του πλάσματος. Εναλλακτικά, παίρνοντας την περιστροφή των δύο τελευταίων εξισώσεων προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \left( \nabla \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\alpha} \vec{J}_{\alpha} \right) \\ -\nabla^2 \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} &= \mu_0 \nabla \times \sum_{\alpha} \vec{J}_{\alpha} \end{aligned} \tag{4.23b}$$

οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί για τις σχέσεις (4.23a). Μια άλλη εναλλακτική διαδικασία για τον προσδιορισμό των πεδίων είναι ο προσδιορισμός αυτός να γίνει έμμεσα από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.24}$$

όπου τα δυναμικά  $\Phi$  και  $\vec{A}$  προσδιορίζονται από σχέσεις όπως

$$\begin{aligned} 1 \quad -\nabla^2 \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \\ \frac{3}{4} \quad -\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \mu_0 \sum_{\alpha} \vec{J}_{\alpha} \end{aligned} \tag{4.25}$$

με τον όρο ότι  $c^2 \nabla \cdot \vec{A} + \partial \Phi / \partial t = 0$ . Θυμίζουμε για την σωστή εφαρμογή των σχέσεων (4.23b) και (4.25) ότι η Λαπλασιανή  $\nabla^2$  ενός διανύσματος δεν έχει σαν συνιστώσες τις Λαπλασιανές των συνιστωσών του διανύσματος, εκτός εάν τα μεγέθη έχουν εκφρασθεί σε καρτεσιανό σύστημα.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μια σχολιασμένη απαρίθμηση των παραδοχών, με βάση τις οποίες καταλήξαμε στις εξισώσεις (4.22).

(α) Το πλάσμα θεωρείται ότι αποτελείται από ένα αριθμό συστατικών, που το καθένα έχει σαφώς καθορισμένη πυκνότητα, ταχύτητα και πίεση (ή θερμοκρασία). Στην πιο συνηθισμένη περίπτωση έχουμε δύο συστατικά, ηλεκτρόνια και ιόντα με ορισμένο μαζικό και ατομικό αριθμό. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που η φυσιολογική επιλογή είναι π.χ. τα ηλεκτρόνια να αντιμετωπισθούν σαν δύο συστατικά. Αυτό μπορεί να συμβαίνει, όταν π.χ. η συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων έχει δύο μέγιστα. Τέλος, ουδέτερα φορτισμένα σωματίδια, ακόμα και όταν υπάρχουν, αγνοούνται, αφού δεν αλληλεπιδρούν με τα φορτισμένα σωματίδια παρά μόνο μέσω των συγκρούσεων.

(β) Οι συγκρούσεις μεταξύ των σωματιδίων θεωρούνται αμελητέες. Αυτό σημαίνει ότι η θερμοκρασία του πλάσματος είναι υψηλή, τόσο ώστε η συχνότητα συγκρούσεων να είναι μικρή σε σχέση με τη χαρακτηριστική συχνότητα του φαινομένου που μελετάται.

(γ) Η συνάρτηση κατανομής είναι ισοτροπική ως προς  $\vec{u} = \vec{u} - \vec{V}_p$  έτσι ώστε η εντατική κατάσταση του πλάσματος να περιγράφεται μόνο από την υδροστατική πίεση (ή τη θερμοκρασία). Επειδή όμως αυτό ακριβώς το σημείο έγινε ο τερματισμός των εξισώσεων ρευστού, είναι φυσικό και αναμένεται οι εξισώσεις να μην είναι φερέγγυες ως προς την εξάρτηση του τελικού αποτελέσματος από τη θερμοκρασία, ιδιαίτερα όταν αυτή η εξάρτηση είναι κάπως έντονη. Αυτή η δυσκολία περιορίζει την εφαρμογή των εξισώσεων μόνο στις περιπτώσεις που η θερμοκρασία αντιπροσωπεύει μόνο μια διόρθωση (και όχι δραστηρική αλλαγή) στα αποτελέσματα που προκύπτουν όταν  $T = 0$ .

(δ) Τέλος, με την εισαγωγή των μακροσκοπικών μεγεθών (4.21) αποκρύπτεται η ύπαρξη ενός τμήματος του πλάσματος που βρίσκεται σε συντονισμό με κάποιο κύμα. (παρ. 3.7 και 3.8), και συνεπώς τα αποτελέσματα από την εφαρμογή των εξισώσεων ρευστού δεν περιλαμβάνουν φαινόμενα συντονισμού. Τέτοια φαινόμενα, όπως και η ακριβής επίδραση της θερμοκρασίας, εξετάζονται με τις μεθόδους της κινητικής ανάλυσης (Κεφ. 5).

#### 4.2.2 Μετασχηματισμένες εξισώσεις ρευστού για κυματικές διαταραχές. Σχέση διασποράς.

Μια σχετικά απλή εφαρμογή των εξισώσεων ρευστού αναφέρεται στο ιδιαίτερα ενδιαφέρον αντικείμενο της διάδοσης διαταραχών με κυματική διαμόρφωση στο πλάσμα. Επειδή οι εξισώσεις του πλάσματος (4.22) συμπλέκονται με τις εξισώσεις των πεδίων, π.χ. (4.25), οι κυματικές αυτές διαταραχές περιλαμβάνουν ταυτόχρονα μεταβολές τόσο στα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  ή  $\vec{A}$ ,  $\Phi$ ) όσο και στα ρευστοδυναμικά μεγέθη ( $n$ ,  $\vec{V}$ ,  $p$ ) κάθε συστατικού του πλάσματος.

Θεωρούμε ότι, με την εξαίρεση της διαταραχής, το πλάσμα και ο χώρος στον οποίο βρίσκεται είναι ομογενή και αδιατάρακτα. Αυτό σημαίνει ότι κάθε συστατικό του πλάσματος χαρακτηρίζεται από σταθερή πυκνότητα  $n_{0\alpha}$ , ταχύτητα ροής  $\vec{V}_{0\alpha}$  και υδροστατική πίεση  $p_{0\alpha}$ . Στο χώρο που βρίσκεται το πλάσμα μπορεί να υπάρχει και ένα ομογενές μαγνητοστατικό

πεδίο  $\vec{B}_0$ . Σε τέτοια περίπτωση, η ταχύτητα ροής κάθε συστατικού υποχρεωτικά είναι παράλληλη με το μαγνητοστατικό πεδίο, επειδή το πεδίο αυτό εμποδίζει τη ροή σωματιδίων εγκάρσια. Ηλεκτροστατικά πεδία ουσιαστικά δεν μπορούν να υπάρξουν, αφού το πλάσμα τα περιορίζει σε περιοχές με διαστάσεις  $\lambda_D$  γύρω από τις πηγές. Συνεπώς θεωρούμε ότι  $\vec{E}_0 = 0$ .

Δεδομένου ότι στη διαταραχή μπορεί να γίνει μετασχηματισμός Fourier, περιορίζομαστε σε αρμονικές διαταραχές, που χαρακτηρίζονται από κυκλική συχνότητα  $\omega$  και κυματοδιάνυσμα  $\vec{\beta}$ , δηλαδή διάνυσμα με μέτρο ίσο προς τη σταθερά διάδοσης (ή κυματαριθμό)  $\beta$  και κατεύθυνση τη κατεύθυνση διάδοσης. Ειδικότερα, για κάθε μονόμετρο ή διανυσματικό μέγεθος χρησιμοποιούμε ένα ανάπτυγμα όπως π.χ.

$$\begin{aligned} n_a &= n_{0a} + \operatorname{Re}\{n_{1a} e^{j(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)}\} \\ \vec{V}_a &= \vec{V}_{0a} + \operatorname{Re}\{\vec{V}_{1a} e^{j(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)}\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

όπου  $n_{1a}$  και κάθε συνιστώσα του  $\vec{V}_{1a}$  είναι σταθερά μιγαδικά μεγέθη, με μέτρο πολύ μικρότερο από το  $n_{0a}$  και τις συνιστώσες του  $\vec{V}_{0a}$  αντίστοιχα. Αυτή η τελευταία υπόθεση, ότι η διαταραχή είναι μικρή επιτρέπει, σε όρους που περιέχουν γινόμενα όπως  $n_a \vec{V}_a$ , όταν αναπτυχθούν σύμφωνα με την (4.26), να γραφούν

$$n_a \vec{V}_a = n_{0a} \vec{V}_{0a} + \operatorname{Re}\{(n_{0a} \vec{V}_{1a} + n_{1a} \vec{V}_{0a}) e^{j(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)}\} \quad (4.27)$$

παραλείποντας το μικρό όρο που εμπλέκει το γινόμενο  $n_{1a} \vec{V}_{1a}$ . Με τον τρόπο αυτό όλοι οι όροι στις εξισώσεις για τα συστατικά του πλάσματος και για τα πεδία εμπλέκουν το πραγματικό μέρος του γινομένου κάποιου μιγαδικού μεγέθους επί  $\exp[j(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ . Για λόγους συντομογραφίας έχει καθιερωθεί να μη γράφεται στις εξισώσεις αυτές τόσο το σύμβολο  $\operatorname{Re}$  όσο και η εκθετική συνάρτηση, των οποίων η ύπαρξη εννοείται. Τέλος, η απλή εξάρτηση των μεγεθών από το  $\vec{r}$  και το  $t$  σημαίνει ότι ο τελεστής  $\nabla$  μπορεί να αντικατασταθεί από το  $j\vec{\beta}$  και η χρονική παράγωγος  $\partial/\partial t$  από το  $-j\omega$ , πάντοτε υπονοώντας ότι μόνο το πραγματικό μέρος ολόκληρης της έκφρασης, πολλαπλασιασμένης με το  $\exp[j(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)]$ , έχει νόημα. Συνεπώς για μονόμετρα μεγέθη όπως το δυναμικό  $\Phi$  γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi &= -j\omega\Phi_1 \\ \nabla\Phi &= j\vec{\beta}\Phi_1 \\ \nabla^2\Phi &= -\beta^2\Phi_1 \end{aligned} \quad (4.28a)$$

ενώ για διανυσματικά μεγέθη όπως το διανυσματικό δυναμικό  $\vec{A}$  γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} &= -j\omega\vec{A}_1 \\ \nabla \cdot \vec{A} &= j\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 \\ \nabla \times \vec{A} &= j\vec{\beta} \times \vec{A}_1 \\ \nabla^2 \vec{A} &= -\beta^2 \vec{A}_1 \end{aligned} \quad (4.28b)$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις, οι εξισώσεις του πλάσματος και των ηλεκτρομα-

γνητικών πεδίων μετατρέπονται σε αλγεβρικές σχέσεις, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν πολύ ευκολότερα. Ως προς τα πεδία προκύπτει ότι αρκεί ο προσδιορισμός του διανυσματικού δυναμικού  $\vec{A}$ . Από τη σχέση (4.25β) προκύπτει ότι

$$(\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2})\vec{A}_1 = \mu_0 \sum_{\alpha} q_{\alpha} (n_{\alpha 0} \vec{V}_{1\alpha} + n_{1\alpha} \vec{V}_{\alpha 0}) \quad (4.29\alpha)$$

όπου έχουμε δεχθεί ότι μολονότι κάθε συστατικό του πλάσματος μπορεί να έχει ταχύτητα  $\vec{V}_{\alpha 0}$ , στο πλάσμα συνολικά δεν υπάρχει ένταση ρεύματος μηδενικής τάξης. (Το στατικό πεδίο  $\vec{B}_0$  που ίσως υπάρχει προέρχεται από ρεύματα που βρίσκονται έξω από το χώρο του πλάσματος). Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη  $c^2 \nabla \cdot \vec{A} + \partial \Phi / \partial t = 0$  και τις σχέσεις (4.24) προκύπτουν το δυναμικό  $\Phi$  και τα πεδία  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  ως παράγωγα του διανυσματικού δυναμικού  $\vec{A}$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{c^2}{\omega} \vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 \\ \vec{E}_1 &= -j\Phi_1 \vec{\beta} + j\omega \vec{A}_1 = j\omega \left[ \vec{A}_1 - \frac{c^2}{\omega^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1) \vec{\beta} \right] \\ \vec{B}_1 &= j\vec{\beta} \times \vec{A}_1 \end{aligned} \quad (4.29\beta\gamma\delta)$$

Η σχέση (4.25α) δε χρησιμοποιήθηκε, επειδή ικανοποιείται εκ ταυτότητας από τη (4.30α), λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση συνέχειας (4.22α). Τέλος, η πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής δύναμης που εμφανίζεται στη σχέση (4.22β) μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned} (\rho_{\alpha} \vec{E} + j\alpha \times \vec{B})_1 &= q_{\alpha} n_{\alpha 0} (\vec{E}_1 + \vec{V}_{\alpha 0} \times \vec{B}_1 + \vec{V}_{1\alpha} \times \vec{B}_0) = j q_{\alpha} n_{\alpha 0} \left[ (\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{\alpha 0}) \vec{A}_1 - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{c^2}{\omega} \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{\alpha 0} \right) \vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 \right] + q_{\alpha} n_{\alpha 0} \vec{V}_{1\alpha} \times \vec{B}_0 \end{aligned} \quad (4.29\epsilon)$$

όπου ο όρος  $q_{\alpha} n_{\alpha 0} \vec{V}_{\alpha 0} \times \vec{B}_0$  μηδενίζεται επειδή  $\vec{V}_{\alpha 0} \times \vec{B}_0 = 0$ . (Ροή του πλάσματος εγκάρσια προς το μαγνητικό πεδίο δεν είναι δυνατή).

Απομένει ο μετασχηματισμός των εξισώσεων του πλάσματος. Από τις σχέσεις (4.22) προκύπτει ότι για κάθε συστατικό του πλάσματος έχουμε

$$\begin{aligned} (\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{\alpha 0}) n_{1\alpha} &= n_{\alpha 0} \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{1\alpha} \\ m_{\alpha} n_{\alpha 0} (\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{\alpha 0}) \vec{V}_{1\alpha} &= \vec{\beta} p_{1\alpha} + j(\rho_{\alpha} \vec{E} + j\alpha \times \vec{B})_1 \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$n_{\alpha 0} p_{1\alpha} = \gamma_{\alpha} p_{\alpha 0} n_{1\alpha}$$

όπου ο τελευταίος όρος της (4.30β) έχει γραφεί στην (4.29ε).

Με τους μετασχηματισμούς αυτούς οι διαφορικές εξισώσεις (4.22) και (4.25α) αντικαθίστανται από το σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (4.30) και (4.29α). Για  $\alpha_{\max}$  συστατικά του πλάσματος, το σύστημα περιλαμβάνει  $3+5\alpha_{\max}$  εξισώσεις με ισάριθμους αγνώστους τα μεγέθη  $\vec{A}_1$ ,  $n_{1\alpha}$ ,  $\vec{V}_{1\alpha}$  και  $p_{1\alpha}$ . Αυτό το σύστημα εξισώσεων είναι γραμμικό και ομογενές, συνεπώς για να υπάρχει λύση πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να μηδενίζεται. Αυτή η απαίτηση επιβάλλει μια σχέση που συνδέει την κυκλική συχνότητα  $\omega$  με το κυματοδιάνυσμα  $\vec{\beta}$ , με παραμέτρους τα μεγέθη  $n_{\alpha 0}$ ,  $\vec{V}_{\alpha 0}$  και  $\rho_{\alpha 0}$ , που χαρακτηρίζουν την κατάσταση ηρεμίας του πλάσματος, καθώς και το  $B_0$ , αν υπάρχει. Η σχέση αυτή συμβολίζεται ως εξής:

$$D(\omega, \vec{\beta}; n_{\alpha 0}, \vec{V}_{\alpha 0}, \rho_{\alpha 0}, \vec{B}_0) = 0 \quad (4.31\alpha)$$

και ονομάζεται σχέση διασποράς. Επιλυμένη ως προς  $\omega$ , η σχέση διασποράς δίνει τις τιμές των συχνοτήτων που μπορούν να διαδοθούν στο πλάσμα, με τη μορφή.

$$\omega = \omega(\vec{\beta}; n_{0a}, \vec{V}_{0a}, \rho_{0a}, \vec{B}_0) \quad (4.31\beta)$$

Ο προσδιορισμός και η επίλυση της σχέσης διασποράς θα γίνει στις επόμενες παραγράφους, και ειδικότερα στην παρ. (4.3) θα μελετηθεί η διάδοση κυμάτων όταν  $\vec{B}_0 = 0$ , ενώ στην παρ. (4.4) θα μελετηθεί η περίπτωση  $\vec{B}_0 \neq 0$ . Ο λόγος για τη χωριστή αντιμετώπιση αυτών των δύο περιπτώσεων είναι φανερός: Όταν  $\vec{B}_0 = 0$ , τότε κάθε συνιστώσα του  $\vec{V}_{1a}$  αναπτύσσεται κατά κάποιο τρόπο ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες συνιστώσες, ενώ όταν  $\vec{B}_0 \neq 0$  η μαγνητική επαγωγή προκαλεί σύζευξη των δύο εγκάρσιων συνιστωσών. Ανεξάρτητα όμως από τη συγκεκριμένη ειδική περίπτωση, από τη γενική σχέση  $\omega(\vec{\beta})$  ορίζονται δύο ταχύτητες με ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η πρώτη τέτοια ταχύτητα είναι η ταχύτητα φάσης  $v_p$ , που ορίζεται ως

$$\vec{v}_p = \frac{\omega}{\beta} \hat{e}_\beta \quad (4.32a)$$

όπου  $\hat{e}_\beta = \vec{\beta}/\beta$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του  $\vec{\beta}$ . Η ταχύτητα φάσης είναι η ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται η φάση  $(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)$  κάθε ορμονικής συνιστώσας του κύματος. Όμως ένας παλμός με αρχή και τέλος περιλαμβάνει ένα συνεχές φάσμα συχνοτήτων. Μολονότι κάθε συχνότητα του παλμού κινείται με την αντίστοιχη ταχύτητα φάσης, ο συνολικός παλμός κινείται με την ταχύτητα ομάδας

$$\vec{v}_g = \nabla \omega = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_x} \hat{e}_x + \frac{\partial \omega}{\partial \beta_y} \hat{e}_y + \frac{\partial \omega}{\partial \beta_z} \hat{e}_z \quad (4.32\beta)$$

Αυτή είναι η ταχύτητα με την οποία κινείται κάθε μετρήσιμο μέγεθος του παλμού (π.χ. η ενέργεια κλπ).

### 4.3 Κύματα όταν $\vec{B}_0 = 0$

Πρώτη ομάδα κυμάτων, που θα μελετηθούν στην παράγραφο αυτή, είναι τα κύματα που διαδίδονται σε πλάσμα χωρίς μαγνητοστατικό πεδίο, δηλ. με  $\vec{B}_0 = 0$ . Η περίπτωση αυτή είναι σχετικά απλούστερη, επειδή η εξίσωση (4.29ε) δεν περιλαμβάνει πια τον όρο  $\vec{V}_1 \times \vec{B}_0$  που προκαλεί σύζευξη ανάμεσα στις εγκάρσιες συνιστώσες του  $\vec{V}_1$ . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, τα ηλεκτροστατικά κύματα ( $\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = 0$ ) και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ( $\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = 0$ ).

#### 4.3.1 Ηλεκτροστατικά κύματα

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση στην οποία τα κύματα που διαδίδονται στο πλάσμα έχουν αποκλειστικά μόνο την ηλεκτρική συνιστώσα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δηλ.  $B_1 = 0$ . Επειδή οι διαταραχές αυτές περιγράφονται πλήρως από τις εξισώσεις της ηλεκτροστατικής,  $\nabla \cdot \vec{E}_1 = \rho/\epsilon_0$  και  $\nabla \times \vec{E}_1 = 0$ , ονομάζονται ηλεκτροστατικές, μολονότι οι χρονικές παράγωγοι δε μηδενίζονται. Από τη σχέση (4.29δ) προκύπτει  $\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = 0$ , συνεπώς  $\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = \beta A_1$ . Στην περίπτωση αυτή φαίνεται από τη σχέση (4.32β), σε συνδυασμό με τη σχέση (4.29θ), ότι οι διαταραχές είναι αποκλειστικά διαμήκεις,  $\vec{\beta} \times \vec{V}_{1a} = 0$ , όπως είναι φυσικό όταν συνοδεύονται μόνο από διαμήκεις.

ηλεκτρικό πεδίο ( $\vec{\beta} \times \vec{E}_1 = 0$ ). Συνεπώς στις διανυσματικές εξισώσεις, οι μόνες συνιστώσες που δεν είναι ίσες με μηδέν είναι οι διαμήκειες συνιστώσες, δηλ. δε χάνεται καμιά πληροφορία αν ληφθεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσματικών εξισώσεων με το κυματοδιάνυσμα  $\vec{\beta}$ . Χρησιμοποιώντας τις (4.29ε), (4.30α) και (4.30γ) με  $\rho_{0\alpha} = n_{0\alpha} k_B T_{0\alpha}$ , οι εξισώσεις (4.29α) και (4.30β) δίνουν

$$(\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = \mu_0 \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{0\alpha} \omega \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}_{1\alpha}}{\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha}} \quad (4.33)$$

$$m_{\alpha} (\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha}) \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{1\alpha} = \frac{\beta^2 \gamma_{\alpha} k_B T_{0\alpha}}{\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha}} \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{1\alpha} + q_{\alpha} (\frac{c^2 \beta^2}{\omega} - \omega) \vec{\beta} \cdot \vec{A}_1$$

όπου έχει ληφθεί υπόψη ότι τα διανύσματα  $\vec{\beta}$  και  $\vec{A}_1$  είναι παράλληλα μεταξύ τους, συνεπώς οι δύο όροι της (4.29ε) που περιλαμβάνουν το  $\vec{V}_{0\alpha}$  είναι ίσοι και αντίθετοι. Επιλύοντας την (4.33β) ως προς  $\vec{\beta} \cdot \vec{V}_{1\alpha}$  και αντικαθιστώντας στην (4.33α) προκύπτει η σχέση διασποράς για ηλεκτροστατικά κύματα,

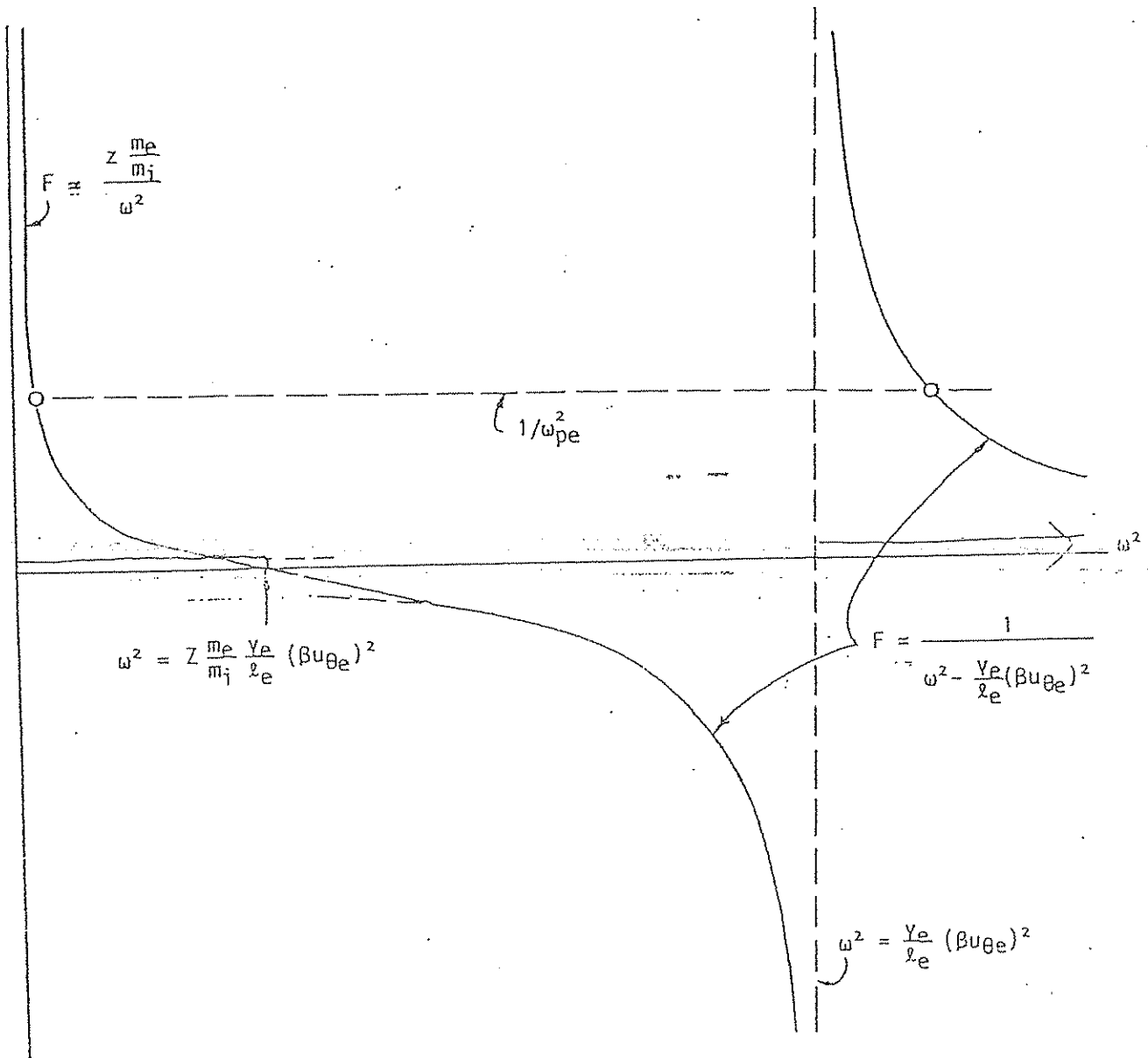
$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha})^2 - \beta^2 \gamma_{\alpha}^2 k_B T_{0\alpha} / m_{\alpha}} = 0 \quad (4.34a)$$

όπου  $\omega_{p\alpha}^2 = q_{\alpha}^2 n_{0\alpha} / \epsilon_0 m_{\alpha}$  είναι το τετράγωνο της (κυκλικής) συχνότητας πλάσματος του συστατικού  $\alpha$ .

Ας προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση της σχέσης διασποράς στην περίπτωση πλάσματος με δύο συστατικά, ηλεκτρόνια με φορτίο  $q_e < 0$  και ιόντα με φορτίο  $q_i = -Z q_e > 0$ . Είναι φανερό ότι η απαίτηση για απουσία πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος μηδενικής τάξης, δηλ.  $q_i n_{0i} \vec{V}_{0i} + q_e n_{0e} \vec{V}_{0e} = 0$ , σε συνδυασμό με τη μακροσκοπικά ουδετερότητα του πλάσματος,  $q_i n_{0i} + q_e n_{0e} = 0$ , συνεπάγονται ότι η ταχύτητα ροής  $\vec{V}_0$  είναι χαρακτηριστικό του πλάσματος και όχι των επιμέρους συστατικών, δηλ.  $\vec{V}_{0e} = \vec{V}_{0i} = \vec{V}_0$ . Συνεπώς αρκεί να θέσουμε στην (4.34α)  $\vec{V}_{0\alpha} = 0$ , δηλαδή να εξετάσουμε τα κύματα σε σύστημα στάσιμο σε σχέση με το πλάσμα. Επί πλέον υποθέτουμε ότι τα ιόντα έχουν μηδενική θερμοκρασία,  $T_{0i} = 0$ , ενώ η θερμοκρασία των ηλεκτρονίων εκφράζεται από τη θερμική ταχύτητα, ώστε  $m_{\alpha} u_{\theta e}^2 = \epsilon_e k_B T_{0e}$ . Με βάση αυτές τις παραδοχές, η σχέση διασποράς (4.34) γράφεται  $F(\omega^2) = 1/\omega_{pe}^2$  όπου

$$F(\omega^2) = \frac{1}{\omega^2 - \frac{\gamma_e (\beta u_{\theta e})^2}{\epsilon_e} + \frac{Z m_e / m_i}{\omega^2}} \quad (4.34\beta)$$

Μολονότι η εξίσωση  $F(\omega^2) = 1/\omega_{pe}^2$  μπορεί να λυθεί ακριβώς ως προς  $\omega$ , είναι προτιμότερο να προσδιορισθούν προσεγγιστικές λύσεις, με απλούστερη όμως αλγεβρική μορφή, έτσι ώστε να μπορεί να εντοπισθεί ευκολότερα η εξάρτηση κάθε μορφής ταλάντωσης από τις διάφορες παραμέτρους. Έτσι, δεδομένου ότι απαιτείται  $F(\omega^2) = 1/\omega_{pe}^2 > 0$ , η γραφική παράσταση στο Σχ.4.1 δείχνει ότι η συνάρτηση  $F(\omega^2)$  είναι θετική σε δύο περιοχές: Όταν  $\omega^2 > (\beta u_{\theta e})^2 \gamma_e / \epsilon_e$  και όταν  $0 < \omega^2 < Z (m_e / m_i) (\beta u_{\theta e})^2 \gamma_e / \epsilon_e$ . Είναι φανερό, επειδή  $m_e \ll m_i$ , ότι αυτές οι δύο περιοχές είναι απομακρυσμένες η μια από την άλλη, συνεπώς το ίδιο θα ισχύει και



Σχ. 4.1 Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $F(\omega^2)$  που ορίζεται στην εξ. (4.34β). Η σχέση διασποράς είναι  $F = 1/\omega_{pe}^2$ .

για τις αντίστοιχες λύσεις.

Στην πρώτη περιοχή έχουμε επίσης  $\omega^2 > \omega_{pe}^2$ , συνεπώς έχουμε κύματα με υψηλή συχνότητα (συνήθως στην περιοχή των μικροκυμάτων). Σε τόσο γρήγορες ταλαντώσεις τα ηλεκτρόνια δεν προλαβαίνουν να έχουν συναλλαγή με το περιβάλλον, δηλαδή η μεταβολή μπορεί να θεωρηθεί ως αδιαβατική ( $\gamma_e = (\dot{\lambda}_e + 2)/\lambda_e$ ). Επίσης, η κίνηση των ηλεκτρονίων είναι ουσιαστικά μονοδιάστατη, συνεπώς η κατάλληλη επιλογή είναι  $\lambda_e = 1$ . Με βάση αυτά προκύπτει η σχέση

$\gamma_e = 3$   
$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3\beta^2 u_{\theta e}^2 = \omega_{pe}^2 (1 + 3\beta^2 \lambda_{De}^2) \quad (4.35)$$

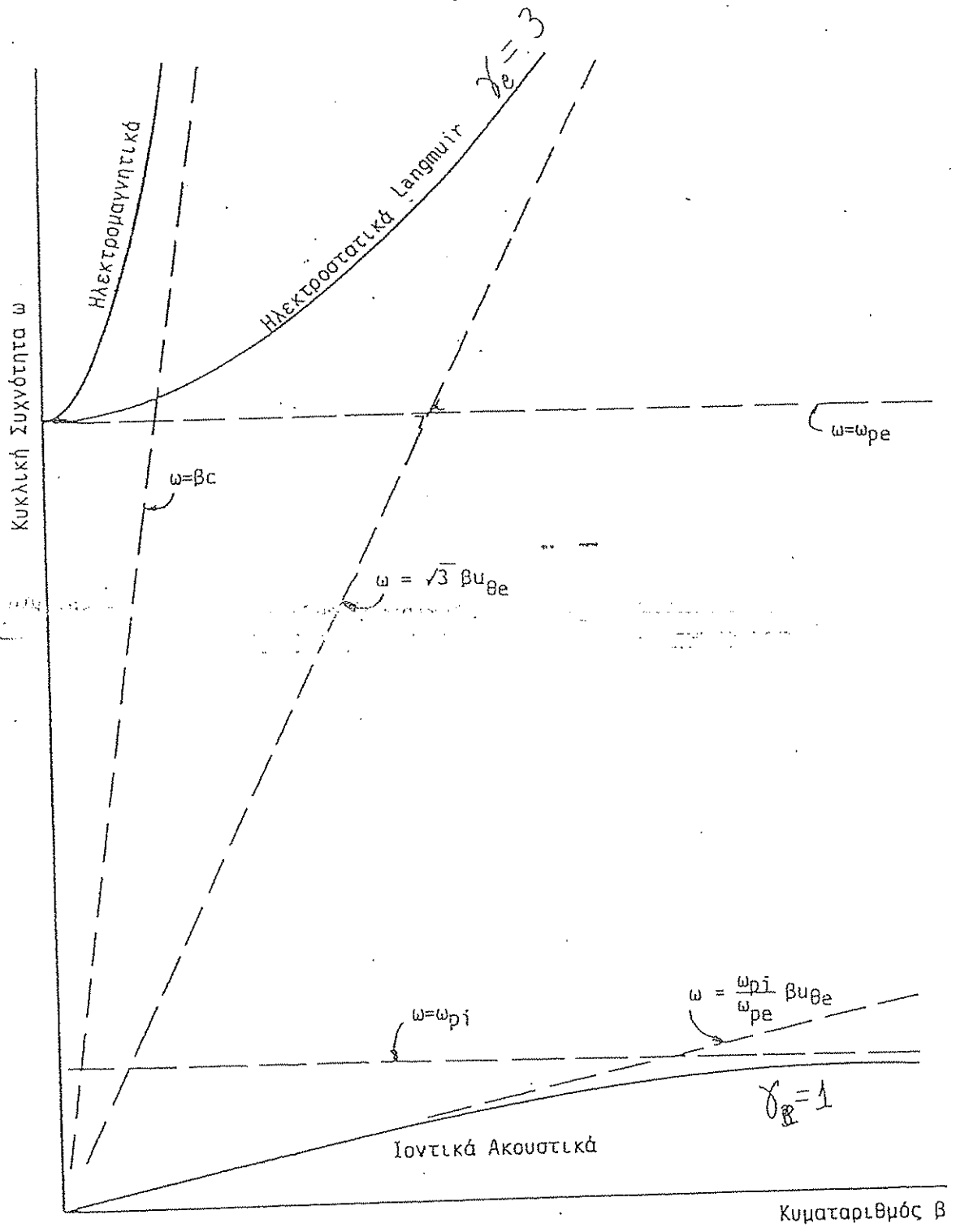
όπου  $\lambda_{De} = u_{\theta e}/\omega_{pe}$  είναι το μήκος του Debye για τα ηλεκτρόνια. Το ηλεκτροστατικό κύμα που περιγράφεται από τη σχέση (4.35) ονομάζεται "κύμα του Langmuir", ο οποίος το 1929 προσδιόρισε την ύπαρξη και τα χαρακτηριστικά αυτών των άγνωστων μέχρι τότε κυμάτων. Άλλες ονομασίες που χρησιμοποιούνται είναι: "ηλεκτρονικό κύμα πλάσματος", επειδή η συμπεριφορά του εξαρτάται αποκλειστικά από τις ιδιότητες των ηλεκτρονίων, και "κύμα χωρικού φορτίου", επειδή οφείλεται σε πυκνώματα και αραιώματα του ηλεκτρικού φορτίου στο χώρο. Ήδη, μια απλοποιημένη μορφή αυτής της ταλάντωσης παρουσιάστηκε στην παρ. 2.5, όπου δεν είχε συμπεριληφθεί στην ανάλυση η συμβολή της πίεσης, πράγμα που ισοδυναμεί με  $u_{\theta e} = 0$ .

Ορισμένες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν σχετικά με τη διάδοση αυτών των κυμάτων. Όταν  $u_{\theta e} = 0$ , τότε η ταχύτητα ομάδας  $v_g = \partial\omega/\partial k$  είναι ίση με μηδέν για κάθε συχνότητα. Στην περίπτωση αυτή η ακινησία των ηλεκτρονίων (εκτός από την κίνηση που επιβάλλει το κύμα) συνδυασμένη με την απουσία συγκρούσεων, αποστερούν το σύστημα από κάθε δυνατότητα επικοινωνίας ανάμεσα σε διάφορα σημεία του χώρου, έχουμε δηλαδή μια στάσιμη διαταραχή (στάσιμο κύμα). Όταν όμως  $u_{\theta e} \neq 0$ , τότε η δυνατότητα επικοινωνίας αποκαθίσταται, με αποτέλεσμα η διαταραχή να διαδίδεται με ταχύτητα  $v_g = 3u_{\theta e}^2/v_p$ , όπου  $v_p = \omega/\beta$  είναι η ταχύτητα φάσης. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.35) φαίνεται ότι πάντοτε  $v_g < v_p$ , και ότι οι δύο αυτές ταχύτητες τείνουν στην τιμή  $\sqrt{3} u_{\theta e}$  για μεγάλες τιμές της σταθεράς διάδοσης. Όμως, για τέτοιες τιμές του  $\beta$  χρειάζεται προσοχή στη χρήση της σχέσης (4.35). Ο λόγος είναι ότι όταν το μήκος κύματος της διαταραχής,  $\lambda = 2\pi/\beta$ , πλησιάζει την τιμή του μήκους του Debye,  $\lambda_{De} = u_{\theta e}/\omega_{pe}$ , τότε αυξάνει η συμβολή των τυχαιοτήτων σε βάρος της συλλογικής συμπεριφοράς και το μέσο παύει να χαρακτηρίζεται πλάσμα. Συνεπώς, ανώτατο όριο για την εφαρμογή της (4.35) είναι η τιμή  $\beta = 1/\lambda_{De}$ . Το διάγραμμα  $(\omega, \beta)$  αυτών των κυμάτων απεικονίζεται στο Σχ. 4.2.

Η δεύτερη περιοχή στην οποία η σχέση διασποράς  $F(\omega^2) = 1/\omega_{pe}^2$  έχει λύση, είναι σε χαμηλές συχνότητες, όπως φαίνεται από τη γραφική παράσταση στο Σχ. 4.1. Στις συχνότητες αυτές το  $\omega^2$  στον πρώτο όρο της  $F(\omega^2)$  μπορεί να παραλειφθεί. Στην περιοχή αυτή, η λύση ικανοποιεί επίσης την ανισότητα  $\omega^2 < \omega_{pi}^2$ , και το κύμα οφείλεται κυρίως στην κίνηση των ιόντων. Επειδή η συχνότητα είναι χαμηλή, τα ηλεκτρόνια προλαβαίνουν να αποκαταστήσουν θερμική ισορροπία με το περιβάλλον, συνεπώς η μεταβολή είναι ισοθερμική ( $\gamma_e = 1$ ), ενώ το πρόβλημα παραμένει μονοδιάστατο,  $\lambda_i = 1$ . Με βάση αυτά, η λύση της σχέσης διασποράς είναι

$\gamma_e = 1$





4.2 : Διάγραμμα  $(\omega, \beta)$  για κύματα που διαδίδονται όταν  $B_0^+ = 0$

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 \frac{(\beta v_{te})^2}{\omega_{pe}^2 + (\beta v_{te})^2} = (\omega_{pi} \lambda_{De})^2 \frac{\beta^2}{1 + (\beta \lambda_{De})^2} \quad (4.36)$$

Το διάγραμμα  $(\omega, \beta)$  αυτών των κυμάτων απεικονίζεται στο Σχ. 4.2. Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα, όταν  $\beta \lambda_{De} \ll 1$ , τότε οι ταχύτητες ομάδας και φάσης είναι ίσες μεταξύ τους ( $v_g = v_p = \omega_{pi} \lambda_{De}$ ) και ένας παλμός διαδίδεται στο πλάσμα χωρίς διασπορά, με ταχύτητα ανάλογη προς την τετραγωνική ρίζα της θερμοκρασίας. Ίδια χαρακτηριστικά διάδοσης στη ρευστοδυναμική έχουν τα ακουστικά κύματα. Αυτή η επιφανειακή ομοιότητα είχε σαν αποτέλεσμα στα κύματα που περιγράφονται από τη σχέση (4.36) να δοθεί η ονομασία "ιοντικά ακουστικά κύματα". Σε αντίθεση όμως με τα καθαυτό ακουστικά κύματα, η διάδοση των ιοντικών ακουστικών κυμάτων οφείλεται στις συλλογικές ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα σε διαδοχικές αυξήσεις και μειώσεις της πυκνότητας του πλάσματος.

#### 4.3.2 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση κυμάτων με  $\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = 0$ . Για τα κύματα αυτά  $\Phi_1 = 0$ , δηλαδή πρόκειται για ηλεκτρομαγνητικές διαταραχές, στις οποίες τα πεδία περιλαμβάνουν και μαγνητική συνιστώσα ( $\vec{B}_1 \neq 0$ ). Χρησιμοποιώντας πάλι τις σχέσεις (4.29α), (4.30α) και (4.30γ) με  $\rho_{0\alpha} = n_{0\alpha} k_B T_{0\alpha}$ , οι εξισώσεις (4.29α) και (4.30β) δίνουν (όταν  $\vec{B}_0 = 0$  και  $\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = 0$ )

$$(\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{A}_1 = \mu_0 \sum_{\alpha} \left[ q_{\alpha} n_{0\alpha} \vec{V}_{1\alpha} + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{V}_{1\alpha}}{\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha}} \vec{V}_{0\alpha} \right] \quad (4.37)$$

$$m_{\alpha} (\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha}) \vec{V}_{1\alpha} = \frac{\gamma_{\alpha} k_B T_{0\alpha} \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{1\alpha}}{\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha}} \vec{\beta} - q_{\alpha} (\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha}) \vec{A}_1 - q_{\alpha} \vec{V}_{0\alpha} \cdot \vec{A}_1 \vec{\beta}$$

Η δεύτερη εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ως προς τα εσωτερικά γινόμενα  $\vec{\beta} \cdot \vec{V}_{1\alpha}$  και  $\vec{A}_1 \cdot \vec{V}_{1\alpha}$  και αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες εκφράσεις στην πρώτη εξίσωση, πολλαπλασιασμένη εσωτερικά με το  $\vec{A}_1$ , προκύπτει η σχέση διασποράς

$$\omega^2 - \beta^2 c^2 = \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \left[ 1 + \frac{\beta^2 (\hat{e}_A \cdot \vec{V}_{0\alpha})^2}{(\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{V}_{0\alpha})^2 - \beta^2 \gamma_{\alpha} k_B T_{0\alpha} / m_{\alpha}} \right] \quad (4.38)$$

όπου  $\hat{e}_A = \vec{A}_1 / A_1$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του  $\vec{A}_1 \cdot 0$  τελευταίος όρος της (4.38) θυμίζει τη σχέση διασποράς (4.34α) των ηλεκτροστατικών κυμάτων. Πραγματικά, αυτός ο όρος περιγράφει ηλεκτροστατικά φαινόμενα που προέρχονται από αλληλουχία πυκνωμάτων στο πλάσμα. Τέτοια φαινόμενα δεν εξαλείφονται μόνο με την παραδοχή  $\Phi_1 = 0$ , επειδή τα δυναμικά  $(\Phi, \vec{A})$  σε ακίνητο σύστημα μετασχηματίζονται στα δυναμικά  $(\Phi - \vec{V} \cdot \vec{A}, \vec{A})$  σε σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $\vec{V}$ . Συνεπώς, για να εξετασθούν τα αμιγώς ηλεκτρομαγνητικά κύματα πρέπει να έχουμε  $\Phi_1 = 0$  και στα συστήματα συντεταγμένων που είναι ακίνητα ως προς κάθε συστατικό του πλάσματος, δηλ.  $\hat{e}_A \cdot \vec{V}_{0\alpha} = 0$ . Τότε η σχέση διασποράς είναι

$$\omega^2 = \beta^2 c^2 + \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 = \beta^2 c^2 + \omega_{pe}^2 \quad (4.39)$$

$\vec{A}_1 \cdot \vec{V}_{0\alpha} = 0$   
 αμιγώς ΗΜ

Επειδή  $m_e \ll m_i$ , συνήθως αρκεί μόνο η (κυκλική) συχνότητα πλάσματος του ηλεκτρονικού πληθυσμού. Το διάγραμμα  $(\omega, \beta)$  φαίνεται στο Σχ. 4.3 (καμπύλη 3). Όταν  $\omega \gg \omega_{pe}$ , η σχέση (4.39) δίνει τη γνωστή σχέση  $\omega = \beta c$  για τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε κενό χώρο, με  $v_p = v_g = c$ . Σε χαμηλότερες συχνότητες η ύπαρξη του πλάσματος γίνεται αισθητή από το κύμα, και η ταχύτητα ομάδας αρχίζει να μικραίνει ( $v_g = c^2/v_p < c < v_p$ ). Όταν  $\omega = \omega_{pe}$ , το κύμα γίνεται στάσιμο ( $v_g = 0$ ). Για χαμηλότερες ακόμα συχνότητες το κύμα δεν μπορεί να διαδοθεί μέσα στο πλάσμα. Αν τέτοιο κύμα διεγερθεί από πηγή που βρίσκεται έξω από το πλάσμα, το κύμα ανακλάται από το πλάσμα, ενώ αν το κύμα διεγερθεί μέσα στο χώρο του πλάσματος, τότε υφίσταται απόσβεση, επειδή η σταθερά διάδοσης είναι μια φανταστικό μέγεθος,  $\beta = jc/(\omega_{pe}^2 - \omega^2)^{1/2}$ . Οι ιδιότητες αυτές χρησιμοποιούνται για διαγνώσεις σχετικές με την πυκνότητα ενός πλάσματος.

Καταλήγοντας, ας εξετάσουμε την πόλωση αυτών των κυμάτων. Επειδή  $\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = 0$ , από τις σχέσεις (4.29γδ) φαίνεται ότι τόσο το ηλεκτρικό πεδίο, όσο και η μαγνητική επαγωγή έχουν πόλωση εγκάρσια προς το κυματοδιάνυσμα  $\vec{\beta}$ . Επίσης, με  $\vec{V}_{0\alpha} = 0$ , η σχέση διασποράς (4.39) ικανοποιείται την εξίσωση (4.37) για κάθε συνιστώσα του δυναμικού  $\vec{A}_1$ , ανεξάρτητα από την ύπαρξη άλλων συνιστωσών. Συνεπώς τα πεδία που συνθέτουν αυτά τα κύματα περιγράφονται από δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους γραμμικές πολώσεις. Φυσικά η σύνθεση αυτών των δύο πολώσεων μπορεί να δημιουργήσει κάθε είδους ελλειπτική πόλωση.

#### 4.4 Κύματα όταν $\vec{B}_0 \neq 0$

##### 4.4.1 Γενικά

Η εισαγωγή ενός ομογενούς μαγνητοστατικού πεδίου  $\vec{B}_0$  περιπλέκει λίγο τις εξισώσεις, επειδή προκαλεί την εμφάνιση του όρου  $\vec{V}_{1\alpha} \times \vec{B}_0$  στην πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής δύναμης στην εξίσωση (4.31). Για να αποφύγουμε επιβάρυνση των εξισώσεων με όρους που έχουν σχετικά μικρότερη σημασία θα εξετάσουμε την απλοποιημένη περίπτωση στάσιμου ψυχρού πλάσματος, δηλαδή πλάσματος στο οποίο για κάθε συστατικό  $\vec{V}_{0\alpha} = 0$  και  $T_{0\alpha} = 0$  (και συνεπώς  $\rho_{0\alpha} = 0$ ). \* \*

Για την περιγραφή των κυματικών διαταραχών, η εξίσωση (4.29α) δίνει

$$(\beta^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) \vec{A}_1 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{0\alpha} \vec{V}_{1\alpha} \quad (4.40)$$

όπου  $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$ . Η εξίσωση για τα  $\vec{V}_{1\alpha}$  είναι η (4.30β), σε συνδυασμό με την (4.29ε). Υποθέτοντας ότι το μαγνητοστατικό πεδίο είναι κατά τον άξονα z, δηλαδή ότι  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ , και εισάγοντας την (κυκλική) συχνότητα κυκλοτρονίου,  $\omega_{c\alpha} = q_{\alpha} B_0 / m_{\alpha}$ , η εξίσωση για τις διαταραχές της ταχύτητας κάθε συστατικού είναι

$$\vec{V}_{1\alpha} - j \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} \vec{V}_{1\alpha} \times \hat{e}_z = \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[ -\vec{A}_1 + \frac{c^2}{\omega^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1) \vec{\beta} \right] \quad (4.41)$$

Σημειώνουμε ότι με τον ορισμό που έχουμε υιοθετήσει, το μέγεθος  $\omega_{ca}$  μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, ανάλογα με τα πρόσημα του πεδίου  $B_0$  και του φορτίου  $q_a$  κάθε συστατικού.

Παίρνοντας τόσο το εσωτερικό όσο και το εξωτερικό γινόμενο της (4.41) με το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{e}_z$  προκύπτει ένα σύστημα εξισώσεων, το οποίο μπορεί να επιλυθεί ως προς  $\vec{V}_{1a}$ . Εισάγοντας τη λύση αυτή στη σχέση (4.40) προκύπτει:

$$(c^2\beta^2 - \omega^2)\vec{A}_1 = \sum_a \frac{\omega p_a^2}{1 - \frac{\omega_{ca}^2}{\omega^2}} \left\{ -\vec{A}_1 - j \frac{\omega_{ca}}{\omega} (\vec{A}_1 \times \hat{e}_z) + \frac{\omega_{ca}^2}{\omega^2} (\vec{A}_1 \cdot \hat{e}_z) \hat{e}_z + \frac{c^2}{\omega^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1) \left[ \vec{\beta} + j \frac{\omega_{ca}}{\omega} (\vec{\beta} \times \hat{e}_z) - \frac{\omega_{ca}^2}{\omega^2} (\vec{\beta} \cdot \hat{e}_z) \hat{e}_z \right] \right\} \quad (4.42)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει ένα ομογενές σύστημα τριών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τις συνιστώσες του δυναμικού  $\vec{A}_1$ . Για να υπάρχει μη μηδενική λύση, δηλαδή για να μπορεί να συντηρηθεί μια κυματική διαταραχή, πρέπει η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να μηδενίζεται. Αυτή η συνθήκη είναι η σχέση διασποράς. Είναι φανερό ότι η μορφή της σχέσης διασποράς εξαρτάται από το σχετικό προσανατολισμό των διανυσμάτων  $\vec{B}_0$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\vec{A}_1$ . Στις επόμενες δύο υποπαραγράφους εξετάζουμε τις οικογένειες κυμάτων που διαδίδονται παράλληλα ( $\vec{\beta} // \vec{B}_0$ ) και εγκάρσια ( $\vec{\beta} \perp \vec{B}_0$ ) προς το μαγνητοστατικό πεδίο.

#### 4.4.2 Κύματα διαδιδόμενα κατά μήκος του $\vec{B}_0$

Από την οικογένεια κυμάτων που διαδίδονται κατά μήκος του μαγνητοστατικού πεδίου ( $\vec{\beta} // \vec{B}_0$ , δηλαδή  $\vec{\beta} = \beta \hat{e}_z$ ), ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση όπου επίσης  $\vec{A}_1 // \vec{\beta}$ . Επειδή  $\vec{\beta} \times \vec{A}_1 = 0$ , οι διαταραχές αυτές είναι αποκλειστικά ηλεκτροστατικές, δηλ.  $\vec{B}_1 = 0$ . Η σχέση διασποράς προκύπτει από την (4.42):

$$(c^2\beta^2 - \omega^2) \left( 1 - \sum_a \frac{\omega_{ca}^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (4.43)$$

Ο δεύτερος όρος της (4.43) αναπαράγει τη σχέση διασποράς (4.34) των ηλεκτροστατικών κυμάτων. Αυτό είναι φυσικό αφού όταν  $\vec{\beta} // \vec{B}_0$ , η κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων κατά μήκος του  $\vec{\beta}$  δεν επηρεάζεται από το μαγνητοστατικό πεδίο. Στη σχέση (4.43) ο πρώτος όρος υποδεικνύει την ύπαρξη "λύσης"  $\omega^2 = (c\beta)^2$ . Προτού όμως δεχθούμε αυτή τη σχέση ως λύση, χρειάζεται λίγο προσεκτικότερη διερεύνηση των εξισώσεων από τις οποίες προέκυψε η σχέση διασποράς (4.43). Καταρχήν βλέπουμε από την (4.29γ) ότι όταν  $\omega^2 = (c\beta)^2$  και  $\vec{A}_1 // \vec{\beta}$ , τότε  $\vec{E}_1 = 0$ , δηλαδή οποιαδήποτε διαταραχή υπακούει στη σχέση  $\omega^2 = (c\beta)^2$  δε συνοδεύεται από την ανάπτυξη ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Επίσης από τη σχέση (4.41) προκύπτει ότι αυτή η διαταραχή είναι μη μηδενική μόνο όταν  $\omega^2 = \omega_{ca}^2$  για κάποιο συστατικό του πλάσματος, και μάλιστα όταν το συστατικό αυτό έχει μηδενική πυκνότητα,  $n_{0a} = 0$ , σύμφωνα με τη σχέση (4.40). Είναι φανερό ότι η σχέση  $\omega^2 = (c\beta)^2 = \omega_{ca}^2$  περιγράφει μόνο τις ταλαντώσεις της ταχύτητας ενός συστατικού του πλάσματος λόγω του  $\vec{B}_0$ , όταν το συστατικό αυτό έχει τόσο χα-

$\vec{k} \parallel \vec{\beta}$   
 η γ' οικογένεια

μηλή πυκνότητα, ώστε αυτή η κίνηση να ισοδυναμεί ουσιαστικά με την ανάπτυξη αμελητέου ηλεκτρικού ρεύματος και συνεπώς εξίσου αμελητέων ηλεκτρομαγνητικών πεδίων.

Περισσότερο ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση των κυματικών διαταραχών με εγκάρσια πόλωση του διανυσματικού δυναμικού  $\vec{A}_1$ , και συνεπώς και των πεδίων  $\vec{E}_1$  και  $\vec{B}_1$ . Όταν λοιπόν  $\vec{\beta} \cdot \vec{A}_1 = 0$  (και επίσης  $\vec{\beta} = \beta \hat{e}_z$ ) η εξίσωση (4.42) μετασχηματίζεται στην

$$\left[ c^2 \beta^2 - \omega^2 + \omega^2 \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} \right] \vec{A}_1 = -j\omega^2 \sum_a \frac{\omega_{ca}}{\omega} \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2} (\vec{A}_1 \times \hat{e}_z) \quad (4.44)$$

Σχηματίζοντας το εξωτερικό γινόμενο της (4.44) με το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{e}_z$  και απαλείφοντας τα  $\vec{A}_1$  και  $\vec{A}_1 \times \hat{e}_z$  από το σύστημα που προκύπτει, προσδιορίζουμε τη σχέση διασποράς για κύματα με εγκάρσια πόλωση που διαδίδονται κατά μήκος του μαγνητοστατικού πεδίου:

$$c^2 \beta^2 = \omega^2 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{1 \pm \frac{\omega_{ca}}{\omega}} \quad (4.45)$$

Όταν το πλάσμα αποτελείται από δύο συστατικά, ηλεκτρόνια και θετικά ιόντα, μια εναλλακτική μορφή της σχέσης διασποράς είναι

$$c^2 \beta^2 = \omega^2 \left[ 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega \mp \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \right] \quad (4.46)$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από την (4.45) όταν το πλάσμα είναι μακροσκοπικά ουδέτερο, δηλαδή  $q_i n_{oi} = |q_e| n_{oe}$  (οπότε  $\omega_{pi} |\omega_{ce}| = \omega_{pe} \omega_{ci}$ ).

Ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά των κυμάτων που περιγράφονται από τις δύο εξισώσεις (4.45) μπορούν να προσδιορισθούν αμέσως. Καταρχήν, η εμφάνιση των συχνοτήτων  $\omega_{pa}$  και  $\omega_{ca}$  προέρχεται από την περιστροφική κίνηση κάθε συστατικού του πλάσματος γύρω από το μαγνητοστατικό πεδίο και την αντίστοιχη ανάπτυξη πυκνότητας ρεύματος, ανάλογης προς την πυκνότητα του συστατικού  $n_{oa}$  (και συνεπώς προς το  $\omega_{pa}^2$ ). Επίσης, όταν ικανοποιείται η σχέση (4.45), τότε από τη σχέση (4.44) προκύπτει ότι  $\vec{A}_1 = \pm j \hat{e}_z \times \vec{A}_1$ . Σύμφωνα με το ανάπτυγμα (4.26) το διανυσματικό δυναμικό είναι

$$\vec{A} = |\vec{A}_1| \left[ \hat{e}_x \cos(\beta z - \omega t) \mp \hat{e}_y \sin(\beta z - \omega t) \right] \quad (4.47)$$

Συνεπώς, τα κύματα που περιγράφονται από τη σχέση διασποράς (4.45) έχουν κυκλική πόλωση και είναι δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα, ανάλογα με το πρόσημο + ή - που θα επιλεγεί κάθε φορά στην (4.45).

Η ύπαρξη των όρων  $\omega \pm \omega_{ca}$  στον παρονομαστή της (4.45) υποδηλώνει την εμφάνιση συντονισμού, όταν αυτοί οι όροι μηδενίζονται. Ο συντονισμός οφείλεται στην ισοταχή περιστροφή των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων του κύματος και των φορτισμένων σωματιδίων του αντίστοιχου πληθυσμού, όπως έχει αναφερθεί στην παρ. (3.8). Συνήθως ένα πλάσμα αποτελείται από δύο μόνο συστατικά, ηλεκτρόνια και θετικά ιόντα και συνεπώς εμφανίζονται δύο συχνότητες

συντονισμού, όταν  $\omega = -\omega_{ce} = |\omega_{ce}|$  και όταν  $\omega = \omega_{ci}$ . Ο πρώτος συντονισμός είναι του δεξιόστροφου κύματος με τα ηλεκτρόνια και ο δεύτερος είναι του αριστερόστροφου κύματος με τα θετικά ιόντα. Επειδή  $|\omega_{ce}| \gg \omega_{ci}$ , οι δύο αυτοί συντονισμοί χωρίζουν το φάσμα συχνοτήτων σε τρεις περιοχές: στις υψηλές συχνότητες ( $\omega \gg |\omega_{ce}|$ ), στις ενδιάμεσες ( $|\omega_{ce}| \geq \omega \gg \omega_{ci}$ ) και τις χαμηλές ( $0 < \omega \leq \omega_{ci}$ ). Κάθε μια από τις περιοχές αυτές θα εξετασθεί χωριστά, σε συσχέτιση με τα διαγράμματα ( $\omega$ - $\beta$ ) του Σχ. 4.3.

α) Κύματα υψηλών συχνοτήτων ( $\omega \gg |\omega_{ce}|$ ). Στην περιοχή αυτή βρισκόμαστε πολύ μακριά από το συντονισμό  $\omega = \omega_{ci}$ , και επειδή  $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{pi}^2$ , ο όρος που οφείλεται στα ιόντα μπορεί να παραλειφθεί στη σχέση διασποράς. Η συμπεριφορά των κυμάτων επηρεάζεται μόνο από τον ηλεκτρονικό πληθυσμό, και η σχέση διασποράς (4.46) γράφεται

$$c^2\beta^2 = \omega(\omega - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \pm |\omega_{ce}|}) \quad (4.48)$$

Τα πρόσημα - και + αντιστοιχούν στο δεξιόστροφο και αριστερόστροφο κύμα.

Για να διαδοθεί ένα κύμα πρέπει  $\beta^2 > 0$ . Από τη σχέση (4.48) φαίνεται ότι το δεξιόστροφο κύμα διαδίδεται μόνο όταν  $\omega > \omega_{0\Delta}$ , ενώ για το αριστερόστροφο κύμα απαιτείται  $\omega > \omega_{0A}$ , όπου

$$\left. \begin{array}{l} \omega_{0\Delta} \\ \omega_{0A} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (\pm |\omega_{ce}| + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2}) \quad (4.49)$$

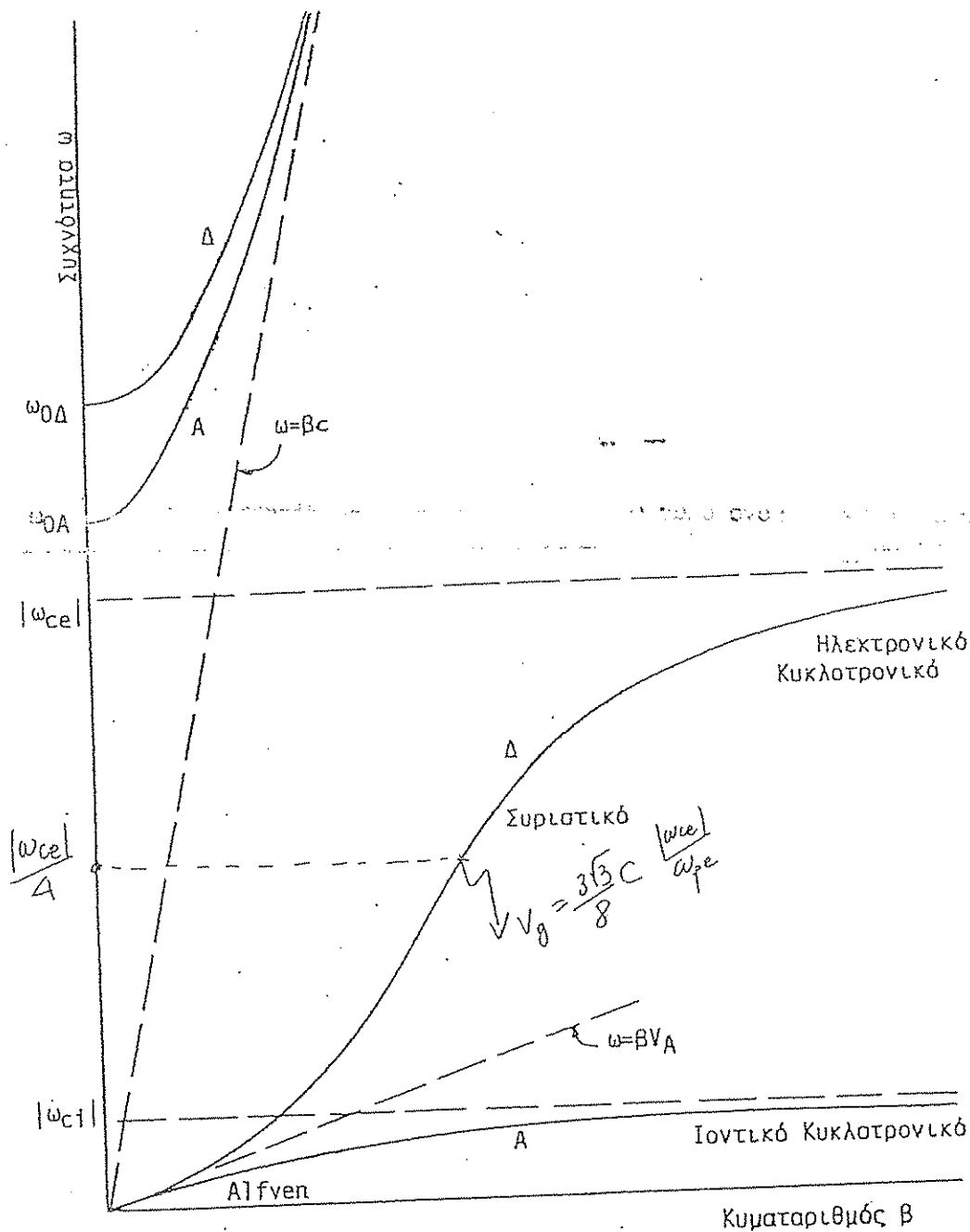
Είναι φανερό πως όταν  $\omega_{pe} \gg |\omega_{ce}|$ , τότε  $(\omega_{0\Delta}, \omega_{0A}) \approx \omega_{pe}$ , και τα κύματα συμπεριφέρονται όπως όταν δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο.

Τελευταία σημειώνουμε την περιστροφή του Faraday. Επειδή τα κύματα αυτής της υποπαράγραφου έχουν έμφυτη την κυκλική πόλωση, αν διεγερθεί μια διαταραχή με ελλειπτική πόλωση, θα διασπασθεί σε δύο κυκλικά κύματα με κατάλληλη ένταση το καθένα, που θα διαδοθούν σύμφωνα με τη σχέση (4.48). Ειδικά όταν ο πομπός διεγείρει με γραμμική πόλωση, τότε το δεξιόστροφο και το αριστερόστροφο κύμα έχουν ίση ένταση. Αθροίζοντας τα δύο συστατικά (από τη σχέση (4.47) προκύπτει

$$\vec{A} = |A_1| \left[ \hat{e}_x \cos\left(\frac{\beta_A - \beta_\Delta}{2} z\right) + \hat{e}_y \sin\left(\frac{\beta_A - \beta_\Delta}{2} z\right) \right] \cos\left(\frac{\beta_A + \beta_\Delta}{2} z - \omega t\right) \quad (4.50)$$

Συνεπώς, ενώ στο σημείο  $z = 0$  (π.χ. τον πομπό) το επίπεδο πόλωσης συμπίπτει με το επίπεδο  $y = 0$ , το κύμα φθάνει στο δέκτη  $z = L$  με το επίπεδο πόλωσης περιστραμμένο κατά τη γωνία  $(\beta_A - \beta_\Delta)L/2$ . Υπολογίζοντας τις τιμές των  $\beta_A$  και  $\beta_\Delta$  από την (4.48), προκύπτει μια σχέση που συνδέει τη γωνία περιστροφής με την πυκνότητα και τη μαγνητική επαγωγή. Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για διαγνώσεις διαφόρων μεγεθών (κυρίως της πυκνότητας).

β) Κύματα ενδιάμεσων συχνοτήτων ( $|\omega_{ce}| \geq \omega \gg \omega_{ci}$ ). Στην περιοχή αυτή μπορεί να διαδοθεί το αριστερόστροφο κύμα, όταν η πυκνότητα του πλάσματος είναι αρκετά μικρή ( $\omega_{pe} < \sqrt{2} |\omega_{ce}|$  ώστε  $\omega_{0A} < |\omega_{ce}|$ ). Το κυριότερο φαινόμενο όμως που συναντάται σ' αυτή την περιοχή είναι



Σχ. 4.3 Διάγραμμα  $(\omega, \beta)$  για δεξιόστροφα και αριστερόστροφα κύματα που διαδίδονται παράλληλα με το μαγνητοστατικό πεδίο. Επιπλέον των παραπάνω, με  $\vec{\beta} \parallel \vec{B}_0$  διαδίδονται και τα ηλεκτροστατικά κύματα,  $\omega = \omega_{pe}$

η επανεμφάνιση του δεξιόστροφου κύματος σε συχνότητες  $\omega < |\omega_{ce}|$ , χωρίς κατώτατο όριο. (Σ' όλες τις συχνότητες  $\omega < |\omega_{ce}|$  έχουμε  $c^2\beta^2 > 0$  στη σχέση (4.46).) Όμως, συνήθως έχουμε  $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ . Για τέτοιες τιμές η σχέση διασποράς (4.46) γράφεται για τα δεξιόστροφα κύματα

$$\left(\frac{c\beta}{\omega_{pe}}\right)^2 = \frac{\omega}{|\omega_{ce}| - \omega} \quad (4.51)$$

$$\omega = \frac{|\omega_{ce}|}{1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{c\beta}\right)^2}$$

Παρατηρούμε ότι κύματα με μεγάλο κυματαριθμό ( $\beta \gg \omega_{pe}/c$ ), δηλαδή με μικρό μήκος κύματος, έχουν  $\omega \leq |\omega_{ce}|$ . Αυτά τα κύματα ονομάζονται ηλεκτρονικά κυκλοτρονικά κύματα, ονομασία που φυσικά οφείλεται στο συντονισμό της συχνότητας με την ηλεκτρονική κυκλοτρονική συχνότητα. Για τα κύματα αυτά η ταχύτητα ομάδας είναι πάρα πολύ μικρή. Αυτή η αργή διάδοση, σε συνδυασμό με την ύπαρξη του συντονισμού, έχει ως αποτέλεσμα αυτά τα κύματα να απορροφώνται πολύ αποδοτικά από τον ηλεκτρονικό πληθυσμό του πλάσματος, όταν υπάρχουν έστω και λίγα φαινόμενα συγκρούσεων. Για το λόγο αυτό, τα ηλεκτρονικά κυκλοτρονικά κύματα χρησιμοποιούνται για θέρμανση του πλάσματος.

Σε κάπως χαμηλότερες συχνότητες παρουσιάζεται μια έντονη μεταβολή της ταχύτητας ομάδας των δεξιόστροφων κυμάτων. Ειδικότερα, η ταχύτητα ομάδας αυξάνει από την τιμή  $v_g = 0$  (όταν  $\omega = |\omega_{ce}|$ ) μέχρι τη μέγιστη τιμή  $v_g = (3\sqrt{3}/8)c|\omega_{ce}|/\omega_{pe}$  (όταν  $\omega = |\omega_{ce}|/4$ ) και ακολούθως μειώνεται, προσεγγίζοντας ασυμπτωτικά την τιμή  $v_g = 2v_p = 2c(\omega|\omega_{ce}|)^{1/2}/\omega_{pe}$  (όταν  $\omega \ll |\omega_{ce}|$ ). Έτσι, αν διεγερθεί ακαριαία ένα πλατύ φάσμα συχνοτήτων, σε απόσταση  $L$  οι επιμέρους συχνότητες φθάνουν διαδοχικά, μετά από χρονικό διάστημα  $L/v_g$ , ανάλογο προς την αντίστροφη τετραγωνική ρίζα της συχνότητας (όταν  $\omega \ll |\omega_{ce}|$ ). Στη φύση, τέτοια ακαριαία διέγερση πολλών συχνοτήτων προκαλείται από κεραυνούς, και τα αντίστοιχα κύματα διαδίδονται μέσα από το πλάσμα της μαγνητόσφαιρας (της περιοχής πάνω από την ιονόσφαιρα), κατά μήκος των γεωμαγνητικών γραμμών. Συνήθως διεγείρονται οι συχνότητες  $\omega < |\omega_{ce}|/4$ , κάτω από το μέγιστο της ταχύτητας ομάδας, και η τιμή του γεωμαγνητικού πεδίου είναι τέτοια ώστε οι συχνότητες να καλύπτουν το φάσμα ακουστικών συχνοτήτων. Έτσι, συνδέοντας το δέκτη με ένα μεγάφωνο, ακούγεται ένα σφύριγμα με συνεχές χαμήλωμα του τόνου. Με τον τρόπο αυτό πρωτοπαρατηρήθηκε αυτή η μερφή διάδοσης, και ονομάστηκε συριστικός ρυθμός.

γ) Κύματα χαμηλών συχνοτήτων ( $0 < \omega \leq \omega_{ci}$ ): Καθώς η συχνότητα του κύματος μικραίνει και πλησιάζει την λοντική συχνότητα κυκλοτρονίου, έχουμε  $\omega \ll |\omega_{ce}|$ . Επίσης, επειδή συνήθως  $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ , κατά μέγιστο λόγο  $\omega_{pe}^2 \gg |\omega_{ce}|\omega_{ci}$ . Με βάση αυτές τις παραδοχές, η σχέση διασποράς (4.46) γράφεται:

$$\left(\frac{c\beta}{\omega_{pe}}\right)^2 = \frac{\omega^2}{|\omega_{ce}|(\omega_{ci} \pm \omega)} \quad (4.52)$$



Όσον αφορά το δεξιόστροφο κύμα, η σχέση αυτή αποτελεί μια μικρή τροποποίηση της (4.51a). Το σημαντικό φαινόμενο αυτής της περιοχής είναι η επανεμφάνιση όταν  $\omega < \omega_{ci}$  του αριστερόστροφου κύματος, που είχε πάψει να διαδίδεται σε συχνότητες  $\omega < \omega_{0A}$ . Τα κύματα με  $\beta \gg \omega_{pi}/c$  (θυμίζουμε ότι  $\omega_{pe}^2 \omega_{ci} = \omega_{pi}^2 |\omega_{ce}|$ ) έχουν  $\omega \leq \omega_{ci}$  και ονομάζονται ιοντικά κυκλοτρονικά κύματα. Η συμπεριφορά αυτών των κυμάτων είναι παρεμφερής με εκείνη των ηλεκτρονικών κυκλοτρονικών κυμάτων και αντίστοιχα χρησιμοποιούνται για τη θέρμανση του ιοντικού πληθυσμού του πλάσματος.

Σε εξαιρετικά χαμηλές συχνότητες ( $\omega \ll \omega_{ci}$ ), τόσο τα δεξιόστροφα όσο και τα αριστερόστροφα κύματα υπακούουν στην ίδια σχέση διασποράς,

$$\frac{\omega}{\beta} = \frac{V_A}{\left[1 + \left(\frac{V_A}{c}\right)^2\right]^{1/2}} \approx V_A \quad (4.52)$$

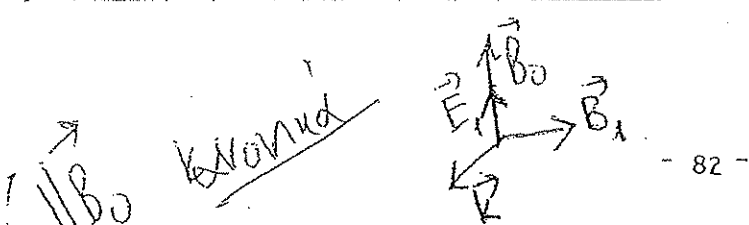
όπου  $V_A = B_0 / (\mu_0 \rho_m)^{1/2}$  είναι η ταχύτητα Alfven (σχεδόν πάντοτε  $V_A \ll c$ ), και  $\rho_m = \rho_i + \rho_e$  είναι η πυκνότητα μάζας του πλάσματος. (Η σχέση (4.52) εξάγεται από την (4.46) όταν  $\omega \ll \omega_{ci}$ , χρησιμοποιώντας και τη συνθήκη μακροσκοπικής ουδετερότητας,  $|q_e| n_{oe} = q_i n_{oi}$ ). Τα κύματα αυτά ονομάζονται κύματα Alfven. Διαδίδονται χωρίς διασπορά ( $v_g = V_A$ , ανεξάρτητα από τη συχνότητα), με την ίδια ταχύτητα ( $v_g = v_p$ ) τόσο τα δεξιόστροφα, όσο και τα αριστερόστροφα. Συνεπώς, σε διαταραχή με γραμμική πόλωση, το επίπεδο πόλωσης διατηρείται σταθερό.

Ανακεφαλαιώνοντας, κατά μήκος ενός μαγνητοστατικού πεδίου, εκτός από τα ηλεκτροστατικά κύματα ( $\omega = \omega_{pe}$ ), διαδίδονται και εγκάρσια κύματα με δεξιόστροφα και αριστερόστροφη κυκλική πόλωση. Τα δεξιόστροφα κύματα σε υψηλές συχνότητες έχουν το χαρακτήρα κυμάτων φωτός ( $\omega = \beta c$ ), παύουν να διαδίδονται όταν  $\omega = \omega_{0A}$ , επανεμφανίζονται ως ηλεκτρονικά κυκλοτρονικά κύματα ( $\omega \leq |\omega_{ce}|$ ), σε χαμηλότερες συχνότητες μετατρέπονται σε συριστικά κύματα (εξίσωση (4.51)) και τέλος σε πολύ χαμηλές συχνότητες σε κύματα Alfven ( $\omega = \beta V_A$ ). Αντίστοιχα, τα αριστερόστροφα κύματα σε υψηλές συχνότητες έχουν το χαρακτήρα κυμάτων φωτός ( $\omega = \beta c$ ), παύουν να διαδίδονται όταν  $\omega = \omega_{0A}$ , επανεμφανίζονται ως ιοντικά κυκλοτρονικά κύματα ( $\omega \leq \omega_{ci}$ ) και τέλος σε πολύ χαμηλές συχνότητες μετατρέπονται σε κύματα Alfven ( $\omega = \beta V_A$ ).

#### 4.4.3 Κύματα διαδιδόμενα εγκάρσια προς το $\vec{B}_0$

Για να μελετήσουμε τις κυματικές διαταραχές που διαδίδονται εγκάρσια προς το μαγνητοστατικό πεδίο, προσανατολίζουμε το σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε  $\vec{B} = \beta \hat{e}_x$ . Δεδομένου ότι ήδη έχουμε δεχθεί ότι  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ , από τη σχέση (4.42) προκύπτει

$$(c^2 \beta^2 - \omega^2) \vec{A}_1 = \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{1 - \frac{\omega_{ca}^2}{\omega^2}} \left\{ -\vec{A}_1 - j \frac{\omega_{ca}}{\omega} (\vec{A}_1 \times \hat{e}_z) + \frac{\omega_{ca}^2}{\omega^2} (\vec{A}_1 \cdot \hat{e}_z) \hat{e}_z + \frac{c^2 \beta^2}{\omega^2} A_{1x} (\hat{e}_x - j \frac{\omega_{ca}}{\omega} \hat{e}_y) \right\} \quad (4.53)$$



Από τη σχέση (4.53) προκύπτει ότι ένας ρυθμός διάδοσης χαρακτηρίζεται από  $\vec{A}_1 = A_1 \hat{e}_z$ , δηλαδή με  $\Phi_1 = 0$ ,  $\vec{E}_1 = E_1 \hat{e}_z$  και  $\vec{B}_1 = B_1 \hat{e}_y$ . Για τα κύματα αυτά, η σχέση διασποράς είναι απλούστατα  $\omega^2 = (\beta c)^2 + \sum_a \omega_{pa}^2$ , η ίδια όπως η (4.39) για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όταν δεν υπάρχει το πεδίο  $\vec{B}_0$ . Αυτή η ταύτιση οφείλεται στο ότι με την πόλωση  $\vec{E}_1 // \vec{B}_0$  το μαγνητοστατικό πεδίο δεν μπορεί να επηρεάσει τη διαταραχή της ταχύτητας  $\vec{V}_1 = V_1 \hat{e}_z$ , που προκαλείται από το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}_1$ . Επειδή η συμπεριφορά αυτών των κυμάτων δεν επηρεάζεται από το  $\vec{B}_0$ , ονομάζονται κανονικά κύματα.

Όταν  $\vec{A}_1 \perp \vec{B}_0$  (δηλαδή  $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$ ), η κατάσταση είναι περισσότερο πολύπλοκη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε  $\vec{A}_1 = A_{1x} \hat{e}_x + A_{1y} \hat{e}_y$  και σύμφωνα με τις (4.29βγδ),  $\Phi_1 \neq 0$  και  $\vec{B}_1 = B_1 \hat{e}_z$ , ενώ το ηλεκτρικό πεδίο έχει εν γένει ελλειπτική πόλωση. Γράφοντας την (4.53) σαν σύστημα εξισώσεων ως προς  $A_{1x}, A_{1y}$  και θέτοντας την ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων ίση με μηδέν προκύπτει η σχέση διασποράς

$$c^2 \beta^2 = \frac{\left[ \omega - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega + \omega_{ca}} \right] \left[ \omega - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega - \omega_{ca}} \right]}{1 - \sum_a \frac{\omega_{pa}^2}{\omega^2 - \omega_{ca}^2}} \quad (4.54)$$

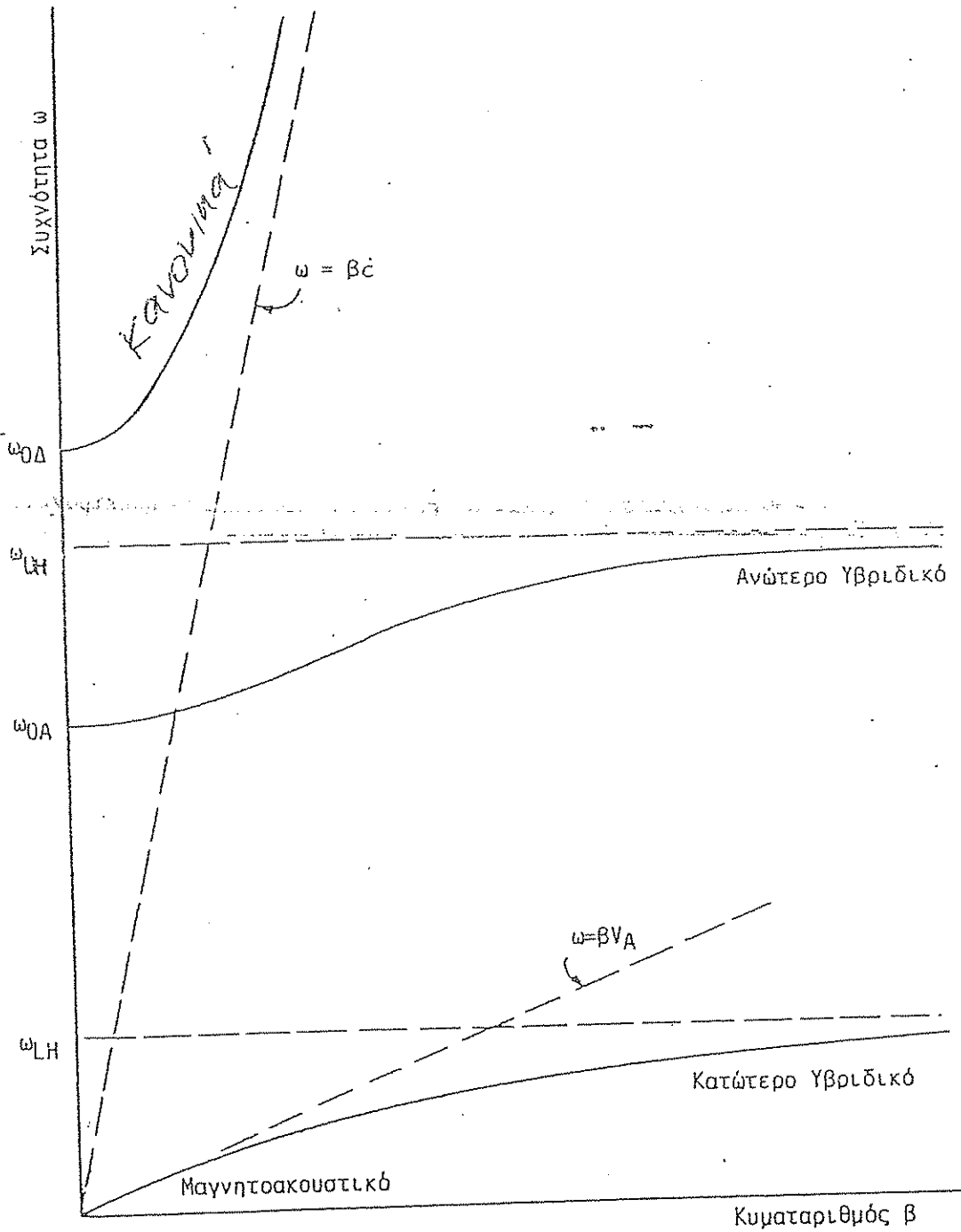
Σε αντιδιαστολή με τα κανονικά κύματα ( $\vec{E}_1 // \vec{B}_0$ ), τα κύματα που υπακούουν στη σχέση (4.54) και έχουν  $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$  ονομάζονται "υπερκανονικά" κύματα. Οι όροι στον αριθμητή της (4.54) θυμίζουν τις σχέσεις διασποράς για τα δεξιόστροφα και αριστερόστροφα κύματα της εξίσωσης (4.45), που φυσικά ισχύουν όταν  $\vec{B} // \vec{B}_0$ . Συνεπώς στην (4.54) έχουμε  $\beta^2 = 0$  όταν  $\omega = \omega_{0A}$  και όταν  $\omega = \omega_{0A}$ . Συντονισμοί όμως δεν υπάρχουν στις τιμές  $\omega = \pm \omega_{ca}$ , επειδή οι όροι  $1/(\omega \pm \omega_{ca})$  απαλείφονται μεταξύ του αριθμητή και παρονομαστή. Αντίθετα, συντονισμοί εμφανίζονται στις τιμές της συχνότητας που μηδενίζουν τον παρονομαστή της (4.54). Σε πλάσμα με δύο συστατικά, αυτό συμβαίνει στις υβριδικές συχνότητες  $\omega_{UH}$  και  $\omega_{LH}$ ,

$$\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2} \quad (4.55)$$

$$\omega_{LH} = \omega_{ce} \sqrt{\frac{\omega_{ci}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}} = \sqrt{\omega_{ci} \omega_{ce}}$$

Στη σχέση για την  $\omega_{UH}$  παραλείφθηκαν όροι με τα μεγέθη  $\omega_{ci}$ ,  $\omega_{pi} \ll \omega_{UH}$ , ενώ η τελευταία έκφραση για την  $\omega_{LH}$  ισχύει όταν  $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{ce}^2$ . Οι συχνότητες  $\omega_{UH}$  και  $\omega_{LH}$  ονομάζονται υβριδικές, επειδή εμπλέκουν τις ανόμοιες μεταξύ τους συχνότητες πλάσματος και κυκλοτρονίου.

Με βάση την παραπάνω διερεύνηση, μπορούμε να περιγράψουμε σε συντομία τα χαρακτηριστικά των κυμάτων που διαδίδονται σύμφωνα με την (4.54), δηλαδή εγκάρσια προς το  $\vec{B}_0$  με ελλειπτική πόλωση. Σε πολύ υψηλές συχνότητες  $\omega = \beta c$  και τα κύματα ουσιαστικά αγνοούν την ύπαρξη του πλάσματος. Κάτω από τη συχνότητα  $\omega_{0A}$  παύουν να διαδίδονται, αλλά επανεμφανίζονται στις περιοχές  $\omega_{0A} < \omega < \omega_{UH}$  και  $0 < \omega < \omega_{LH}$ . Ειδικότερα τα ανώτερα και



Σχ. 4.4 Διάγραμμα  $(\omega, \beta)$  για τον υπερκανονικό ρυθμό (διάδοση με  $\vec{\beta} \perp \vec{B}_0$ ).  
 Επιπλέον όταν  $\beta \perp B_0$  εμφανίζεται και ο κανονικός ρυθμός,  

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + (\beta c)^2$$

κατώτερα υβριδικά κύματα (εκείνα με  $\omega \leq \omega_{UH}$  και  $\omega \leq \omega_{LH}$ ) έχουν συμπεριφορά παρόμοια με των ηλεκτρονικών και ιοντικών κυκλοτρονικών κυμάτων, συνεπώς και αυτές οι συχνότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για θέρμανση του πλάσματος. Τέλος, όταν  $\omega \ll \omega_{ci}$  τα υπερκανονικά κύματα διαδίδονται με  $\omega/\beta = v_A$ , όπως τα κύματα Alfven (αλλά με  $\vec{\beta} \perp \vec{B}_0$ ). Αυτά τα τελευταία κύματα ονομάζονται μαγνητοακουστικά. (Η ονομασία αυτή θα δικαιολογηθεί στην παράγραφο 4.6.3). Για την οικογένεια των υπερκανονικών κυμάτων, τα διαγράμματα ( $\omega$ - $\beta$ ) εμφανίζονται στο Σχ. 4.5.

#### 4.5 Αγωγιμότητα και επιτρεπτότητα του πλάσματος

Στις προηγούμενες παραγράφους, το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιγράφηκε από τα πεδία  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  και οι εξισώσεις του Maxwell (ή οι ισοδύναμες τους εξισώσεις για τα δυναμικά  $\vec{A}$  και  $\Phi$ ) χρησιμοποιήθηκαν με τη μορφή που περιγράφουν τη συμπεριφορά του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε ελεύθερο χώρο, στον οποίο βρίσκονται προκαθορισμένες "πηγές πεδίων", δηλαδή πυκνότητες ηλεκτρικού φορτίου και ρεύματος  $\rho$  και  $\vec{J}$ . Βέβαια, αυτές οι πυκνότητες  $\rho$  και  $\vec{J}$  δεν είναι προκαθορισμένες, αλλά οφείλονται στην επίδραση των πεδίων επί του πλάσματος, όπως περιγράφεται από τις εξισώσεις συνέχειας και ορμής. Έτσι, για λόγους συνέπειας, η ανάλυση των προηγούμενων παραγράφων βασίστηκε στην ταυτόχρονη επίλυση ενός συστήματος εξισώσεων που αποτελείται από τις εξισώσεις του Maxwell και από τις εξισώσεις ρευστού. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι δίνει ίση βαρύτητα και στα ηλεκτρομαγνητικά και στα ρευστοδυναμικά φαινόμενα (π.χ. στην παράγραφο 4.4 ξεκινήσαμε με τις εξισώσεις (4.40) και (4.41)) και συνεπώς η επίλυση ενός προβλήματος ως προς π.χ. τα πεδία δίνει ουσιαστικά ταυτόχρονα και τα ρευστοδυναμικά μεγέθη και αντίστροφα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να διευκολύνεται η κατανόηση του μηχανισμού που είναι υπεύθυνος για την εμφάνιση ενός συγκεκριμένου φαινομένου, έτσι ώστε αν το φαινόμενο αυτό είναι π.χ. ανεπιθύμητο, να μπορούν να προσδιορισθούν σχετικά εύκολα επεμβάσεις που θα δυσκόλευαν την εμφάνιση αυτού του φαινομένου.

Σε ένα υλικό μέσο, όπως και στο πλάσμα, οι πηγές  $\rho$  και  $\vec{J}$  μπορούν να χωριστούν σε δύο τμήματα:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_{in} + \rho_{ex} \\ \vec{J} &= \vec{J}_{in} + \vec{J}_{ex} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Οι "εξωτερικές" πυκνότητες  $\rho_{ex}$  και  $\vec{J}_{ex}$  πηγάζουν από επεμβάσεις που προέρχονται απ' έξω από το υλικό μέσο και μολονότι επηρεάζουν, δεν επηρεάζονται από τα πεδία που αναπτύσσονται στο υλικό μέσο. Αντίθετα, οι "εσωτερικές" πυκνότητες  $\rho_{in}$  και  $\vec{J}_{in}$  αποτελούν την απόκριση του υλικού μέσου στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Ενσωματώνοντας αυτή την απόκριση μέσα στα πεδία, παράγονται τα πεδία  $\vec{D}$  και  $\vec{H}$  (μετατόπιση και μαγνητικό πεδίο) και οι μη ομογενείς εξισώσεις του Maxwell παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_{ex} \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{J}_{ex} \end{aligned} \quad (4.57)$$

ενώ οι ομογενείς εξισώσεις του Maxwell εξακολουθούν να συνδέουν τα μεγέθη  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  (ηλεκτρικό πεδίο και μαγνητική επαγωγή)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.58)$$

$$\nabla \times \vec{E} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Τα μεγέθη  $(\vec{D}, \vec{H})$  συνδέονται με τα μεγέθη  $(\vec{E}, \vec{B})$  με τις συντακτικές σχέσεις (στις οποίες περιλαμβάνεται και ο νόμος του Ohm):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E} \\ \vec{H} &= \mu^{-1} \cdot \vec{B} \\ \vec{j}_{in} &= \sigma \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Στη γενική περίπτωση μη ιστροπικού μέσου, η επιτρεψτικότητα  $\epsilon$ , η μαγνητική διαπερατότητα  $\mu$  και η ειδική αγωγιμότητα  $\sigma$  είναι τανυστές δεύτερης τάξης. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό συμβαίνει σε πλάσμα που διαπεράται από μαγνητοστατική πεδίο, τουλάχιστον όσον αφορά τα  $\sigma$  και  $\epsilon$ . Αντίθετα, σε ιστροπικό μέσο, τα μεγέθη αυτά εκφυλίζονται σε μονόμετρα μεγέθη. Ειδικότερα, στο κενό έχουμε  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$  και  $\sigma = 0$ .

Για να προσδιορίσουμε τα μακροσκοπικά χαρακτηριστικά του πλάσματος, πρέπει να εκφράσουμε την απόκριση του πλάσματος ως συνάρτηση των πεδίων. Αυτή η απόκριση δίνεται από τις σχέσεις (4.22). Ειδικότερα, θεωρούμε την περίπτωση ενός πλάσματος, στο οποίο κάθε συστατικό έχει μηδενική θερμοκρασία (συνεπώς και πίεση) και ταχύτητα ροής, δηλ.  $v_{0a} = 0$  και  $V_{0a} = 0$ . Εξετάζοντας μικρές διαταραχές  $\vec{V}_{1a}$  και  $\vec{E}_1$ , η εξίσωση (4.22β) δίνει για κάθε συστατικό:

$$m_a \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_{1a} = q_a (\vec{E}_1 + \vec{V}_{1a} \times \vec{B}_0) - v_a m_a \vec{V}_{1a} \quad (4.60)$$

Στην εξίσωση αυτή δεν εμφανίζονται οι διαταραχές  $n_{1a}$  και  $B_1$ , επειδή στην (4.22β) πολλαπλασιάζονται με το  $\vec{V}_{1a}$  και προκύπτουν γινόμενα ανώτερης τάξης. Ο τελευταίος όρος στην (4.60) περιλήφθηκε εδώ για να περιγράψει τη μεταβολή της ορμής λόγω συγκρούσεων. Ο όρος αυτός προκύπτει με την παραδοχή ότι μετά από κάθε σύγκρουση η ταχύτητα του σωματιδίου έχει τυχαία τιμή, με μέση τιμή ίση με το μηδέν. Συνεπώς  $\delta(n_{0a} m_a \vec{V}_{1a}) = -n_{0a} m_a \vec{V}_{1a}$  σε χρονικό διάστημα  $\delta t = v_a^{-1}$ , όπου  $v_a$  είναι η συχνότητα συγκρούσεων. Έτσι προκύπτει η (4.60), που ονομάζεται εξίσωση του Landau. Η εξίσωση αυτή περιγράφει ικανοποιητικά τη συμπεριφορά κάθε συστατικού του πλάσματος, όταν η συχνότητα συγκρούσεων είναι μικρή σε σχέση με τις συχνότητες που χαρακτηρίζουν το συγκεκριμένο φαινόμενο (συνήθως τις  $\omega$  και  $\omega_{ca}$ ).

Όπως και στην παράγραφο 4.2.2, θεωρούμε ότι όλα τα μεγέθη έχουν ημιτονοειδή χρονική εξάρτηση, που περιγράφεται από όρους με τη μορφή  $\exp(-j\omega t)$ , συνεπώς ο τελεστής  $\partial/\partial t$  αντικαθίσταται από το  $-j\omega$ . Εισάγοντας την (κυκλική) συχνότητα κυκλοτρονίου  $\omega_{ca} = q_a B_0 / m_a$  και θεωρώντας ότι  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ , η εξίσωση (4.60) μετασχηματίζεται στην

$$(\nu_a - j\omega)\vec{V}_{1a} - \omega_{ca}\vec{V}_{1a}\hat{x}\hat{e}_z = \frac{q_a}{m_a}\vec{E}_1 \quad (4.61)$$

Σχηματίζοντας το εσωτερικό και το εξωτερικό γινόμενο αυτής της σχέσης με το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{e}_z$  και απαλείφοντας από τις σχέσεις που προκύπτουν τα μεγέθη  $\vec{V}_{1a}\hat{e}_z$  και  $\vec{V}_{1a}\hat{x}\hat{e}_z$ , προκύπτει η λύση  $\vec{V}_{1a}(\vec{E}_1)$ , που γράφεται ως εξής:

$$\vec{V}_{1a} = \vec{\mu}_a \cdot \vec{E}_1 = \begin{bmatrix} \mu_{\perp a} & \mu_{H a} & 0 \\ -\mu_{H a} & \mu_{\perp a} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{\parallel a} \end{bmatrix} \cdot \vec{E}_1 \quad (4.62)$$

Ο τανυστής  $\vec{\mu}_a$  περιγράφει την κινητικότητα του πληθυσμού  $a$  του πλάσματος. Τα στοιχεία του τανυστή κινητικότητας είναι

$$\begin{aligned} \mu_{\perp a} &= \frac{q_a}{m_a} \frac{\nu_a - j\omega}{(\nu_a - j\omega)^2 + \omega_{ca}^2} = \frac{\omega + j\nu_a}{\left(\nu_a + \frac{\omega}{j}\right)^2 + \omega_{ca}^2} \\ \mu_{H a} &= \frac{q_a}{m_a} \frac{\omega_{ca}}{(\nu_a - j\omega)^2 + \omega_{ca}^2} = \frac{\omega + j\nu_a}{\omega_{ca}^2 - (\omega + j\nu_a)^2} \\ \mu_{\parallel a} &= \frac{q_a}{m_a} \frac{1}{\nu_a - j\omega} = j \frac{q_a}{m_a} \frac{1}{\omega + j\nu_a} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Από τις σχέσεις αυτές φαίνεται ότι η ανισοτροπία του πλάσματος οφείλεται στο μαγνητοστατικό πεδίο  $B_0$ . Έτσι, όταν  $B_0 = 0$ , δηλ. όταν  $\omega_{ca} = 0$ , τότε  $\mu_{H a} = 0$  και  $\mu_{\perp a} = \mu_{\parallel a}$ , οπότε ο τανυστής  $\vec{\mu}_a$  μπορεί να αντικατασταθεί από το μονόμετρο μέγεθος  $\mu_{\parallel a}$ . Η ακραία περίπτωση ανισοτροπίας εμφανίζεται όταν  $\nu_a - j\omega = 0$ . Τότε  $\mu_{\perp a} = 0$ , ενώ  $\mu_{H a} = B_0^{-1}$  και η ταχύτητα  $\vec{V}_{1a}$  ταυτίζεται με την ολίσθηση  $\vec{E}_1 \times \vec{B}_0$  της παραγράφου 3.4. Επειδή αυτή η ολίσθηση είναι κοινή για όλα τα σωματίδια, η ταχύτητά της περιλαμβάνεται αυτούσια στην ταχύτητα ροής  $\vec{V}_{1a}$ . Αντίθετα, η ταχύτητα που σχετίζεται με την περιστροφή των σωματιδίων γύρω από τις μαγνητικές γραμμές έχει μηδενική μέση τιμή, επειδή η φάση κάθε σωματιδίου είναι τυχαία. Τέλος, πάλι στην περίπτωση  $\nu_a - j\omega = 0$ , το στοιχείο  $\mu_{\parallel a}$  τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι για να συντηρηθεί μόνιμη κατάσταση πρέπει  $E_{1z} = 0$ .

Ο νόμος του Ohm προκύπτει αμέσως από τη σχέση (4.62). Δεδομένου ότι  $\vec{V}_{0a} = 0$ , έχουμε

$$\vec{J}_1 = \sum_a q_a n_{0a} \vec{V}_{1a} = \vec{\sigma} \cdot \vec{E}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & \sigma_H & 0 \\ -\sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix} \cdot \vec{E}_1 \quad (4.64)$$

όπου  $\vec{\sigma} = \sum_a q_a n_{0a} \vec{\mu}_a$  είναι ο τανυστής ειδικής αγωγιμότητας του πλάσματος στο σύνολό του. Τα στοιχεία αυτού του τανυστή προκύπτουν αμέσως από τα στοιχεία του  $\vec{\mu}_a$ . Από τη σχέση

(4.63) έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{\perp} &= \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{\nu_{\alpha} - j\omega}{(\nu_{\alpha} - j\omega)^2 + \omega_{c\alpha}^2} \\ \sigma_H &= \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{\omega_{c\alpha}}{(\nu_{\alpha} - j\omega)^2 + \omega_{c\alpha}^2} \\ \sigma_{\parallel} &= \epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \frac{1}{\nu_{\alpha} - j\omega} \end{aligned} \quad (4.65)$$

όπου  $\omega_{p\alpha}^2 = q_{\alpha}^2 n_{\alpha} / \epsilon_0 m_{\alpha}$  είναι το τετράγωνο της (κυκλικής) συχνότητας πλάσματος. Επεκτείνοντας και στην αγωγιμότητα όσα αναφέρθηκαν σχετικά με την κινητικότητα, σημειώνουμε μόνο ότι όταν  $B_0 = 0$  το πλάσμα είναι ιστροπικό και η ειδική αγωγιμότητα περιγράφεται από το μονόμετρο μέγεθος  $\sigma = \sigma_{\parallel}$ . Επίσης, όταν  $B_0 \neq 0$  το στοιχείο  $\sigma_H$  περιγράφει την ανάπτυξη ρεύματος εγκάρσιου προς το ηλεκτρικό πεδίο (φαινόμενο Hall).

Το επόμενο βήμα είναι ο προσδιορισμός των διηλεκτρικών χαρακτηριστικών του πλάσματος, δηλαδή η συσχέτιση της διαταραχής  $\rho_1$  (που στην περίπτωση που εξετάζουμε αντιπροσωπεύει το  $\rho_{ex}$ ) με το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}_1$ , έτσι ώστε να προκύψει η μετατόπιση  $\vec{D}_1$  που να ικανοποιεί το νόμο του Gauss,  $\nabla \cdot \vec{D}_1 = \rho_{ex}$ . Συνδυάζοντας το νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο,  $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}_1 = \rho_1 + \rho_{ex}$ , με την εξίσωση της συνέχειας,  $\nabla \cdot \vec{J}_1 = -\partial \rho_1 / \partial t = j\omega \rho_1$  και το νόμο του Ohm,  $\vec{J}_1 = \sigma \cdot \vec{E}_1$ , προκύπτει

$$\rho_{ex} = \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_1 - \frac{1}{j\omega} \sigma \cdot \vec{E}_1) = \nabla \cdot (\vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_1) = \nabla \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{\perp} & j\epsilon_H & 0 \\ -j\epsilon_H & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{bmatrix} \cdot \vec{E}_1 = \nabla \cdot \vec{D}_1 \quad (4.66)$$

με  $\vec{D}_1 = \vec{\epsilon} \cdot \vec{E}_1$ . Η διηλεκτρική σταθερά είναι ο τανυστής  $\vec{\epsilon}$ , με τα στοιχεία

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_0 \left[ 1 + \sum_{\alpha} (1+j \frac{\nu_{\alpha}}{\omega}) \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2 - (\omega + j\nu_{\alpha})^2} \right]$$

$$\epsilon_H = \epsilon_0 \sum_{\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}}{\omega} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2 - (\omega + j\nu_{\alpha})^2}$$

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon_0 \left[ 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega(\omega + j\nu_{\alpha})} \right]$$

(4.67)

Πάλι φαίνεται ότι όταν  $B_0 = 0$ , τότε  $\epsilon_H = 0$  και  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel}$ , δηλαδή ο τανυστής  $\vec{\epsilon}$  εκφυλίζεται στη μονόμετρη διηλεκτρική σταθερά  $\epsilon = \epsilon_{\parallel}$  και το πλάσμα είναι ισότροπο.

Για να ολοκληρώσουμε τη μακροσκοπική περιγραφή του πλάσματος απομένει ο προσδιορισμός των διαμαγνητικών ιδιοτήτων, δηλαδή η συσχέτιση του μαγνητικού πεδίου  $\vec{H}_1$  με τη μαγνητική επαγωγή  $\vec{B}_1$ . Για να γίνει αυτό χρησιμοποιούμε το μακροσκοπικό νόμο των Ampère

Maxwell,  $\nabla \times \vec{H}_1 = \partial \vec{D}_1 / \partial t + \vec{J}_{ex}$ , σε συνδυασμό με τις σχέσεις  $\vec{D}_1 = \epsilon \cdot \vec{E}_1$  και  $\vec{J}_1 = \sigma \cdot \vec{E}_1$ . Δε-  
ομένου ότι  $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ , το αποτέλεσμα είναι

$$\mu_0 \nabla \times \vec{H}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \mu_0 (\vec{J}_1 + \vec{J}_{ex}) \quad (4.68)$$

Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με την  $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + c^2 \partial \vec{E} / \partial t$ , φαίνεται ότι  $\vec{H}_1 = \mu_0^{-1} \vec{B}_1$ . Η δια-  
μαγνητική συμπεριφορά του πλάσματος δε διαφέρει από εκείνη του κενού χώρου. Μολονότι  
τα μαγνητικά δίπολα του πλάσματος (τα περιστρεφόμενα φορτία), προσανατολίζονται κατά  
τον άξονα του μαγνητικού πεδίου, το μαγνητικό πεδίο κάθε διπόλου εξουδετερώνεται από  
το πεδίο των γειτονικών διπόλων. Προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτή η εξουδετέρωση είν-  
αι το πλάσμα να είναι ομογενές. Αυτή η υπόθεση έχει ήδη γίνει στην παράγραφο 4.2.2.  
Αν αντίθετα το πλάσμα δεν είναι ομογενές, η εξουδετέρωση αυτή δεν είναι πλήρης, με α-  
ποτέλεσμα την εμφάνιση διαμαγνητισμού.

Με την εισαγωγή των μακροσκοπικών πεδίων  $\vec{D}$  και  $\vec{H}$ , όταν δεν υπάρχουν εξωτερικές  
πηγές ( $\rho_{ex} = 0$  και  $\vec{J}_{ex} = 0$ ) οι εξισώσεις του Maxwell (4.57) και (4.58) αποτελούν ένα  
ομογενές σύστημα. Για χρονική εξάρτηση  $\exp(-j\omega t)$ , οι εξισώσεις  $\nabla \cdot \vec{D} = 0$  και  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$   
προκύπτουν από την απόκλιση των άλλων δύο εξισώσεων. Αποβλέποντας στην αναίτιαση  
των αποτελεσμάτων των παραγράφων (4.3) και (4.4), εξετάζουμε κυματικές διαταραχές, με  
εξάρτηση της μορφής  $\exp(j\vec{\beta} \cdot \vec{r} - j\omega t)$ , όπως έχουμε ήδη κάνει στην παράγραφο (4.2.2). Τότε  
ο νόμος του Faraday (4.58B) δίνει  $\omega \vec{B}_1 = \vec{\beta} \times \vec{E}_1$  και από το νόμο των Ampere-Maxwell (4.57B)  
προκύπτει:

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{E}_1) + \omega^2 \epsilon \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad (4.69)$$

Για να ικανοποιείται αυτή η εξίσωση με  $\vec{E}_1 \neq 0$ , πρέπει οι συντελεστές να ικανοποιούν  
τη σχέση διασποράς,  $D(\omega, \vec{\beta}) = 0$ . Γράφοντας την (4.69) αναλυτικά για τις συνιστώσες του  
ηλεκτρικού πεδίου έχουμε

$$\begin{bmatrix} \omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp} - \beta_z^2 & j\omega^2 \mu_0 \epsilon_H & \beta_x \beta_z \\ -j\omega^2 \mu_0 \epsilon_H & \omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp} - \beta_x^2 - \beta_z^2 & 0 \\ \beta_x \beta_z & 0 & \omega^2 \mu_0 \epsilon_{\parallel} - \beta_x^2 \end{bmatrix} \cdot \vec{E}_1 = 0 \quad (4.70)$$

Στην (4.70) έχει υποθεθεί ότι  $\beta_y = 0$ . Αυτή η υπόθεση δεν είναι καθόλου περιοριστική,  
δεδομένου ότι επιτρέπει να μελετηθεί η διάδοση κυματικών διαταραχών με οποιονδήποτε προ-  
σανατολισμό του κυματοδιανύσματος  $\vec{\beta}$ , από παράλληλο (όταν  $\beta_x = 0$ ) μέχρι κάθετο (όταν  $\beta_z = 0$ )  
προς το μαγνητοστατικό πεδίο  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ . Από την (4.70) προκύπτει η σχέση διασποράς από τη  
συνθήκη ότι η ορίζουσα των συντελεστών του  $\vec{E}_1$ , πρέπει να είναι ίση με το μηδέν.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μια σύντομη ανασκόπηση των διαφόρων ρευθμών διά-  
δοσης για κυματικές διαταραχές, όπως αυτοί προκύπτουν από την (4.70):



(α)  $\beta_0 = 0$ : Στην περίπτωση αυτή  $\epsilon_H = 0$  και  $\epsilon_{\perp} = \epsilon_{\parallel}$ . Η κατεύθυνση διάδοσης δεν έχει σημασία, οπότε μπορούμε να πάρουμε  $\beta_x = 0$ . Η σχέση διασποράς προκύπτει με τη μορφή

$$(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp} - \beta_z^2)^2 (\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\parallel}) = 0 \quad (4.71)$$

Η λύση  $\epsilon_{\parallel} = 0$  (με  $E_{1z} \neq 0$ ) περιγράφει τα ηλεκτροστατικά κύματα (4.34), με  $\vec{V}_0 = 0$  και  $T_0 = 0$ . Το ζευγάρι λύσεων  $\beta_z^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp}$  (με  $E_{1x} \neq 0$  ή  $E_{1y} \neq 0$ ) περιγράφει τις δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους γραμμικές πολώσεις των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (4.39).

(β)  $\beta_0 \neq 0$  και  $\beta_x = 0$ : Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$[(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp} - \beta_z^2)^2 - (\omega^2 \mu_0 \epsilon_H)^2] (\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\parallel}) = 0 \quad (4.72)$$

Η λύση  $\epsilon_{\parallel} = 0$  (με  $E_{1z} \neq 0$ ) περιγράφει πάλι τα ηλεκτροστατικά κύματα (4.34). Οι λύσεις  $\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp} - \beta_z^2 = \pm \omega^2 \mu_0 \epsilon_H$  (με  $E_{1x} = \mp j E_{1y}$ ) περιγράφουν τα δεξιόστροφα/αριστερόστροφα κύματα (4.45).

(γ)  $\beta_0 \neq 0$  και  $\beta_x \neq 0$ : Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$[(\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp}) (\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\perp} - \beta_x^2) - (\omega^2 \mu_0 \epsilon_H)^2] (\omega^2 \mu_0 \epsilon_{\parallel} - \beta_x^2) = 0 \quad (4.73)$$

Η λύση  $\beta_x^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_{\parallel}$  (με  $E_{1z} \neq 0$ ) περιγράφει πάλι τα κανονικά (ηλεκτρομαγνητικά) κύματα (4.39). Η λύση που προκύπτει όταν μηδενίζεται ο πρώτος όρος της (4.73) περιγράφει τα υπερκανονικά κύματα (4.54).

#### 4.6 Το πλάσμα ως ενιαίο ρευστό

Στην παράγραφο (4.1) διατυπώθηκαν οι εξισώσεις για τη ρευστοδυναμική συμπεριφορά κάθε συστατικού του πλάσματος. Παίρνοντας ροπές της συνάρτησης του Boltzmann, προσδιορίστηκαν οι εξισώσεις συνέχειας (4.5), ορμής (4.12) και ενέργειας (4.15). (Θυμίζουμε ότι οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται χωριστά για κάθε συστατικό του πλάσματος και συνεπώς τα σύμβολα που εμφανίζονται σ' αυτές τις εξισώσεις αυτές θεωρείται ότι έχουν δείκτες όπως  $e$  για τα ηλεκτρόνια κλπ.). Στις τελευταίες δύο από αυτές τις εξισώσεις εμφανίζονται ροπές της συνάρτησης  $\delta f / \delta t$ , που αντιπροσωπεύουν τη μεταφορά ορμής και ενέργειας μεταξύ των διάφορων συστατικών, με το μηχανισμό των συγκρούσεων. Αυτοί οι όροι αγνοήθηκαν στις παραγράφους (4.2) έως (4.4), με την παραδοχή ότι το πλάσμα έχει αρκετά υψηλή θερμοκρασία ώστε η συχνότητα συγκρούσεων να είναι αμελητέα σε σχέση με τη συχνότητα που χαρακτηρίζει κάποιο φαινόμενο. Η εισαγωγή της συχνότητας συγκρούσεων στις εξισώσεις της παραγράφου (4.5) δεν αίρει αυτό τον περιορισμό, απλώς προσδιορίζει τις (μικρές) αλλαγές ή προσαρμογές που επιβάλλονται στη συχνότητα από τις συγκρούσεις.

Σε πολλές περιπτώσεις το πλάσμα μοιάζει περισσότερο με ένα συνηθισμένο ρευστό, του οποίου η συμπεριφορά διέπεται σε μεγάλο βαθμό από τις συγκρούσεις ανάμεσα στα σωματίδια. Σε τέτοιες περιπτώσεις φυσικά οι όροι που περιγράφουν συγκρούσεις δεν μπορούν

να παραλειφθούν στις εξισώσεις (4.12) και (4.15). Όμως, η ύπαρξη συχνών συγκρούσεων ανάμεσα στα σωματίδια αντιπροσωπεύει στενή επικοινωνία ανάμεσα στα διάφορα συστατικά, με αποτέλεσμα όλα τα συστατικά του πλάσματος να αντιδρούν από κοινού στις οποιοσδήποτε επεμβάσεις και διαταραχές. Γι' αυτό, στην περίπτωση αυτή δεν έχει ιδιαίτερη έννοια να γίνεται διάκριση των επιμέρους συστατικών του πλάσματος. Αντίθετα, είναι σκοπιμότερο να αντιμετωπισθεί το πλάσμα σαν ένα ενιαίο ρευστό. Με μεθόδους ανάλογες με εκείνες της παραγράφου (4.1) μπορούν να διατυπωθούν εξισώσεις για τα μακροσκοπικά μεγέθη (πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, πυκνότητα μάζας κλπ) αυτού του ενιαίου ρευστού. Αυτό γίνεται στην επόμενη παράγραφο (4.6.1). Ένα ειδικό όριο αυτών των εξισώσεων, καθώς και των εξισώσεων για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, παρουσιάζεται στην παράγραφο (4.6.2). Ο κλάδος της επιστήμης του πλάσματος που περιγράφεται από αυτό το όριο ονομάζεται Μαγνητορευστοδυναμική. Στην παράγραφο (4.6.3) παρουσιάζεται μια απλή επίλυση αυτών των εξισώσεων για κυματικές διαταραχές. Οι λύσεις είναι τα κύματα Alfvén και τα μαγνητοακουστικά κύματα, που συλλογικά ονομάζονται υδρομαγνητικά κύματα. Τέλος, στην παράγραφο (4.6.4) μελετάται το όριο  $\partial/\partial t = 0$ , δηλαδή η μαγνητοϋδροστατική.

#### 4.6.1 Εξισώσεις ενιαίου ρευστού.

Από την εξίσωση συνέχειας (4.5) για τη διατήρηση του αριθμού σωματιδίων κάθε συστατικού του πλάσματος, προκύπτουν οι εξισώσεις για τη διατήρηση μάζας και ηλεκτρικού φορτίου του ενιαίου ρευστού. Αυτό γίνεται πολλαπλασιάζοντας την (4.5) με τη μάζα  $m_a$  ή με το ηλεκτρικό φορτίο  $q_a$  των σωματιδίων κάθε συστατικού του πλάσματος και αθροίζοντας για όλα τα συστατικά. Το αποτέλεσμα είναι

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m + \nabla \cdot (\rho_m \vec{V}) = 0 \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν ότι δίνουν την πυκνότητα μάζας  $\rho_m$  και την πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου  $\rho$  ως συναρτήσεις της ταχύτητας ροής  $\vec{V}$  και της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος  $\vec{J}$  του πλάσματος. Τα μεγέθη αυτά ορίζονται από τις σχέσεις

$$\rho_m = \sum_a \rho_{m_a} = \sum_a m_a n_a, \quad \rho = \sum_a \rho_a = \sum_a q_a n_a \quad (4.75)$$

$$\rho_m \vec{V} = \sum_a \rho_{m_a} \vec{V}_a = \sum_a m_a n_a \vec{V}_a, \quad \vec{J} = \sum_a \vec{J}_a = \sum_a q_a n_a \vec{V}_a$$

Σημειώνουμε ότι προφανώς  $\vec{V} \neq \sum_a \vec{V}_a$ . Επίσης παρατηρούμε ότι σε πλάσμα που είναι μακροσκοπικά ουδέτερο έχουμε  $\rho \ll \rho_a$  και  $\vec{J} \ll \vec{J}_a$ , ενώ παρόμοιες σχέσεις δεν ισχύουν εν γένει για τα μεγέθη  $\rho_m$  και  $\vec{V}$ , επειδή άλλα  $q_a$  έχουν θετικό και άλλα αρνητικό πρόσημο, ενώ όλα τα  $m_a$  είναι θετικά.

Οι εξισώσεις για τα μεγέθη  $\vec{V}$  και  $\vec{J}$  προκύπτουν από την πρώτη ροπή της εξίσωσης του Boltzmann. Όμως, για τις ανάγκες αυτής της παραγ. δεν εξημερετεί η μορφή (4.12), ειδικά αναφορικά με τον όρο (4.9). Ο λόγος είναι ότι για τον όρο αυτό χρησιμοποιήθηκε το ανά-

πτυγμα  $\vec{v} = \vec{V}_a + \vec{u}$  (Ο δείκτης "α" υπονοείται σ'ολόκληρη την παράγραφο (4.1)). Για τις τωρινές ανάγκες καταλληλότερο είναι το ανάπτυγμα  $\vec{v} = \vec{V} + (\vec{v} - \vec{V})$ , οπότε ο δυαδικός τανυστής του όρου (4.9) είναι  $\vec{v}\vec{v} = (\vec{v} - \vec{V})(\vec{v} - \vec{V}) + \vec{v}\vec{V} + \vec{V}\vec{v} - \vec{V}\vec{V}$  και ο όρος (4.9) παίρνει τη μορφή

$$m_a \nabla \cdot \int f_a \vec{v}\vec{v} d^3v = \nabla \cdot \left[ \vec{P}_{ca} + m_a n_a (\vec{V}_a \vec{V}_a + \vec{V}\vec{V}_a - \vec{V}\vec{V}) \right] \quad (4.76)$$

Στη σχέση αυτή, ο τανυστής  $\vec{P}_{ca} = m_a \int (\vec{v} - \vec{V})(\vec{v} - \vec{V}) f_a d^3v$  είναι πάλι ο τανυστής τάσης του συστατικού "α" του πλάσματος, αλλά σε σύστημα συντεταγμένων που κινείται με την ταχύτητα  $\vec{V}$ , την ταχύτητα ροής του πλάσματος ως ενιαίου ρευστού. Χρησιμοποιώντας αντί του (4.9) τον όρο (4.76), προκύπτει για κάθε συστατικό του πλάσματος η εξίσωση για τη διατήρηση της ορμής με τη μορφή

$$m_a \frac{\partial}{\partial t} (n_a \vec{V}_a) + m_a \nabla \cdot [n_a (\vec{V}_a \vec{V}_a + \vec{V}\vec{V}_a - \vec{V}\vec{V})] = -\nabla \cdot \vec{P}_{ca} + n_a q_a (\vec{E} + \vec{V}_a \times \vec{B}) + \sum_{\beta} m_a \int \vec{V} \frac{\delta f_{a\beta}}{\delta t} d^3v \quad (4.77)$$

που αντικαθιστά την (4.12).

Η εξίσωση για τη διατήρηση της ορμής του πλάσματος ως ενιαίου ρευστού προκύπτει αθροίζοντας την (4.77) ως προς όλα τα συστατικά, χρησιμοποιώντας με τη σχέση (4.74a). Κατά την άθροιση αυτή, οι όροι που περιγράφουν τη μεταβολή της ορμής λόγω συγκρούσεων απαλείφονται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι κατά τις συγκρούσεις διατηρείται η συνολική ορμή των σωματιδίων που συγκρούονται. Συμπεώς, ορίζοντας  $\vec{P}_c = \sum_a \vec{P}_{ca}$ , έχουμε

$$\rho_m \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla \cdot \vec{P}_c + \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B} \quad (4.78)$$

Η εξίσωση αυτή έχει ίδια δομή όπως η (4.12), ή η (4.22β), γιατί είναι σκόπιμο να επισημάνουμε τις διαφορές. Η (4.78) αναφέρεται στο πλάσμα σαν ενιαίο ρευστό, συνεπώς ο τανυστής  $\vec{P}_c$  εκφράζεται σε σύστημα που κινείται με την ταχύτητα ροής  $\vec{V}$  του πλάσματος, ενώ παράλληλα οι συγκρούσεις δεν εμφανίζονται, επειδή απλούστατα η επίδρασή τους στη μεταβολή της συνολικής ορμής είναι ίση με μηδέν. Αντίθετα, οι (4.12) και (4.21β) αναφέρονται χωριστά σε κάθε συστατικό του πλάσματος και ο τανυστής  $\vec{P}_a$  (ή η υδροστατική πίεση  $p_a$ ) υπολογίζεται σε σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $\vec{V}_a$ , ενώ η μεταβολή της ορμής κάθε συστατικού λόγω συγκρούσεων πρέπει να περιληφθεί, εκτός αν υποθεθεί, όπως στην (4.22β), ότι αυτή η μεταβολή είναι αμελητέα.

Η τελευταία εξίσωση, για την μεταβολή της πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος, προκύπτει αθροίζοντας ως προς όλα τα συστατικά, την εξίσωση (4.77), πολλαπλασιασμένη επί  $q_a/m_a$ . Γράφοντας τον τελευταίο όρο της (4.77) ως  $n_a m_a n_a (\vec{V}_a - \vec{V})$ , όπως και στην εξίσωση (4.60) του Langmuir (με τη διαφορά ότι τώρα  $\vec{V} \neq 0$ ), το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{J}\vec{J} + \vec{J}\vec{V}) + n \vec{J} \cdot \nabla \cdot (\rho \vec{V}\vec{V}) - n \rho \vec{V} = -\sum_a \frac{q_a}{m_a} \nabla \cdot \vec{P}_{ca} + e_0 \sum_a \omega_{pa}^2 (\vec{E} + \vec{V}_a \times \vec{B}) \quad (4.79)$$

Στην εξίσωση αυτή η συνολική συχνότητα συγκρούσεων  $\nu$  ορίζεται ως σταθμισμένος μέσος όρος των επιμέρους  $\nu_a$ , έτσι ώστε  $\nu(\vec{J} - \rho \vec{V}) = \sum_a \nu_a (\vec{J}_a - \rho_a \vec{V})$ . Εκείνο που ενοχλεί ιδιαίτερα

σ' αυτή την εξίσωση είναι η εμφάνιση μεγεθών που αναφέρονται χωριστά σε κάθε συστατικό του πλάσματος, και όχι στο πλάσμα σαν ενιαίο ρευστό. Όταν το πλάσμα αποτελείται από δύο μόνο συστατικά, ηλεκτρόνια και ιόντα, τότε οι ταχύτητες  $\vec{V}_e$  και  $\vec{V}_i$  μπορούν να εκφραστούν ως συναρτήσεις των  $\vec{V}$  και  $\vec{J}$ , με τη βοήθεια των (4.75). Τότε ο τελευταίος όρος της (4.79) μπορεί να γραφτεί ως

$$\epsilon_0 \sum_{\alpha} \omega_{p\alpha}^2 \vec{V}_{\alpha} \times \vec{B} = -\rho_m \frac{q_e q_i}{m_e m_i} \vec{V} \times \vec{B} + \frac{1}{m_e m_i} \frac{q_i^2 m_e^2 - q_e^2 m_i^2}{q_i m_e - q_e m_i} \vec{J} \times \vec{B}$$

και επειδή  $m_e \ll m_i$  ενώ  $q_i = |q_e| = -q_e$ , η σχέση (4.79) παίρνει για πλάσμα δύο συστατικών τη μορφή του γενικευμένου νόμου του Ohm.

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \vec{J} + \vec{J} \vec{V}) + \nu \vec{J} - \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \nu \rho \vec{V} = \frac{|q_e|}{m_e} \left[ n_e |q_e| (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) - (\vec{J} - \rho \vec{V}) \times \vec{B} + \nabla \cdot \vec{P}_c \right] \quad (4.80)$$

Δεδομένου ότι από τις σχέσεις (4.75) το μέγεθος  $n_e$  μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των  $\rho$  και  $\rho_m$ , η (4.80) εμπλέκει μόνο μεγέθη του ενιαίου ρευστού.

Οι εξισώσεις (4.74), (4.78) και (4.79) (ή η (4.80)) αποτελούν ένα σύστημα ως προς τα μεγέθη  $\rho$ ,  $\rho_m$ ,  $\vec{J}$  και  $\vec{V}$ , που ορίζονται στην (4.75). Για να κλείσει το σύστημα απαιτούνται πληροφορίες για τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  και για τον τανυστή τάσης  $\vec{P}_c$ . Τα πεδία προσδιορίζονται από τις εξισώσεις του Maxwell. Ως προς τον τανυστή τάσης, δεν μπορούμε να καταφύγουμε σε ανώτερης τάξης ροπές της εξίσωσης του Boltzmann, επειδή τότε εμφανίζονται νέα μεγέθη. Αντίθετα, θα υιοθετηθεί και τώρα, όπως και στην παράγραφο (4.1.4), υποκατάσταση του τανυστή  $\vec{P}_c$  από την υδροστατική πίεση  $p$ , σε συνδυασμό με την επιβολή μιας συνθήκης για τη θερμοδυναμική μεταβολή (π.χ. αδιαβατική, ισοθερμική κλπ).

#### 4.6.2 Εξισώσεις μαγνητορευστοδυναμικής

Η μαγνητορευστοδυναμική είναι κλάδος της επιστήμης πλάσματος, όταν το πλάσμα συμπεριφέρεται σαν ενιαίο ρευστό. Για τον κλάδο αυτό επίσης χρησιμοποιείται και η παλαιότερη ονομασία "μαγνητοϋδροδυναμική". Τα μεγέθη της μαγνητορευστοδυναμικής χωρίζονται σε μεγέθη της ρευστοδυναμικής ( $\rho_m$ ,  $\vec{V}$  και  $p$ ) και σε ηλεκτρικά μεγέθη ( $\vec{J}$ ,  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$ ) και υπακούουν στις εξής εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_m + (\vec{V} \cdot \nabla) \rho_m &= -\rho_m \nabla \cdot \vec{V} \\ \rho_m \left[ \frac{\partial}{\partial t} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] &= -\nabla p + \vec{J} \times \vec{B} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \rho_m^{-1}) + (\vec{V} \cdot \nabla) (\rho \rho_m^{-1}) &= 0 \\ \vec{J} &= \sigma (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}) \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

Οι δύο πρώτες από τις εξισώσεις αυτές είναι, κατά σειρά, η εξίσωση (4.74α) για τη διατήρηση της μάζας, και η εξίσωση (4.78) για τη διατήρηση της ορμής, χωρίς όμως τον όρο  $\rho \vec{E}$  και με αντικατάσταση του τανυστή τάσης από την υδροστατική πίεση  $p$ . Ακολουθεί η εξίσωση για το είδος της θερμοδυναμικής μεταβολής (π.χ.  $\gamma = 5/3$  για αδιαβατική μεταβολή μοριακών μορίων κλπ). Η επόμενη εξίσωση είναι ο νόμος του Ohm, σε σύστημα που κινείται με το ρευστό. (Σε σύστημα που κινείται με ταχύτητα  $\vec{V}$ , το ηλεκτρικό πεδίο έχει την τιμή  $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}$ ). Η εξίσωση αυτή προκύπτει από την (4.80), με δραστική παράλειψη όρων της, και με την εισαγωγή της ειδικής αγωγιμότητας  $\sigma$ . Τέλος, οι δύο τελευταίες εξισώσεις είναι οι νόμοι των Ampere-Maxwell χωρίς το ρεύμα μετατόπισης) και Faraday. Παράλληλα, από το σύστημα (4.81) λείπουν η εξίσωση (4.74β) για τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου και οι νόμοι του Gauss  $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$  και  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα. Αυτές οι ελλείψεις, καθώς και οι διαφορές ανάμεσα στις (4.81) και τις εξισώσεις, από τις οποίες αυτές προήλθαν, θα σχολιασθούν αμέσως παρακάτω.

Η μαγνητορευστοδυναμική αναφέρεται σε πλάσμα μακροσκοπικά ουδέτερο, στο οποίο οι μεταβολές είναι αργές και με μεγάλες χαρακτηριστικές διαστάσεις. Συνήθως αποτελείται από δύο κύρια συστατικά με ηλεκτρικό φορτίο (ηλεκτρόνια και ιόντα), συχνά και με κάποιο επιπρόσθετο ουδέτερο αέριο υπόβαθρο. Επίσης συχνά αρκεί η περιγραφή της εντατικής κατάστασης από την υδροστατική πίεση. Αυτές οι ιδιότητες έχουν τις εξής συνέπειες:

- (α) Η μακροσκοπική ουδετερότητα επιτρέπει να θέσουμε  $\rho = 0$  στις εξισώσεις (4.78) και (4.80). Ταυτόχρονα, συνέπεια αυτής της παραδοχής είναι ότι  $\vec{J} \ll |q_e| n_e \vec{V}$ , που οδηγεί σε παράλειψη και του όρου  $\vec{J} \times \vec{B}$  στην (4.80). Τέλος, αυτή η παραδοχή δεν επιτρέπει τη χρήση του νόμου του Gauss,  $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$ , για τον προσδιορισμό της έντασης της ηλεκτρικού πεδίου. Αντίθετα, μετά την επίλυση του συστήματος (4.81) μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτός ο νόμος για να προσδιορισθεί η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου  $\rho$  και να ελεγχθεί κατά πόσο οι όροι που έχουν παραλειφθεί (ως συνέπεια της υπόθεσης  $\rho = 0$ ) είναι πράγματι αμελητέοι.
- (β) Η παραδοχή ότι οι μεταβολές είναι αργές και έχουν μεγάλα χαρακτηριστικά μήκη επιτρέπει να παραλειφθούν οι όροι με παραγώγους στην (4.80), και εκ των υστέρων να ελεγχθεί η ορθότητα αυτής της παράλειψης. Ποσοτικά, αυτή η παραδοχή σημαίνει  $v \gg \omega$ ,  $\omega_{ca}$ . Η ίδια παραδοχή έχει ήδη γίνει σιωπηρά με την εισαγωγή του μονόμετρου (και όχι τανυστικού) μεγέθους  $v$  στην (4.79). (Τα διανύσματα  $\vec{J} - \rho \vec{V}$  και  $\sum_a n_a (\vec{J}_a - \rho_a \vec{V})$  δεν είναι αναγκαστικά συγγραμμικά, εκτός αν το πλάσμα έχει μόνο δύο συστατικά). Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι μετά τις παραλείψεις όρων η (4.80) δίνει το νόμο του Ohm, (4.81δ), με  $\sigma = \epsilon_0 \omega_{pe}^2 / v$ . Αυτή η τιμή της ειδικής αγωγιμότητας πράγματι συμβιβάζεται με τις εκφράσεις (4.65) όταν  $v \gg \omega$ ,  $\omega_{ca}$ . Συχνά, η ειδική αγωγιμότητα είναι μεγάλη ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) οπότε ο νόμος του Ohm υποκαθίσταται από τη σχέση  $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$ , ώστε η πυκνότητα ρεύματος να παραμένει πεπερασμένη. Τέλος, η παραδοχή αργών μεταβολών επιτρέπει την παράλειψη του ρεύματος μετατόπισης στο νόμο των Ampere-Maxwell (4.81ε). Αυτή η παράλειψη επιβάλλει και την παράλειψη της εξίσωσης συνέχειας (4.74β),

που έτσι κι αλλιώς δεν προσφέρει τίποτε επιπρόσθετο στο σύστημα (4.81). (Για  $\rho=0$ , η (4.74β) δίνει  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ , πράγμα που προκύπτει όμως και από την (4.81ε)).

(γ) Η υποκατάσταση του τανυστή πίεσης από την υδροστατική πίεση  $p$  υπαγορεύεται κυρίως από τις υψηλές θερμοκρασίες, στις οποίες συνήθως βρίσκεται το μέσο που περιγράφεται από τις εξισώσεις (4.81). Με τον όρο "υψηλές θερμοκρασίες" εννοούμε θερμοκρασίες τέτοιες που το ρευστό δεν επηρεάζεται από φαινόμενα ιξώδους. (Αντίθετα, αν το μέσο χαρακτηριστεί ως πλάσμα, η θερμοκρασία του θεωρείται χαμηλή, λόγω της συνθήκης  $v \gg \omega$ ). Αν σε κάποια εφαρμογή είναι απαραίτητο να συμπεριληφθεί ο τανυστικός χαρακτήρας της εντατικής κατάστασης, τότε τα στοιχεία του  $\vec{P}_c$  εκφράζονται σε συναρτήσεις της υδροστατικής πίεσης  $p$ , της ταχύτητας ροής  $\vec{V}$  και του συντελεστού ιξώδους, και η εξίσωση (4.81β) μετασχηματίζεται στην εξίσωση Navier-Stokes της ρευστοδυναμικής. Στην εξίσωση αυτή πάντως δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος ο όρος  $\vec{J} \times \vec{B}$ , αφού αυτός είναι ο μόνος όρος που συμπλέκει ρευστοδυναμική με ηλεκτρομαγνητισμό. Αυτό σημαίνει ότι ο όρος  $\vec{J} \times \vec{B}$  έχει τουλάχιστον παρόμοια τιμή με τον όρο  $\nabla p$ . Συνεπώς, η παράλειψη του όρου  $\vec{J} \times \vec{B}$  στην (4.80), λόγω της παραδοχής για μακροσκοπική ουδετερότητα, συνεπάγεται και την παράλειψη του όρου  $\nabla p$  στην ίδια εξίσωση, με αποτέλεσμα να προκύψει ο νόμος του Ohm, με τη μορφή (4.81δ).

Οι εξισώσεις (4.81) αποτελούν ένα κλειστό σύστημα, που μπορεί να επιλυθεί ως προς  $\rho_m$ ,  $\vec{V}$ ,  $p$ ,  $\vec{J}$ ,  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$ . Μετά την επίλυσή του, μπορούν να προσδιορισθούν ορισμένα παράγωγα μεγέθη. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, που όπως αναφέρθηκε προκύπτει από το νόμο του Gauss,  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$ . Άλλο τέτοιο μέγεθος είναι θερμοκρασία, που προκύπτει από μια καταστατική εξίσωση, όπως των τελείων αερίων,  $p = \rho_m RT$ . Από παρόμοιες καταστατικές σχέσεις ορίζονται και άλλα θερμικά μεγέθη, όπως η εσωτερική ενέργεια, η ενθαλπία κλπ.

Από την ανάλυση αυτής της παραγράφου μπορούν να γεννηθούν ερωτήματα, κατά πόσο η μαγνητορευστοδυναμική είναι πράγματι κλάδος της επιστήμης πλάσματος. Ιδιαίτερα, η παραδοχή αργών μεταβολών,  $v \gg \omega$ , φαίνεται να έρχεται σε αντίφαση με την ανάπτυξη της παραγράφου (2.6), ιδιαίτερα αναφορικά με τη συνθήκη (2.43), ή γενκότερα αναφορικά με τη συνθήκη  $v \ll \omega$ . Με την έννοια αυτή, η μαγνητορευστοδυναμική ταιριάζει περισσότερο να χαρακτηριστεί είτε κλάδος της ρευστοδυναμικής, είτε γέφυρα που συνδέει τη ρευστοδυναμική με την επιστήμη πλάσματος. Από την άλλη πλευρά, στην παράγραφο (2.6) ο στόχος ήταν να ποσοτικοποιηθεί ο ορισμός της παραγράφου (1.1), ιδιαίτερα όσο αφορά την εμφάνιση συλλογικών φαινομένων. Όμως, ο στόχος αυτός δεν είναι πραγματοποιήσιμος με γενική εφαρμογή, ιδιαίτερα όταν το γνωστικό υπόβαθρο είναι σχετικά περιορισμένο, όπως στην παράγραφο (2.6). Ιδιαίτερα όσο αφορά τη μαγνητορευστοδυναμική, ο ορισμός της παραγράφου (2.6) αστοχεί, δεδομένου ότι στο μέσο που περιγράφεται από τις εξισώσεις (4.81) πράγματι μπορούν να εμφανισθούν συλλογικά φαινόμενα, δηλαδή η μαγνητορευστοδυναμική είναι κλάδος της επιστήμης πλάσματος. Ένα παράδειγμα συλλογικού φαινομένου είναι η ανάπτυξη διαφο-

ράς δυναμικού κατά την εκτόνωση ενός μαγνητικού ρευστού στις μαγνητορευστοδυναμικές γεννήτριες. Λόγω της πρακτικής σημασίας του, η ανάπτυξη αυτού του θέματος απαιτεί χώρο πολύ μεγαλύτερο από όσο είναι διαθέσιμος σ' αυτό το κεφάλαιο. Άλλο παράδειγμα, που θα παρουσιασθεί στην αμέσως επόμενη παράγραφο, είναι η διάδοση κυμάτων με χαμηλή συχνότητα.

#### 4.6.3 Υδρομαγνητικά κύματα

Μια απλή εφαρμογή των εξισώσεων (4.81) είναι στη διάδοση κυμάτων με χαμηλή συχνότητα. Θεωρώντας το κύμα σαν διαταραχή, τα μεγέθη των εξισώσεων (4.81) μπορούν να αναπτυχθούν, όπως έχει ήδη γίνει και στην παράγραφο (4.22), σύμφωνα με το παράδειγμα

$$\rho_m = \rho_{m0} + \text{Re}\{\rho_{m1} \exp[j(\vec{\beta} \cdot \vec{r} - \omega t)]\} \quad (4.82)$$

Το μαγνητικό ρευστό θεωρείται ότι διαπεράται από μαγνητοστατικό πεδίο, δηλ.  $\vec{B}_0 \neq 0$ , και έχει πεπερασμένη πυκνότητα ( $\rho_{m0} \neq 0$ ) και πίεση, που μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της θερμοκρασίας ( $p_0 = \rho_{m0} R T_0 \neq 0$ ). Αντίθετα, επειδή δεν μπορεί να διατηρηθεί στο πλαίσιο ηλεκτροστατικό πεδίο, έχουμε  $\vec{E}_0 = 0$  και σε σύστημα συντεταγμένων με  $\vec{V}_0 = 0$  προκύπτει ότι  $\vec{J}_0 = 0$ . Τέλος, για λόγους απλούστευσης θεωρούμε ότι  $\sigma \rightarrow \infty$ , συνεπώς από το νόμο του Ohm έχουμε  $\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0$ .

Με βάση αυτές τις παραδοχές, οι εξισώσεις (4.81) μετασχηματίζονται στο γραμμικό αλγεβρικό σύστημα

$$\begin{aligned} \omega \rho_{m1} &= \rho_{m0} \vec{\beta} \cdot \vec{V}_1 \\ \omega \rho_{m0} \vec{V}_1 &= -\rho_1 \vec{\beta} + j \vec{J}_1 \times \vec{B}_0 \\ \rho_1 &= -\gamma \frac{p_0}{\rho_{m0}} \rho_{m1} = \gamma R T_0 \rho_{m1} \\ \vec{E}_1 &= -\vec{V}_1 \times \vec{B}_0 \\ \mu_0 \vec{J}_1 &= j \vec{\beta} \times \vec{B}_1 \\ \omega \vec{B}_1 &= \vec{\beta} \times \vec{E}_1 \end{aligned} \quad (4.83)$$

Με διαδοχικές αντικαταστάσεις, η πρώτη και τρίτη εξίσωση εκφράζουν το  $\rho_1$  ως συνάρτηση του  $\vec{V}_1$ , και οι τρεις τελευταίες εξισώσεις εκφράζουν το  $\vec{J}_1$  ως συνάρτηση πάλι του  $\vec{V}_1$ . Εισάγοντας αυτές τις εκφράσεις στη δεύτερη εξίσωση προκύπτει μια σχέση που εμπλέκει μόνο την διαταραχή της ταχύτητας  $\vec{V}_1$ . Προσανατολίζοντας το σύστημα συντεταγμένων ώστε  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$  και ορίζοντας την ταχύτητα του ήχου,  $c_s = (dp/d\rho_m)^{1/2} = (\gamma R T_0)^{1/2}$ , και την ταχύτητα του Alfven,  $V_A = B_0 / (\mu_0 \rho_{m0})^{1/2}$ , η (4.83β) δίνει

$$\omega^2 \vec{V}_1 = c_s^2 (\vec{\beta} \cdot \vec{V}_1) \vec{\beta} + V_A^2 \{ \vec{\beta} \times [\vec{\beta} \times (\vec{V}_1 \times \hat{e}_z)] \} \times \hat{e}_z \quad (4.84)$$

Ανάλογα με το σχετικό προσανατολισμό των διανυσμάτων  $\vec{V}_1$ ,  $\vec{\beta}$  και  $\hat{e}_z$ , προκύπτουν διάφορες συνθήκες συμβιβαστότητας, οι αντίστοιχες σχέσεις διασποράς. Εξαιρώντας την

αδιάφορη περίπτωση που και τα τρία αυτά διανύσματα είναι ανά ζεύγη κάθετα μεταξύ τους, επειδή τότε  $\omega = 0$ , οι τρεις περιπτώσεις που απομένουν είναι οι εξής:

- (α) Ακουστικά κύματα: Όταν  $\vec{V}_1 \parallel \hat{e}_z$ , τότε όλα τα ηλεκτρικά μεγέθη ( $\vec{E}_1$ ,  $\vec{B}_1$  και  $\vec{J}_1$ ) είναι ίσα με μηδέν και τα διανύσματα  $\vec{\beta}$  και  $\vec{V}_1$  είναι αναγκαστικά συγγραμμικά ( $\vec{\beta} \parallel \vec{V}_1$ , συνεπώς  $\vec{\beta} \parallel \hat{e}_z$ ). Η σχέση διασποράς είναι

$$\omega = \beta c_s \quad (4.85)$$

Τα κύματα αυτά είναι τα γνωστά κύματα με τα οποία διαδίδεται ο ήχος σε κάποιο μέσο. Η ύπαρξη και διάδοση αυτών των κυμάτων γίνεται ανεξάρτητα από την ύπαρξη φορτισμένων σωματιδίων και του μαγνητοστατικού πεδίου. Μολονότι αυτά τα κύματα προκύπτουν από τις εξισώσεις (4.81), δε σχετίζονται με την ανάπτυξη συλλογικών ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, συνεπώς δεν είναι υδρομαγνητικά κύματα.

- (β) Κύματα Alfven: Όταν  $\vec{V}_1 \perp \hat{e}_z$  και  $\vec{\beta} \parallel \hat{e}_z$ , τότε στις σχέσεις (4.83) έχουμε  $\rho_{m1} = 0$  και  $\rho_1 = 0$  (ασυμπέστη συμπεριφορά). Αντίθετα, όλα τα μεγέθη ( $\vec{E}_1$ ,  $\vec{B}_1$  και  $\vec{J}_1$ ) διευθύνονται, με πόλωση εγκάρσια προς το  $\vec{\beta}$ . Στην περίπτωση αυτή η σχέση διασποράς είναι

$$\omega = \beta V_A \quad (4.86)$$

Τα κύματα αυτά έχουν ήδη αναφερθεί στην παράγραφο (4.4.2) (διάδοση με  $\vec{\beta} \parallel \vec{B}_0$ ) στο όρι εξαιρετικά χαμηλών συχνοτήτων. Η (4.86) διαφέρει από την (4.52) ως προς ένα όρι  $(V_A/c)^2 \ll 1$ . Αυτός ο όρος δεν εμφανίζεται εδώ, επειδή έχει παραλειφθεί το ρεύμα μετατόπισης στο νόμο του Ampere.

- (γ) Μαγνητοακουστικά κύματα: Όταν  $\vec{V}_1 \perp \hat{e}_z$  και  $\vec{\beta} \parallel \vec{V}_1$ , τότε κανένα μέγεθος της διαταραχής δεν είναι ίσο με μηδέν. Η διαταραχή υπακούει στη σχέση διασποράς

$$\omega = \beta (c_s^2 + V_A^2)^{1/2} \quad (4.87)$$

και περιλαμβάνει ταυτόχρονα διαταραχές πυκνότητας και πίεσης (για τις οποίες χαρακτηριστική ταχύτητα είναι η ταχύτητα του ήχου  $c_s$ ) και διαταραχές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (με χαρακτηριστική ταχύτητα  $V_A$ ), με πόλωση  $\vec{E}_1 \perp \vec{B}_0$ ,  $\vec{\beta}$ . Σ' αυτό το διπλό χαρακτήρα οφείλεται η ονομασία "μαγνητοακουστικά κύματα". Τα κύματα αυτά έχουν ήδη αναφερθεί στην παράγραφο (4.4.3) (διάδοση με  $\vec{\beta} \perp \vec{B}_0$ ), ως το όριο των υπερκανονικών κυμάτων σε πολύ χαμηλές συχνότητες. Όμως, επειδή σ' ολόκληρη την παράγραφο (4.4) η ανάλυση είχε γίνει με την παράδοχή  $T = 0$ , δηλαδή  $c_s = 0$ , η ακουστική συνιστώσα δεν μπορούσε να προβληθεί και να δικαιολογηθεί έτσι η ονομασία τους εκεί.



#### 4.6.4 Μαγνητοϋδροστατική

Ένα άλλο όριο, στο οποίο η επεξεργασία των εξισώσεων της μαγνητορευστοδυναμικής δίνει εξαιρετικά απλά και ταυτόχρονα ενδιαφέροντα αποτελέσματα, είναι όταν  $\partial/\partial t = 0$ . Το όριο αυτό για προφανείς λόγους ονομάζεται μαγνητοϋδροστατική. Για λόγους απλούστευσης των εξισώσεων υποθέτουμε στάσιμο μαγνητικό ρευστό, δηλ.  $\vec{V}=0$ , με άπειρη αγωγιμότητα,  $\sigma = \infty$ , δηλ.  $\vec{E} = 0$  στο νόμο του Ohm. Με βάση αυτές τις παραδοχές, από το σύστημα (4.81) οι μόνες εξισώσεις με όρους που δεν είναι εκ ταυτότητας ίσες με μηδέν είναι ο νόμος για τη διατήρηση της ορμής και ο νόμος του Ampere:

$$\begin{aligned} \nabla p &= \vec{J} \times \vec{B} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Χρησιμοποιώντας και την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων,  $p = \rho_m RT$ , τα πορίσματα για την πίεση μεταφράζονται αμέσως σε πορίσματα για την πυκνότητα μάζας. Μάλιστα, οι συχνές συγκρούσεις ανάμεσα στα σωματίδια έχουν σαν αποτέλεσμα την γρήγορη αποκατάσταση θερμικής ισορροπίας μεταξύ των διαφόρων σημείων του χώρου, οπότε η ίδια θερμοκρασία επικρατεί σε όλο το χώρο και το πηλίκο  $p/\rho_m$  είναι σταθερό.

Από μόνη της, η (4.88α) δίνει αρκετές πληροφορίες για τη συμπεριφορά του μαγνητικού ρευστού. Σε πλάσμα με μη ομοιόμορφη κατανομή της πυκνότητας, το διάνυσμα  $\nabla p \neq 0$  δίνει την κατεύθυνση κατά την οποία αυξάνει η πίεση (και η πυκνότητα). Όμως από την (4.88α) φαίνεται ότι τα διανύσματα  $\vec{J}$  και  $\vec{B}$  είναι κάθετα προς το  $\nabla p$ . Συνεπώς, οι επιφάνειες που ορίζονται από το πλέγμα των πεδιακών γραμμών που παράγονται από τα διανύσματα  $\vec{J}$  και  $\vec{B}$  ταυτίζονται με τις επιφάνειες σταθερής πίεσης (και πυκνότητας) και αντίστροφα η πίεση και η πυκνότητα μένουν σταθερές κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών και των γραμμών ροής. Όσο απλό και αν είναι αυτό το συμπέρασμα, η σημασία του είναι μεγάλη, αφού ισχύει για κάθε πλάσμα, ανεξάρτητα από τη γεωμετρία και την ύπαρξη ή μη συμμετριών.

Η εξίσωση (4.88α), όπως προέρχεται από την (4.81β), περιγράφει ότι η χωρική πυκνότητα της μαγνητικής δύναμης,  $\vec{J} \times \vec{B}$ , εξουδετερώνεται από τη χωρική πυκνότητα της δύναμης που προέρχεται από την υδροστατική πίεση,  $-\nabla p$ , ώστε να έχουμε κατάσταση ισορροπίας. (Η ταύτιση του όρου  $-\nabla p$  με χωρική πυκνότητα υδροστατικής δύναμης φαίνεται εξετάζοντας τις υδροστατικές δυνάμεις που ασκούνται σε στοιχειώδη όγκο  $\Delta x \Delta y \Delta z$ : Αν έχουμε π.χ.  $p=p(x)$  τότε η ολική δύναμη είναι  $p(x)\Delta y \Delta z - p(x+\Delta x)\Delta y \Delta z = (-dp/dx) \Delta x \Delta y \Delta z$ ). Αυτό όμως δε σημαίνει ότι χρειάζονται εξωτερικές επεμβάσεις ώστε να παραχθεί η κατάλληλη ποσότητα ρεύματος  $\vec{J}$  που να ικανοποιεί την (4.88α) για δεδομένα  $\nabla p$  και  $\vec{B}$ . Η κατάλληλη πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J}$  παράγεται στο πλάσμα με το μηχανισμό ολίσθησης της (3.34). Στην εξίσωση αυτή η ολίσθηση προκαλείται από μια δύναμη  $\vec{F}$ , που στην τωρινή περίπτωσή μας ταυτίζεται με  $-\nabla p$ . Στον παρονομαστή της (3.34) το φορτίο πρέπει να ληφθεί ίσο με  $\sum_a q_a n_a \Delta V$ , δηλαδή ίσο με το συνολικό φορτίο που περικλείεται στον αντίστοιχο όγκο. Συνεπώς αναπτύσσεται μια ολίσθηση ίση με

$$\vec{v}_D = \frac{-\nabla \rho \times \vec{B} \Delta V}{\sum_a q_a n_a \Delta V B^2} = \frac{1}{\sum_a q_a n_a} \frac{-\nabla \rho \times \vec{B}}{B^2} \quad (4.89)$$

Αυτή η ολίσθηση, σύμφωνα με την (4.75δ), αντιστοιχεί με ροή ηλεκτρικού ρεύματος:

$$\vec{J} = \sum_a q_a n_a \vec{v}_D = \frac{-\nabla \rho \times \vec{B}}{B^2} \quad (4.90)$$

σε απόλυτη συμφωνία με την (4.88α).

Από τις εξισώσεις (4.88), απαλείφοντας την πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος προκύπτει:

$$\nabla \left( \rho + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (4.91)$$

Σε πολλές περιπτώσεις η μαγνητική επαγωγή δε μεταβάλλεται κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών. Παράδειγμα είναι η διάταξη κυλινδρικού πλάσματος, με τον άξονα του κυλίνδρου παράλληλο προς τις μαγνητικές γραμμές. Σε τέτοιες περιπτώσεις η δεξιά πλευρά της (4.91) είναι ίση με μηδέν, με αποτέλεσμα να είναι σταθερή η ολική πίεση

$$\rho_{\text{ολ}} = \rho + \rho_{\text{μαγ}} = \rho + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{σταθ.} \quad (4.92)$$

Ο όρος  $B^2/2\mu_0$  αναγνωρίζεται ως μαγνητική πίεση (ίση με τη χωρική πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας). Συνέπεια της (4.92) είναι ότι το μαγνητικό πεδίο έχει τη μέγιστη ένταση στο χώρο έξω από το πλάσμα, όπου  $\rho_m = 0$ , δηλ.  $\rho = 0$ , και μειώνεται καθώς αυξάνει η πυκνότητα (και η πίεση) του πλάσματος, π.χ. προς τον άξονα του κυλίνδρου. Αυτό μπορεί να περιγραφεί λέγοντας ότι το πυκνό πλάσμα εκτοπίζει το μαγνητικό πεδίο. Έτσι, αν σε κάποια περιοχή παραχθεί μαγνητική επαγωγή ίση (στον κενό χώρο) με  $B_0$ , τότε μέσα στο πλάσμα η μαγνητική επαγωγή έχει την τιμή

$$B := (B_0^2 - 2\mu_0 \rho)^{1/2} \quad (4.93)$$

Η μειωμένη αυτή τιμή της μαγνητικής επαγωγής είναι εκείνη που περιγράφει τη συμπεριφορά του πλάσματος, όσον αφορά τη χαρακτηριστική συχνότητα  $\omega_c$ .

Είναι φανερό από την (4.93) ότι η μέγιστη πίεση (και αντίστοιχα η μέγιστη πυκνότητα, για δεδομένη θερμοκρασία) πλάσματος που μπορεί να συγκρατηθεί με μαγνητικό πεδίο είναι ίση με  $\rho_{\text{max}} = B_0^2/2\mu_0$ , στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο έχει εκτοπισθεί πλήρως από το εσωτερικό του πλάσματος. Για να περιγραφεί σε μια διάταξη μαγνητικής συγκράτησης του πλάσματος σε ποιο βαθμό αξιοποιείται η διαθέσιμη μαγνητική πίεση, χρησιμοποιείται η παράμετρος "βήτα", που συνήθως ορίζεται ως το πηλίκο της κινητικής (υδροστατικής) προς τη μαγνητική πίεση:

$$\beta = \frac{\rho}{\rho_m} = \frac{2\mu_0 \rho}{B^2} = \frac{2\mu_0 n k_B T}{B^2} \quad (4.94)$$

όπου  $n$  είναι η ολική πυκνότητα του πλάσματος. Στον ορισμό (4.94) τα μεγέθη  $\rho$  και  $\rho_m$  αναφέρονται στο ίδιο σημείο του χώρου. Ένα αραιό πλάσμα ( $\beta \ll 1$ ) προκαλεί μικρή μόνο διαταραχή στο μαγνητικό πεδίο, ενώ όταν  $\beta \gg 1$  (πυκνό πλάσμα) το πεδίο εκτοπίζεται πλήρως.

πως από το χώρο του πλάσματος. (Σε ορισμένους συγγραφείς η παράμετρος αυτή ορίζεται ως  $\beta = \rho / \rho_{0\lambda}$  με αποτέλεσμα το πυκνό πλάσμα να περιγράφεται από τη σχέση  $\beta = 1$ . Σε αραιό πλάσμα,  $\beta \ll 1$ , οι δύο ορισμοί ουσιαστικά συμπίπτουν).

Σε περιπτώσεις που η μαγνητική επαγωγή μεταβάλλεται κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών, η σχέση (4.92) δεν ισχύει. Πάλι όμως μπορεί να εισαχθεί η έννοια της σταθερής ολικής πίεσης, ως τανυστή αυτή τη φορά. Εισάγοντας το μοναδιαίο τανυστή  $\vec{I}$  και το διανυσματικό τανυστή  $\mu_0^{-1} \vec{B} \vec{B}$  έχουμε ότι ο τανυστής της ολικής πίεσης

$$\vec{P}_{0\lambda} = \rho \vec{I} + \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0^2 \vec{I} - 2\vec{B} \vec{B}) \quad (4.95)$$

είναι σταθερό μέγεθος.