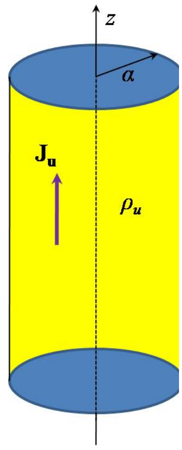

Στο εσωτερικό (διηλετρικής σταθεράς και μαγνητικής διαπερατότητας αυτών του κενού, ε_0, μ_0) του απείρου μήκους και ακτίνας α κυλιδρικού σωλήνα του σχήματος υπάρχει ελεύθερο ηλεκτρικό φορτίο χώρου καθώς και ρεύμα χώρου τα οποία δίνονται από τις σχέσεις:

$$\rho_u = \rho_0 \cos(kz - \omega t),\ \mathbf{J_u} = \hat{\mathbf{z}} J_0 \cos(kz - \omega t)$$

όπου J_0 και $\omega>0$ είναι δεδομένες σταθερές, ενώ τα $k>0$ και ρ_0, θα προσδιορισθεί στη συνέχεια. Επιφανειακά ρεύματα και φορτία στην επιφάνεια του κυλίνδρου δεν υπάρχουν. Ο εξωτερικός χώρος είναι κενός υλικού και ελεύθερος φορτίων και ρευμάτων. Να προσδιορισθεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παντού στο χώρο, η ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας (Poynting) παντού καθώς και οι τιμές των ρ_0 και k. Να προσδιορισθεί επίσης η τάση (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας, ορθή και διατμητική) που μπορεί να ασκείται στην επιφάνεια του σωλήνα.

Ο νόμος διατήρησης του φορτίου μας δίνει:

$$kJ_0 = \omega \rho_0$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό νόμο του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο παίρνουμε:

$$E_r = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r \cos(kz - \omega t), & 0 \le r \le \alpha^- \\ \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \dfrac{\alpha^2}{r} \cos(kz - \omega t), & \alpha^+ \le r \end{cases}$$

Εφαρμογή του ολοκληρωτικού νόμου του Ampere μας δείνει:

$$H_\varphi = \begin{cases} \dfrac{J_0}{2} r \cos(kz - \omega t), & 0 \le r \le \alpha^- \\ \dfrac{J_0}{2} \dfrac{\alpha^2}{r} \cos(kz - \omega t), & \alpha^+ \le r \end{cases}$$

Ο νόμος του Gauss για την μαγνητική επαγωγή ($\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{H}$) επαληθεύεται με τη μοναδική αυτή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Πρέπει να ελεγχθεί τώρα ο νόμος του Faraday (καταλήγει σε μία μόνο εξίσωση:

$$-\mu_0 \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = (\nabla \times \mathbf{E})_\varphi = \frac{\partial E_r}{\partial z} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} kr \sin(z - \omega t) = \mu_0 \omega \dfrac{J_0}{2} r \sin(kz - \omega t), & 0 \le r \le \alpha^- \\ \dfrac{\rho_0 k}{2\varepsilon_0} \dfrac{\alpha^2}{r} \sin(z - \omega t) = \mu_0 \omega \dfrac{J_0}{2} \dfrac{\alpha^2}{r} \sin(kz - \omega t), \alpha^+ \le r \end{cases}$$

που ικανοποιείται εάν:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} k = \mu_0 \omega J_0$$

Έτσι έχουμε (για θετικό k):

$$k = \frac{\omega}{c},\ \rho_0 = \frac{J_0}{c}$$

Εύκολα φαίνεται ότι στην επιφάνεια $r=\alpha$ δεν ασκούνται δυνάμεις και δεν υφίστανται ρεύματα ή φορτία. Το Poynting επίσης είναι:

$$\mathbf{N} = \hat{\mathbf{z}} E_r H_\varphi = \begin{cases} \dfrac{J_0^2}{4\varepsilon_0 c} r^2 \cos^2\left(\dfrac{\omega}{c} z - \omega t\right), & 0 \le r \le \alpha^- \\ \dfrac{J_0^2}{4\varepsilon_0} \dfrac{\alpha^4}{r^2} \cos^2\left(\dfrac{\omega}{c} z - \omega t\right), & \alpha^+ \le r \end{cases}$$

Στην επιφάνεια εξωτερικά έχουμε το μοναδιαίο διανυσμα να είναι κατά την θετική ακτινική διεύθυνση, ενώ στην εσωτερική πλευρά είναι κατά την αρνητική ακτινική διέυθυνση. Επίσης έχουμε συνέχεια του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου και επιπλεον το ηλεκτρικό πεδίο έχει μονο ακτινική συνιστώσα ενώ το μαγνητικό πεδίο μόνο αζιμουθιακή συνιστώσα. Επομένως για την συνισταμένη ορθή τάση έχουμε:

$$\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}.\mathbf{E}(r=\alpha^+)\hat{\mathbf{r}}.\mathbf{D}(r=\alpha^+) - \hat{\mathbf{r}} w_{em}(r=\alpha^+) - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}.\mathbf{E}(r=\alpha^-)\hat{\mathbf{r}}.\mathbf{D}(r=\alpha^-) + \hat{\mathbf{r}} w_{em}(r=\alpha^-) = 0\hat{\mathbf{r}}$$

Η διατμητική τάση είναι μηδενική σε καθε πλευρά λόγω του προσανατολισμού του ΗΜ πεδίου.