

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΠΕΔΙΑ ΣΕ ΜΗ ΣΥΝΗΘΗ ΥΛΙΚΑ

#### 4.1 Συντακτικές σχέσεις και ταξινόμηση υλικών

##### 4.1.1 Πόλωση, μαγνήτιση και ρεύμα αγωγιμότητας

**Πόλωση:** Σε ατομικό και μοριακό επίπεδο εμφανίζονται στοιχειώδη ηλεκτρικά δίπολα  $\mathbf{p}_j$ , τα οποία συμπεριφέρονται ως σημειακά με βάση τους ακόλουθους μηχανισμούς:

- Σε ετεροπολικά (ιοντικά) μόρια (οξέα, όπως  $\text{H}^+\text{Cl}^-$ , βάσεις, όπως  $\text{Na}^+\text{OH}^-$ , άλατα, όπως  $\text{Na}^+\text{Cl}^-$ ), ο θετικός πόλος (π.χ.  $\text{H}^+$ ,  $\text{Na}^+$ ) είναι μετατοπισμένος σε σχέση με τον αρνητικό (π.χ.  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{OH}^-$ ) και η ασυμμετρία του συμπλέγματος εκδηλώνεται ως ηλεκτρικό δίπολο.
- Σε ορισμένες ομοιοπολικές ενώσεις (όπως,  $\text{H}_2\text{O}$ ) η διάταξη των φορτίων είναι ασύμμετρη.
- Σε συμμετρικά μόρια και άτομα, η επίδραση κάποιου συστηματικού αιτίου (κυρίως του ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$ ) προκαλεί παραμόρφωση και ασυμμετρία.

Ανεξάρτητα από το αίτιο που προκαλεί την εμφάνιση των διπόλων  $\mathbf{p}_j$ , η κατανομή τους στο χώρο περιγράφεται από χωρική πυκνότητα διπολικής ροπής (την **πόλωση** του υλικού):

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \mathbf{p}_j \quad (4.1-1)$$

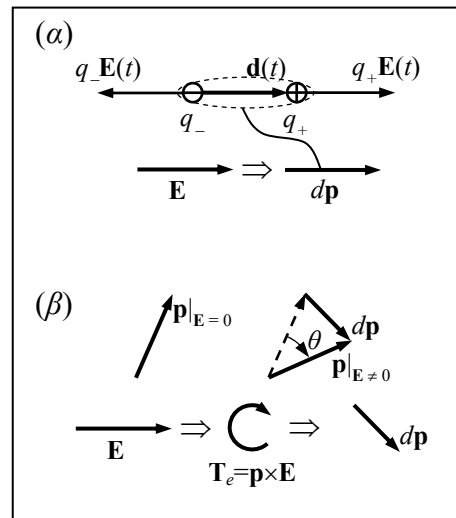
Συνήθως, αν δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο, τα στοιχειώδη δίπολα  $\mathbf{p}_j$ , ακόμη και όταν υπάρχουν, έχουν τυχαίο προσανατολισμό, με αποτέλεσμα να είναι  $\mathbf{P} = 0$  (όταν  $\mathbf{E} = 0$ ). [Σε ειδικά υλικά (στους «ηλεκτρήτες») τα στοιχειώδη δίπολα έχουν προτιμώμενο προσανατολισμό, με αποτέλεσμα την εμφάνιση μόνιμης πόλωσης  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(\mathbf{r}, t)$ .] Κατά το χρονικό διάστημα  $dt$  αναπτύσσεται πόλωση  $d\mathbf{P}$  ως αποτέλεσμα της δημιουργικής δράσης του πεδίου  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , η οποία όμως περιορίζεται από την καταστροφική δράση, τυχαία ή συστηματική, των παρακείμενων μορίων ή ατόμων σε κάθε στοιχειώδες δίπολο  $\mathbf{p}_j$ . Το ισοζύγιο μπορεί να γραφεί ως  $d\mathbf{P} = \mathbf{G}_p(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t))dt$ , όπου  $\mathbf{G}_p$  είναι κατάλληλη συνάρτηση, που προσδιορίζεται από τη μικροσκοπική μελέτη του υλικού. Ολοκληρώνοντας, προκύπτει:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \mathbf{G}_p(\mathbf{r}, t', \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')) dt' \quad (4.1-2)$$

Η έκφραση αυτή προβάλλει ότι η πόλωση  $\mathbf{P}$  εξαρτάται από τη χρονικά αθροιστική δράση του πεδίου  $\mathbf{E}$  και συνεπώς από τις τιμές του  $\mathbf{E}$  σε κάθε προγενέστερη χρονική στιγμή  $t'$ .

Σε στατικές καταστάσεις, αλλά και γενικότερα όταν η χρονική μεταβολή του ηλεκτρικού πεδίου είναι αρκετά αργή, ώστε τα μικροσκοπικά στοιχεία του υλικού να ανταποκρίνονται ακαριαία, η δημιουργία  $d\mathbf{P}$  από τη δράση του ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  κατά το χρονικό διάστημα  $dt$  περιγράφεται ποιοτικά από τα ακόλουθα κυρίως μοντέλα:

(α) Δημιουργία διπόλου: Το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί δυνάμεις ίσες με  $q_{\pm}\mathbf{E}$  στα θετικά και στα αρνητικά συστατικά του ατόμου ή μορίου, που τείνουν να τα αποχωρίσουν. Ταυτόχρονα, στα ίδια συστατικά το υπόλοιπο υλικό ασκεί δυνάμεις, που τείνουν να τα επαναφέρουν στην αρχική θέση τους. Ισορροπία επιτυγχάνεται, όταν η μετατόπιση φθάσει σε κάποια κατάλληλη τιμή  $\mathbf{d}$ , με αποτέλεσμα την εμφάνιση διπόλου  $d\mathbf{p} = q_+\mathbf{d}$ , όπως παρουσιάζεται στο **Σχήμα 4.1-1(α)**.



Σχήμα 4.1-1

(β) Στροφή σταθερού διπόλου: Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 4.1-1(β)**, το ηλεκτρικό πεδίο ασκεί σε ένα προϋπάρχον ηλεκτρικό δίπολο ροπή, ίση με  $\mathbf{T}_e = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ , που τείνει να στρέψει το δίπολο. Στη ροπή αυτή αντιδρά το υπόλοιπο υλικό, με αποτέλεσμα να αποκατασταθεί ισορροπία όταν το δίπολο στραφεί κατά κατάλληλη γωνία  $\theta$ . Η στροφή του διπόλου ισοδυναμεί με μεταβολή της διπολικής ροπής του (ως διανύσματος), από  $\mathbf{p}|_{\mathbf{E}=0}$  σε  $\mathbf{p}|_{\mathbf{E} \neq 0} = \mathbf{p}|_{\mathbf{E}=0} + d\mathbf{p}$ , δηλαδή από τη δράση του ηλεκτρικού πεδίου παράγεται πρόσθετη διπολική ροπή ίση με  $d\mathbf{p}$ . [Το ηλεκτρικό πεδίο τείνει επιπλέον να μεταβάλλει και την απόσταση μεταξύ των πόλων του διπόλου και να παράγει πρόσθετη μεταβολή  $d\mathbf{p}$ , περίπου όπως και στο προηγούμενο ενδεχόμενο. Αυτή η μεταβολή είναι κατά κανόνα πολύ μικρότερη από το  $d\mathbf{p}$  που οφείλεται στην περιστροφή.]

Για το λεπτομερή προσδιορισμό του  $d\mathbf{p}$  πρέπει να ληφθούν υπ' όψιν οι δυνάμεις και οι ροπές επαναφοράς (οι εσωτερικές του μορίου, ή οι οφειλόμενες στα γειτονικά μόρια) που τείνουν να εμποδίσουν την παραμόρφωση ή τη στροφή, καθώς και τα τυχαία φαινόμενα (οι «συγκρούσεις») που τείνουν να κάνουν τυχαίο τον προσανατολισμό. Πάντως, από την ποιοτική περιγραφή αναμένεται αποτέλεσμα με  $d\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} > 0$ . Επιπρόσθετα, όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι χρονομεταβλητό, η αδράνεια (επειδή η μάζα και η ροπή αδρανείας είναι μη μηδενικές) έχει ως αποτέλεσμα χρονική υστέρηση στην εκδήλωση του  $d\mathbf{p}$  σε σχέση με το πεδίο  $\mathbf{E}$ . Περιγράφοντας ποσότητες με κυκλική συχνότητα  $\omega$  μέσω των φασιθετών τους, η χρονική υστέρηση περιγράφεται από διαφορά φάσης μεταξύ των  $d\mathbf{p}$  και  $\mathbf{E}$ .

**Μαγνήτιση:** Ένα υλικό μέσο περιέχει στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα  $\mathbf{m}_j$ , λόγω:

- Της περιστροφής των ηλεκτρονίων γύρω από τον πυρήνα, που αντιπροσωπεύει ηλεκτρικό ρεύμα  $i$  σε βρόχο με μικρό εμβαδό  $S$ , συνεπώς μαγνητικό δίπολο. Όπως θα περιγραφεί σύντομα, η μαγνητική ροπή του έχει μέτρο  $|\mathbf{m}| = iS = \frac{1}{2}e\omega r^2$ , όπου  $e$  είναι το στοιχειώδες φορτίο και  $\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του ηλεκτρονίου.
- Της ύπαρξης μιας έμφυτης φυσικής ιδιότητας σε κάθε ηλεκτρόνιο, του *spin*, που αντιπροσωπεύει σε μαγνητική διπολική ροπή, με μέτρο  $|\mathbf{m}| = eh/4\pi m_e$ , όπου  $e$  είναι πάλι το στοιχειώδες φορτίο,  $h$  είναι η σταθερά του *Planck* και  $m_e$  είναι η μάζα του ηλεκτρονίου.

Η κατανομή των μαγνητικών διπόλων στο χώρο περιγράφεται από χωρική πυκνότητα:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j \in \Delta V} \mathbf{m}_j. \quad (4.1-3)$$

Όταν η πυκνότητα μαγνητικής διπολικής ροπής  $\mathbf{M}$  αναφέρεται σε μαγνητικά δίπολα που αποτελούν συστατικά ενός υλικού ονομάζεται **μαγνήτιση** του υλικού.

Συνήθως, αν δεν υπάρχει πεδίο  $\mathbf{B}$ , τα στοιχειώδη μαγνητικά δίπολα έχουν τυχαίο προσανατολισμό, με αποτέλεσμα να είναι κατά μέσο όρο  $\langle \mathbf{m}_j \rangle = 0$ , δηλαδή να είναι  $\mathbf{M} = 0$ , όταν  $\mathbf{B} = 0$ . Υπάρχει, όμως, η κατηγορία των «σιδηρομαγνητικών υλικών» (κυρίως των Fe, Co, Ni και των κραμάτων τους, αλλά και εκείνων που ανήκουν στην ίδια ομάδα και σε επόμενες περιόδους του περιοδικού πίνακα), όπου τα στοιχειώδη δίπολα μπορούν να έχουν συστηματικό προσανατολισμό, έτσι ώστε να υπάρχει μόνιμη μαγνήτιση  $\mathbf{M}_{\text{μov}}(\mathbf{r}, t)$ . Αυτό μπορεί να συμβεί, αν η θερμοκρασία είναι χαμηλότερη από τη «θερμοκρασία *Curie*». (Στα Fe, Co, Ni, η θερμοκρασία *Curie* υπερβαίνει τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος.).

Κατά το χρονικό διάστημα  $dt$  αναπτύσσεται μαγνήτιση  $d\mathbf{M}$  λόγω της δράσης του πεδίου  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , που όμως παρεμποδίζεται από τις αλληλεπιδράσεις κάθε στοιχειώδους διπόλου  $m_j$  με τα παρακείμενα άτομα ή μόρια. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις είναι είτε συστηματικές (π.χ. ροπές που τείνουν να επαναφέρουν το δίπολο σε κάποιον προτιμώμενο προσανατολισμό), είτε τυχαίες (π.χ. «συγκρούσεις» που καταλήγουν ακαριαία σε τυχαίο προσανατολισμό του διπόλου). Συνολικά, μπορεί να γραφεί  $d\mathbf{M} = \mathbf{G}_M(\mathbf{r}, t, \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))dt$ , όπου  $\mathbf{G}_M$  είναι κατάλληλη συνάρτηση που αποδίδει την αντίδραση του υλικού. Ολοκληρώνοντας, προκύπτει:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{M}_{\text{μov}}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \mathbf{G}_M(\mathbf{r}, t', \mathbf{B}(\mathbf{r}, t'))dt', \quad (4.1-4)$$

δηλαδή η μαγνήτιση εξαρτάται από την αθροιστική δράση του πεδίου  $\mathbf{B}$  κατά τις προγενέστερες χρονικές στιγμές  $t'$ .

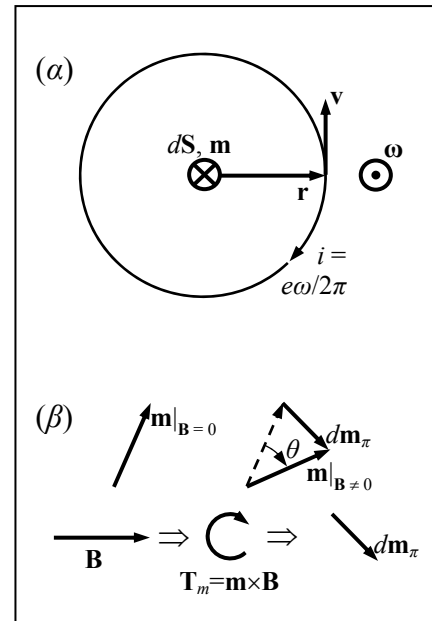
Σε ποιοτική περιγραφή, οι βασικοί μηχανισμοί για την ανάπτυξη μαγνήτισης  $\mathbf{M}$  είναι:

(α) Αλλοίωση της κυκλικής συχνότητας (και της γωνιακής ταχύτητας) με την οποία περιστρέφεται το ηλεκτρόνιο γύρω από τον πυρήνα: Σε κάθε περίπτωση, η κίνηση σε τροχιά με κβαντισμένη ακτίνα  $r$ , με ταχύτητα  $v$  και συνεπώς με γωνιακή ταχύτητα  $\omega = v/r$  (ή, διανυσματικά, τέτοια ώστε  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , με το διάνυσμα  $\boldsymbol{\omega}$  να προσδιορίζεται από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου), αντιπροσωπεύει νηματοειδές ρεύμα με μέτρο  $i = e\omega/2\pi$  (επειδή φορτίο ίσο με  $q_e = -e$  διέρχεται από κάθε σημείο της τροχιάς σε χρονικό διάστημα  $T = 2\pi/\omega$ ). Η τροχιά του ηλεκτρονίου (δηλαδή, ο βρόχος με το ρεύμα  $i$ ) έχει μικρό εμβαδό  $S = \pi r^2$ , οπότε το περιστρεφόμενο ηλεκτρόνιο αντιπροσωπεύει μαγνητικό δίπολο, με διπολική ροπή με μέτρο  $|\mathbf{m}| = iS = \frac{1}{2}e\omega r^2$  και με φορά αντίθετη του  $\boldsymbol{\omega}$ , συνεπώς ως διάνυσμα η μαγνητική ροπή είναι ίση με  $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}er^2\boldsymbol{\omega}$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 4.1-2(α)**. Όταν  $\mathbf{B} = 0$ , το γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται με κάποια γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$  σημαίνει ότι οι λοιπές δυνάμεις (με ηλεκτρική προέλευση) δρουν ως κεντρομόλες, άρα είναι ίσες με  $\mathbf{F}_0 = -m_e\omega_0^2\mathbf{r}$ . Όταν όμως  $\mathbf{B} \neq 0$ , η πρόσθετη παρουσία της μαγνητικής δύναμης  $\mathbf{F}_m = (-e)\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  σημαίνει πως η τροχιά του ηλεκτρονίου καθορίζεται από τη συνολική δύναμη  $\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_m$ , με αναμενόμενο αποτέλεσμα να μεταβληθεί η γωνιακή ταχύτητα σε κάποια νέα τιμή  $\omega$ . Με  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , αναπτύσσοντας το διπλό εξωτερικό γινόμενο προκύπτει, ότι  $\mathbf{F}_m = e[(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]$ . Λόγω της ταχύτατης περιστροφής, ο όρος  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})$  είναι κατά μέσο όρο ίσος με μηδέν, ενώ ο δεύτερος είναι προσθετός στην κεντρομόλο δύναμη. Συνολικά, όταν  $\mathbf{B} \neq 0$ , η δύναμη είναι  $\mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_m$ , δηλαδή κατά μέσο όρο ίση με  $-(m_e\omega_0^2 + e\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}$ . Εξισώνοντας με την κεντρομόλο δύναμη (την ποσότητα  $-m_e\omega_0^2\mathbf{r}$ ) προκύπτει η νέα τιμή της γωνιακής ταχύτητας  $\omega$ . Η ισότητα αυτή δίνει  $\omega^2 = \omega_0^2 + (e/m_e)\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , και επειδή  $\mathbf{m} = -\frac{1}{2}er^2\boldsymbol{\omega}$ :

- Αν  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{m} > 0 \Rightarrow \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} < 0 \Rightarrow \omega < \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{m}| < |\mathbf{m}_0|$ ,
- Αν  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{m} < 0 \Rightarrow \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0 \Rightarrow \omega > \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{m}| > |\mathbf{m}_0|$ ,

Σε κάθε περίπτωση η διπολική ροπή μεταβάλλεται κατά  $d\mathbf{m}_\delta = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$ , για το οποίο ισχύει ότι  $d\mathbf{m}_\delta \cdot \mathbf{B} < 0$ .

(β) Στροφή προϋπάρχοντος διπόλου  $\mathbf{m}$ , από τη δράση της ροπής  $\mathbf{T}_m = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ : Η διαδικασία είναι πανομοιότυπη με την όμοια περίπτωση του ηλεκτρικού διπόλου, με αποτέλεσμα, όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 4.1-2(β)**, η διπολική ροπή να μεταβληθεί από  $\mathbf{m}|_{\mathbf{B}=0}$  σε  $\mathbf{m}|_{\mathbf{B} \neq 0} = \mathbf{m}|_{\mathbf{B}=0} + d\mathbf{m}_\pi$ , και τώρα ισχύει ότι  $d\mathbf{m}_\pi \cdot \mathbf{B} > 0$ .



Σχήμα 4.1-2

Από τους δύο αυτούς μηχανισμούς, η αλλοίωση της κυκλικής συχνότητας και το αποτέλεσμα  $d\mathbf{m}_\delta \cdot \mathbf{B} < 0$  ονομάζεται «διαμαγνητισμός» και λαμβάνει χώρα σε όλα τα υλικά. Η περιστροφή του διπόλου και το αποτέλεσμα  $d\mathbf{m}_\pi \cdot \mathbf{B} > 0$  ονομάζεται «παραμαγνητισμός» και εκδηλώνεται μόνο σε υλικά, των οποίων τα μόρια έχουν περιττό πλήθος ηλεκτρονίων. [Τα ηλεκτρόνια διατάσσονται σε ζεύγη με αντίρροπο *spin*, οπότε μόρια με άρτιο αριθμό ηλεκτρονίων έχουν συνολικά μηδενική μαγνητική ροπή.] Ανάλογα με το ποιος μηχανισμός είναι ισχυρότερος, για το συνολικό  $d\mathbf{m} = d\mathbf{m}_\delta + d\mathbf{m}_\pi$  είτε θα είναι  $d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} < 0$ , δηλαδή η μαγνήτιση  $\mathbf{M}$  θα είναι αντιπαράλληλη του πεδίου  $\mathbf{B}$ , οπότε διατηρείται ο χαρακτηρισμός του υλικού ως «διαμαγνητικού», είτε θα είναι  $d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} > 0$ , οπότε αναπτύσσεται μαγνήτιση  $\mathbf{M}$  ομόρροπη με το  $\mathbf{B}$  και τότε το υλικό ονομάζεται «παραμαγνητικό». (Δηλαδή, σε παραμαγνητικό υλικό εκδηλώνεται και διαμαγνητισμός, αλλά απλά το ανταγωνιστικό φαινόμενο του παραμαγνητισμού είναι ισχυρότερο.) Η ακραία περίπτωση έντονου και σωρευτικού παραμαγνητισμού ονομάζεται «σιδηρομαγνητισμός».

**Αγωγιμότητα:** Ένα υλικό μέσο μπορεί να περιέχει φορτισμένα στοιχειώδη σωμάτια, των οποίων η σύνδεση με τα λοιπά συστατικά του υλικού είναι σχετικά χαλαρή. Τέτοια είναι κατ' εξοχήν τα ηλεκτρόνια στην εξωτερική στιβάδα των μετάλλων ή τα ιόντα ενός ηλεκτρολύτη. Κάτω από την επίδραση των πεδίων, κυρίως του ηλεκτρικού, η ταχύτητα μεταβάλλεται κατά  $d\mathbf{v} = (q/m)\mathbf{E}dt$ , με αποτέλεσμα να συνεισφέρουν στην πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος  $\mathbf{J} = (1/V)\sum_{j \in V}(q\mathbf{v})_j$  κατά ποσότητα  $q d\mathbf{v} = (q^2/m)\mathbf{E}dt$ , ομόρροπα με το  $\mathbf{E}$ . Στη συστηματική αυτή μεταβολή της ταχύτητας αντιδρούν τα υπόλοιπα συστατικά, είτε συστηματικά (συγκράτηση ηλεκτρονίων στον ιστό του υλικού), είτε με τυχαίο τρόπο (συγκρούσεις κινούμενων φορτίων με άλλα σωμάτια, που έχουν ως αποτέλεσμα ακαριαία μεταβολή στο μέτρο ή στη διεύθυνση της ταχύτητας). Το συνολικό φαινόμενο μπορεί να γραφεί ως  $d\mathbf{J} = G_J(\mathbf{r}, t, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t))dt$ , και με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο προσδιορίζεται η συνολική συνεισφορά στο ρεύμα  $\mathbf{J}$ :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_{\text{mov}}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t \mathbf{G}_J(\mathbf{r}, t', \mathbf{E}(\mathbf{r}, t')) dt' . \quad (4.1-5)$$

Η ποσότητα  $\mathbf{J}_{\text{mov}}$  αντιπροσωπεύει ηλεκτρικό ρεύμα που ενδεχομένως εκδηλώνεται στο υλικό από αίτια ανεξάρτητα του ηλεκτρικού πεδίου, ενώ η συνάρτηση  $\mathbf{G}_J$ , που προσδιορίζεται από τη μικροσκοπική μελέτη του υλικού, περιγράφει το μηχανισμό, μέσω του οποίου το ηλεκτρικό ρεύμα αναπτύσσεται από τη δράση του ηλεκτρικού πεδίου. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται «αγωγιμότητα».

#### 4.1.2 Γενική ταξινόμηση υλικών

**Συντακτικές Σχέσεις:** Οι σχέσεις (4.1-2, 4, 5) μπορούν να γραφούν με τη μορφή:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E}'), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{B}'), \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E}'), \quad (4.1-6)$$

όπου με συμβολισμό όπως  $\mathbf{E}'$  παριστάνεται το πεδίο  $\mathbf{E}$  κατά τις χρονικές στιγμές  $t' < t$ . Όπως όμως έχει περιγραφεί στην παράγρ. 1.3 του Μέρους Α, οι χωρικές πυκνότητες ηλεκτρικής και μαγνητικής διπολικής ροπής, συνεπώς και η πόλωση και η μαγνήτιση, μπορούν να υποκατασταθούν από κατανομές φορτίου και ρεύματος, π.χ. σε σημεία του χώρου χωρίς ασυνέχεια από τις πυκνότητες φορτίου και ρεύματος:

$$\rho_\delta = \rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{J}_\delta = \mathbf{J}_p + \mathbf{J}_M = (\partial/\partial t)\mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M}, \quad (4.1-7)$$

και από τις εκφράσεις που αναφέρονται στην παράγρ. 1.3 σε περιπτώσεις με ασυνέχεια σε επιφάνεια, γραμμή ή σημείο. Η αντιστοιχία με φορτία και ρεύματα εκφράζεται από τους ίδιους τελεστές [στη σχέση (4.1-7) από την απόκλιση και χρονική παράγωγο για την πόλωση  $\mathbf{P}$ , από την περιστροφή για τη μαγνήτιση  $\mathbf{M}$ , και αντίστοιχα σε περιπτώσεις ασυνεχειών] που δρουν στην ένταση του ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  και στη μαγνητική επαγωγή  $\mathbf{B}$  στους μικροσκοπικούς νόμους του *Gauss* και του *Ampere*, πράγμα που επιτρέπει να συνενωθούν αυτές οι ποσότητες με την ένταση ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  και με την πυκνότητα μαγνητικής ροής  $\mathbf{B}$ , όπως έχει περιγραφεί στην παράγραφο 2.1.1 του Μέρους Α. Συνέπεια της συνένωσης είναι ότι σχηματίζονται οι πεδιακές ποσότητες  $\mathbf{D}$  και  $\mathbf{H}$  (πυκνότητα ηλεκτρικής ροής και ένταση μαγνητικού πεδίου, αντίστοιχα). Τα πεδία αυτά έχουν ορισθεί στην ίδια παράγραφο 2.1.1 ως:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}(\mathbf{E}'), \quad \mathbf{H} = \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M}(\mathbf{B}'), \quad (4.1-8)$$

με τους συμβολισμούς  $\mathbf{E}'$  και  $\mathbf{B}'$  όπως στις σχέσεις (4.1-6). Οι σχέσεις (4.1-8), συνοδευόμενες από τη σχέση  $\mathbf{J}(\mathbf{E}')$ , αντιπροσωπεύουν τη γενική μορφή των συντακτικών σχέσεων, που συνδέουν τα από φυσική σκοπιά παράγωγα πεδία  $\mathbf{D}$  και  $\mathbf{H}$ , με τα βασικά πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{H}$ . Δηλαδή, σ' ένα υλικό τα φαινόμενα διηλεκτρισμού, δια/παραμαγνητισμού και αγωγιμότητας περιγράφονται από κατάλληλες σχέσεις με γενική μορφή:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} + \epsilon_0 \mathbf{E} + \int_{-\infty}^t \mathbf{G}_p(t', \mathbf{E}(t')) dt', \\ \mathbf{H} &= -\mathbf{M}_{\mu\text{ov}} + \mu_0^{-1} \mathbf{B} - \int_{-\infty}^t \mathbf{G}_M(t', \mathbf{B}(t')) dt', \\ \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{\mu\text{ov}} + \int_{-\infty}^t \mathbf{G}_J(t', \mathbf{E}(t')) dt'. \end{aligned} \quad (4.1-9)$$

Στις σχέσεις αυτές υπονοείται εξάρτηση από  $\mathbf{r}$  και  $t$ . Αν κατά την κίνησή τους τα δίπολα ή τα φορτία μετακινούνται αισθητά, τότε στις συναρτήσεις  $\mathbf{G}$  πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν και η εξάρτηση  $\mathbf{r}(t')$ . Τότε, μπορεί να εμφανισθεί εξάρτηση και από τα δύο πεδία  $\mathbf{E}'$  και  $\mathbf{B}'$ .

Σε μόνιμη κατάσταση ( $\partial/\partial t = 0$ ) δεν έχει, φυσικά, νόημα η διάκριση μεταξύ των πεδίων σε προηγούμενες χρονικές στιγμές, όπως του  $\mathbf{E}(t')$ , και στον παρόντα χρόνο  $t$ . Το ίδιο συμβαίνει και όταν οι χρονικές μεταβολές είναι αρκετά αργές, σε σχέση με τη χρονική κλίμακα απόκρισης του υλικού στα επιβαλλόμενα πεδία. Τότε, το υλικό χαρακτηρίζεται από ακαριαία απόκριση και τα μεγέθη  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$  και  $\mathbf{J}$  εξαρτώνται μόνο από τις παρούσες τιμές των πεδίων, και όχι τις προγενέστερες. Επί πλέον, όπως έχει περιγραφεί και στην παράγρ. 2.1.1, στις πρακτικές εφαρμογές εξυπηρετεί να θεωρηθεί το πεδίο  $\mathbf{H}$  ως θεμελιώδες και το  $\mathbf{B}$  ως παράγωγο. Χρησιμοποιώντας συνεπώς τα  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  ως βασικά πεδία, προκύπτουν σχέσεις  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$  και  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{E})$ . Ειδικές περιπτώσεις είναι τα υλικά που είναι μόνο ισοτροπικά, μόνο γραμμικά, ταυτόχρονα γραμμικά και ισοτροπικά, με μόνιμη μαγνήτιση ή πόλωση, καθώς και τα μη γραμμικά υλικά, χωρίς ή με βρόχο υστέρησης.

**Ισοτροπικά Υλικά:** Έτσι ονομάζονται τα υλικά, στα οποία η διεύθυνση του αποτελέσματος  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$  ή  $\mathbf{J}$  καθορίζεται μόνο από το αίτιο (το πεδίο) και όχι από τις ιδιότητες του υλικού. Κατά συνέπεια, αίτιο και αποτέλεσμα είναι συγγραμμικά και μόνο το μέτρο του αιτίου έχει επίδραση στο αποτέλεσμα. Γράφοντας  $\mathbf{E} = E\mathbf{i}_E$  κλπ., σχηματίζονται εκφράσεις με μορφή:

$$\mathbf{P} = P(E)\mathbf{i}_E, \quad \mathbf{M} = M(H)\mathbf{i}_H, \quad \mathbf{J} = J(E)\mathbf{i}_E. \quad (4.1-10)$$

**Γραμμικά Υλικά:** Εν γένει, μία συνάρτηση όπως η  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά *McLaurin*. Για παράδειγμα, για τη συνιστώσα  $P_x(E_x, E_y, E_z)$  το ανάπτυγμα έχει τη γενική μορφή:

$$P_x = P_{x0} + \left. \frac{\partial P_x}{\partial E_x} \right|_0 E_x + \left. \frac{\partial P_x}{\partial E_y} \right|_0 E_y + \left. \frac{\partial P_x}{\partial E_z} \right|_0 E_z + \dots \quad (4.1-11)$$

και όμοια για τις συνιστώσες  $P_y$  και  $P_z$ , όπου ο δείκτης "0" σημαίνει την τιμή όταν είναι  $\mathbf{E} = 0$ . Γραμμικά υλικά χαρακτηρίζονται εκείνα, στα οποία είναι  $P_{x0} = 0$  και όμοια  $P_{y0} = P_{z0} = 0$  (δηλαδή,  $\mathbf{P}(\mathbf{E}=0) = 0$ ) και επίσης οι όροι ανώτερης τάξης, με μορφή όπως  $E_x^2, E_x E_y$  κλπ., έχουν μικρή τιμή, ώστε να είναι αμελητέοι. Τότε, η σύνδεση της πόλωσης  $\mathbf{P}$  με το ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  περιγράφεται από το τανυστικό γινόμενο  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \vec{\chi}_e \cdot \mathbf{E}$ , όπου έχει εισαχθεί ο «τανυστής ηλεκτρικής δεκτικότητας»  $\vec{\chi}_e$ , με όρους:

$$\varepsilon_0 \vec{\chi}_e = \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial P_x}{\partial E_x} & \frac{\partial P_x}{\partial E_y} & \frac{\partial P_x}{\partial E_z} \\ \frac{\partial P_y}{\partial E_x} & \frac{\partial P_y}{\partial E_x} & \frac{\partial P_y}{\partial E_x} \\ \frac{\partial P_z}{\partial E_x} & \frac{\partial P_z}{\partial E_x} & \frac{\partial P_z}{\partial E_x} \end{array} \right)_{\mathbf{E}=0}, \quad (4.1-12)$$

και αντίστοιχα για τις άλλες δύο συντακτικές σχέσεις. Συνολικά, για τα γραμμικά υλικά είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \varepsilon_0 \vec{\chi}_e \cdot \mathbf{E} & (\text{όπου } \vec{\chi}_e &= \text{τανυστής ηλεκτρικής δεκτικότητας}) \\ \mathbf{M} &= \vec{\chi}_m \cdot \mathbf{H} & (\text{όπου } \vec{\chi}_m &= \text{τανυστής μαγνητικής δεκτικότητας}) \\ \mathbf{J} &= \vec{g} \cdot \mathbf{E} & (\text{όπου } \vec{g} &= \text{τανυστής ειδικής αγωγιμότητας}) \end{aligned} \quad (4.1-13)$$

και συνεπώς, με  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  και  $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$  προκύπτουν οι συντακτικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \vec{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}, & \text{με } \vec{\varepsilon} &= \varepsilon_0 (\vec{\mathbf{I}} + \vec{\chi}_e), \\ \mathbf{B} &= \vec{\mu} \cdot \mathbf{H}, & \text{με } \vec{\mu} &= \mu_0 (\vec{\mathbf{I}} + \vec{\chi}_m), \end{aligned} \quad (4.1-14)$$

για γραμμικά διηλεκτρικά υλικά που περιγράφονται από τανυστή επιτρεπτότητας  $\vec{\varepsilon}$ , και για μαγνητικά υλικά με τανυστή μαγνητικής διαπερατότητας  $\vec{\mu}$ .

**Γραμμικά και Ισοτροπικά Υλικά:** Όταν συνυπάρχουν οι δύο προηγούμενες ιδιότητες, τότε οι ποσότητες π.χ.  $\mathbf{P}$  (ή  $\mathbf{D}$ ) και  $\mathbf{E}$  είναι συγγραμμικές, όπως απαιτείται για ισοτροπικά υλικά, και σε ευθεία αναλογία, αφού πρόκειται για γραμμικά υλικά. Για να συμβεί αυτό, στους τανυστές πρέπει τα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου να είναι μηδενικά, και στην κύρια διαγώνιο να έχουν την ίδια τιμή, οι τανυστές, δηλαδή, πρέπει να έχουν τη μορφή π.χ.  $\vec{\chi}_e = \chi_e \vec{\mathbf{I}}$  (ή,  $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{\mathbf{I}}$ ) κλπ. Τότε, οι σχέσεις γίνονται απλά:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, & \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H}, & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{J} &= g \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (4.1-15)$$

Στις σχέσεις αυτές εμφανίζονται, ως βαθμωτές τώρα ποσότητες, η ηλεκτρική δεκτικότητα  $\chi_e$ , με την οποία συνδέεται η επιτρεπτότητα  $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ , η μαγνητική δεκτικότητα  $\chi_m$ , με τη μαγνητική διαπερατότητα να είναι  $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ , και τέλος η ειδική αγωγιμότητα  $g$ . Υλικά που υπακούουν σε τέτοιες σχέσεις ονομάζονται «συνήθη διηλεκτρικά υλικά», «συνήθη μαγνητικά υλικά» και «συνήθη αγώγιμα υλικά». Οι δεκτικότητες  $\chi_e$  και  $\chi_m$  είναι αδιάστατες, ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές (επίσης και στην τανυστική μορφή) έχουν τις μονάδες:



$$[\varepsilon] = \text{F/m} \quad (\text{Farad ανά μέτρο}),$$

$$[\mu] = \text{H/m} \quad (\text{Henri ανά μέτρο}),$$

$$[g] = \text{S/m} \quad (\text{Siemens ανά μέτρο, όπου Siemens είναι το αντίστροφο του } \Omega = \text{Ohm}).$$

Συχνά χρησιμοποιούνται και οι αδιάστατες ποσότητες

$$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + \chi_e \quad (\text{σχετική επιτρεπτότητα, ή «διηλεκτρική σταθερά»}),$$

$$\mu_r = \mu/\mu_0 = 1 + \chi_m \quad (\text{σχετική μαγνητική διαπερατότητα}).$$

Τέλος, ως προς τις αριθμητικές τιμές τους ισχύουν τα ακόλουθα:

- Διηλεκτρικά Υλικά: Πάντοτε είναι  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e \geq 1$ , επειδή  $d\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} > 0$ , όπως έχει περιγραφεί σε σχέση με το **Σχήμα 4.1**, και, συνεπώς,  $|\mathbf{D}| = |\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}| \geq |\varepsilon_0 \mathbf{E}|$ . Ειδικότερα, σε υλικά με ηλεκτρονική πολωσιμότητα (κυρίως, σε μονατομικά ή πολυατομικά υλικά με συμμετρική δομή) η μετατόπιση του «κέντρου βάρους» των ηλεκτρονίων σε σχέση με τον πυρήνα έχει ως συνέπεια τη δημιουργία ασθενών ηλεκτρικών διπόλων, οπότε σε τέτοια υλικά είναι  $\chi_e \ll 1$  και  $\varepsilon_r \approx 1$ . Αντίθετα, σε υλικά με ιοντική πολωσιμότητα (κυρίως, πολυατομικά με ασύμμετρη δομή, χωρίς όμως έμφυτη διπολική ροπή), το ηλεκτρικό πεδίο προκαλεί σχετική μετατόπιση των δύο μερών του πυρήνα, που τα παρακολουθούν τα αντίστοιχα ηλεκτρόνια. Σε τέτοια υλικά είναι  $\chi_e \sim 1$  και  $\varepsilon_r > 1$ , αλλά όχι με ιδιαίτερα μεγάλες τιμές. Τέλος, σε υλικά με πολωσιμότητα περιστροφής (κυρίως, πολυατομικά, με ασυμμετρία που αντιστοιχεί σε διπολική ροπή), η στροφή του προϋπάρχοντος διπόλου παράγει έντονο διηλεκτρισμό, με  $\chi_e \sim \varepsilon_r (= 1 + \chi_e) \gg 1$ . Πάντως, τιμές  $\varepsilon_r \gg 100$  έχουν μόνο λίγα ειδικά κεραμικά υλικά.
- Μαγνητικά Υλικά: Όταν το μόνο ή, τουλάχιστον, το κυρίαρχο αίτιο για ανάπτυξη μαγνήτισης είναι η αλλοίωση της κυκλικής συχνότητας των ηλεκτρονίων, όπως στο **Σχήμα 4.1-2(α)**, τότε είναι  $d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} < 0$  και  $|\mathbf{H}| = |\mu_0^{-1} \mathbf{B} - \mathbf{M}| > |\mu_0^{-1} \mathbf{B}|$ , δηλ.  $|\mathbf{B}| < |\mu_0 \mathbf{H}|$ . Πρόκειται για τα διαμαγνητικά υλικά, στα οποία  $\chi_m < 0$ , αλλά κατά κανόνα με  $|\chi_m| \ll 1$ . Σε τέτοια υλικά, η σχετική μαγνητική διαπερατότητα υπολείπεται ελαφρά της μονάδας, αλλά συνήθως μπορεί να ληφθεί  $\mu_r \approx 1$ . Αν αντίθετα, η μαγνήτιση που οφείλεται σε στροφή των στοιχειωδών μαγνητικών διπόλων (που αντιπροσωπεύουν το *spin* των ηλεκτρονίων), όπως στο **Σχήμα 4.1-2(β)**, υπερβαίνει εκείνη που οφείλεται στην αλλοίωση της κυκλικής συχνότητας των ηλεκτρονίων, τότε είναι  $d\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} < 0$  και  $|\mathbf{B}| > |\mu_0 \mathbf{H}|$  (παραμαγνητικά υλικά), δηλαδή  $\chi_m > 0$  και  $\mu_r > 1$ . Τέλος, υπάρχει και το ενδεχόμενο  $\mu_r \gg 1$ , που συναντάται σε υλικά στα οποία ο παραμαγνητισμός εκδηλώνεται σωρευτικά και σε περιοχές με μακροσκοπικές διαστάσεις. Τέτοια

υλικά, τα σιδηρομαγνητικά, είναι κατ' εξοχήν ο σίδηρος (Fe), το κοβάλτιο (Co) και το νικέλιο (Ni), καθώς και τα κράματά τους, εφόσον η θερμοκρασία τους δεν υπερβαίνει την αντίστοιχη θερμοκρασία *Curie*, πάνω από την οποία εξαφανίζεται ο σιδηρομαγνητισμός. Στα υλικά αυτά είναι δυνατόν να εκδηλωθούν τιμές της σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας, οι οποίες να υπερβαίνουν κατά πολύ το 1000, αλλά η γραμμική σχέση  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  (με σταθερό  $\mu$ ) ισχύει μόνο για σχετικά μικρές τιμές του μαγνητικού πεδίου, πέρα από τις οποίες παύει η γραμμική συμπεριφορά.

- Αγώγιμα Υλικά: Σε αντίθεση με τα διηλεκτρικά και τα μαγνητικά υλικά, στα οποία ο χαρακτηρισμός εξαρτάται από τις τιμές των αδιάστατων πηλίκων  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  και  $\mu_r = \mu/\mu_0$ , τα αγώγιμα υλικά χαρακτηρίζονται από την απόλυτη τιμή της ειδικής αγωγιμότητας  $g$ , της οποίας η αριθμητική τιμή εξαρτάται και από τις μονάδες που χρησιμοποιούνται (εδώ, S/m), και είναι τελείως συμπτωματικό το γεγονός, ότι η ταξινόμηση γίνεται σε σχέση με την τιμή 1 S/m. Συγκεκριμένα, ως καλοί αγωγοί εν γένει χαρακτηρίζονται τα υλικά με  $g \gg 1$  S/m. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν κατ' εξοχήν τα μέταλλα, στην περιοχή από  $g_{Cu} = 6 \times 10^7$  S/m μέχρι  $g_{Pb} = 5 \times 10^6$  S/m. Λίγο χαμηλότερα είναι ο άνθρακας ( $g_C = 3 \times 10^4$  S/m) και τα ηλεκτρολυτικά διαλύματα. Το άλλο όριο, οι καλοί μονωτές, χαρακτηρίζεται από  $g \ll 1$  S/m. Τέτοια υλικά είναι το ξύλο (με  $g \sim 10^{-10}$  S/m, ανάλογα με τη σύσταση), η πορσελάνη ( $g \approx 10^{-12}$  S/m) κλπ. Τέλος, η ενδιάμεση περιοχή (με  $g \lesssim 1$  S/m) περιλαμβάνει τα υλικά που χαρακτηρίζονται ως κακοί αγωγοί ή κακοί μονωτές (ανάλογα με τη θεώρηση). Παραδείγματα είναι το έδαφος (το ξηρό με  $g \simeq 10^{-4}$  S/m και το υγρό με  $g \simeq 10^{-2}$  S/m) και το νερό (με  $g = 2 \times 10^{-4}$  S/m για το αποσταγμένο). Επισημαίνεται το μεγάλο εύρος τιμών για την ειδική αγωγιμότητα  $g$ .

**Υλικά με μόνιμη πόλωση ή μαγνήτιση:** Στο ανάπτυγμα *McLaurin* για τη συνάρτηση  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ , βλ. σχέση (4.1-11), υποτέθηκε ότι  $\mathbf{P}(\mathbf{E}=0) = 0$ , για να ορισθούν έτσι τα γραμμικά υλικά. Αν, αντίθετα, αυτός ο όρος είναι μη μηδενικός,  $\mathbf{P}(\mathbf{E}=0) = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} \neq 0$ , τότε το υλικό έχει μόνιμη πόλωση  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$  και αντίστοιχα μόνιμη μαγνήτιση, όταν  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{M}(\mathbf{H}=0) \neq 0$ . Στις σχέσεις  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  και  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$  συνεισφέρουν και οι γραμμικοί όροι των αναπτυγμάτων *McLaurin* του  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  και του  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ , όπως ο όρος  $(\partial P_x / \partial E_x)|_0 E_x$ , οπότε με διαδικασία ανάλογη με εκείνη που ακολουθήθηκε για τα γραμμικά υλικά, τελικά, τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{H}$  εκφράζονται με συντελεστές (ως βαθμωτές ποσότητες ή ως τανυστές)  $\epsilon_\Delta$  ή  $\vec{\epsilon}_\Delta$  (αντί του  $\epsilon$ ) και  $\mu_\Delta$  ή  $\vec{\mu}_\Delta$  (αντί του  $\mu$ ).

Αρκετά συνηθισμένα είναι τα υλικά με μόνιμη μαγνήτιση, οι «μόνιμοι μαγνήτες», με συντακτική σχέση:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{μov}} + \vec{\mu}_{\Delta} \cdot \mathbf{H}, \quad \text{ή} \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{μov}} + \mu_{\Delta} \mathbf{H} \quad (\text{όταν} \quad \vec{\mu}_{\Delta} = \mu_{\Delta} \vec{\mathbf{I}}). \quad (4.1-16\alpha)$$

Υπάρχουν επίσης και υλικά με μόνιμη πόλωση (η οποία, όμως, εύκολα εκμηδενίζεται από δονήσεις ή από την παρουσία υγρασίας), οι «ηλεκτρήτες», με συντακτική σχέση:

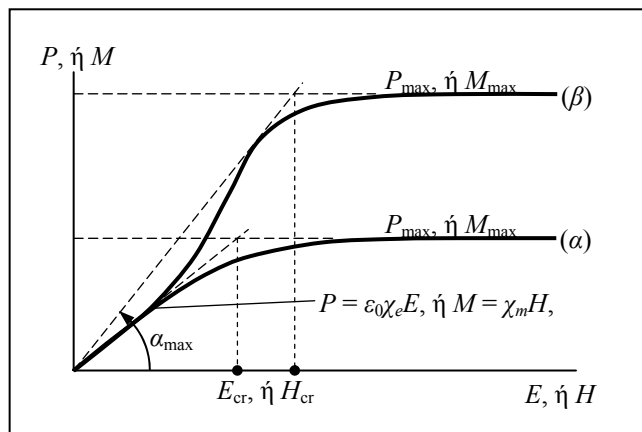
$$\mathbf{D} = \mathbf{P}_{\text{μov}} + \vec{\epsilon}_{\Delta} \cdot \mathbf{E}, \quad \text{ή} \quad \mathbf{D} = \mathbf{P}_{\text{μov}} + \epsilon_{\Delta} \mathbf{E} \quad (\text{όταν} \quad \vec{\epsilon}_{\Delta} = \epsilon_{\Delta} \vec{\mathbf{I}}). \quad (4.1-16\beta)$$

Οι ποσότητες  $\epsilon_{\Delta}$  και  $\mu_{\Delta}$  ονομάζονται «διαφορική επιτρεπτότητα» και «διαφορική μαγνητική διαπερατότητα» (ή, επιτρεπτότητα «δέλτα» και μαγνητική διαπερατότητα «δέλτα») και εν γένει έχουν τιμές ελαφρά μεγαλύτερες των  $\epsilon_0$  και  $\mu_0$ .

Ο χειρισμός υλικών με μόνιμη μαγνήτιση ή πόλωση παρουσιάζεται στην παράγρ. 4.2.

**Μη γραμμικά υλικά:** Στο ανάπτυγμα *McLaurin* των σχέσεων  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  και αντίστοιχα  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ , οι όροι ανώτερης τάξης (οι οποίοι παραλείπονται στην περιοχή γραμμικής συμπεριφοράς) έχουν αξιόλογη συνεισφορά στη συμπεριφορά του υλικού, όταν τα πεδία  $\mathbf{E}$  ή  $\mathbf{H}$  υπερβούν μια τιμή χαρακτηριστική για κάθε υλικό. Ως «μη γραμμικά» χαρακτηρίζονται τα υλικά, στα οποία αυτή η χαρακτηριστική τιμή των πεδίων  $\mathbf{E}$  ή  $\mathbf{H}$  είναι μικρή ή συγκρίσιμη με τις τιμές των πεδίων που συνήθως εφαρμόζονται.

Για ισοτροπικό μη γραμμικό υλικό, οι (βαθμωτές) συντακτικές σχέσεις  $P(E)$  και  $M(H)$  έχουν τυπικά μορφή όπως στο **Σχήμα 4.1-3**. Για σχετικά μικρές τιμές του πεδίου  $E$ , ή του πεδίου  $H$ , το υλικό υπακούει σε γραμμική συντακτική σχέση,  $P = \epsilon_0 \chi_e E$ , συνεπώς  $D = \epsilon_0(1 + \chi_e)E = \epsilon E$  [ή, αντίστοιχα,  $M = \chi_m H$ , συνεπώς είναι  $B = \mu_0(1 + \chi_m)H = \mu H$ ]. Ακολούθως, τα πηλικά  $P/E$  ή  $M/H$  δεν είναι σταθερά, αλλά η τιμή τους εξαρτάται από την ένταση του πεδίου  $E$  ή  $H$ . Διακρίνονται τα ενδεχόμενα της «μαλακής» και της «σκληρής» διέγερσης, ανάλογα με το εάν το πηλίκο  $P/E$  [ή  $M/H$ ] είναι φθίνουσα ή αύξουσα συνάρτηση της διέγερσης  $E$  (ή  $H$ ), όπως παρουσιάζεται από τις καμπύλες (α) και (β) στο σχήμα. Σε κάθε περίπτωση, για ιδιαίτερα μεγάλες τιμές του πεδίου  $E$  ή του πεδίου  $H$  επέρχεται κορεσμός. Αυτό



Σχήμα 4.1-3

συμβαίνει, όταν όλα τα διαθέσιμα στοιχειώδη ηλεκτρικά ή μαγνητικά δίπολα πρακτικά προσανατολίζονται παράλληλα προς το αντίστοιχο αίτιο, δηλ. το πεδίο  $E$  ή το πεδίο  $H$ , ώστε να είναι πλέον  $P(E) = P_{\max}$  και  $M(H) = M_{\max}$ , αντίστοιχα.

Σε μη γραμμικά υλικά, το πηλίκο του αποτελέσματος (της πόλωσης ή της μαγνήτισης) προς το αίτιο (το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο) μπορεί να εκφρασθεί μέσω της αντίστοιχης δεκτικότητας, η οποία, βέβαια, εν γένει είναι συνάρτηση του αιτίου:

$$\varepsilon_0 \chi_e(E) = \frac{P(E)}{E}, \quad \chi_m(H) = \frac{M(H)}{H}, \quad (4.1-17)$$

και αντίστοιχα για την επιτρεπτότητα και τη μαγνητική διαπερατότητα:

$$\varepsilon(E) = \varepsilon_0 (1 + \chi_e(E)) = \frac{D(E)}{E}, \quad \mu(H) = \mu_0 (1 + \chi_m(H)) = \frac{B(H)}{H}. \quad (4.1-18)$$

Με εξαίρεση την περίπτωση που το πεδίο έχει σχετικά μικρές τιμές, όλες αυτές οι ποσότητες είναι βέβαια συναρτήσεις του αντίστοιχου πεδίου. Καλό είναι, αυτό να δηλώνεται, ως  $\varepsilon(E)$  ή  $\chi_e(E)$  κλπ., ώστε να αποφεύγεται η σύγχυση με τις σταθερές τιμές των  $\varepsilon$ ,  $\chi_e$  κλπ., που συναντώνται στη γραμμική περιοχή. Με άλλα λόγια, αν δεν σημειώνεται η διευκρίνιση  $\varepsilon(E)$  ή  $\chi_e(E)$  κλπ., υπονοείται ότι οι ποσότητες αυτές αναφέρονται στη γραμμική περιοχή και είναι σταθερές.] Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν η διαφορική επιτρεπτότητα και η διαφορική μαγνητική διαπερατότητα, οι οποίες ορίζονται από τις παραγώγους:

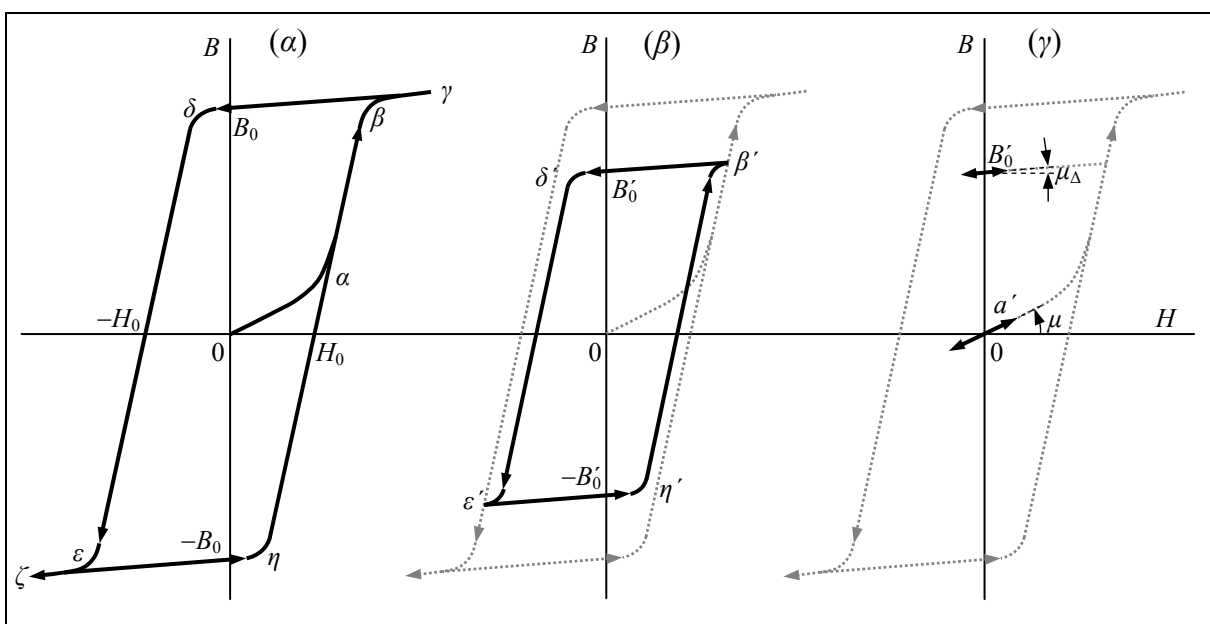
$$\varepsilon_{\Delta}(E) = \frac{dD}{dE}, \quad \mu_{\Delta}(H) = \frac{dB}{dH}. \quad (4.1-19)$$

Στη μη γραμμική περιοχή, οι ποσότητες αυτές είναι επίσης συναρτήσεις των πεδίων. Οι ορισμοί αυτοί είναι προφανώς συμβατοί με τους ορισμούς των ίδιων ποσοτήτων στην περίπτωση υλικών με μόνιμη πόλωση ή μαγνήτιση, βλ. σχέσεις (4.1-16). Απλά, εκεί οι ποσότητες  $\varepsilon_{\Delta}$  και  $\mu_{\Delta}$  θεωρούνται σταθερές.

Ως χαρακτηριστική κρίσιμη τιμή, που διαχωρίζει τη γραμμική περιοχή από την περιοχή κόρου, για τις διηλεκτρικές ιδιότητες μπορεί να χρησιμοποιηθεί η τιμή  $E_{cr} = P_{\max}/\alpha_{\max}$ , όπου  $\alpha_{\max} = (P/E)_{\max}$  ( $= \varepsilon_0 \chi_e$  για υλικά με μαλακή και  $= \varepsilon_0 \chi_{e,\max}$  για υλικά με σκληρή διέγερση), και αντίστοιχα για τις μαγνητικές ιδιότητες η τιμή  $H_{cr} = M_{\max}/\alpha_{\max}$ , όπου τώρα  $\alpha_{\max} = (M/H)_{\max}$  (ίσο με  $\chi_m$  ή  $\chi_{m,\max}$ , αντίστοιχα). Τιμές με  $E \ll E_{cr}$  ή  $H \ll H_{cr}$  αντιστοιχούν στη γραμμική περιοχή, ενώ η περιοχή του κόρου αντιστοιχεί σε τιμές με  $E \gg E_{cr}$  ή  $H \gg H_{cr}$ .

Ο χειρισμός μη γραμμικών υλικών παρουσιάζεται στην παράγραφο 4.3.

**Υλικά με Υστέρηση:** Στις προηγούμενες περιπτώσεις οι συναρτήσεις  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$  και  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  έχουν σιωπηλά υποτεθεί αμφιμονοσήμαντες («ένα-προς-ένα»), δηλαδή, ότι σε κάθε τιμή των  $\mathbf{E}$  ή  $\mathbf{H}$  αντιστοιχεί μία μοναδική τιμή των  $\mathbf{D}$  ή  $\mathbf{B}$  και αντιστρόφως. Όμως, ιδίως τα μη γραμμικά υλικά με σκληρή διέγερση δεν συμπεριφέρονται αμφιμονοσήμαντα, αλλά όπως παρουσιάζεται σχηματικά στο **Σχήμα 4.1-4(α)**, π.χ. για μαγνητικό υλικό με υστέρηση. Η συνεχής γραμμή περιγράφει την καμπύλη  $B(H)$ , όπου το υλικό αρχικά (τμήμα  $0-\alpha$ ) συμπεριφέρεται γραμμικά,  $B = \mu H$ , ακολούθως αντιδρά με χαρακτήρα σκληρής διέγερσης (τμήμα  $\alpha-\beta$ ) και καταλήγει στον κόρο (τμήμα  $\beta-\gamma$ ), όπου  $B = \mu_0(M_{\max} + H)$ . Στην πορεία που μόλις περιγράφηκε έχει υποτεθεί ότι το πεδίο  $H$  συνεχώς αυξάνει, δηλαδή ότι είναι  $dH/dt > 0$ . Αν τώρα στο σημείο  $\gamma$  (ή οποιοδήποτε σημείο του τμήματος  $\beta-\gamma$ ) διακοπεί η αύξηση του  $H$  και αρχίσει η μείωσή του ( $dH/dt < 0$ ), τότε μετά το σημείο  $\beta$  η καμπύλη  $B(H)$  δεν ακολουθεί την αρχική καμπύλη (προς το  $\alpha$ ), αλλά κατευθύνεται προς κάποιο σημείο  $\delta$ , διατηρώντας υψηλές τιμές συγκρίσιμες με του κόρου, ακόμα και αν αντιστραφεί η διέγερση (δηλαδή, παραμένει  $B > 0$  μολονότι η διέγερση έχει τιμές  $H < 0$ ). Κατά την πορεία αυτή, χαρακτηριστική τιμή για τη μαγνητική επαγωγή είναι η  $B(H=0) = B_0$ . Μετά από το σημείο  $\delta$  (στο οποίο μπορεί να είναι  $H > 0$ , αλλά και  $H < 0$ , όπως στο σχήμα) η μαγνητική επαγωγή υφίσταται ταχεία μείωση και αντιστρέφει το πρόσημό της, σε κάποια τιμή με  $H = -H_0$  (δηλαδή, τα πεδία  $H$  και  $B$  γίνονται πάλι ομόρροπα). Κορεσμός εμφανίζεται πάλι στο τμήμα  $\varepsilon-\zeta$ , συμμετρικά ως προς τον αρχικό, δηλαδή  $B_{\text{κορ}}(-H) = -B_{\text{κορ}}(H)$ . Νέα αντιστροφή του  $H$  (πάλι με  $dH/dt > 0$ ) οδηγεί ξανά σε νέα πορεία, την  $\varepsilon-\eta-\beta$ . Συνολικά, η καμπύλη  $B(H)$  διανύει το «βρόχο υστέρησης»  $\beta-\delta-\varepsilon-\eta-\beta$ .



Σχήμα 4.1-4

Αν σε κάποιο σημείο  $\beta'$ , ενδιάμεσο του τμήματος  $\alpha-\beta$  ή του  $\eta-\beta$ , αντιστραφεί η μεταβολή του  $H$ , τότε, όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 4.1-4(β)**, η καμπύλη  $B(H)$  θα ακολουθήσει πορεία προς το σημείο  $\delta'$  και περαιτέρω μεταβολή του  $H$  (αύξηση του αρνητικού  $-H$ ) θα έχει ως αποτέλεσμα τον σχηματισμό ενός βρόχου υστέρησης, ο οποίος βρίσκεται στο εσωτερικό του προηγούμενου.

Αντιθέτως, βλ. **Σχήμα 4.1-4(γ)**, αν η αντιστροφή γίνει σε κάποιο σημείο  $\alpha'$  της γραμμικής περιοχής  $0-\alpha$ , τότε, όσο οι τιμές του πεδίου  $H$  παραμένουν μικρές, θα διανυθεί η αρχική καμπύλη,  $B = \mu H$ . Τέλος, αν η διαδρομή  $\beta'-\delta'$  διακοπεί περί το σημείο με  $H = 0$ , τότε μικρές τιμές του  $H$  δίνουν τη σχέση  $B(H) = B_0 + \mu_\Delta H \pm \delta B$ , όπου  $B_0 = B(H=0)$ , εξαρτώμενο από τη σχετική αφετηρία  $\beta'$ , και  $\delta B$  αντιπροσωπεύει ένα μικρό βρόχο υστέρησης, συχνά αμελητέο. Η λειτουργία στην περιοχή αυτή περιγράφει ένα μόνιμο μαγνήτη, με  $\mu_\Delta \geq \mu_0$ , όπως περιγράφηκε προηγουμένως.

Αντίστοιχη είναι και η συμπεριφορά ενός διηλεκτρικού υλικού με υστέρηση.

**Γραμμικά υλικά σε υψηλές συχνότητες:** Η παράθεση που προηγήθηκε προϋποθέτει, ότι είναι  $\partial/\partial t = 0$ , ουσιαστικά όμως αναφέρεται σε χρονικές μεταβολές αρκετά αργές, τέτοιες που επιτρέπουν στο υλικό να προσαρμόζεται κάθε στιγμή στα επιβαλλόμενα αίτια. Σε ταχείες μεταβολές, δηλαδή σε υψηλές συχνότητες, το υλικό δεν μπορεί να αποκριθεί ακαριαία (σε μικρό κλάσμα της περιόδου). Περιγράφοντας, όμως, τα πεδία μέσω των φασιθετών τους, η χρονική υστέρηση μεταξύ αιτίου και αποτελέσματος μπορεί να καλυφθεί θεωρώντας ότι οι ποσότητες  $\epsilon$ ,  $\mu$  και  $g$  είναι μιγαδικές. Αυτό έχει ήδη επιδειχθεί στο απλό μοντέλο για την αγωγιμότητα, στην παράγρ. 2.4.3 του Μέρους Α (σελ. 413-415), που έδωσε την έκφραση:

$$g(\omega) = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1-j\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} = \frac{nq^2\tau}{m} \frac{1}{1+j\omega\tau}. \quad (4.1-20)$$

Ανεξάρτητα από τις ανακρίβειες που εμπεριέχονται σ' αυτή την έκφραση, προβάλλεται το βασικό χαρακτηριστικό, ότι η ειδική αγωγιμότητα, ως μιγαδική ποσότητα, έχει αρνητικό φανταστικό μέρος [για εξάρτηση υπονοούμενη ως  $\exp(+j\omega t)$ ], που σημαίνει ότι το αποτέλεσμα (το ρεύμα) έχει υστέρηση σε σχέση με το αίτιο (το πεδίο). Επίσης, επειδή στο νόμο *Ampere-Maxwell* εμφανίζεται η ποσότητα  $\mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} = (g + j\omega\epsilon)\mathbf{E}$ , συνήθως προτιμάται να ενσωματωθούν τα φαινόμενα αγωγιμότητας στην επιτρεπτότητα, με την αλλαγή  $g + j\omega\epsilon = j\omega(\epsilon - jg/\omega) \rightarrow j\omega\epsilon$ . Έτσι, οι συντακτικές σχέσεις περιορίζονται, τελικά, σε δύο:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega). \quad (4.1-21)$$

## 4.2 Ηλεκτρήτες και μαγνήτες

### 4.2.1 Στατικά πεδία σε ηλεκτρήτες και μαγνήτες

Σε υλικά με μόνιμη πόλωση  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$  ή μόνιμη μαγνήτιση  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov}}$ , τα οποία κατά τα λοιπά αντιδρούν ισοτροπικά στα επιβαλλόμενα πεδία, τα πεδία  $\{\mathbf{D}, \mathbf{E}\}$  και  $\{\mathbf{B}, \mathbf{H}\}$  συνδέονται από τις συντακτικές σχέσεις (4.1-16), δηλαδή:

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} + \varepsilon_{\Delta}\mathbf{E} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}_{\mu\text{ov}} + \mu_{\Delta}\mathbf{H}. \quad (4.2-1\alpha)$$

Ο υπόλοιπος χώρος εν γένει περιέχει συνήθη διηλεκτρικά ή μαγνητικά υλικά, για τα οποία βέβαια ισχύουν οι συνηθισμένες συντακτικές σχέσεις:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (4.2-1\beta)$$

Σημειώνεται ότι οι τελευταίες συντακτικές σχέσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση των πρώτων, με  $\{\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} \rightarrow 0, \varepsilon_{\Delta} \rightarrow \varepsilon\}$  και  $\{\mathbf{M}_{\mu\text{ov}} \rightarrow 0, \mu_{\Delta} \rightarrow \mu\}$  αντίστοιχα.

Κατά τα λοιπά, η συμπεριφορά των πεδίων  $\{\mathbf{E}, \mathbf{D}\}$  και  $\{\mathbf{H}, \mathbf{B}\}$  περιγράφεται από τις εξισώσεις του *Maxwell*, οι οποίες στην ειδική περίπτωση στατικών διατάξεων ( $\partial/\partial t = 0$ ) έχουν τη σημειακή μορφή [ανεξάρτητα από το αν κάθε περιοχή του χώρου περιγράφεται από τις σχέσεις (4.2-1α) ή (4.2-1β)]:

- Σε κάθε σημείο του χώρου (χωρίς ασυνέχειες):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (4.2-2)$$

- Σε κάθε σημείο επιφάνειας  $S$  (χωρίς ασυνέχεια εφαπτομενικά στην  $S$ ):

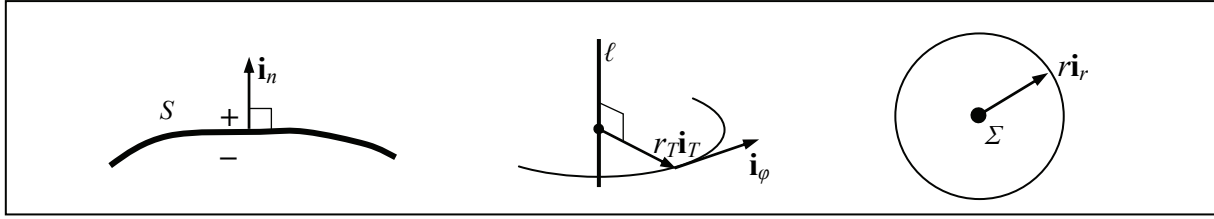
$$\begin{aligned} \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) &= \sigma, & \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) &= 0, \\ \mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) &= 0, & \mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) &= \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (4.2-3)$$

- Σε κάθε σημείο γραμμής  $\ell$  (χωρίς ασυνέχεια κατά μήκος της  $\ell$ ):

$$\begin{aligned} (r_T \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{D}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= \frac{\lambda}{2\pi}, & (r_T \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{B}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, \\ (r_T \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{E}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, & (r_T \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{H}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= \frac{i}{2\pi}. \end{aligned} \quad (4.2-4)$$

- Σε κάθε μεμονωμένο σημείο  $\Sigma$ :

$$(r^2 \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{D}) \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{q}{4\pi}, \quad (r^2 \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{B}) \Big|_{r \rightarrow 0} = 0. \quad (4.2-5)$$



Σχήμα 4.2-1

Οι συμβολισμοί για τις οριακές συνθήκες σε επιφάνεια, γραμμή ή σημείο είναι οι καθιερωμένοι από το Μέρος Α και επαναλαμβάνονται στο **Σχήμα 4.2-1**.

Για την επίλυση μιας διάταξης που περιέχει μόνιμο μαγνήτη ή ηλεκτρήτη, η προφανής πορεία είναι να γίνει χρήση των συντακτικών σχέσεων (4.2-1αβ), ώστε να αντικατασταθούν είτε τα πεδία **D** και **H** υπέρ των **E** και **B**, είτε τα **E** και **B** υπέρ των **D** και **H**. Όλες οι δυνατότητες οδηγούν σε εξισώσεις με δομή ίδια με αυτή ενός στατικού πεδίου σε συνήθη υλικά, οπότε είναι δυνατό να εφαρμοσθούν οι αντίστοιχες τεχνικές, όπως περιγράφεται στα επόμενα.

**Επίλυση ηλεκτρήτη ως προς το πεδίο E:** Απαλείφοντας το πεδίο  $\mathbf{D} = \mathbf{P}_{\text{μιν}} + \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}$  (με  $\mathbf{P}_{\text{μιν}} = 0$ ,  $\varepsilon_{\Delta} = \varepsilon$ , όταν πρόκειται για χώρο με σύνηθες διηλεκτρικό υλικό, με συντακτική σχέση  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ), οι σχετικές σχέσεις παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}) &= \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\text{μιν}} && \hat{=} \rho_{\text{ισοδ}}, & \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\
 \mathbf{i}_n \cdot (\varepsilon_{\Delta+} \mathbf{E}_+ - \varepsilon_{\Delta-} \mathbf{E}_-) &= \sigma - \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{P}_{\text{μιν}+} - \mathbf{P}_{\text{μιν}-}) && \hat{=} \sigma_{\text{ισοδ}}, & \mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) &= 0, \\
 (r_T \mathbf{i}_T \cdot \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= \frac{\lambda}{2\pi} - (r_T \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{P}_{\text{μιν}}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} && \hat{=} \frac{\lambda_{\text{ισοδ}}}{2\pi}, & (r_T \mathbf{i}_{\phi} \cdot \mathbf{E}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, \\
 (r^2 \mathbf{i}_r \cdot \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}) \Big|_{r \rightarrow 0} &= \frac{q}{4\pi} - (r^2 \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{P}_{\text{μιν}}) \Big|_{r \rightarrow 0} && \hat{=} \frac{q_{\text{ισοδ}}}{4\pi}, & & 
 \end{aligned} \quad (4.2-6)$$

όπου οι ισοδύναμες κατανομές φορτίου  $\{\rho_{\text{ισοδ}}, \sigma_{\text{ισοδ}}, \lambda_{\text{ισοδ}}, q_{\text{ισοδ}}\}$  ορίζονται ως άθροισμα των κατανομών ελεύθερου φορτίου  $\{\rho, \sigma, \lambda, q\}$  και των κατανομών φορτίου πόλωσης  $\{\rho_p, \sigma_p, \lambda_p, q_p\}$ , οι οποίες έχουν οριστεί στην παράγρ. 1.3.1, βλ. σχέση (1.3-7). Εδώ, όμως, τα φορτία πόλωσης ορίζονται μόνο κατά το μέρος που εμπεριέχονται στη μόνιμη πόλωση, π.χ.  $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}_{\text{μιν}}$ , ενώ η δράση της πρόσθετης πόλωσης, εκείνης που παράγεται από την παρουσία του πεδίου **E**, είναι ενσωματωμένη στη διαφορική επιτρεπτότητα  $\varepsilon_{\Delta}$ , η οποία εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά της πρώτης στήλης εξισώσεων.

Οι σχέσεις (4.2-6) έχουν πανομοιότυπη δομή με τις σχέσεις που περιγράφουν το στατικό ηλεκτρικό πεδίο σε συνήθη υλικά. Κατά συνέπεια, όλα όσα παρουσιάζονται στις παραγρ. 2.2.1 και 2.2.2 εφαρμόζονται αναλογικά και εδώ. Επισημαίνεται, ιδίως, ότι:



- Οι σημειακές σχέσεις (4.2-6) μπορούν να υποκατασταθούν, συνολικά ή κατά μέρος, από τις αντίστοιχες ολοκληρωτικές σχέσεις, που εδώ έχουν τη μορφή:

$$\oint_S \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V dQ_{\text{ισοδ}}, \quad \oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (4.2-7)$$

για κλειστή επιφάνεια  $S$  (που περικλείει τον όγκο  $V$ ) και κλειστή καμπύλη  $\ell$ , αντίστοιχα.

- Οι συμμετρίες μπορούν να αξιοποιηθούν για να μειωθεί το πλήθος των αγνώστων, ειδικότερα μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση (2.2-12):

$$\text{Αν παντού είναι } \frac{\partial}{\partial s} = 0, \text{ με } s = \{x, y, z, \varphi\} \Rightarrow E_s = 0. \quad (4.2-8)$$

Ας σημειωθεί ότι ο έλεγχος, αν είναι  $\partial/\partial s = 0$ , αφορά τις ποσότητες που εμπλέκονται στις σχέσεις (4.2-6), και όχι εκείνες της αρχικής διάταξης. Αυτό σημαίνει πως μία διάταξη έχει πεδίο  $\mathbf{E}$  με  $E_s = 0$ , αν ισχύει ότι  $\partial/\partial s = 0$  για τα ισοδύναμα φορτία και τις διηλεκτρικές ιδιότητες (ανεξαρτήτως αν ισχύει  $\partial \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}/\partial s = 0$  ή όχι). Επίσης, οι συμμετρίες αφορούν το πεδίο  $\mathbf{E}$  (ως προς το οποίο γίνεται η επίλυση), και όχι το  $\mathbf{D}$ . Θα μπορούσε βέβαια να είναι  $E_s = 0$ , αλλά να είναι  $D_s \neq 0$  (αν είναι  $P_{\mu\text{ov},s} \neq 0$ ).

- Αν δεν υπάρχουν κατανομές ελεύθερων φορτίων, τότε στην πρώτη ομάδα από τις σχέσεις (4.2-6) η απόκλιση και οι κάθετες (σε επιφάνεια κλπ.) συνιστώσες του  $\varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}$  συνδέονται με ισότητες με την απόκλιση και τις κάθετες συνιστώσες του  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$ . Αυτό γενικά δεν σημαίνει ότι θα είναι  $\varepsilon_{\Delta} \mathbf{E} = -\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$ , επειδή για να προσδιορισθεί ένα διανυσματικό πεδίο δεν αρκούν οι πληροφορίες για την απόκλιση και τις κάθετες συνιστώσες, αλλά χρειάζεται και η περιστροφή και οι εφαπτομενικές συνιστώσες. Η ίδια παρατήρηση αφορά και την ολοκληρωτική σχέση (4.2-7α), η οποία (όταν είναι  $dQ = 0$ ) γράφεται  $\oint_S \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dV = -\oint_S \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} \cdot d\mathbf{S}$  (με χρήση του θεωρήματος του Gauss). Μόνο σε ειδικές, κατάλληλα συμμετρικές διατάξεις, οδηγεί η σχέση αυτή στο συμπέρασμα  $\varepsilon_{\Delta} \mathbf{E} = -\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$ .
- Μετά την επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{E}$ , το πεδίο  $\mathbf{D}$  προσδιορίζεται εφαρμόζοντας σε κάθε περιοχή του χώρου την κατάλληλη συντακτική σχέση μεταξύ των (4.2-1αβ).

**Επίλυση ηλεκτρίτη ως προς το πεδίο  $\mathbf{D}$ :** Αν γίνει η απαλοιφή,  $\mathbf{E} = (\mathbf{D} - \mathbf{P}_{\mu\text{ov}})/\varepsilon_{\Delta}$  (και πάλι με  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = 0$ ,  $\varepsilon_{\Delta} = \varepsilon$ , όταν πρόκειται για χώρο με σύνηθες διηλεκτρικό υλικό, με συντακτική σχέση  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ), στις σχέσεις που προκύπτουν μπορεί να εφαρμοσθεί επαλληλία,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\text{ελ}} + \mathbf{D}_{\text{p}}$ . Το μέρος  $\mathbf{D}_{\text{ελ}}$  συνδέεται μόνο με τα ελεύθερα φορτία και περιγράφεται από τις γνωστές σχέσεις της Ηλεκτροστατικής:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D}_{\varepsilon\lambda} &= \rho, & \nabla \times \frac{\mathbf{D}_{\varepsilon\lambda}}{\varepsilon_\Delta} &= 0, \\
\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_{\varepsilon\lambda+} - \mathbf{D}_{\varepsilon\lambda-}) &= \sigma, & \mathbf{i}_n \times \left( \frac{\mathbf{D}_{\varepsilon\lambda}}{\varepsilon_\Delta} \Big|_+ - \frac{\mathbf{D}_{\varepsilon\lambda}}{\varepsilon_\Delta} \Big|_- \right) &= 0, \\
(r_T \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{D}_{\varepsilon\lambda}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= \frac{\lambda}{2\pi}, & (r_T \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{D}_{\varepsilon\lambda}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, \\
(r^2 \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{D}_{\varepsilon\lambda}) \Big|_{r \rightarrow 0} &= \frac{q}{4\pi}, & &
\end{aligned} \tag{4.2-9}$$

για τις οποίες δεν απαιτείται κανένας σχολιασμός. Οι σχέσεις για το  $\mathbf{D}_P$  έχουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{D}_P &= 0, & \nabla \times \frac{\mathbf{D}_P}{\varepsilon_\Delta} &= \nabla \times \frac{\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}}{\varepsilon_\Delta} && \hat{=} \mathbf{J}_m, \\
\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_{P+} - \mathbf{D}_{P-}) &= 0, & \mathbf{i}_n \times \left( \frac{\mathbf{D}_P}{\varepsilon_\Delta} \Big|_+ - \frac{\mathbf{D}_P}{\varepsilon_\Delta} \Big|_- \right) &= \mathbf{i}_n \times \left( \frac{\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}}{\varepsilon_\Delta} \Big|_+ - \frac{\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}}{\varepsilon_\Delta} \Big|_- \right) && \hat{=} \mathbf{K}_m, \\
(r_T \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{D}_P) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, & (r_T \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{D}_P) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= (r_T \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} && \hat{=} \varepsilon_\Delta \frac{i_m}{2\pi}, \\
(r^2 \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{D}_P) \Big|_{r \rightarrow 0} &= 0, & & &&
\end{aligned} \tag{4.2-10}$$

όπου οι οριζόμενες ποσότητες  $\{\mathbf{J}_m, \mathbf{K}_m, i_m\}$  ας θεωρηθούν προς το παρόν συντομογραφίες για τις εμφανιζόμενες ποσότητες  $\mathbf{J}_m = \nabla \times (\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}/\varepsilon_\Delta)$  κλπ. Σε αντίθεση με τις σχέσεις (4.2-9), τώρα οι εξισώσεις της αριστερής στήλης, αυτές που συνδέονται με το νόμο του *Gauss*, είναι ομογενείς, ενώ οι εξισώσεις της δεύτερης στήλης (οι οποίες προέρχονται από τη σχέση  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  και τις οικείες οριακές συνθήκες) παύουν να είναι ομογενείς, όταν, όπως εδώ, διατυπωθούν για το πεδίο  $\mathbf{D}_P$ . Ειδικότερα, αν γίνουν οι αντικαταστάσεις  $\mathbf{D}_P \rightarrow \mathbf{B}$  και  $\varepsilon_\Delta \rightarrow 1/\mu$ , αναγνωρίζονται οι εξισώσεις της Μαγνητοστατικής σε συνήθη υλικά, διατυπωμένες για το πεδίο  $\mathbf{B}$ , όπως είναι οι σχέσεις (4.2-13) που ακολουθούν: Αυτές της πρώτης στήλης αντιστοιχούν στο νόμο του *Gauss* (για το μαγνητικό πεδίο) και αυτές της δεύτερης στον του *Ampere*. Σε αυτή την ομοιότητα οφείλεται και η επιλογή των συμβολισμών  $\{\mathbf{J}_m, \mathbf{K}_m, i_m\}$ : Όπως για παράδειγμα ισχύει ότι  $\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{J}$ , όπου  $\mathbf{J}$  είναι η χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος, έτσι εδώ γράφεται  $\nabla \times (\mathbf{D}_P/\varepsilon_\Delta) = \mathbf{J}_m$ , όπου κατ' αναλογία η ποσότητα  $\mathbf{J}_m$  μπορεί να ονομασθεί «χωρική πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος», και αντίστοιχα για τις ποσότητες  $\mathbf{K}_m$  και  $i_m$ . [Είναι τελείως αδιάφορο το γεγονός ότι στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν μαγνητικά φορτία και ρεύματα. Απλά, η περιστροφή και οι ασυνέχειες της πόλωσης συνεισφέρουν στο πεδίο  $\mathbf{D}_P/\varepsilon_\Delta$  πανομοιότυπα, όπως θα συνεισέφεραν οι αντίστοιχες κατανομές μαγνητικού ρεύματος, αν κάτι τέτοιο υπήρχε.]

Οι σχέσεις (4.2-10), καθώς έχουν τη δομή των σχέσεων που περιγράφουν το στατικό μαγνητικό πεδίο σε συνήθη υλικά, έχουν και ιδιότητες αντίστοιχες με αυτές που έχουν περιγραφεί στις παραγρ. 2.3.1 και 2.3.2 του Μέρους Α. Ειδικότερα σημειώνεται ότι:

- Αντί για τις σχέσεις (4.2-10) μπορούν να χρησιμοποιηθούν, συνολικά ή εν μέρει, οι αντίστοιχες ολοκληρωτικές σχέσεις, οι οποίες τώρα παίρνουν τη μορφή:

$$\oint_S \mathbf{D}_P \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_\ell \frac{\mathbf{D}_P}{\varepsilon_\Delta} \cdot d\mathbf{r} = \int_S dI_m, \quad (4.2-11)$$

για κλειστή επιφάνεια  $S$  και για κλειστή καμπύλη  $\ell$  (στην οποία τερματίζεται η ανοικτή επιφάνεια  $S$ ), αντίστοιχα.

- Οι συμμετρίες μπορούν αντίστοιχα να αξιοποιηθούν, για μείωση του αριθμού των αγνώστων, όπως και η σχέση (2.3-16), που εδώ (πάντοτε με  $s = \{x, y, z, \varphi\}$ ) γράφεται ως:

$$\text{Αν παντού είναι } \frac{\partial}{\partial s} = 0, \text{ τότε } \begin{cases} J_{ms, κλπ.} = 0 & \Rightarrow \mathbf{D}_{P\perp s} = 0, D_{Ps} \neq 0, \\ \mathbf{J}_{m\perp s, κλπ.} = 0 & \Rightarrow D_{Ps} = 0, \mathbf{D}_{P\perp s} \neq 0, \end{cases} \quad (4.2-12)$$

όπου ο έλεγχος, αν είναι  $\partial/\partial s = 0$ , αφορά τις ποσότητες που εμφανίζονται στις εξισώσεις και συνεπώς δεν αφορά απευθείας την πόλωση, αλλά τα «μαγνητικά ρεύματα».

- Σε ειδικές περιπτώσεις με κατάλληλες έντονες συμμετρίες (αλλά όχι στη γενική περίπτωση) από τη δεύτερη ομάδα των σχέσεων (4.2-10), ή από τη σχέση (4.2-11β) [που με το θεώρημα του *Stokes* γράφεται ως  $\oint_\ell (\mathbf{D}_P/\varepsilon_\Delta) \cdot d\mathbf{r} = \oint_\ell (\mathbf{P}_{\text{μον}}/\varepsilon_\Delta) \cdot d\mathbf{r}$ ], συνάγεται ότι  $\mathbf{D}_P = \mathbf{P}_{\text{μον}}$ .
- Μετά την επίλυση ως προς το συνολικό πεδίο  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\varepsilon\lambda} + \mathbf{D}_P$ , η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου  $\mathbf{E}$  προσδιορίζεται από τη συντακτική σχέση που περιγράφει κάθε περιοχή μεταξύ των (4.2-1αβ).

Ένα τελικό σχόλιο: Η πρώτη εντύπωση είναι πως η επίλυση ενός ηλεκτρήτη με απαλοιφή του πεδίου  $\mathbf{E}$  είναι πιο χρονοβόρος διαδικασία από την απαλοιφή του πεδίου  $\mathbf{D}$ . Στη γενική περίπτωση αυτό αληθεύει. Υπάρχουν όμως διατάξεις, όπως παρουσιάζεται και στα *παράδειγματα*, στις οποίες η κατανομή των ελεύθερων φορτίων είναι τόσο απλή, ώστε το πεδίο  $\mathbf{D}_{\varepsilon\lambda}$  να προσδιορίζεται αμέσως και χωρίς καμία ιδιαίτερη προσπάθεια, και ταυτόχρονα η μόνιμη πόλωση έχει τέτοια μορφή, ώστε να μπορεί σχετικά εύκολα να φανεί πως για όλες τις κατανομές «μαγνητικού ρεύματος» ισχύει ότι  $\{\mathbf{J}_m, \mathbf{K}_m, i_m\} = 0$ . Τότε βέβαια θα είναι  $\mathbf{D}_P = 0$  (επειδή αυτή είναι η μοναδική τιμή για το πεδίο, που είναι συμβατή με μηδενικό αίτιο) και το ηλεκτρικό πεδίο προσδιορίζεται μόνο από απλή αλγεβρική σχέση (τη συντακτική σχέση).

**Επίλυση μαγνήτη ως προς το πεδίο  $\mathbf{B}$ :** Για να διατυπωθούν οι εξισώσεις ως προς το πεδίο  $\mathbf{B}$ , και να παραμείνει έτσι ο νόμος του *Gauss*,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , και οι συνοδοί οριακές συνθήκες με τη μορφή ομογενών εξισώσεων, χρησιμοποιείται η συντακτική σχέση με τη μορφή  $\mathbf{H} = (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}_{\mu\text{ov}}) / \mu_{\Delta}$ . Έτσι, προκύπτει το οικείο σύστημα εξισώσεων της Μαγνητοστατικής:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_{\Delta}} &= \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \frac{\mathbf{M}_{\mu\text{ov}}}{\mu_{\Delta}} & &= \mathbf{J}_{\text{ισοδ}}, \\
 \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) &= 0, & \mathbf{i}_n \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_{\Delta}} \Big|_+ - \frac{\mathbf{B}}{\mu_{\Delta}} \Big|_- \right) &= \mathbf{K} + \mu_0 \mathbf{i}_n \times \left( \frac{\mathbf{M}_{\mu\text{ov}}}{\mu_{\Delta}} \Big|_+ - \frac{\mathbf{M}_{\mu\text{ov}}}{\mu_{\Delta}} \Big|_- \right) & &= \mathbf{K}_{\text{ισοδ}}, \\
 (r_T \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{B}) \Big|_{r \rightarrow 0} &= 0, & \left( r_T \mathbf{i}_\varphi \cdot \frac{\mathbf{B}}{\mu_{\Delta}} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} &= \frac{i}{2\pi} + \mu_0 \left( r_T \mathbf{i}_\varphi \cdot \frac{\mathbf{M}_{\mu\text{ov}}}{\mu_{\Delta}} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} & &= \frac{i_{\text{ισοδ}}}{2\pi}, \\
 (r^2 \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{B}) \Big|_{r \rightarrow 0} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.2-13}$$

του οποίου ο χειρισμός γίνεται με βάση όσα έχουν παρουσιασθεί στις παραγρ. 2.3.1 και 2.3.2 του Μέρους Α. Στις σχέσεις αυτές το πεδίο  $\mathbf{B}$  παράγεται από τις ισοδύναμες κατανομές ηλεκτρικού ρεύματος  $\{\mathbf{J}_{\text{ισοδ}}, \mathbf{K}_{\text{ισοδ}}, I_{\text{ισοδ}}\}$ , που εκφράζονται ως αθροίσματα των κατανομών ελεύθερου ρεύματος  $\{\mathbf{J}, \mathbf{K}, i\}$  και ρευμάτων μαγνήτισης. Τα τελευταία δίδονται από εκφράσεις παρόμοιες με εκείνες που παρουσιάστηκαν στην παράγρ. 1.3.2, βλ. σχέσεις (1.3-19), αλλά όχι ταυτόσημες: Ενώ εκεί είχε παρουσιασθεί η σχέση  $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ , εδώ ως προσθετός της πυκνότητας  $\mathbf{J}$  εμφανίζεται η ποσότητα  $\mu_0 \nabla \times (\mathbf{M}_{\mu\text{ov}} / \mu_{\Delta})$ . Η διαφορά οφείλεται στο ότι η ποσότητα  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov}}$  δίνει μόνο τη μόνιμη μαγνήτιση, ενώ η επιπρόσθετη μαγνήτιση που οφείλεται στη δράση του πεδίου  $\mathbf{H}$  είναι ενσωματωμένη στον όρο  $\mu_{\Delta} \mathbf{H}$ .

Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση, ας σημειωθεί ότι:

- Ισοδύναμες με τις σημειακές σχέσεις (4.2-13) είναι οι ολοκληρωτικές σχέσεις:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \oint_{\ell} \frac{\mathbf{B}}{\mu_{\Delta}} \cdot d\mathbf{r} = \int_S dI_{\text{ισοδ}}, \tag{4.2-14}$$

για κλειστή επιφάνεια  $S$  και για κλειστή καμπύλη  $\ell$  (στην οποία τερματίζεται ανοικτή επιφάνεια  $S$ ), αντίστοιχα.

- Η σχέση (2.3-16), με  $s = \{x, y, z, \varphi\}$ , εδώ έχει τη μορφή:

$$\text{Αν παντού είναι } \frac{\partial}{\partial s} = 0, \text{ τότε } \begin{cases} J_{\text{ισοδ}s, \text{κλπ.}} = 0 & \Rightarrow \mathbf{B}_{\perp s} = 0, B_s \neq 0, \\ \mathbf{J}_{\text{ισοδ}\perp s, \text{κλπ.}} = 0 & \Rightarrow B_s = 0, \mathbf{B}_{\perp s} \neq 0, \end{cases} \tag{4.2-15}$$

όπου ο έλεγχος, αν είναι  $\partial/\partial s = 0$ , αφορά τα ισοδύναμα ρεύματα, και όχι τη μαγνήτιση.

- Αντάλογα με την προηγούμενη περίπτωση, σε διατάξεις χωρίς ελεύθερα ρεύματα και με κατάλληλες συμμετρίες, από τις προηγούμενες σχέσεις συνάγεται ότι  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{μιν}}$ .
- Μετά τον προσδιορισμό του πεδίου  $\mathbf{B}$ , η κατάλληλη (για κάθε περιοχή) συντακτική σχέση μεταξύ των (4.2-1αβ) δίνει την ένταση του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{H}$ .

**Επίλυση μαγνήτη ως προς το πεδίο  $\mathbf{H}$ :** Εφαρμόζοντας τον τελεστή της απόκλισης στη συντακτική σχέση  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{μιν}} + \mu_{\Delta} \mathbf{H}$  και δεδομένου ότι είναι  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , αμέσως φαίνεται ότι η απόκλιση  $\nabla \cdot (\mu_{\Delta} \mathbf{H})$  είναι εν γένει μη μηδενική και γενικότερα όλες οι σχέσεις που συνδέονται με το νόμο του *Gauss*,  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , παύουν να περιγράφονται από ομογενείς εξισώσεις. Όπως στην προηγούμενη περίπτωση του ηλεκτρήτη, είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί επαλληλία,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{ελ}} + \mathbf{H}_{\text{M}}$ , ώστε στον όρο  $\mathbf{H}_{\text{ελ}}$  να μεταφερθεί συνολικά η συνεισφορά των ελεύθερων ηλεκτρικών ρευμάτων, των κατανομών  $\{\mathbf{J}, \mathbf{K}, i\}$ , και να σχηματισθούν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mu_{\Delta} \mathbf{H}_{\text{ελ}}) &= 0, & \nabla \times \mathbf{H}_{\text{ελ}} &= \mathbf{J}, \\ \mathbf{i}_n \cdot (\mu_{\Delta+} \mathbf{H}_{\text{ελ}+} - \mu_{\Delta-} \mathbf{H}_{\text{ελ}-}) &= 0, & \mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_{\text{ελ}+} - \mathbf{H}_{\text{ελ}-}) &= \mathbf{K}, \\ (r_T \mu_{\Delta} \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{H}_{\text{ελ}}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, & (r_T \mathbf{i}_{\varphi} \cdot \mathbf{H}_{\text{ελ}}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= \frac{i}{2\pi}, \\ (r^2 \mu_{\Delta} \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{H}_{\text{ελ}}) \Big|_{r \rightarrow 0} &= 0, & & \end{aligned} \quad (4.2-16)$$

το οικείο σύστημα εξισώσεων της Μαγνητοστατικής, για το οποίο δεν χρειάζεται περαιτέρω σχολιασμός. Στον όρο  $\mathbf{H}_{\text{M}}$  συμπεριλαμβάνεται η δράση των υπόλοιπων αιτίων, κυρίως της μόνιμης μαγνήτισης, όπως παρουσιάζεται στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mu_{\Delta} \mathbf{H}_{\text{M}}) &= -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}_{\text{μιν}} & \triangleq \rho_m, & \nabla \times \mathbf{H}_{\text{M}} &= 0, \\ \mathbf{i}_n \cdot (\mu_{\Delta+} \mathbf{H}_{\text{M}+} - \mu_{\Delta-} \mathbf{H}_{\text{M}-}) &= -\mu_0 \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{M}_{\text{μιν}+} - \mathbf{M}_{\text{μιν}-}) & \triangleq \sigma_m, & \mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_{\text{M}+} - \mathbf{H}_{\text{M}-}) &= 0, \\ (r_T \mu_{\Delta} \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{H}_{\text{M}}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= -\mu_0 (r_T \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{M}_{\text{μιν}}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} & \triangleq \frac{\lambda_m}{2\pi}, & (r_T \mathbf{i}_{\varphi} \cdot \mathbf{H}_{\text{M}}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, \\ (r^2 \mu_{\Delta} \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{H}_{\text{M}}) \Big|_{r \rightarrow 0} &= -\mu_0 (r^2 \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{M}_{\text{μιν}}) \Big|_{r \rightarrow 0} & \triangleq \frac{q_m}{4\pi}. & & \end{aligned} \quad (4.2-17)$$

Οι ποσότητες  $\{\rho_m, \sigma_m, \lambda_m, q_m\}$  αποτελούν συντομογραφίες για τις ποσότητες που εμφανίζονται στη δεξιά πλευρά της πρώτης στήλης εξισώσεων, όπως  $\rho_m = -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}_0$  κλπ. Σε αναλογία με τις ποσότητες  $\{\mathbf{J}_m, \mathbf{K}_m, i_m\}$  της σχέσης (4.2-10), οι ποσότητες αυτές μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύουν κατανομές «μαγνητικού φορτίου». [Αυτό απλά σημαίνει ότι η απόκλιση και οι ασυνέχειες της μόνιμης μαγνήτισης δρουν στο πεδίο  $\mathbf{H}_{\text{M}}$  όπως θα δρούσαν τα «μαγνητικά φορτία», αν υπήρχαν, βέβαια, τέτοιες οντότητες στη φύση.]

Οι σχέσεις (4.2-17) έχουν τη δομή των εξισώσεων Ηλεκτροστατικής σε συνήθη υλικά, όπως αμέσως φαίνεται με τις αντικαταστάσεις  $\mathbf{H}_M \rightarrow \mathbf{E}$  και  $\mu_\Delta \rightarrow \epsilon$ , και ο χειρισμός τους είναι ταυτόσημος με των παραγρ. 2.2.1 και 2.2.2 του Μέρους Α. Έτσι:

- Αντί για τις σημειακές σχέσεις (4.2-17) μπορούν να χρησιμοποιηθούν, συνολικά ή εν μέρει, οι αντίστοιχες ολοκληρωτικές σχέσεις, με μορφή:

$$\oint_S \mu_\Delta \mathbf{H}_M \cdot d\mathbf{S} = \int_V dQ_m, \quad \oint_\ell \mathbf{H}_M \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (4.2-18)$$

σε κλειστή επιφάνεια  $S$  (που περικλείει όγκο  $V$ ) και κλειστή καμπύλη  $\ell$ , αντίστοιχα.

- Για την αξιοποίηση των συμμετριών μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση (2.2-12), η οποία τώρα γίνεται:

$$\text{Αν παντού είναι } \frac{\partial}{\partial s} = 0, \text{ με } s = \{x, y, z, \varphi\} \Rightarrow H_{Ms} = 0. \quad (4.2-19)$$

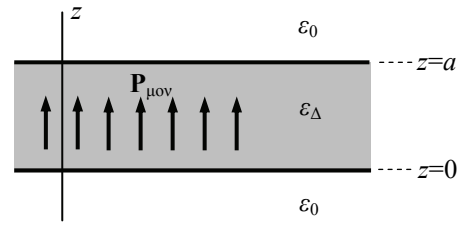
Αντίστοιχα με τις προηγούμενες παρόμοιες σχέσεις, στη σχέση αυτή η ιδιότητα  $\partial/\partial s = 0$  δεν αναφέρεται στη μαγνήτιση (που δεν εμφανίζεται στις τελικές εξισώσεις), αλλά στο υποκατάστατό της, τα «μαγνητικά φορτία».

- Για τους ίδιους λόγους που αναφέρονται στην επίλυση ηλεκτρήτη ως προς το πεδίο  $\mathbf{E}$ , σε ειδικές περιπτώσεις, που περιέχουν τις κατάλληλες συμμετρίες, είναι δυνατόν να συναχθεί αμέσως ότι είναι  $\mu_\Delta \mathbf{H}_M = -\mu_0 \mathbf{M}_{\text{μον}}$ .
- Μετά την επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{ελ}} + \mathbf{H}_M$ , το πεδίο  $\mathbf{B}$  προσδιορίζεται σε κάθε περιοχή του χώρου από την κατάλληλη συντακτική σχέση μεταξύ των (4.2-1αβ).

Τόσο στην περίπτωση διατάξεων με ηλεκτρήτη, όσο και σε εκείνη με μαγνήτη, οι δύο εναλλακτικοί τρόποι επίλυσης είναι εξίσου ορθοί. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει, ότι για κάθε διάταξη μπορεί και οι δύο πορείες να είναι εξίσου αποτελεσματικές. Υπάρχει μάλιστα το ενδεχόμενο στη μία πορεία τα ισοδύναμα φορτία ή ρεύματα (ηλεκτρικά ή «μαγνητικά») να περιέχουν τις συμμετρίες που επιτρέπουν επίλυση με στοιχειώδεις τεχνικές, και στην άλλη τέτοιες συμμετρίες να μη συναντώνται.

Απλές διατάξεις με ηλεκτρήτη ή μαγνήτη παρουσιάζονται στα *παραδ. 4.2-1 έως 4.2-5*.

**Παράδειγμα 4.2-1:** Στην περιοχή  $0 < z < a$  και σε κάθε  $x$  και  $y$  υπάρχει ηλεκτρήτης, με  $\mathbf{D} = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} + \varepsilon_{\Delta}\mathbf{E}$ , όπου  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_z P_0(1 + z/a)$ , με  $P_0$  και  $\varepsilon_{\Delta}$  σταθερές ποσότητες, ενώ ο υπόλοιπος χώρος έχει αέρα (με  $\varepsilon_0$ ). Ζητούνται τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{D}$  που αναπτύσσονται.



**Επίλυση:** Δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία, οπότε τα μόνα αίτια είναι τα φορτία πόλωσης. Για να επιδειχθεί η διαδικασία, θα εφαρμοσθούν εναλλακτικά και οι δύο τρόποι επίλυσης.

Επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{E}$ : Με βάση τις σημειακές σχέσεις (4.2-6), οι εξισώσεις είναι:

$$\text{Περιοχή } 0 < z < a: \quad \nabla \cdot (\varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}) = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = -P_0/a = \rho_{\text{ισοδ}}$$

$$\text{και } \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$\text{Επιφάνεια } z = 0: \quad \mathbf{i}_z \cdot (\varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}(z = 0^+) - \varepsilon_0 \mathbf{E}(z = 0^-)) = -\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(z = 0^+) - 0) = -P_0 = \sigma_{0,\text{ισοδ}}$$

$$\text{και } \mathbf{i}_z \times (\mathbf{E}(0^+) - \mathbf{E}(0^-)) = 0,$$

$$\text{Επιφάνεια } z = a: \quad \mathbf{i}_z \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}(z = a^+) - \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}(z = a^-)) = -\mathbf{i}_z \cdot (0 - \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(z = a^-)) = 2P_0 = \sigma_{a,\text{ισοδ}}$$

$$\text{και } \mathbf{i}_z \times (\mathbf{E}(a^+) - \mathbf{E}(a^-)) = 0,$$

$$\text{Περιοχές } z < 0 \text{ και } z > a: \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = 0$$

$$\text{και } \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Όλες οι ποσότητες (ισοδύναμα φορτία και επιτρεπτότητες  $\varepsilon_0$  και  $\varepsilon_{\Delta}$ ) χαρακτηρίζονται παντού από  $\partial/\partial x = 0$  ( $\Rightarrow E_x = 0$ ) και  $\partial/\partial y = 0$  ( $\Rightarrow E_y = 0$ ), άρα είναι  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_z E(z)$  και οι σχέσεις  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  και  $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = 0$  ικανοποιούνται αυτόματα. Επίσης, από το  $z = -\infty$  η διάταξη φαίνεται σαν επίπεδη επιφάνεια με επιφανειακό φορτίο συνολικά ίσο με μηδέν [μαθηματικά, ίσο με  $(-P_0/a) \times a + (-P_0) + 2P_0 = 0$ , όπως είναι αναμενόμενο για φυσικούς λόγους, επειδή οι αντίθετοι πόλοι των διπόλων συνολικά εξουδετερώνονται]. Συνεπώς, είναι  $\mathbf{E}|_{z=-\infty} = 0$ .

Για επίλυση με τις σημειακές σχέσεις, χρησιμοποιώντας ως αφετηρία τη θέση  $z = -\infty$  και με  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial E/\partial z$ , ολοκληρώνοντας διαδοχικά προκύπτει:

$$z < 0: \quad \varepsilon_0 \partial E/\partial z = 0 \Rightarrow E(z) = E(z = -\infty) + 0 = 0,$$

$$z = 0: \quad \varepsilon_{\Delta} E(0^+) = \varepsilon_0 E(0^-) - P_0 = 0 - P_0 = -P_0,$$

$$0 < z < a: \quad \varepsilon_{\Delta} \partial E/\partial z = -P_1/a \Rightarrow \varepsilon_{\Delta} E(z) = \varepsilon_{\Delta} E(0^+) - (P_0/a) \int_0^z dz = -P_0 - (P_0/a)z = -P_0(1 + z/a),$$

$$z = a: \quad \varepsilon_{\Delta} E(a^+) = \varepsilon_0 E(a^-) + 2P_0 = -P_0(1 + a/a) + 2P_0 = 0,$$

$$z > a: \quad \varepsilon_0 \partial E/\partial z = 0 \Rightarrow E(z) = E(z = a^+) = 0.$$

Επομένως,  $\mathbf{E}(0 < z < a) = -\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}/\varepsilon_{\Delta}$  και από τη συντακτική σχέση στην ίδια περιοχή είναι  $\mathbf{D}(0 < z < a) = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} + \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E} = 0$ , ενώ στις περιοχές  $z < 0$  και  $z > a$  είναι  $\mathbf{E} = 0$  και  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = 0$ .

Εναλλακτικά, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ολοκληρωτικές σχέσεις. Η σχέση  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$  ικανοποιείται αυτόματα, επειδή η επιλογή  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_z E(z)$  ικανοποιεί τόσο τη σχέση  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , όσο και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες. Για το ολοκλήρωμα  $\oint_S \varepsilon_\Delta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  η γεωμετρία υποδεικνύει για την κλειστή επιφάνεια  $S$  να επιλεγεί ορθό πρίσμα (ώστε στις τέσσερις πλευρικές επιφάνειες, όπου  $\mathbf{i}_n \perp \mathbf{i}_z$ , να είναι  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ), με τη μία βάση στο  $z = -\infty$  (ώστε να αξιοποιηθεί η διαπίστωση ότι  $\mathbf{E}|_{-\infty} = 0$  και ότι, συνεπώς, και εκεί είναι  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ) και την άλλη (την πάνω) βάση στην τυχαία θέση  $z$ . Λαμβάνοντας το πρίσμα με διατομή  $S_0$  και την πάνω βάση σε διάφορες θέσεις  $z$ , προκύπτει:

$$z < 0: \quad \oint_S \varepsilon_\Delta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E(z) S_0, \quad \int dQ_{\text{ισοδ}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_0 E(z) = 0,$$

$$0 < z < a: \quad \oint_S \varepsilon_\Delta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_\Delta E(z) S_0, \quad \int dQ_{\text{ισοδ}} = [-P_0 - (P_0/a)z] S_0 \Rightarrow \varepsilon_\Delta E(z) = -P_0(1 + z/a),$$

$$z > a: \quad \oint_S \varepsilon_\Delta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E(z) S_0, \quad \int dQ_{\text{ισοδ}} = [-P_0 - (P_0/a)a + 2P_0] S_0 \Rightarrow \varepsilon_0 E(z) = 0.$$

Αναπαράγεται, δηλαδή, το αποτέλεσμα  $\mathbf{E}(0 < z < a) = -\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}/\varepsilon_\Delta$ , οπότε  $\mathbf{D}(0 < z < a) = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} + \varepsilon_\Delta \mathbf{E} = 0$ , και  $\mathbf{E}(z < 0) = \mathbf{E}(z > a) = 0$ , οπότε στις ίδιες περιοχές είναι  $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} = 0$ .

Επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{D}$ : Στην επαλληλία  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\varepsilon\Delta} + \mathbf{D}_P$ , ο πρώτος όρος είναι  $\mathbf{D}_{\varepsilon\Delta} = 0$ , επειδή ο όρος αυτός εξαρτάται από τα ελεύθερα φορτία, που εδώ είναι μηδενικά. Στο δεύτερο όρο  $\mathbf{D}_P$ , σύμφωνα με τις σχέσεις (4.2-10), συνεισφέρουν τα ακόλουθα «μαγνητικά ρεύματα»:

$$0 < z < a: \quad \mathbf{J}_m = \nabla \times (\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}/\varepsilon_\Delta) = 0 \text{ (για τη δεδομένη εξάρτηση του } \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} \text{ και επειδή } \varepsilon_\Delta = \text{σταθ.}),$$

$$z = 0: \quad \mathbf{K}_{m,0} = \mathbf{i}_z \times [\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(z=0^+)/\varepsilon_\Delta - \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(z=0^-)/\varepsilon_0] = \mathbf{i}_z \times [\mathbf{i}_z P_0/\varepsilon_\Delta - 0] = 0,$$

$$z = a: \quad \mathbf{K}_{m,a} = \mathbf{i}_z \times [\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(z=a^+)/\varepsilon_0 - \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(z=a^-)/\varepsilon_\Delta] = \mathbf{i}_z \times [0 - \mathbf{i}_z 2P_0/\varepsilon_\Delta] = 0.$$

Άλλα «μαγνητικά ρεύματα» δεν μπορεί να υπάρχουν: Η μόνιμη πόλωση  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$  έχει ασυνέχειες μόνο στα επίπεδα  $z = 0$  και  $z = a$ , που έχουν εξετασθεί, και δεν έχει κανέναν απειρισμό σε γραμμή ή σημείο. Αφού, λοιπόν, όλα τα «μαγνητικά ρεύματα» είναι ίσα με μηδέν, το αποτέλεσμα που παράγεται είναι, επίσης, μηδενικό,  $\mathbf{D}_P = 0$  παντού. [Μαθηματικά, όλες οι σχέσεις (4.2-10) εδώ είναι ομογενείς εξισώσεις, οπότε η μηδενική λύση είναι η μοναδική που συνδέει το αποτέλεσμα  $\mathbf{D}_P$  με το μηδενικό αίτιο.] Επειδή συνολικά είναι  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\varepsilon\Delta} + \mathbf{D}_P = 0$  παντού, θα είναι  $\mathbf{E}(0 < z < a) = (\mathbf{D} - \mathbf{P}_{\mu\text{ov}})/\varepsilon_\Delta = -\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}/\varepsilon_\Delta$  και  $\mathbf{E}(z < 0) = \mathbf{E}(z > a) = \mathbf{D}/\varepsilon_0 = 0$ .

### Σχόλια:

- Από τις δύο πορείες επίλυσης, η πρώτη (μέσω του πεδίου  $\mathbf{E}$ ) είναι η πιο «στρωτή», επειδή εμπλέκει απλές διαδικασίες Ηλεκτροστατικής σε διάταξη ηλεκτρικού πεδίου. Τελικά, όμως, η δεύτερη πορεία (μέσω του πεδίου  $\mathbf{D}$ ) καταλήγει να είναι η ταχύτερη, επειδή τυχαίνει στην παρούσα διάταξη όλες οι δυνάμεις κατανομές «μαγνητικών ρευμάτων» να είναι μηδενικές, με αποτέλεσμα να είναι μηδενικό και το πεδίο  $\mathbf{D}$ .



- Ανεξάρτητα από το προηγούμενο σχόλιο, η επίλυση με τις σημειακές σχέσεις για το πεδίο  $\mathbf{E}$  μπορεί να επιταχυνθεί αισθητά σε διατάξεις όπως η παρούσα, όταν η μόνιμη πόλωση έχει γενικότερα μορφή  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_z P_{\mu\text{ov}}(z)$ , όπου η  $P_{\mu\text{ov}}(z)$  είναι συνάρτηση της θέσης  $z$  (μόνο), και οι ασυνέχειες είναι σε επίπεδα  $z = z_j$ . Τότε, γενικά σε κάθε περιοχή με μόνιμη πόλωση (π.χ. στη  $z_1 < z < z_2$ ) η διαφορική εξίσωση για το πεδίο  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_z E(z)$  είναι:

$$\nabla \cdot (\varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}) = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon_{\Delta} E) = \rho - \frac{\partial}{\partial z} P_{\mu\text{ov}},$$

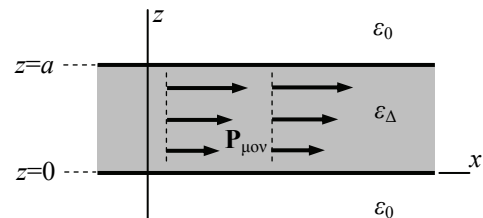
και η ολοκλήρωση με αφετηρία στη θέση  $z = z_1$  δίνει:

$$\varepsilon_{\Delta}(z)E(z) - \varepsilon_{\Delta}(z_1)E(z_1) = \int_{z_1}^z \rho(z') dz' - [P_{\mu\text{ov}}(z) - P_{\mu\text{ov}}(z_1)].$$

Με άλλα λόγια, αποφεύγεται η παραγωγή  $\partial P_{\mu\text{ov}}/\partial z$  (για να προσδιορισθεί η πυκνότητα  $\rho_{\text{ισοδ}}$ ) και ακολούθως η αντιστροφή της, η ολοκλήρωση  $\int (\partial P_{\mu\text{ov}}/\partial z) dz$  (ως μέρος της ολοκλήρωσης  $\int \rho_{\text{ισοδ}} dz$ ).

- Η διαδικασία του προηγούμενου σχολίου δεν εφαρμόζεται αν π.χ. είναι  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_z P_{\mu\text{ov}}(z, x)$ , επειδή τότε τα ισοδύναμα φορτία εξαρτώνται και από τη συντεταγμένη  $x$  και το πεδίο δεν έχει τη μορφή  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_z E(z)$ . Αν, όμως, είναι  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_x P_{\mu\text{ov}}(z)$ , τότε η διαδικασία μπορεί να εφαρμοσθεί, αλλά η συνεισφορά της πόλωσης είναι μηδενική (επειδή  $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = 0$ ) και το πεδίο  $\mathbf{E}$  εξαρτάται μόνο από τα ελεύθερα φορτία, αν υπάρχουν, αλλιώς είναι  $\mathbf{E} = 0$ . [Όμως, τότε δεν είναι  $\mathbf{D} = 0$ , βλ. το επόμενο παράδ. 4.2-2.]
- Τα προηγούμενα εφαρμόζονται ανάλογα και σε διατάξεις με κυλινδρική δομή [όταν δηλαδή είναι  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_T P_{\mu\text{ov}}(r_T)$ ] ή με σφαιρική δομή [όταν  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_r P_{\mu\text{ov}}(r)$ ].
- Οι παρατηρήσεις αυτές μπορούν να εφαρμοσθούν και στις ολοκληρωτικές σχέσεις, όπου αρκεί να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $\int_V (\varepsilon_{\Delta} \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}) \cdot d\mathbf{S} = \int dQ$  (αντί  $\int_V \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int dQ_{\text{ισοδ}}$ ).

**Παράδειγμα 4.2-2:** Στην περιοχή  $0 < z < a$  και σε κάθε  $x$  και  $y$  υπάρχει ηλεκτρίτης, με  $\mathbf{D} = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} + \varepsilon_{\Delta} \mathbf{E}$ , όπου τώρα  $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_x P_0(1 + z/a)$  και πάλι  $P_0$ ,  $\varepsilon_{\Delta} = \text{σταθ}$ , ενώ ο υπόλοιπος χώρος έχει αέρα (με  $\varepsilon_0$ ). Ζητούνται τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{D}$  που αναπτύσσονται.



**Επίλυση:** Πάλι δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία και τα μόνα αίτια είναι τα φορτία πόλωσης. Αδιαφορώντας για το ποιος από τους τρόπους επίλυσης είναι ο πιο πρόσφορος, θα παρουσιασθεί η διαδικασία εφαρμόζοντας εναλλακτικά και τους δύο.

Επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{E}$ : Οι σημειακές σχέσεις (4.2-6) δίνουν τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
 \text{Περιοχή } z < 0: & \quad \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}) = 0 \\
 & \quad \text{και } \nabla \times \mathbf{E} = 0, \\
 \text{Επιφάνεια } z = 0: & \quad \mathbf{i}_z \cdot (\varepsilon_\Delta \mathbf{E}(z=0^+) - \varepsilon_0 \mathbf{E}(z=0^-)) = -\mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(z=0^+) - 0) = 0 \\
 & \quad \text{και } \mathbf{i}_z \times (\mathbf{E}(0^+) - \mathbf{E}(0^-)) = 0, \\
 \text{Περιοχή } 0 < z < a: & \quad \nabla \cdot (\varepsilon_\Delta \mathbf{E}) = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = 0 \\
 & \quad \text{και } \nabla \times \mathbf{E} = 0, \\
 \text{Επιφάνεια } z = a: & \quad \mathbf{i}_z \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E}(z=a^+) - \varepsilon_\Delta \mathbf{E}(z=a^-)) = -\mathbf{i}_z \cdot (0 - \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(z=a^-)) = 0 \\
 & \quad \text{και } \mathbf{i}_z \times (\mathbf{E}(a^+) - \mathbf{E}(a^-)) = 0, \\
 \text{Περιοχή } z > a: & \quad \text{όπως στην περιοχή } z < 0.
 \end{aligned}$$

Όλες οι εξισώσεις είναι τώρα ομογενείς, οπότε, αποδεκτή είναι μόνο η μηδενική λύση,  $\mathbf{E} = 0$ , επειδή οποιαδήποτε άλλη σταθερά  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$  δεν είναι δυνατόν να συσχετισθεί με τα δεδομένα, και με  $\mathbf{E} = 0$  προκύπτει  $\mathbf{D}(0 < z < a) = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} + \varepsilon_\Delta \mathbf{E} = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$  και  $\mathbf{D}(z < 0) = \mathbf{D}(z > a) = \varepsilon_0 \mathbf{E} = 0$ .

Για επίλυση, ως προς το πεδίο  $\mathbf{E}$  πάντοτε, με τις ολοκληρωτικές σχέσεις αξιοποιείται το γεγονός, ότι για οποιαδήποτε κατανομή είναι  $dQ_{\text{ισοδ}} = 0$ , επειδή δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία και για τα φορτία πόλωσης είναι  $\rho_{\text{ισοδ}} = 0$  και  $\sigma_{0,\text{ισοδ}} = \sigma_{a,\text{ισοδ}} = 0$ , σε αντίθεση με τη διάταξη του προηγούμενου παραδείγματος. Δηλαδή, η ολοκληρωτική σχέση  $\oint_S \varepsilon_\Delta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$  είναι ομογενής εξίσωση ως προς το πεδίο  $\mathbf{E}$ , οποιαδήποτε και να είναι η επιλογή για την κλειστή επιφάνεια  $S$  (και σε κάθε περίπτωση, ομογενής είναι και η σχέση  $\oint_\ell \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ , για κάθε βρόχο  $\ell$ ), συμπεραίνοντας ότι παντού είναι  $\mathbf{E} = 0$  και, ανάλογα με την περιοχή,  $\mathbf{D} = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$  ή  $\mathbf{D} = 0$ .

Επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{D}$ : Στην επαλληλία  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\varepsilon\lambda} + \mathbf{D}_p$ , η συνεισφορά των ελεύθερων φορτίων είναι μηδενική,  $\mathbf{D}_{\varepsilon\lambda} = 0$ , επειδή δεν υπάρχουν κατανομές ελεύθερου ηλεκτρικού φορτίου. Η διάταξη τώρα περιγράφεται από τις σχέσεις (4.2-10), οι οποίες εξειδικεύονται ως:

$$\begin{aligned}
 \text{Περιοχή } z < 0: & \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_p = 0 \\
 & \quad \text{και } \nabla \times (\mathbf{D}_p / \varepsilon_0) = 0, \\
 \text{Επιφάνεια } z = 0: & \quad \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{D}_p(z=0^+) - \mathbf{D}_p(z=0^-)) = 0 \\
 & \quad \text{και } \mathbf{i}_z \times (\mathbf{D}_p(0^+) / \varepsilon_\Delta - \mathbf{D}_p(0^-) / \varepsilon_0) = \mathbf{i}_z \times (\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(0^+) / \varepsilon_\Delta - 0) = \mathbf{i}_y P_0 / \varepsilon_\Delta \hat{=} \mathbf{K}_{0,m}, \\
 \text{Περιοχή } 0 < z < a: & \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_p = 0 \\
 & \quad \text{και } \nabla \times (\mathbf{D}_p / \varepsilon_\Delta) = \nabla \times (\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} / \varepsilon_\Delta) = \mathbf{i}_y (P_0 / \varepsilon_\Delta a) \hat{=} \mathbf{J}_m, \\
 \text{Επιφάνεια } z = a: & \quad \mathbf{i}_z \cdot (\mathbf{D}_p(z=a^+) - \mathbf{D}_p(z=a^-)) = 0 \\
 & \quad \text{και } \mathbf{i}_z \times (\mathbf{D}_p(a^+) / \varepsilon_0 - \mathbf{D}_p(a^-) / \varepsilon_\Delta) = \mathbf{i}_z \times (0 - \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}(a^-) / \varepsilon_\Delta) = -\mathbf{i}_y 2P_0 / \varepsilon_\Delta \hat{=} \mathbf{K}_{a,m}, \\
 \text{Περιοχή } z > a: & \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_p = 0 \\
 & \quad \text{και } \nabla \times (\mathbf{D}_p / \varepsilon_0) = 0.
 \end{aligned}$$

Οι σχέσεις αυτές συνδέουν το πεδίο  $\mathbf{D}_P$  με «μαγνητικά ρεύματα», χωρικό  $\mathbf{J}_m$  στην περιοχή  $0 < z < a$  και επιφανειακά  $\mathbf{K}_{0,m}$  και  $\mathbf{K}_{a,m}$  στις επιφάνειες  $z = 0$  και  $z = a$ , αντίστοιχα.

Όπως και στις διατάξεις μαγνητοστατικής, διαπιστώνεται ότι παντού είναι  $\partial/\partial x = 0$ , που συνδυάζεται με το ότι επίσης κάθε («μαγνητικό», εδώ) ρεύμα έχει μηδενική συνιστώσα στη διεύθυνση  $x$ , δηλαδή παντού είναι  $J_{m,x} = 0$  και  $K_{0,mx} = K_{a,mx} = 0$  (καθώς και ότι δεν υπάρχει  $i_m$  σε γραμμή με  $d\mathbf{r} // \mathbf{i}_x$ ). Αυτό έχει ως συνέπεια ότι παντού είναι  $D_{Py} = D_{Pz} = 0$ , δηλαδή ότι παντού  $\mathbf{D}_P = \mathbf{i}_x D_P(y, z)$ . Υπάρχει και η συμμετρία  $\partial/\partial y = 0$  (που δεν δίνει πρόσθετες πληροφορίες για μηδενισμούς συνιστωσών), που απλοποιεί την εξάρτηση σε  $\mathbf{D}_P = \mathbf{i}_x D_P(z)$ . Από το  $z = -\infty$  ο ηλεκτρήτης φαίνεται σαν επίπεδη επιφάνεια με συνολικό «μαγνητικό» ρεύμα  $\mathbf{K}_{m,ισοδ} = \mathbf{K}_{0,m} + \mathbf{K}_{a,m} + \int_0^a \mathbf{J}_m dz = 0$ . Δεδομένου ότι δεν υπάρχει κανένας λόγος να υποθεθεί πως στις δύο θέσεις  $z = \pm\infty$  του απείρου υπάρχουν αντίρροπα μαγνητικά ρεύματα, ο μηδενισμός  $\mathbf{K}_{m,ισοδ} = 0$  σημαίνει ότι  $\mathbf{D}_P(z = \pm\infty) = 0$ .

Αν προκριθεί η επίλυση με τις σημειακές σχέσεις, η επιλογή με βάση τις συμμετρίες ότι  $\mathbf{D}_P = \mathbf{i}_x D_P(z)$  ικανοποιεί αυτόματα παντού τη σχέση  $\nabla \cdot \mathbf{D}_P = 0$  και την αντίστοιχη οριακή συνθήκη, ενώ επειδή  $\epsilon_{0,\Delta} = \text{σταθ.}$  δίνει  $\nabla \times (\mathbf{D}_P/\epsilon_{0,\Delta}) = (1/\epsilon_{0,\Delta}) \mathbf{i}_y \partial D_P/\partial z$  και  $\mathbf{i}_z \times \mathbf{D}_P = \mathbf{i}_y D_P(z)$ . Προχωρώντας σε διαδοχικές περιοχές, αρχίζοντας από το  $z = -\infty$  (όπου  $\mathbf{D}_P = 0$ ), συνάγεται ότι:

$$\begin{aligned} z < 0: & \quad \partial D/\partial z = 0 \Rightarrow D_P(z) = D_P(-\infty) = 0, \\ z = 0: & \quad \frac{1}{\epsilon_\Delta} D_P(z = 0^+) = \frac{1}{\epsilon_0} D_P(z = 0^-) + \frac{1}{\epsilon_\Delta} P_0 = \frac{1}{\epsilon_\Delta} P_0 \Rightarrow D_P(z = 0^+) = P_0, \\ 0 < z < a: & \quad \partial D_P/\partial z = \frac{1}{a} P_1 \Rightarrow D_P(z) = D_P(0^+) + \int_0^z \frac{1}{a} P_0 dz = P_0 + P_0 \frac{z}{a} = P_0 \left(1 + \frac{z}{a}\right), \\ z = a: & \quad \frac{1}{\epsilon_0} D_P(z = a^+) = \frac{1}{\epsilon_\Delta} D_P(z = a^-) - \frac{2}{\epsilon_\Delta} P_0 = \frac{1}{\epsilon_\Delta} P_0 \left(1 + \frac{a}{a}\right) - \frac{2}{\epsilon_\Delta} P_0 = 0, \\ z > a: & \quad \partial D_P/\partial z = 0 \Rightarrow D_P(z) = D_P(a^+) = 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή, με δεδομένο ήδη ότι  $\mathbf{D}_{\epsilon\lambda} = 0$ , οπότε  $\mathbf{D} = \mathbf{D}_P$ , είναι  $\mathbf{D}_P(z < 0) = \mathbf{D}_P(z > a) = 0$ , οπότε  $\mathbf{E}(z < 0) = \mathbf{E}(z > a) = 0$ , και  $\mathbf{D}_P(0 < z < a) = \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$ , οπότε  $\mathbf{E}(0 < z < a) = (1/\epsilon_\Delta)(\mathbf{D} - \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}) = 0$ .

Για την επίλυση, τέλος, με τις ολοκληρωτικές σχέσεις, με την επιλογή  $\mathbf{D}_P = \mathbf{i}_x D_P(z)$  η σχέση  $\oint_S \mathbf{D}_P \cdot d\mathbf{S} = 0$  ικανοποιείται αυτόματα, αφού όση ηλεκτρική ροή εισέρχεται από μία έδρα πρίσματος στο  $x = x_1$ , τόση ακριβώς εξέρχεται από την απέναντι έδρα στο  $x = x_2$  ( $> x_1$ ).] Το πεδίο θα προσδιορισθεί από τη δεύτερη σχέση,  $\oint_\ell (\mathbf{D}_P/\epsilon_\Delta) \cdot d\mathbf{r} = \int_S dI_m$ , με κατάλληλη επιλογή για το βρόχο  $\ell$ . Με βάση τους προσανατολισμούς  $\mathbf{D}_P // \mathbf{i}_x$  και  $\{\mathbf{J}_m, \mathbf{K}_{0,m}, \mathbf{K}_{a,m}\} // \mathbf{i}_y$ , τέτοια επιλογή είναι ο ορθογωνικός βρόχος, με πλάτος  $\Delta x = L$ , και με τη μία πλευρά στο  $z = -\infty$  (ώστε να αξιοποιηθεί η πληροφορία ότι εκεί είναι  $\mathbf{D}_{P,-\infty} = 0$ ). Στην κυκλοφορία συνεισφέρει μόνο η

πλευρά στην τυχαία θέση  $z$ , και είναι  $\oint_{\ell} (\mathbf{D}_P/\varepsilon_{\Delta}) \cdot d\mathbf{r} = LD_P(z)$ . Το πόσο μαγνητικό ρεύμα διέρχεται από την  $S$ , αυτό εξαρτάται από τη θέση αυτής της πλευράς. Εύκολα φαίνεται πως:

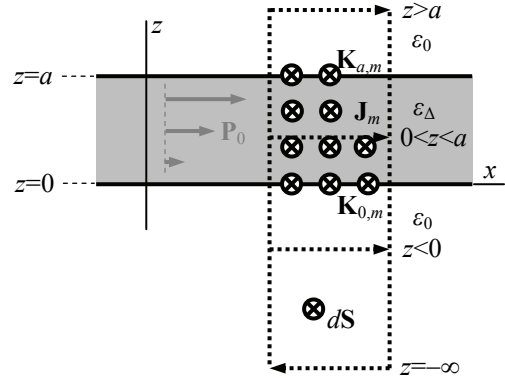
$$\text{Για } z < 0 \text{ είναι: } \int_S dI_m = 0,$$

Για  $0 < z < a$  είναι:

$$\int_S dI_m = L(K_{0,m} + \int_0^z J_m dz) = (L/\varepsilon_{\Delta})P_0(1 + z/a)$$

Για  $z > a$  είναι:

$$\int_S dI_m = L(K_{0,m} + \int_0^z J_m dz + K_{a,m}) = 0.$$



Εξισώνοντας την κυκλοφορία  $\oint_{\ell} (\mathbf{D}_P/\varepsilon_{\Delta}) \cdot d\mathbf{r}$  με τη ροή  $\int_S dI_m$  για κάθε επιλογή του  $z$  προκύπτει πάλι το αποτέλεσμα  $\mathbf{D}_P(z < 0) = \mathbf{D}_P(z > a) = 0$  και  $\mathbf{D}_P(0 < z < a) = \mathbf{P}_0$ , οπότε, με δεδομένο και ότι  $\mathbf{D}_{\varepsilon\ell} = 0$ , η εφαρμογή της συντακτικής σχέσης που περιγράφει κάθε περιοχή δίνει το αποτέλεσμα  $\mathbf{E}(z) = 0$  σε καθεμία από τις τρεις περιοχές.

### Σχόλια:

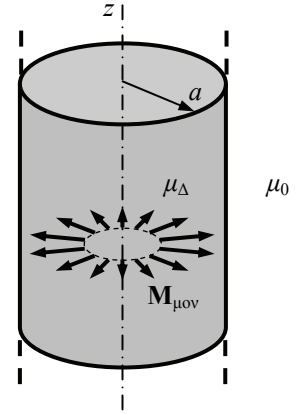
- Στο παρόν παράδειγμα είναι φανερό πως (σε αντίθεση με το προηγούμενο) η εισαγωγή των «μαγνητικών ρευμάτων» δεν προσφέρει καμία διευκόλυνση, και επιπλέον συνοδεύεται από την εννοιολογική δυσκολία ότι επιχειρείται η επίλυση μιας διάταξης ηλεκτρικού πεδίου με τεχνικές Μαγνητοστατικής.
- Σε *σχόλιο* του προηγούμενου *παραδ. 4.2-1*, επισημάνθηκε ότι δεν είναι απαραίτητο να προσδιορισθεί το  $\rho_{\text{ισοδ}}$  κατά την επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{E}$ . Αντίστοιχα, στην παρούσα διάταξη, για το πεδίο  $\mathbf{D}_P = \mathbf{i}_x D_P(z)$  οι εξισώσεις έχουν μορφή όπως:

$$0 < z < a: \quad \nabla \times \frac{\mathbf{D}_P}{\varepsilon_{\Delta}} = \nabla \times \frac{\mathbf{P}_0}{\varepsilon_{\Delta}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{D_P}{\varepsilon_{\Delta}} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{P_{\text{μov}}}{\varepsilon_{\Delta}} \right),$$

που ολοκληρώνεται αμέσως,  $(D_P/\varepsilon_{\Delta})|_z - (D_P/\varepsilon_{\Delta})|_{z=0} = (P_{\text{μov}}/\varepsilon_{\Delta})|_z - (P_{\text{μov}}/\varepsilon_{\Delta})|_{z=0}$ . Είναι, δηλαδή, περιττό να παραγωγισθεί το πηλίκο  $P_{\text{μov}}/\varepsilon_{\Delta}$  για να προσδιορισθεί το μαγνητικό ρεύμα  $\mathbf{i}_y \cdot \mathbf{J}_m$  και ακολούθως να ολοκληρωθεί η παράγωγος, για να προσδιορισθεί το πεδίο  $\mathbf{D}_P$ .

- Αν η διάταξη με τον ηλεκτρήτη στην περιοχή  $0 < z < a$  είχε μόνιμη πόλωση υπό γωνία, για παράδειγμα,  $\mathbf{P}_{\text{μov}} = \mathbf{i}_x P_{\text{μov},x} + \mathbf{i}_z P_{\text{μov},z}$ , θα εξυπηρετούσε η εφαρμογή επαλληλίας,  $\mathbf{P}_{\text{μov}} = \mathbf{P}_{\text{μov},1} + \mathbf{P}_{\text{μov},2}$ , με  $\mathbf{P}_{\text{μov},1} = \mathbf{i}_x P_{\text{μov},x}$  και  $\mathbf{P}_{\text{μov},2} = \mathbf{i}_z P_{\text{μov},z}$ . Αν, επιπλέον, τα  $P_{\text{μov},x}$  και  $P_{\text{μov},z}$  ήταν συναρτήσεις μόνο του  $z$ , το πρόβλημα με το  $\mathbf{P}_{\text{μov},1}$  θα εξυπηρετούσε να επιλυθεί ως προς  $\mathbf{E}$  και εκείνο με το  $\mathbf{P}_{\text{μov},2}$  ως προς  $\mathbf{D}$ .

**Παράδειγμα 4.2-3:** Ο κύλινδρος  $r_T < a$  (σε κάθε  $\varphi$  και  $z$ ) περιέχει μόνιμο μαγνήτη, με  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{μov}} + \mu_{\Delta} \mathbf{H}$ , όπου  $\mathbf{M}_{\text{μov}} = \mathbf{i}_T M_0$  και  $M_0, \mu_{\Delta} = \text{σταθ.}$ , ενώ ο υπόλοιπος χώρος έχει αέρα (με  $\mu_0$ ). Ζητούνται τα πεδία  $\mathbf{H}$  και  $\mathbf{B}$  που αναπτύσσονται.



**Επίλυση:** Μπορούν να εισαχθούν είτε τα «μαγνητικά φορτία», είτε τα ισοδύναμα ηλεκτρικά ρεύματα, και η επίλυση να γίνει με χρήση είτε των σημειακών, είτε των ολοκληρωτικών σχέσεων. Όλες οι δυνατότητες επίλυσης θα παρουσιασθούν, για λόγους επίδειξης.

Επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{H}$ : Δεν αναφέρονται ελεύθερα ρεύματα, οπότε στην επαλληλία  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{ελ}} + \mathbf{H}_{\text{M}}$  είναι  $\mathbf{H}_{\text{ελ}} = 0$ . Το μόνο αίτιο για την παραγωγή μαγνητικού πεδίου είναι η μαγνήτιση  $\mathbf{M}_{\text{μov}}$ , η οποία με βάση τις σχέσεις (4.2-17) μπορεί να υποκατασταθεί από «μαγνητικά φορτία», περιγραφόμενα από τις πυκνότητες:

$$\begin{aligned} r_T < a: \quad \rho_m &= -\mu_0 \nabla \cdot \mathbf{M}_{\text{μov}} = -\mu_0 \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T M_0) = -\mu_0 \frac{M_0}{r_T}, \\ r_T = a: \quad \sigma_m &= -\mu_0 \mathbf{i}_T \cdot (0 - \mathbf{M}_{\text{μov}}(r_T = a^-)) = \mu_0 M_0, \\ r_T = 0: \quad \lambda_m &= -\mu_0 (2\pi r_T M_{\text{μov},T}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = -\mu_0 (2\pi r_T M_0) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = 0. \end{aligned}$$

Με την οπτική διατάξεων Ηλεκτροστατικής (!), οι συμμετρίες είναι ότι  $\partial/\partial\varphi = 0$  και  $\partial/\partial z = 0$ , με συνέπεια να είναι  $H_z = H_{\varphi} = 0$ , δηλαδή  $\mathbf{H} = \mathbf{i}_T H(r_T)$  (γράφοντας απλά  $\mathbf{H}_{\text{M}} \rightarrow \mathbf{H}$ , αφού είναι  $\mathbf{H}_{\text{ελ}} = 0$ ), που ικανοποιεί τη σχέση  $\nabla \times \mathbf{H} = 0$  και τις οριακές συνθήκες που της αντιστοιχούν. Ακολούθως μπορεί να επιλεγεί η πορεία επίλυσης (σημειακά ή ολοκληρωτικά).

Σημειακά, με τη σχέση  $\nabla \cdot (\mu_{\Delta} \mathbf{H}) = \rho_m$  και τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες, ολοκληρώνοντας σε διαδοχικές περιοχές, με αφετηρία από τη θέση  $r_T = 0$ :

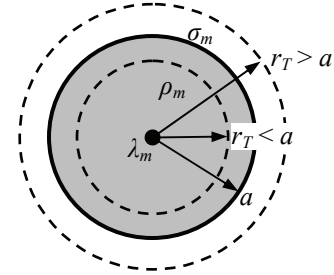
$$\begin{aligned} r_T = 0: \quad (2\pi r_T \mu_{\Delta} H)_{r_T \rightarrow 0} = \lambda_m = 0 &\Rightarrow (\mu_{\Delta} r_T H)_{r_T \rightarrow 0} = 0, \\ 0 < r_T < a: \quad \frac{\mu_{\Delta}}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T H_T) = \rho_m = -\mu_0 \frac{M_0}{r_T} \\ &\Rightarrow r_T H(r_T) = (r_T H) \Big|_0 + \int_0^{r_T} \left( -\frac{\mu_0 M_0}{\mu_{\Delta}} \right) dr_T = 0 - \frac{\mu_0 M_0}{\mu_{\Delta}} r_T, \\ r_T = a: \quad \mathbf{i}_T \cdot (\mu_0 \mathbf{H}(r_T = a^+) - \mu_{\Delta} \mathbf{H}(r_T = a^-)) = \sigma_m = \mu_0 M_0 \\ &\Rightarrow H(r_T = a^+) = M_0 + \frac{\mu_{\Delta}}{\mu_0} \left( -\frac{\mu_0 M_0}{\mu_{\Delta}} \right) = 0, \\ r_T > a: \quad \frac{\mu_0}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T H_T) = \rho_m = 0 &\Rightarrow r_T H(r_T) = a H(a^+) = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, στην εσωτερική περιοχή είναι  $\mathbf{H}(r_T < a) = -\mathbf{i}_T(\mu_0/\mu_\Delta)M_0$  και  $\mathbf{B}(r_T < a) = \mu_0\mathbf{M}_{\mu\text{ov}} + \mu_\Delta\mathbf{H} = 0$ , ενώ στη δεύτερη περιοχή είναι  $\mathbf{H}(r_T > a) = 0$  και  $\mathbf{B}(r_T > a) = \mu_0\mathbf{H} = 0$  πάλι.

Ολοκληρωτικά, με  $\mathbf{H} = \mathbf{i}_T H(r_T)$  η σχέση  $\oint_S \mu_\Delta \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \int_V dQ_m$  σε κύλινδρο με μήκος  $L$  και ακτίνα  $r_T$  δίνει αμέσως:

$$r_T < a: \quad \mu_\Delta H(r_T) 2\pi r_T L = \lambda_m L + \int_0^{r_T} \rho_m 2\pi r_T dr_T L = \dots \\ \Rightarrow H(r_T) = -(\mu_0/\mu_\Delta)M_0,$$

$$r_T > a: \quad \mu_0 H(r_T) 2\pi r_T L = \lambda_m L + \int_0^a \rho_m 2\pi r_T dr_T L + \sigma_m 2\pi a L = 0 \\ \Rightarrow H(r_T) = 0,$$



αναπαράγοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για το πεδίο  $\mathbf{H}$  και ακολούθως για το  $\mathbf{B}$ .

Επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{B}$ : Δεν υπάρχουν ηλεκτρικά ρεύματα που οφείλονται σε ελεύθερα φορτία, οπότε τα ισοδύναμα ρεύματα οφείλονται μόνο στη μαγνήτιση  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov}}$ :

$$r_T < a: \quad \mathbf{J}_{\text{ισοδ}} = \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_\Delta} \mathbf{M}_{\mu\text{ov}} \right) = 0,$$

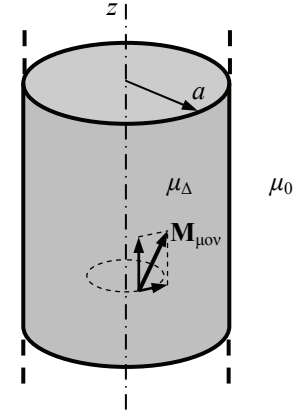
$$r_T = a: \quad \mathbf{K}_{\text{ισοδ}} = \mathbf{K} + \mu_0 \mathbf{i}_T \times \left( 0 - \frac{1}{\mu_\Delta} \mathbf{M}_{\mu\text{ov}} \right) = 0,$$

$$r_T = 0: \quad i_{\text{ισοδ}} = i + \mu_0 \left( 2\pi r_T \frac{\mathbf{i}_T \cdot \mathbf{M}_{\mu\text{ov}}}{\mu_\Delta} \right) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = 0.$$

Τα ισοδύναμα ρεύματα (τα αίτια που παράγουν το πεδίο  $\mathbf{B}$ ) είναι παντού μηδενικά. Συνεπώς, και για το πεδίο  $\mathbf{B}$  θα είναι  $\mathbf{B} = 0$  παντού. [Οι σημειακές σχέσεις (4.2-13) είναι όλες ομογενείς και μόνο η μηδενική λύση συνδέεται με το μηδενικό αίτιο. Αν, εναλλακτικά, προτιμηθούν οι σχέσεις (4.2-14), η εξίσωση κυκλοφορίας με  $dI_{\text{ισοδ}} = 0$  είναι ομογενής σχέση, ανεξάρτητα από την επιλογή του βρόχου  $\ell$ , οπότε και οι δύο ολοκληρωτικές σχέσεις είναι ομογενείς.] Έχοντας προσδιορίσει ότι  $\mathbf{B} = 0$ , το πεδίο  $\mathbf{H}$  προκύπτει από εφαρμογή της συντακτικής σχέσης κάθε περιοχής, οπότε  $\mathbf{H}(r_T < a) = (\mathbf{B} - \mu_0\mathbf{M}_0)/\mu_\Delta = -\mathbf{i}_T(\mu_0/\mu_\Delta)M_0$  και  $\mathbf{H}(r_T > a) = \mathbf{B}/\mu_0 = 0$ .

**Σχόλιο:** Συνήθως, η επίλυση ως προς την ένταση του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{H}$  είναι απλούστερη, επειδή εμπλέκει μόνο βαθμωτές εξισώσεις, την απόκλιση και τις οριακές συνθήκες για τις κάθετες συνιστώσες, όπως σε διατάξεις Ηλεκτροστατικής. Αντίθετα η Μαγνητοστατική περιγράφεται από εξισώσεις περιστροφής και οριακές συνθήκες για τις εφαπτομενικές συνιστώσες, δηλαδή η περιγραφή εμπλέκει διανυσματικές εξισώσεις. Η απλότητα της επίλυσης υπέρ του πεδίου  $\mathbf{H}$  προβάλλεται στο παρόν παράδειγμα. Και αυτή η διαπίστωση δεν αναιρείται από το γεγονός ότι εδώ συμβαίνει να είναι ακόμη απλούστερη η επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{B}$ , μόνο και μόνο επειδή σχηματίζονται αποκλειστικά ομογενείς σχέσεις με συνέπεια να προκύπτει το αποτέλεσμα  $\mathbf{B} = 0$ .

**Παράδειγμα 4.2-4:** Ο κύλινδρος  $r_T < a$  (σε κάθε  $\varphi$  και  $z$ ) περιέχει μαγνήτη, με  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{μιν}} + \mu_{\Delta} \mathbf{H}$ , όπου (σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα) είναι  $\mathbf{M}_{\text{μιν}} = \mathbf{i}_{\varphi} M_1 + \mathbf{i}_z M_2$ , με  $M_1, M_2$  και  $\mu_{\Delta}$  σταθερές ποσότητες. Ο υπόλοιπος χώρος έχει αέρα (με  $\mu_0$ ). Ζητούνται τα πεδία  $\mathbf{H}$  και  $\mathbf{B}$  που αναπτύσσονται.



**Επίλυση:**

Επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{H}$ : Για τον τωρινό προσανατολισμό της μαγνήτισης  $\mathbf{M}_{\text{μιν}}$ , οι ίδιες σχέσεις δίνουν τώρα  $\rho_m = 0$ ,  $\sigma_m = 0$  και  $\lambda_m = 0$ . Κατά συνέπεια, παντού είναι  $\mathbf{H}_M = 0$ , επειδή όλες οι εξισώσεις που το καθορίζουν είναι ομογενείς. Επίσης είναι  $\mathbf{H}_{\text{ελ}} = 0$ , αφού δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα. Δηλαδή, παντού είναι  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{ελ}} + \mathbf{H}_M = 0$ , και τέλος από τη συντακτική σχέση κάθε περιοχής προκύπτει, ότι  $\mathbf{B}(r_T < a) = \mu_0 \mathbf{M}_0$  και  $\mathbf{B}(r_T > a) = 0$ .

Επίλυση ως προς το πεδίο  $\mathbf{B}$ : Δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα, οπότε το πεδίο  $\mathbf{B}$  προσδιορίζεται από τα ρεύματα μαγνήτισης. Με απλή εφαρμογή των σχέσεων (4.2-13), προκύπτει:

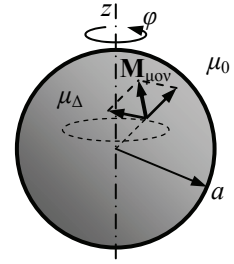
$$r_T < a: \quad \mathbf{J}_{\text{ισοδ}} = \mathbf{J} + \mu_0 \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_{\Delta}} \mathbf{M}_{\text{μιν}} \right) = \mathbf{i}_z \frac{\mu_0}{\mu_{\Delta}} \frac{M_1}{r_T},$$

$$r_T = a: \quad \mathbf{K}_{\text{ισοδ}} = \mathbf{K} + \mu_0 \mathbf{i}_T \times \left( 0 - \frac{1}{\mu_{\Delta}} \mathbf{M}_{\text{μιν}} \right) = -\mathbf{i}_z \frac{\mu_0}{\mu_{\Delta}} M_1 + \mathbf{i}_{\varphi} \frac{\mu_0}{\mu_{\Delta}} M_2,$$

$$r_T = 0: \quad \mathbf{i}_{\text{ισοδ}} = i + \mu_0 \left( 2\pi r_T \frac{\mathbf{i}_T \cdot \mathbf{M}_{\text{μιν}}}{\mu_{\Delta}} \right) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = 0.$$

Εφαρμόζοντας επαλληλία,  $\mathbf{M}_{\text{μιν}} = \mathbf{M}_{\text{μιν},1} + \mathbf{M}_{\text{μιν},2}$ , με  $\mathbf{M}_{\text{μιν},1} = \mathbf{i}_{\varphi} M_1$  και  $\mathbf{M}_{\text{μιν},2} = \mathbf{i}_z M_2$ , καθεμία από τις δύο επιμέρους διατάξεις περιγράφονται από ισοδύναμα ρεύματα που αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις εφαρμογές του νόμου του *Ampere* (για το πεδίο  $\mathbf{B}$ ): Στη διάταξη με το  $\mathbf{M}_{\text{μιν},1} = \mathbf{i}_{\varphi} M_1$ , τα ισοδύναμα ρεύματα στη διεύθυνση  $z$  παράγουν πεδίο  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{i}_{\varphi} B_1(r_T)$ , ενώ η δεύτερη διάταξη, με  $\mathbf{M}_{\text{μιν},2} = \mathbf{i}_z M_2$ , έχει μόνο επιφανειακό ισοδύναμο ρεύμα στην επιφάνεια  $r_T = a$  και, συνεπώς, το αντίστοιχο πεδίο είναι ίσο με  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{i}_z B_2(r_T)$ . Εύκολα προσδιορίζεται ότι στην πρώτη διάταξη είναι  $\mathbf{B}_1(r_T < a) = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{μιν},1}$  και  $\mathbf{B}_1(r_T > a) = 0$ , και όμοια ότι στη δεύτερη διάταξη είναι  $\mathbf{B}_2(r_T < a) = \mu_0 \mathbf{M}_{\text{μιν},2}$  και  $\mathbf{B}_2(r_T > a) = 0$ . Άρα, συνολικά είναι  $\mathbf{B}(r_T < a) = \mu_0 \mathbf{M}_0$  και  $\mathbf{B}(r_T > a) = 0$ , και από την εφαρμογή της συντακτικής σχέσης κάθε περιοχής προκύπτει η ένταση του μαγνητικού πεδίου,  $\mathbf{H}(r_T < a) = (1/\mu_{\Delta})(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}_0) = 0$  και  $\mathbf{H}(r_T > a) = (1/\mu_0)\mathbf{B} = 0$ , δηλαδή, ότι παντού είναι  $\mathbf{H} = 0$ .

**Παράδειγμα 4.2-5:** Η σφαίρα με ακτίνα  $r = a$  είναι μαγνητισμένη, με μόνιμη μαγνήτιση ίση με  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_r M_1 (a/r)^2 + \mathbf{i}_\varphi M_2 \cos \theta$ , με σταθερές τις ποσότητες  $M_1, M_2$ , και με διαφορική μαγνητική διαπερατότητα ίση με  $\mu_\Delta = \frac{1}{2}\mu_0$ . Ο υπόλοιπος χώρος έχει αέρα (με  $\mu_0$ ). Ζητούνται τα πεδία  $\mathbf{H}$  και  $\mathbf{B}$  που αναπτύσσονται.



**Επίλυση:** Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, η επίλυση μπορεί να γίνει είτε ως προς το πεδίο  $\mathbf{B}$ , είτε ως προς το πεδίο  $\mathbf{H}$ . Αν γίνει απαλοιφή του πεδίου  $\mathbf{H}$ , το πεδίο  $\mathbf{B}$  θα οφείλεται σε μη μηδενικά ισοδύναμα ηλεκτρικά ρεύματα (συγκεκριμένα, σε χωρική και επιφανειακή κατανομή), οφειλόμενα στη συνιστώσα  $M_{\mu\text{ov},\varphi}$ . Αν, αντίθετα, η διάταξη επιλυθεί ως προς το πεδίο  $\mathbf{H}$ , αυτό θα παράγεται από μαγνητικά φορτία (σημειακό και επιφανειακό), προερχόμενα από τη συνιστώσα  $M_{\mu\text{ov},r}$ . Μετά από αυτές τις διαπιστώσεις (που έτσι κι αλλιώς είναι χρήσιμο να προταχθούν, ώστε να επιλεγεί η προσφορότερη πορεία) φαίνεται ότι τελικά η πιο σύντομη πορεία είναι να εφαρμοσθεί επαλληλία,  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{M}_{\mu\text{ov},1} + \mathbf{M}_{\mu\text{ov},2}$ , με τις επιμέρους διατάξεις να έχουν  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov},1} = \mathbf{i}_r M_1 (a/r)^2$  και  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov},2} = \mathbf{i}_\varphi M_2 \cos \theta$ .

Η σφαιρική διάταξη με  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov},1} = \mathbf{i}_r M_1 (a/r)^2$  περιγράφεται από μηδενικά ισοδύναμα ηλεκτρικά ρεύματα. (Η μαγνήτιση  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov},1}$  έχει μηδενική περιστροφή, μηδενική εφαπτομενική συνιστώσα στη σφαιρική επιφάνεια  $r = a$  και δεν απειρίζεται σε καμία γραμμή.) Επίσης, δεν αναφέρεται η παρουσία ελεύθερων ηλεκτρικών ρευμάτων. Συνεπώς, η αντίστοιχη πυκνότητα μαγνητικής ροής είναι παντού ίση με μηδέν,  $\mathbf{B}_1 = 0$ , και με βάση τις συντακτικές σχέσεις κάθε περιοχής είναι  $\mathbf{H}_1(r < a) = -(\mu_0/\mu_\Delta)\mathbf{M}_{\mu\text{ov},1} = -2\mathbf{i}_r M_1 (a/r)^2$  και  $\mathbf{H}_1(r > a) = 0$ .

Στη δεύτερη διάταξη, με  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov},2} = \mathbf{i}_\varphi M_2 \cos \theta$ , τα μαγνητικά φορτία κάθε είδους είναι ίσα με μηδέν, επειδή η μαγνήτιση  $\mathbf{M}_{\mu\text{ov},2}$  έχει μηδενική απόκλιση, μηδενική κάθετη συνιστώσα στη σφαιρική επιφάνεια  $r = a$  και δεν απειρίζεται σε καμία γραμμή ή σημείο. [Αυτό που πάντως αρκεί είναι να διαπιστωθεί ότι δεν υπάρχει απειρισμός ακτινικά σε σχέση με γραμμή ή σημείο.] Κατά συνέπεια, στη διάταξη αυτή είναι παντού  $\mathbf{H}_2 = 0$ , και ανάλογα με την περιοχή είναι  $\mathbf{B}_2(r < a) = \mu_0 \mathbf{M}_{\mu\text{ov},2} = \mathbf{i}_\varphi \mu_0 M_2 \cos \theta$  και  $\mathbf{B}_2(r > a) = 0$ .

Αθροίζοντας σε κάθε περιοχή τα πεδία των δύο επί μέρους διατάξεων, το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned} r < a: \quad \mathbf{H} &= -2\mathbf{i}_r M_1 \left(\frac{a}{r}\right)^2, & \mathbf{B} &= \mathbf{i}_\varphi \mu_0 M_2 \cos \theta, \\ r > a: \quad \mathbf{H} &= 0, & \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$



### 4.3 Μη γραμμικά υλικά

#### 4.3.1 Στατικά πεδία σε μη γραμμικά υλικά

**Εξισώσεις πεδίων σε μη γραμμικά υλικά:** Σε μόνιμη κατάσταση ( $\partial/\partial t = 0$ ), τα ηλεκτρικά ή μαγνητικά πεδία περιγράφονται σε όλα τα υλικά, γραμμικά και μη, από τις σχέσεις:

- Σε διηλεκτρικά υλικά:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V dQ \quad \text{και} \quad \oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (4.3-1)$$

ή τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις και οριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \nabla \times \mathbf{E} &= 0, & (\text{στον χώρο}) \\ \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) &= \sigma, & \mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) &= 0, & (\text{σε επιφάνεια } S) \\ \left( r_T \langle D_T \rangle_{\varphi} \right) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= \frac{\lambda}{2\pi}, & \left( r_T \langle E_{\varphi} \rangle_{\varphi} \right) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, & (\text{σε γραμμή } \ell) \\ \left( r^2 \langle D_r \rangle_{\varphi, \theta} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} &= \frac{q}{4\pi}. & & & (\text{σε σημείο } \Sigma) \end{aligned} \quad (4.3-2)$$

- Σε μαγνητικά υλικά:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \text{και} \quad \oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S dI, \quad (4.3-3)$$

ή τις αντίστοιχες σημειακές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J}, & (\text{στον χώρο}) \\ \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) &= 0, & \mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) &= \mathbf{K}, & (\text{σε επιφάνεια } S) \\ \left( r_T \langle B_T \rangle_{\varphi} \right) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= 0, & \left( r_T \langle H_{\varphi} \rangle_{\varphi} \right) \Big|_{r_T \rightarrow 0} &= \frac{i}{2\pi}, & (\text{σε γραμμή } \ell) \\ \left( r^2 \langle B_r \rangle_{\varphi, \theta} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} &= 0. & & & (\text{σε σημείο } \Sigma) \end{aligned} \quad (4.3-4)$$

**Συντακτικές σχέσεις:** Σε αντίθεση με τα γραμμικά υλικά, τώρα η σύνδεση του πεδίου  $\mathbf{D}$  με το πεδίο  $\mathbf{E}$ , και αντίστοιχα του  $\mathbf{B}$  με το  $\mathbf{H}$ , δεν περιγράφεται από απλή γραμμική σχέση, όπως  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  και  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  (με τις ποσότητες  $\epsilon$  και  $\mu$  μη εξαρτώμενες από την τιμή των πεδίων), αλλά από σχέσεις με γενικότερη μορφή, ειδικότερα για ισοτροπικά υλικά:

$$\mathbf{D} = \mathbf{i}_E D(E) \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \mathbf{i}_H B(H), \quad (4.3-5)$$

όπου τα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{i}_E$  και  $\mathbf{i}_H$  είναι συγγραμμικά με τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{H}$ , αντίστοιχα. [Σε υλικά που επιπρόσθετα είναι ανισοτροπικά, η αλληλοσύνδεση είναι πλήρως διανυσματική,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$  και  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ .] Η γενική συμπεριφορά που περιγράφεται από τις συντακτικές σχέσεις (περιοχή με γραμμική συμπεριφορά, περιοχή κόρου και ενδιάμεση περιοχή, με τη διάκριση μεταξύ των περιπτώσεων μαλακής και σκληρής απόκρισης) έχει ήδη παρουσιασθεί στην παράγρ. 4.1.2. Πάντως, ποια ακριβώς είναι η συναρτησιακή σύνδεση κάθε ζεύγους πεδίων στις σχέσεις (4.3-5), αυτό κατά κανόνα προσδιορίζεται για κάθε συγκεκριμένο υλικό από μετρήσεις και δίδεται από πίνακες τιμών. Για αναλυτικό χειρισμό, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν προσεγγίσεις μέσω διάφορων συναρτήσεων, όπως το πηλίκιο πολυωνύμων, το τόξο εφαπτομένης, η υπερβολική εφαπτομένη, ή απλά τμηματικά γραμμικές σχέσεις.

Ας σημειωθεί, επίσης, πως μία μη γραμμική συντακτική σχέση  $D = D(E)$  αναφέρεται στη συνολική τιμή των πεδίων, και όχι στις επί μέρους συνιστώσες (των οποίων οι τιμές εξαρτώνται από την υποκειμενική επιλογή του προσανατολισμού των αξόνων). Αν είναι, για παράδειγμα,  $D(E) = D_0 \tanh(E/E_0)$ , με κατάλληλες τιμές για τις σταθερές  $D_0$  και  $E_0$ , τότε εν γένει θα είναι  $D_x \neq D_0 \tanh(E_x/E_0)$ . Βέβαια, στη γραμμική περιοχή τιμών,  $D = \varepsilon E$ , είναι και  $D_x = \varepsilon E_x$ . [Στο παράδειγμα η γραμμική συμπεριφορά,  $D = \varepsilon E$  με  $\varepsilon = D_0/E_0$ , εκδηλώνεται όταν  $\zeta = E/E_0 \ll 1$ , όπως φαίνεται από την προσέγγιση μικρού ορίσματος  $\tanh \zeta \approx \zeta$ .]

**Στοιχεία κυκλωμάτων:** Σε διατάξεις, στις οποίες αναπτύσσονται τα ζεύγη πεδίων  $\{\mathbf{D}, \mathbf{E}\}$  ή  $\{\mathbf{J}, \mathbf{E}\}$  και  $\{\mathbf{B}, \mathbf{H}\}$ , η συμπεριφορά μπορεί να περιγραφεί μέσω των ποσοτήτων:

- Χωρητικότητα  $C$  ή αγωγιμότητα  $G$ , που στο Μέρος A, παράγρ. 2.2.4, έχουν ορισθεί ως:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}} \quad \text{και} \quad G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}}{\int_+^- \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}}, \quad (4.3-6)$$

όπου  $Q$  είναι το φορτίο του πυκνωτή,  $I$  το ρεύμα του αντιστάτη και  $U$  η τάση. Οι δείκτες  $C$  και  $R$ , που έχουν χρησιμοποιηθεί στην παράγρ. 2.2, εδώ παραλείπονται, ως περιττοί.

- Αυτεπαγωγή  $L$ , η οποία στο Μέρος A (παράγρ. 2.3.3) έχει ορισθεί ως:

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\Psi_m}{I} = N^2 \frac{\int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}}{\oint_\ell \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}}, \quad (4.3-7)$$

με  $\Psi = N\Psi_m$  την ολική μαγνητική ροή και  $I$  το ρεύμα (και παραλείποντας τον δείκτη  $L$ ).

Όταν, έστω και σε τμήμα μιας διάταξης πυκνωτή ή πηνίου, δεν ισχύουν οι σχέσεις αναλογίας  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  ή  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , τότε ο αριθμητής και ο παρονομαστής στις σχέσεις (4.3-6,7) δεν είναι ανάλογα ποσά, με συνέπεια η χωρητικότητα ή η αυτεπαγωγή να εξαρτώνται και από τη διέγερση. Δηλαδή, σε διατάξεις που περιέχουν υλικά με μη γραμμική συμπεριφορά είναι:

$$C=C(U) \text{ ή } C=C(Q), \quad G=G(U) \text{ ή } G=G(I), \quad L=L(I) \text{ ή } L=L(\Psi). \quad (4.3-8)$$

**Συμμετρικές διατάξεις:** Στις παραγρ. 2.2.2 και 2.3.2 του Μέρους Α διαπιστώθηκε ότι κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις σε συμμετρικές διατάξεις μηδενίζονται κάποιες πεδιακές συνιστώσες. Οι διαπιστώσεις αυτές μεταφέρονται και σε διατάξεις με μη γραμμικά υλικά, αρκεί αυτά να είναι ισοτροπικά. Συνοπτικά:

- Σε διατάξεις ηλεκτρικού πεδίου, όταν είναι  $\partial/\partial z = 0$  (και παρόμοια όταν είναι  $\partial/\partial x = 0$  ή  $\partial/\partial y = 0$ ), οι μόνες σχέσεις στις οποίες εμφανίζεται η πεδιακή συνιστώσα  $E_z$  είναι οι ομογενείς εξισώσεις  $(\partial/\partial x)E_z = 0$  και  $(\partial/\partial y)E_z = 0$ , από όπου προκύπτει το συμπέρασμα  $E_z = 0$  και  $D_z = 0$ . [Το τελευταίο συμπέρασμα βασίζεται και στην παραδοχή ότι το υλικό είναι ισοτροπικό. Στην περίπτωση ανισοτροπικού υλικού, θα ήταν δυνατό, μία μη μηδενική συνιστώσα, π.χ. η  $E_x$ , να συνδέεται με μη μηδενικό  $D_z$ . Παρόμοια ισχύουν και στις επόμενες περιπτώσεις.] Αντίστοιχα, σε διατάξεις με  $\partial/\partial \phi = 0$  η συνιστώσα  $E_\phi$  εμφανίζεται μόνο στις ομογενείς σχέσεις  $(\partial/\partial z)E_\phi = 0$  και  $r_T^{-1}(\partial/\partial r_T)(r_T E_\phi) = 0$ , από όπου συνάγεται ότι  $E_\phi = 0$  και  $D_\phi = 0$ . Επομένως, συνολικά, με  $s = \{x, y, z, \phi\}$ :

$$\text{Αν είναι } \frac{\partial}{\partial s} = 0 \Rightarrow E_s = 0 \text{ και } D_s = 0. \quad (4.3-9)$$

- Σε διατάξεις μαγνητικού πεδίου, όταν είναι  $\partial/\partial z = 0$  και  $J_z = 0$  (και παρόμοια για τις συντεταγμένες  $x$  ή  $y$ ), οι συνιστώσες  $\{H_x, B_x\}$  και  $\{H_y, B_y\}$  συναντώνται μόνο σε ομογενείς σχέσεις, τις  $(\partial/\partial x)B_x + (\partial/\partial y)B_y = 0$  και  $(\partial/\partial x)H_y - (\partial/\partial y)H_x = 0$  ( $= J_z$ ), οπότε (πάντοτε για ισοτροπικά υλικά) αυτές οι πεδιακές συνιστώσες είναι ίσες με μηδέν, και το ίδιο συμβαίνει και για τις συνιστώσες  $\{H_T, B_T\}$  και  $\{H_\phi, \phi\}$ . Αντίστοιχα, όταν είναι  $\partial/\partial \phi = 0$  και  $J_\phi = 0$ , τότε οι συνιστώσες  $\{H_T, B_T\}$  και  $\{H_z, B_z\}$  εμφανίζονται μόνο στις ομογενείς σχέσεις  $r_T^{-1}(\partial/\partial r_T)(r_T B_T) + (\partial/\partial z)B_z = 0$  και  $(\partial/\partial z)H_T - (\partial/\partial r_T)H_z = 0$  ( $= J_\phi$ ), με αποτέλεσμα τον μηδενισμό των συνιστωσών αυτών, ή, ισοδύναμα, των  $\{H_r, B_r\}$  και  $\{H_\theta, B_\theta\}$ . Δηλαδή, συνολικά, πάντα με  $s = \{x, y, z, \phi\}$ , ισχύει ότι:

$$\text{Αν είναι } \frac{\partial}{\partial s} = 0 \text{ και } J_{s,\kappa\lambda\pi} = 0 \Rightarrow \mathbf{H}_{\perp s} = 0 \text{ και } \mathbf{B}_{\perp s} = 0. \quad (4.3-10)$$

- Τέλος, σε διατάξεις μαγνητικού πεδίου πάλι, όταν η ιδιότητα  $\partial/\partial z = 0$  συνοδεύεται τώρα από  $J_x = J_y = 0$  (ή, ισοδύναμα, από  $J_T = J_\varphi = 0$ ), δηλαδή, από  $\mathbf{J}_{\perp z} = 0$  (και παρόμοια για τις συντεταγμένες  $x$  ή  $y$ ), η πεδιακή συνιστώσα  $H_z$  εμφανίζεται μόνο στις ομογενείς σχέσεις  $(\partial/\partial y)H_z = 0$  ( $= J_x$ ) και  $(\partial/\partial x)H_z = 0$  ( $= -J_y$ ), που οδηγεί στο συμπέρασμα ότι  $H_z = 0$  και  $B_z = 0$ . Αντίστοιχα, όταν είναι  $\partial/\partial \varphi = 0$  και  $J_T = J_z = 0$  (ή,  $J_r = J_\theta = 0$ ), τότε οι ομογενείς σχέσεις  $(\partial/\partial z)H_\varphi = 0$  ( $= -J_T$ ) και  $r_T^{-1}(\partial/\partial r_T)(r_T H_\varphi) = 0$  ( $= J_z$ ), οι μόνες που αφορούν την πεδιακή συνιστώσα  $H_\varphi$ , προσδιορίζουν ότι πρέπει να είναι  $H_\varphi = 0$  και  $B_\varphi = 0$ . Συνολικά:

$$\text{Αν είναι } \frac{\partial}{\partial s} = 0 \text{ και } \mathbf{J}_{\perp s, \kappa\lambda\pi} = 0 \Rightarrow H_s = 0 \text{ και } B_s = 0. \quad (4.3-11)$$

Ας επαναληφθεί, ότι οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν μόνο για  $s = \{x, y, z, \varphi\}$ , ότι προϋποθέτουν να είναι  $\partial/\partial s = 0$  παντού και ως προς όλα τα χαρακτηριστικά της διάταξης, και ότι  $J_{s, \kappa\lambda\pi} = 0$  σημαίνει πως δεν υπάρχει πουθενά καμία ροή ρεύματος στη διεύθυνση  $s$  και αντίστοιχα  $\mathbf{J}_{\perp s, \kappa\lambda\pi} = 0$  πως δεν υπάρχει ροή ρεύματος κάθετη προς το  $s$ . Επίσης, ας τονισθεί ότι οι ιδιότητες αυτές αφορούν μόνο ισοτροπικά υλικά (είτε έχουν γραμμική συμπεριφορά είτε όχι). Διατάξεις με έντονες συμμετρίες, που επιδέχονται αναλυτική επίλυση, παρουσιάζονται στα **παραδ. 4.3-1** έως **4.3-4**.

**Ενέργεια σε μη γραμμικά υλικά:** Στην παράγρ. 3.1.1 του Μέρους Α, με κατάλληλη αλγεβρική επεξεργασία των εξισώσεων του *Maxwell* σχηματίστηκε η σχέση που περιγράφει τη διατήρηση της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας. Ένα πόρισμα της διαδικασίας αυτής ήταν ότι η χωρική πυκνότητα ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας επιμερίζεται σε ηλεκτρική και μαγνητική,  $w_{em} = w_e + w_m$ , με:

$$w_e = \int_0^{\mathbf{D}} \mathbf{E}(\mathbf{D}') \cdot d\mathbf{D}', \quad w_m = \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H}(\mathbf{B}') \cdot d\mathbf{B}', \quad (4.3-12)$$

όπου  $\mathbf{E}(\mathbf{D})$  και  $\mathbf{H}(\mathbf{B})$  είναι οι αντίστροφες των συντακτικών σχέσεων  $\mathbf{D}(\mathbf{E})$  και  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ . Οι εκφράσεις αυτές είναι γενικές, ενώ οι συνήθεις εκφράσεις  $w_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2$  και  $w_m = \frac{1}{2}\mu H^2$  αποτελούν εξειδικεύσεις σε υλικά που είναι ισοτροπικά και γραμμικά. Στα υλικά που ενδιαφέρουν στην παρούσα ενότητα, τα ισοτροπικά αλλά μη γραμμικά, οι χωρικές πυκνότητες ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας εκφράζονται ως ολοκληρώματα βαθμωτών ποσοτήτων:

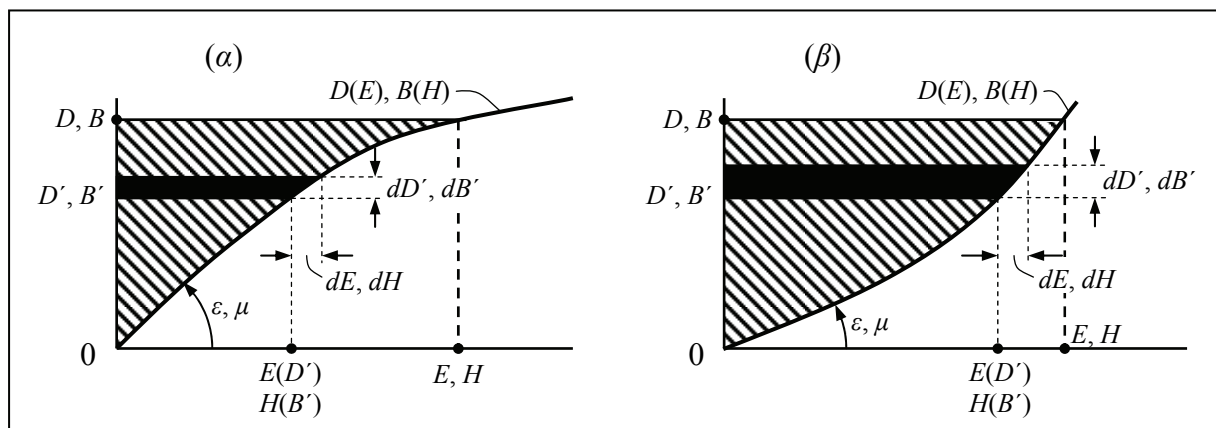
$$w_e = \int_0^D E(D') dD', \quad w_m = \int_0^B H(B') dB', \quad (4.3-13)$$

με τις αντίστροφες συντακτικές σχέσεις  $E(D)$  και  $H(B)$  ως βαθμωτές συναρτήσεις.

Τα ολοκληρώματα (4.3-13) περιγράφουν ότι οι πυκνότητες ενέργειας προσδιορίζονται από τη σωρευτική συνεισφορά στοιχείων  $E(D')dD'$  ή  $H(B')dB'$ , από το σημείο με μηδενικά πεδία μέχρι το σημείο λειτουργίας,  $\{E, D(E)\}$  ή  $\{H, B(H)\}$ . Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 4.3-1** για υλικό με (α) μαλακή και (β) σκληρή συμπεριφορά, στη γραφική παράσταση των συντακτικών σχέσεων η πυκνότητα ενέργειας αποδίδεται από το (γραμμοσκιασμένο) εμβαδό μεταξύ του άξονα  $D$  ή  $B$  και της καμπύλης  $D(E)$  ή  $B(H)$ . [Σε γραμμικό υλικό, η πυκνότητα ενέργειας περιγράφεται από εμβαδό τριγώνου,  $w_e = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\epsilon E^2$  και  $w_m = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}\mu H^2$ .]

Σε μία ηλεκτρική διάταξη, αύξηση του πεδίου  $E$  κατά  $dE$  συνοδεύεται από αύξηση της πυκνότητας ηλεκτρικής ροής κατά  $dD'$ , σύμφωνα με τη συντακτική σχέση. Έτσι, αυξάνει και η πυκνότητα ηλεκτρικής ενέργειας (δηλαδή, το γραμμοσκιασμένο εμβαδό στο **Σχήμα 4.3-1**) κατά  $E(D')dD'$ . Δηλαδή, τόση είναι η ενέργεια που παρέχει το υπόλοιπο κύκλωμα, καθώς αυξάνει κατά  $dU$  η τάση που προσδιορίζει το πεδίο  $E$ . Αν, τώρα, κάποια στιγμή η τάση μειωθεί, θα προκληθεί αντίστοιχη μείωση στο πεδίο, δηλαδή η μεταβολή  $dE$  θα είναι αρνητική, όπως αρνητική θα είναι και η μεταβολή  $dD'$ . Συνεπώς, το υπόλοιπο κύκλωμα παρέχει ενέργεια με πυκνότητα  $E(D')dD'$ , επίσης αρνητική, και ισόποση θετική ενέργεια επιστρέφει στο υπόλοιπο κύκλωμα. Τα ίδια ισχύουν και σε μαγνητική διάταξη: Μεταβολές του ρεύματος (θετικές ή αρνητικές) κατά  $dI$  μεταβάλλουν το πεδίο  $H$  κατά  $dH$ , της πυκνότητας μαγνητικής ροής κατά  $dB'$  και της πυκνότητας μαγνητικής ενέργειας κατά  $H(B')dB'$ .

Αν το πεδίο, μετά την αύξηση και την επακόλουθη μείωση, τελικά μηδενισθεί, τότε όλη η ενέργεια θα επιστρέψει στο υπόλοιπο κύκλωμα. Προϋπόθεση, όμως, είναι η συντακτική σχέση να είναι αμφιμονοσήμαντη. Τότε, μεταβολή (αύξηση ή μείωση) του πεδίου κατά θετικό ή αρνητικό  $dE$  (ή, κατά  $dH$ ) προκαλεί μεταβολή  $dD'$  (ή,  $dB'$ ) στην πυκνότητα ροής, της οποίας μόνο το πρόσημο εξαρτάται από το πρόσημο του  $dE$  (ή, του  $dH$ ).

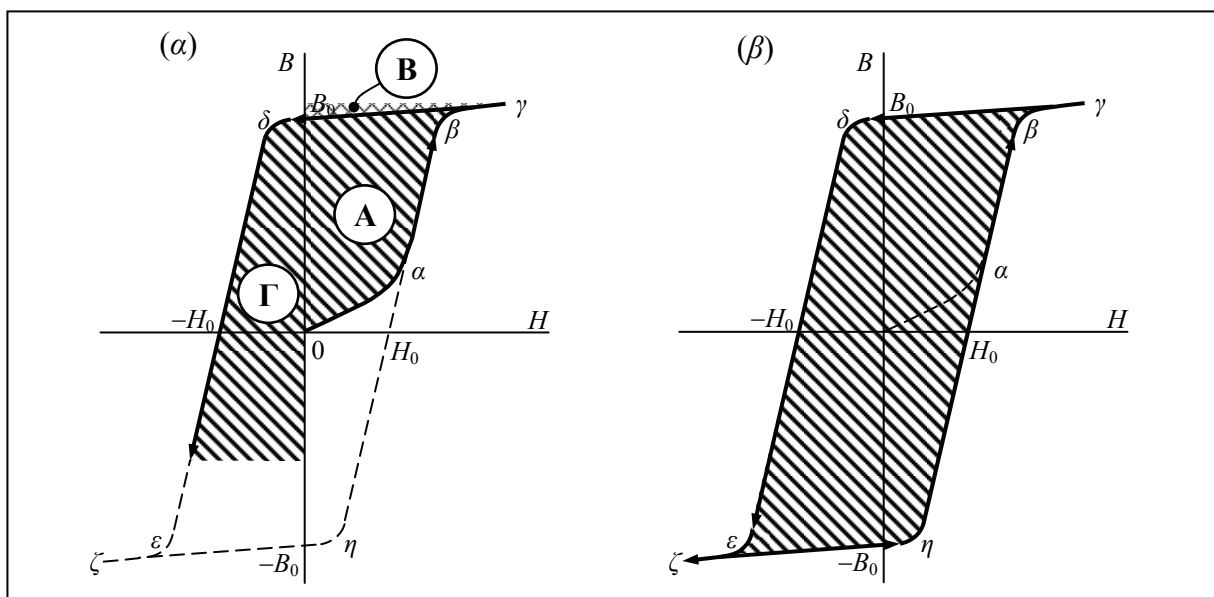


Σχήμα 4.3-1

**Απώλειες σε υλικά με υστέρηση:** Η συντακτική σχέση δεν είναι αμφιμονοσήμαντη σε υλικά που εκδηλώνουν βρόχο υστέρησης. Σε ένα τέτοιο υλικό, όπως το μαγνητικό υλικό του Σχήματος 4.3-2, η ενέργεια αρχικά μεταφέρεται όπως και προηγουμένως: Κατά την πορεία 0- $\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$  μέχρι τον κόρο, ή μέχρι οποιοδήποτε σημείο φθάσει η τιμή του πεδίου  $H$ , μεταφέρεται ενέργεια από το υπόλοιπο κύκλωμα προς το υλικό, η οποία για το σημείο  $\gamma$  περιγράφεται από το εμβαδόν των περιοχών «Α» και «Β» αθροιστικά. Αν, όμως, στο σημείο  $\gamma$  το πεδίο αρχίσει να μειώνεται, τότε σε κάθε αρνητικό  $dH$  αντιστοιχεί μικρότερο  $dB'$  απ' ό τι προηγουμένως, με αποτέλεσμα, όταν το πεδίο  $H$  μηδενισθεί, να επιστραφεί στο υπόλοιπο κύκλωμα μόνο η ενέργεια που αντιστοιχεί στο εμβαδόν «Β». Μετά το μηδενισμό του πεδίου  $H$ , η φορά του θα αντιστραφεί, θα είναι δηλαδή  $H < 0$ , ενώ στις μεταβολές  $dH$  θα αντιστοιχούν  $dB' < 0$ , με αποτέλεσμα κατά την πορεία μέσω του σημείου  $\delta$  προς το  $\varepsilon$  να είναι  $HdB' > 0$  (όσο είναι  $H < 0$  και  $dB' < 0$ , με αδιάφορο το πρόσημο του  $B$ ), οπότε το εμβαδό «Γ» αντιστοιχεί πάλι σε ενέργεια που παρέχει το κύκλωμα. Η περαιτέρω εξέλιξη είναι προφανής. Αν η διέγερση είναι εναλλασσόμενη, σε κάθε περίοδο  $T$  το υπόλοιπο κύκλωμα θα παρέχει (χωρίς ανάκτηση) ενέργεια ίση με το εμβαδόν του βρόχου υστέρησης. Θα υφίσταται δηλαδή απώλειες, οι οποίες ποσοτικά περιγράφονται από χωρική πυκνότητα ισχύος, με μέση χρονική τιμή:

$$p_m = \frac{1}{T} \oint H(B') dB', \quad (4.3-14)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται στο βρόχο υστέρησης. [Η προσέγγιση του εμβαδού του βρόχου από ενός παραλληλογράμμου (με διαστάσεις  $2H_0 \times 2B_0$ ) είναι, συχνά, πολύ ικανοποιητική.]



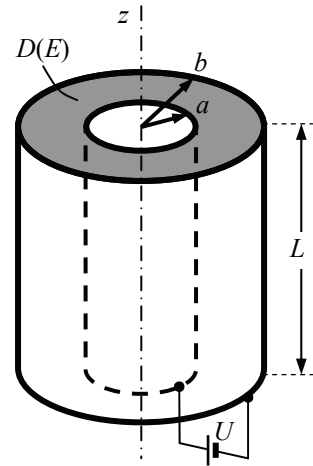
Σχήμα 4.3-2

**Παράδειγμα 4.3-1:** Κυλινδρικός πυκνωτής, με μήκος  $L$  και τους σπλισμούς στις ακτίνες  $r_T = a$  και  $r_T = b$ , έχει στον ενδιάμεσο χώρο ( $0 < z < L$  και  $a < r_T < b$ ) ιστροπικό μη γραμμικό διηλεκτρικό υλικό, με συντακτική σχέση:

$$D(E) = \frac{KE}{1 + \frac{|E|}{E_0}},$$

όπου  $K$  και  $E_0$  είναι σταθερές ποσότητες. Υποτίθεται ότι είναι  $L \gg a, b$ . Ζητούνται:

- (α) Η φυσική ερμηνεία των ποσοτήτων  $K, E_0$ ,
- (β) Η χωρητικότητα της διάταξης, ως σχέση  $C(U)$ ,
- (γ) Το μέγιστο φορτίο  $Q_{\max}$  που μπορεί να δεχθεί ο πυκνωτής.

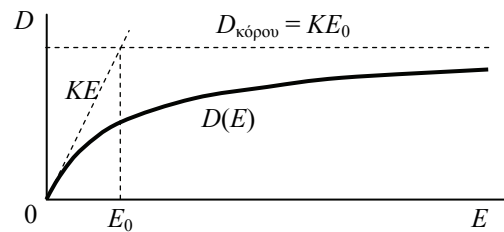


**Επίλυση:**

(α) Στη σχέση  $D(E)$ , όπως φαίνεται και στη γραφική παράστασή της, είναι:

$$E \ll E_0 \Rightarrow D \approx KE,$$

$$E \gg E_0 \Rightarrow D \approx KE_0 \text{sgn}(E)$$



Συνεπώς, ο συντελεστής  $\epsilon$  αντιπροσωπεύει την επιτρεπτικότητα (στη γραμμική περιοχή) και το γινόμενο  $KE_0$  είναι η πυκνότητα ηλεκτρικής ροής κατά τον κόρο (στη μη γραμμική περιοχή). Η ποσότητα  $E_0$  αντιπροσωπεύει προφανώς την κρίσιμη τιμή του πεδίου  $E$ , που διαχωρίζει τις δύο περιοχές.

(β) Η συνθήκη  $L \gg a, b$  επιτρέπει την παραδοχή  $L \rightarrow \infty$ , οπότε η διάταξη χαρακτηρίζεται από  $\partial/\partial z = 0$ , και βέβαια και από  $\partial/\partial \phi = 0$ , με συνέπεια τα πεδία να έχουν τη μορφή  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_T E(r_T)$  και, λόγω ιστροπικότητας,  $\mathbf{D} = \mathbf{i}_T D(r_T)$ . Η σχέση  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , με τις συνοδούς οριακές συνθήκες (ή, εναλλακτικά, η σχέση  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ ), δεν δίνει καμία πρόσθετη πληροφορία, παρά μόνο επιβεβαιώνει ότι οποιαδήποτε συνάρτηση  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_T E(r_T)$  είναι κατ' αρχήν αποδεκτή.

Για την επίλυση θα χρησιμοποιηθεί συνεπώς ο νόμος του Gauss, είτε με την ολοκληρωτική, είτε με τη σημειακή μορφή.

- Ολοκληρωτικά, θεωρώντας ότι ο σπλισμός  $r_T = a$  έχει φορτίο  $Q$  (το φορτίο του πυκνωτή), από το νόμο του Gauss,  $\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r_T L D = Q$ , προκύπτει για την ενδιάμεση περιοχή:

$$\mathbf{D}(a < r_T < b) = \frac{Q}{2\pi r_T L} \mathbf{i}_T.$$

- Σημειακά, η ολοκλήρωση στην ενδιάμεση περιοχή της σχέσης  $(1/r_T)(\partial/\partial r_T)(r_T D) = 0$  (του Gauss) δίνει  $D = A/r_T$ , έκφραση που ταυτίζεται πλήρως με την προηγούμενη, αν η σταθερά ολοκλήρωσης τεθεί ίση με  $A = Q/2\pi L$ . Η ισότητα αυτή προκύπτει και από την οριακή συνθήκη στην επιφάνεια  $r_T = a$ , όπου το επιφανειακό φορτίο είναι ίσο με  $\sigma = Q/2\pi aL$  (ομοιόμορφα κατανεμημένο, επειδή  $\partial/\partial z = 0$  και  $\partial/\partial \phi = 0$ ).

Η αντιστροφή της συντακτικής σχέσης (με την παραδοχή  $E > 0$ , ώστε να είναι  $E = |E|$ ) δίνει  $E = 1/[(K/D) - (1/E_0)]$ , δηλαδή το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\mathbf{E}(a < r_T < b) = \mathbf{i}_T \frac{1}{\frac{K}{Q} 2\pi r_T L - \frac{1}{E_0}} = \frac{\ell E_0}{r_T - \ell}, \quad \text{ή} \quad \mathbf{E}(a < r_T < b) = \mathbf{i}_T \frac{1}{\frac{K}{A} r_T - \frac{1}{E_0}} = \frac{\ell E_0}{r_T - \ell},$$

όπου η παράμετρος  $\ell = \ell(Q) = Q/2\pi K E_0 L = A/K E_0$ , με διαστάσεις μήκους, έχει εισαχθεί για συντομία.

Εφαρμόζοντας τάση  $U$  μεταξύ των δύο οπλισμών, με θετικό τον οπλισμό με το θετικό φορτίο  $Q$ , που έχει υποτεθεί στην ακτινική θέση  $r_T = a$ , προκύπτει:

$$U = \int_a^b E dr_T = \ell E_0 \int_a^b \frac{dr_T}{r_T - \ell} = \ell E_0 \ln \left( \frac{b - \ell}{a - \ell} \right).$$

Η σχέση αυτή έχει τη μορφή  $U = U(Q)$ , με το  $Q$  εκφραζόμενο μέσω της παραμέτρου  $\ell(Q)$ . Εισάγοντας τη χωρητικότητα  $C = Q/U$  και απαλείφοντας το φορτίο  $Q = C(U)U$  προκύπτει η σχέση  $C(U)$  με πλεγμένη μορφή:

$$\frac{C}{2\pi \epsilon L} \ln \left( \frac{b E_0 / U - C / 2\pi K L}{a E_0 / U - C / 2\pi K L} \right) = 1.$$

Για τη γραφική παράσταση της  $C(U)$  είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η αντίστροφη σχέση  $U(C)$ , που διατυπώνεται εύκολα με κλειστή μορφή.

(γ) Το φορτίο συνδέεται με το πεδίο  $D$ , για το οποίο η συντακτική σχέση επιβάλλει  $D < K E_0$ . Η συνάρτηση  $D = (Q/2\pi L)/r_T$  είναι φθίνουσα συνάρτηση της ακτίνας  $r_T$ , συνεπώς η μέγιστη τιμή της απαντάται στη θέση  $r_T = a$ , και έχει την τιμή  $D_{\max} = Q/2\pi aL$ . Πρέπει να είναι  $D_{\max} < K E_0$ , απ' όπου συνάγεται ότι  $Q < Q_{\max} = 2\pi a L K E_0$ . Μεγαλύτερο φορτίο δεν είναι δυνατό.

**Σχόλιο:** Ο περιορισμός του φορτίου σε τιμές  $Q < Q_{\max}$  αντιστοιχεί σε τιμές  $\ell(Q) = Q/2\pi K E_0 L < a$  για την παράμετρο  $\ell$  που χρησιμοποιήθηκε στο ερώτημα (β). Αυτό σημαίνει, πως ικανοποιούνται οι ανισότητες  $r_T - \ell > r_T - a > 0$ , δηλαδή ο παρονομαστής στο ολοκλήρωμα της τάσης είναι θετικός και καλώς γράφηκε  $a - \ell$  (αντί  $|a - \ell|$ ) στο όρισμα του λογαρίθμου.

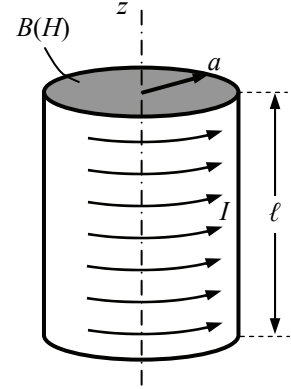


**Παράδειγμα 4.3-2:** Ευθύγραμμο κυλινδρικό πηνίο, με ακτίνα  $a$  και με μήκος  $\ell$  ( $\gg a$ ), έχει  $N$  ρευματοφόρα ελίγματα, σε πυκνή ομοιόμορφη διάταξη. Στο εσωτερικό του πηνίου ( $r_T < a$  και  $0 < z < \ell$ ) υπάρχει ιστροπικό μη γραμμικό μαγνητικό υλικό. Από μετρήσεις προέκυψε ότι η αυτεπαγωγή μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση:

$$L(I) = \frac{\Psi_0}{I} \tanh\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Ζητούνται:

- (α) Να διατυπωθεί η συντακτική σχέση  $B(H)$  του υλικού,  
 (β) Να προσδιορισθεί το φυσικό περιεχόμενο των σταθερών  $\Psi_0$  και  $I_0$ , ή κατάλληλων συμπλεγμάτων των  $\Psi_0$  και  $I_0$ .



**Επίλυση:**

(α) Λόγω της πυκνής και ομοιόμορφης διάταξης των ελιγμάτων, η ροή ρεύματος μπορεί να περιγραφεί από επιφανειακή πυκνότητα  $\mathbf{K} = \mathbf{i}_\varphi NI/\ell$ . Με  $\ell \gg a$ , που ουσιαστικά σημαίνει  $\ell \rightarrow \infty$ , η διάταξη χαρακτηρίζεται από  $\partial/\partial z = 0$ , και επειδή είναι  $J_{z,\kappa\lambda\pi} = 0$ , συνάγεται ότι  $\mathbf{H} = \mathbf{i}_z H_z$ . Επίσης ισχύει βέβαια και ότι  $\partial/\partial \varphi = 0$ , οπότε από το νόμο του *Ampere* εύκολα προκύπτει ότι η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι  $\mathbf{H}(r_T < a) = \mathbf{i}_z NI/\ell$  και  $\mathbf{H}(r_T > a) = 0$ . Η ολική μαγνητική ροή είναι  $\Psi = N\Psi_m = NB\pi a^2$ . Όμως, από τον ορισμό της αυτεπαγωγής είναι  $\Psi = LI$ , όπου εδώ  $L = L(I)$ . Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει:

$$NB\pi a^2 = \Psi_0 \tanh\left(\frac{\ell H}{NI_0}\right),$$

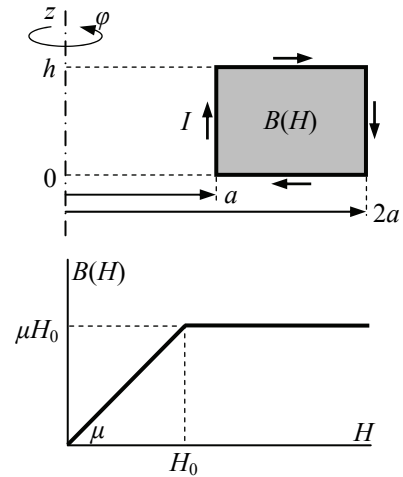
και, επιλύοντας ως προς  $B$ , σχηματίζεται η ζητούμενη συντακτική σχέση:

$$B(H) = \frac{\Psi_0}{N\pi a^2} \tanh\left(\frac{\ell H}{NI_0}\right) = B_0 \tanh\left(\frac{H}{H_0}\right).$$

(β) Η συντακτική σχέση έχει τη μορφή  $B = B_0 \tanh(H/H_0)$ , με  $B_0 = \Psi_0/N\pi a^2$  και  $H_0 = NI_0/\ell$ . Η συνάρτηση  $\tanh \xi$  είναι αύξουσα, με τις οριακές τιμές  $\tanh \xi \approx \xi$  όταν  $\xi \ll 1$  και  $\tanh \xi \approx 1$  όταν  $\xi \rightarrow \infty$ . Το πρώτο ενδεχόμενο (όταν  $\xi \ll 1$ ) αντιστοιχεί σε  $H \ll H_0 = NI_0/\ell$  και τότε είναι  $B \approx (B_0/H_0)H$ , σχέση αναλογίας που παραπέμπει σε γραμμική συμπεριφορά, χαρακτηριζόμενη από μαγνητική διαπερατότητα ίση με  $\mu = B_0/H_0 = \Psi_0\ell/N^2\pi a^2$ . [Για επιβεβαίωση, η έκφραση για την αυτεπαγωγή ευθύγραμμου πηνίου με γραμμικό υλικό,  $L = N^2\mu S/\ell$  (εδώ με  $S = \pi a^2$  και  $\mu = \Psi_0\ell/N^2\pi a^2$ ) ταυτίζεται στο όριο  $I \ll I_0$  με τη δεδομένη έκφραση,  $L(I \ll I_0) = (\Psi_0/I)(I/I_0) = \Psi_0/I_0$ ]. Το δεύτερο όριο (όταν  $\xi \gg 1$ , δηλαδή  $H \gg H_0 = NI_0/\ell$ ) δίνει  $B = B_{\max} = B_0$ , δηλαδή  $B_0 = \Psi_0/N\pi a^2 = B_{\text{κόρου}}$ .

**Παράδειγμα 4.3-3:** Στο εσωτερικό ενός τόρου με ορθογωνική διατομή (με ύψος  $h$  και ακτίνες  $a$  και  $2a$ ) παράγεται μαγνητικό πεδίο, από ρεύμα  $I$  σε  $N$  ελίγματα στην επιφάνεια του τόρου. Η γόμωση του τόρου αποτελείται από μη γραμμικό υλικό, που μπορεί να προσεγγισθεί από τη συντακτική σχέση  $B(H < H_0) = \mu H$  και  $B(H > H_0) = \mu H_0$ , όπου  $H_0$  και  $\mu$  ( $> \mu_0$ ) είναι σταθερές ποσότητες.

Προσδιορίστε τη σχέση  $\Psi_m(I)$  για την εξάρτηση από το ρεύμα της μαγνητικής ροής στη διατομή του τόρου.



**Επίλυση:** Η διάταξη έχει όλα τα χαρακτηριστικά μιας τοροειδούς διάταξης, οπότε με απλή εφαρμογή του νόμου του *Ampere* σε κυκλικό βρόχο με ακτίνα  $r_T$  αμέσως προκύπτει ότι η κυκλοφορία, ίση με  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r_T H_\phi$ , συνδέεται με ηλεκτρικό ρεύμα ίσο με  $\int_S dI = NI$  (όταν ο βρόχος είναι στο εσωτερικό του τόρου), συνεπώς το μαγνητικό πεδίο είναι ίσο με  $\mathbf{H} = \mathbf{i}_\phi NI / (2\pi r_T)$  στο εσωτερικό του τόρου (στην περιοχή με το μαγνητικό υλικό) και ίσο με μηδέν έξω από τον τόρο. Επισημαίνονται για μελλοντική χρήση οι ακραίες τιμές  $H_{\max} = H(r_T = a) = NI / (2\pi a)$  και  $H_{\min} = H(r_T = 2a) = NI / (4\pi a)$ .

Στο μαγνητικό πεδίο αντιστοιχεί πυκνότητα μαγνητικής ροής  $\mathbf{B} = \mathbf{i}_\phi B(H)$ , με τιμή εξαρτώμενη από τη συντακτική σχέση και ειδικότερα από το εάν είναι  $H < H_0$  ή  $H > H_0$ . Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

- (α) Να ισχύει  $H < H_0$  σε ολόκληρη την περιοχή  $a < r_T < 2a$  του τόρου. Δεδομένου ότι  $H_{\max} = NI / (2\pi a)$ , αυτό συμβαίνει όταν  $H_{\max} < H_0$ , δηλαδή όταν  $NI < 2\pi a H_0$ . Τότε, θα είναι  $B(r_T) = \mu NI / (2\pi r_T)$  παντού μέσα στον τόρο και η μαγνητική ροή σε μία διατομή του τόρου θα είναι  $\Psi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (\mu NI / 2\pi) h \int_a^{2a} (dr_T / r_T) = (\mu NI / 2\pi) h \ln 2$ .
- (β) Να ισχύει, αντίθετα,  $H > H_0$  σε ολόκληρο το εσωτερικό του τόρου. Με  $H_{\min} = NI / (4\pi a)$ , αυτό συμβαίνει όταν  $NI > 4\pi a H_0$ . Τότε, θα είναι  $B(r_T) = \mu H_0 = \text{σταθ}$  μέσα στον τόρο, οπότε η μαγνητική ροή είναι απλά ίση με  $\Psi_m = \mu H_0 h a$ .
- (γ) Να ισχύει, τέλος, το ενδιάμεσο ενδεχόμενο, για το οποίο  $2\pi a H_0 < NI < 4\pi a H_0$ , όπου τότε η χαρακτηριστική τιμή  $H_0$  της συντακτικής σχέσης βρίσκεται μεταξύ των  $H_{\max}$  και  $H_{\min}$ . Τότε, υπάρχει μία ακτίνα  $r_0$  στην περιοχή  $a < r_0 < 2a$ , στην οποία είναι  $H(r_T = r_0) = H_0$ . Χρησιμοποιώντας την έκφραση  $H = NI / (2\pi r_T)$ , αμέσως φαίνεται πως  $r_0 = NI / (2\pi H_0) = r_0(I)$ . Η μαγνητική ροή είναι τώρα  $\Psi_m = \mu H_0 h \int_a^{r_0} dr_T + (\mu NI / 2\pi) h \int_{r_0}^{2a} (dr_T / r_T) = \mu H_0 h (r_0 - a) + (\mu NI / 2\pi) h \ln(2a / r_0)$ . [Η εξάρτηση  $\Psi_m(I)$  εκδηλώνεται και μέσω της εξάρτησης  $r_0(I)$ .]

### 4.3.2 Μη γραμμικά μαγνητικά κυκλώματα

Οι βασικές έννοιες, αυτές που έχουν παρουσιασθεί στην παράγρ. 2.3.4 του Μέρους Α, αφορούν ένα μαγνητικό κύκλωμα, ασχέτως αν το κύκλωμα είναι γραμμικό, δηλαδή αν περιέχει αποκλειστικά κλάδους με γραμμικές ιδιότητες, ή αν ένας (ή περισσότεροι) κλάδοι έχουν μη γραμμική συμπεριφορά (και τότε το κύκλωμα χαρακτηρίζεται ως μη γραμμικό συνολικά). Έτσι, σε κάθε περίπτωση μαγνητικού κυκλώματος εφαρμόζονται οι ορισμοί της παραγρ. 2.3.4 (Μέρος Α), οι οποίοι επαναλαμβάνονται και εδώ.

- Από έναν κλαδο  $i$  διέρχεται μαγνητική ροή  $\Psi_{m,i}$  και μεταξύ των άκρων του επικρατεί μαγνητική τάση  $U_{m,i}$ . Οι ποσότητες αυτές ορίζονται ως:

$$\Psi_{m,i} = \int_{S_i} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{S}_i, \quad U_{m,i} = \int_{L_i} \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{r}_i \quad (4.3-15)$$

- Σε κλάδους που φέρουν ρευματοφόρους αγωγούς, με ρεύμα  $I_i$  σε  $N_i$  περιελίξεις, θεωρείται ότι εφαρμόζεται μαγνητεγερτική δύναμη (ΜΕΔ),  $e_{m,i}$ , ίση με:

$$e_{m,i} = N_i I_i, \quad (4.3-16)$$

με τη φορά να καθορίζεται από τον αντίχειρα του δεξιού χεριού, όταν τα λοιπά δάκτυλα δείχνουν τη φορά του ρεύματος.

- Σε ένα κόμβο  $j$  ενώνονται δύο ή περισσότεροι κλάδοι, των οποίων η μαγνητική ροή συνδέεται από το μαγνητικό ανάλογο του **πρώτου νόμου του Kirchhoff**:

$$\sum_{i \in j} (\pm)_{ij} \Psi_{m,i} = 0, \quad (4.3-17)$$

όπου στην άθροιση το πρόσημο  $+$  ή  $-$  επιλέγεται ανάλογα με το αν η συμβατική φορά της μαγνητικής ροής, όπως έχει οριστεί για τον αντίστοιχο κλάδο, κατευθύνεται προς τον κόμβο ή όχι.

- Σε κάθε βρόχο  $\ell$  ισχύει το μαγνητικό ανάλογο του **δεύτερου νόμου του Kirchhoff**:

$$\sum_{i \in \ell} (\pm)_{i\ell} U_{m,i} = \sum_{i \in \ell} (\pm)_{i\ell} e_{m,i}. \quad (4.3-18)$$

Το πρόσημο  $+$  ή  $-$  επιλέγεται ανάλογα με το αν η φορά της μαγνητικής ροής και της ΜΕΔ των κλάδων που σχηματίζουν το βρόχο είναι ομόρροπη η αντίρροπη με τη φορά με την οποία διανύεται ο βρόχος.

Σε ένα μαγνητικό κύκλωμα, η μαγνητική αντίσταση  $R_{m,i}$  ή η μαγνητική αγωγιμότητα  $G_{m,i}$  ενός κλάδου  $i$  ορίζονται σε κάθε περίπτωση ως:

$$R_{m,i} = \frac{1}{G_{m,i}} = \frac{U_{m,i}}{\Psi_{m,i}} = \frac{\int_{\ell_i} \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{r}_i}{\int_{S_i} \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{S}_i}. \quad (4.3-19)$$

Όμως, αν κάποιος κλάδος  $i$  αποτελείται από υλικό με μη γραμμική συμπεριφορά, τότε η απουσία σχέσης αναλογίας μεταξύ αριθμητή και παρονομαστή (όπως στη συντακτική σχέση  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , με σταθερή τιμή για τη μαγνητική διαπερατότητα  $\mu$ ) καθιστά τη μαγνητική αντίσταση (ή αγωγιμότητα) συνάρτηση της μαγνητικής ροής ή τάσης,  $R_{m,i} = R_{m,i}(\Psi_{m,i})$  ή  $R_{m,i}(U_{m,i})$ . Σε κλάδους με ιδιαίτερα απλό σχήμα, συγκεκριμένα σε κλάδους που έχουν σχήμα ευθύγραμμης ράβδου με μήκος  $L$  και με σταθερή διατομή  $S$ , η συνάρτηση αυτή αποτελεί απλή μεταφορά της συντακτικής σχέσης. Σε τέτοιους κλάδους τα ολοκληρώματα (4.3-15) δίνουν  $\Psi_m = BS$  και  $U_m = HL$ , με το πεδίο  $B$  σταθερό, άρα και το  $H$ , οπότε η μαγνητική αντίσταση είναι:

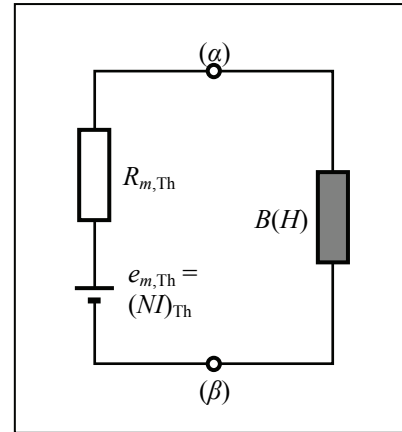
$$R_m(\Psi_m) = \frac{L}{\Psi_m} H(B = \Psi_m/S), \quad \text{ή} \quad R_m(U_m) = \frac{U_m}{SB(H = U_m/L)}, \quad (4.3-20)$$

όπου  $B(H)$  είναι η συνάρτηση που περιγράφει τη συντακτική σχέση και  $H(B)$  η αντίστροφη της. Σε κλάδους με όχι τόσο απλό σχήμα, η μαγνητική αντίσταση εκφράζεται από ολοκλήρωμα της συντακτικής σχέσης, όπως στο *παράδ. 4.3-4*.

Εν γένει, σε ένα μαγνητικό κύκλωμα κάποιοι κλάδοι αποτελούνται από γραμμικό υλικό και οι υπόλοιποι από μη γραμμικό. Η επίλυσή τους βασίζεται πάλι στη διατύπωση συστήματος, που αποτελείται από τη σχέση (4.3-17) για κάθε ανεξάρτητο κόμβο, τη σχέση (4.3-18) για κάθε ανεξάρτητο βρόχο, και τη σχέση (4.3-19) για κάθε κλάδο, με τη διαφορά ότι η εφαρμογή της τελευταίας σχέσης σε κλάδους με μη γραμμικό υλικό οδηγεί σε μη γραμμική εξίσωση, συνεπώς και το κύκλωμα συνολικά περιγράφεται από μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων. Κάποια απλοποίηση του συστήματος επιτυγχάνεται (όταν είναι εφικτό), υποκαθιστώντας τα γραμμικά μέρη του κυκλώματος με απλούστερα ισοδύναμα κυκλώματα δύο, τριών ή περισσότερων ακροδεκτών, χρησιμοποιώντας για το σκοπό αυτό τις διαθέσιμες τεχνικές από την ανάλυση γραμμικών κυκλωμάτων.

Ιδιαίτερα απλή είναι η διαδικασία, όταν στο αρχικό κύκλωμα μόνο ένας κλάδος αποτελείται από μη γραμμικό υλικό. Τότε, το γραμμικό μέρος μπορεί να υποκατασταθεί από το ισοδύναμο κύκλωμα *Thevenin* με ακροδέκτες στα άκρα του μη γραμμικού κλάδου, με μαγνη-

τική αντίσταση  $R_{m,Th}$  σε σειρά με ΜΕΔ ίση με  $e_{m,Th} = (NI)_{Th}$ . [Υπενθυμίζεται, χρησιμοποιώντας ορολογία ηλεκτρικών κυκλωμάτων, ότι η αντίσταση *Thevenin* είναι ίση με τη συνολική αντίσταση ως προς τα άκρα του κυκλώματος και η ΗΕΔ *Thevenin* είναι ίση με την τάση στα ανοικτοκυκλωμένα άκρα του κυκλώματος.] Τότε, το κύκλωμα απλοποιείται σε κύκλωμα με έναν βρόχο, όπως στο **Σχήμα 4.3-3**, όπου οι κόμβοι  $(\alpha)$  και  $(\beta)$  αντιπροσωπεύουν τα άκρα του μη γραμμικού κλάδου, μέσω των οποίων αυτός επικοινωνεί με το υπόλοιπο κύκλωμα, που έχει υποκατασταθεί από τη ΜΕΔ  $e_{m,Th}$  και τη μαγνητική αντίσταση  $R_{m,Th}$ .



Σχήμα 4.3-3

Η πορεία για την επίλυση ενός τέτοιου κυκλώματος εξαρτάται από το αν για τον μη γραμμικό κλάδο είναι γνωστή η μαγνητική αντίσταση ως συνάρτηση  $R_m(\Psi_m)$  ή ως  $R_m(U_m)$ . Με δεδομένο ότι σε κύκλωμα με έναν βρόχο, όπως στο **Σχήμα 4.3-3**, η μαγνητική ροή  $\Psi_m$  είναι σταθερή, ανάλογα με την περίπτωση είναι:

- Αν είναι γνωστή η σχέση  $R_m(\Psi_m)$ , η εφαρμογή της σχέσης (4.3-18), του δεύτερου νόμου του *Kirchhoff*, με τις μαγνητικές τάσεις ίσες με  $R_{m,Th}\Psi_m$  και  $R_m(\Psi_m)\Psi_m$  στα άκρα της ισοδύναμης μαγνητικής αντίστασης και του μη γραμμικού κλάδου, αντίστοιχα, δίνει τη σχέση:

$$(NI)_{Th} = [R_{m,Th} + R_m(\Psi_m)]\Psi_m \quad (4.3-21)$$

Η σχέση αυτή προσδιορίζει τα αμπερελίγματα (τη ΜΕΔ) *Thevenin* για δοσμένη τιμή της μαγνητικής ροής  $\Psi_m$  που διέρχεται από το μη γραμμικό υλικό. Αντίστροφα, η ίδια σχέση δίνει τη ροή  $\Psi_m$  ως συνάρτηση της ΜΕΔ *Thevenin*, επιλύοντας υπερβατική εξίσωση.

- Αν αντίθετα είναι γνωστή η σχέση  $R_m(U_m)$ , με  $U_m = U_{m,\alpha\beta}$  τη μαγνητική τάση στα άκρα του μη γραμμικού κλάδου, από τη σχέση (4.3-18) είναι  $U_m = e_{m,Th} - R_{m,Th}\Psi_m = R_m(\Psi_m)\Psi_m$ , και, απαλείφοντας τη μαγνητική ροή, προκύπτει η σχέση:

$$(NI)_{Th} = \frac{R_{m,Th} + R_m(U_m)}{R_m(U_m)}U_m \quad (4.3-22)$$

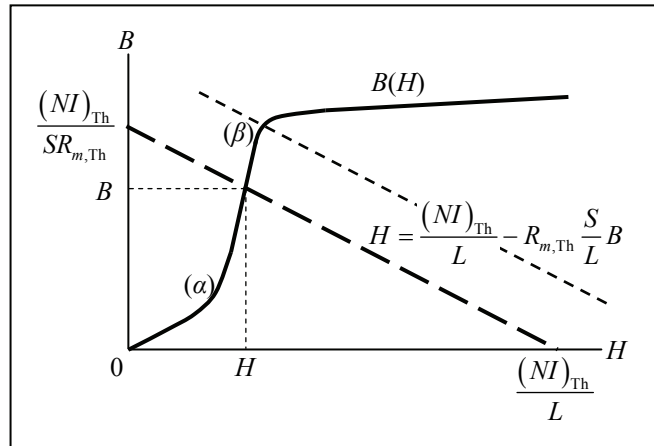
που προσδιορίζει τα αμπερελίγματα (τη ΜΕΔ) *Thevenin* ως συνάρτηση της μαγνητικής τάσης  $U_m$  στα άκρα του μη γραμμικού υλικού, ενώ η αντίστροφη σχέση προκύπτει από την επίλυση υπερβατικής, πάλι, εξίσωσης.

Ανεξάρτητα από τη διαδικασία επίλυσης, τελικά προσδιορίζονται η μαγνητική ροή  $\Psi_m$ , που κυκλοφορεί στο κύκλωμα *Thevenin*, και η μαγνητική τάση  $U_m$  στα άκρα του. Οι ποσότητες αυτές συνδέονται με γραμμικές σχέσεις με τις μαγνητικές ροές και τάσεις κάθε κλάδου του αρχικού γραμμικού κυκλώματος, επιτρέποντας, έτσι, την πλήρη επίλυσή του.

Αν είναι γνωστή η συντακτική σχέση  $B(H)$ , τότε στη γενική περίπτωση η μαγνητική αντίσταση προσδιορίζεται από τη σχέση (4.3-19). Στην ειδική περίπτωση, όταν ο κλάδος με το μη γραμμικό υλικό είναι ευθύγραμμος με μήκος  $L$  και με σταθερή διατομή  $S$ , τότε εισάγοντας την έκφραση (4.3-20α) στη σχέση (4.3-21) και με  $B = \Psi_m/S$  (την πυκνότητα μαγνητικής ροής στον μη γραμμικό κλάδο) προκύπτει:

$$\frac{(NI)_{Th}}{L} - R_{m,Th} \frac{S}{L} B = H(B). \quad (4.3-23)$$

Σε άξονες  $B$ - $H$ , όπως στο **Σχήμα 4.3-4**, η αριστερή πλευρά αποδίδεται από ευθεία γραμμή με αρνητική κλίση, η οποία τέμνει τους άξονες  $B = 0$  και  $H = 0$  στις θέσεις  $H = (NI)_{Th}/L$  και  $B = (NI)_{Th}/SR_{m,Th}$ , αντίστοιχα, ενώ η δεξιά πλευρά, η χαρακτηριστική καμπύλη του μη γραμμικού υλικού, έχει θετική κλίση. Η τομή των δύο γραμμών προσδιορίζει το σημείο λειτουργίας του μαγνητικού κυκλώματος.

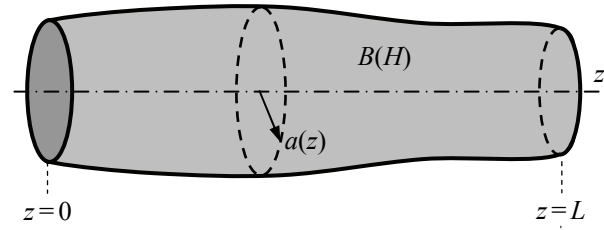


Σχήμα 4.3-4

Αν το μη γραμμικό υλικό χαρακτηρίζεται από σκληρή διέγερση και το σημείο λειτουργίας βρίσκεται στο τμήμα  $(\alpha)$ - $(\beta)$  της καμπύλης  $B(H)$ , όπως έχει υποτεθεί στο σχήμα, τότε σχετικά μικρές μεταβολές στην ισοδύναμη διέγερση  $(NI)_{Th}$  μπορούν να προκαλέσουν αξιόλογη αύξηση στην παραγόμενη μαγνητική επαγωγή  $B$  και στη μαγνητική ροή  $\Psi_m = BS$ . Αν, όμως η διέγερση αυξηθεί, ώστε το σημείο λειτουργίας (η τομή των δύο γραμμών) να φθάσει στο σημείο  $(\beta)$ , από το οποίο ξεκινά η περιοχή του κόρου, περαιτέρω αύξηση της διέγερσης παράγει μαγνητική ροή με μόνο μικρή αύξηση στην τιμή της. Σε ένα τέτοιο κύκλωμα, τα ισοδύναμα αμπερελίγματα  $(NI)_{Th}$  που αντιστοιχούν στο σημείο  $(\beta)$  πρακτικά καθορίζουν τη μέγιστη αποδεκτή διέγερση, επειδή η λειτουργία με μεγαλύτερο  $(NI)_{Th}$  καθίσταται ασύμφορη.

Στα *παραδ. 4.3-5* και *6* παρουσιάζονται απλά μαγνητικά κυκλώματα.

**Παράδειγμα 4.3-4:** Να προσδιορισθεί η μαγνητική αντίσταση  $R_m$ , ως συνάρτηση της μαγνητικής ροής  $\Psi_m$ , ενός εξαρτήματος με μήκος  $L$  και κυκλική διατομή με ακτίνα  $a(z)$  που μεταβάλλεται ήπια κατά το μήκος του. Το εξάρτημα είναι κατασκευασμένο



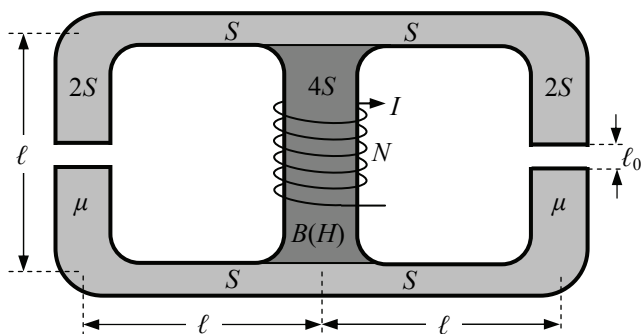
από υλικό με συντακτική σχέση που προσεγγιστικά περιγράφεται από τη συνάρτηση  $B(H) = B_0 \arctan(H/H_0)$ , όπου  $B_0$  και  $H_0$  είναι σταθερές ποσότητες που χαρακτηρίζουν το υλικό. Η μαγνητική ροή εισέρχεται από το ένα άκρο (π.χ., εκείνο στο  $z = 0$ ) και εξέρχεται από το άλλο.

**Επίλυση:** Επειδή η ακτίνα  $a$  έχει ήπια εξάρτηση από τη θέση  $z$ , δηλαδή, επειδή  $da/dz \ll 1$ , στο ολοκλήρωμα που προσδιορίζει τη μαγνητική ροή στη διατομή  $S$  του εξαρτήματος,  $\Psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ , μπορεί να γίνει η προσέγγιση  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} (= B_z dS_z) \approx B dS_z$ , ώστε να γραφεί  $\Psi_m = \pi a^2(z) B(z)$ , όπου η μαγνητική ροή είναι, βέβαια, χαρακτηριστική ποσότητα του κλάδου ( $\Psi_m =$  σταθερό, ανεξάρτητο από τη θέση στην οποία επιλέγεται η διατομή  $S$ ). Από την εξάρτηση  $B(z) = \Psi_m / \pi a^2(z)$  και την αντίστροφη συντακτική σχέση  $H = H_0 \tan(B/B_0)$  προσδιορίζεται με ποιον τρόπο εξαρτάται η ένταση του μαγνητικού πεδίου από την αξονική θέση  $z$ , συγκεκριμένα ότι είναι  $H(z) = H_0 \tan[\Psi_m / B_0 \pi a^2(z)]$ , της οποίας το ολοκλήρωμα δίνει τη μαγνητική τάση  $U_m = \int_0^L H(z) dz$ . Συνεπώς, η μαγνητική αντίσταση είναι ίση με:

$$R_m(\Psi_m) = \frac{U_m}{\Psi_m} = \frac{H_0}{\Psi_m} \int_0^L \tan\left(\frac{\Psi_m}{\pi B_0 a^2(z)}\right) dz.$$

**Σχόλιο:** Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης εξαρτάται από τη συνάρτηση  $a(z)$ . Σε ειδικές περιπτώσεις, όπως όταν  $a^2(z) \sim 1/z$ , η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει αναλυτικά, με κλειστή μορφή, αλλιώς αριθμητικά. Άλλωστε, η «μαθηματική» ακρίβεια είναι περιττή, όταν έχουν ήδη προηγηθεί προσεγγίσεις, όπως εδώ η μαθηματική σχέση  $B = B_0 \arctan(H/H_0)$ , που αποτελεί προσέγγιση της συντακτικής σχέσης  $B(H)$ , ή η προσέγγιση  $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \approx B dS_z$ .

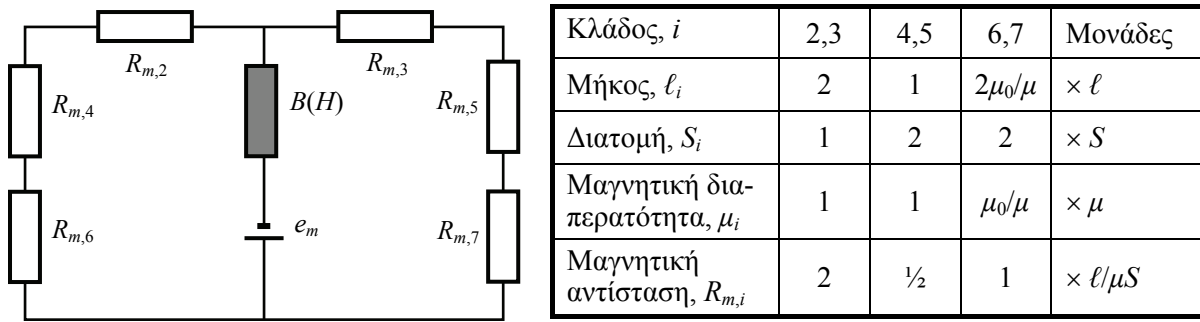
**Παράδειγμα 4.3-5:** Στη συμμετρική μαγνητική διάταξη του σχήματος, με τη διέγερση  $NI$  στον κεντρικό κλάδο, τα δύο διάκενα (με  $\mu_0$ ) έχουν μήκος ίσο με  $\ell_0$  ( $\ll \ell$ ) και οι επιμέρους κλάδοι με μα-



γνητικό υλικό έχουν μήκη ίσα με  $\ell$  και διατομές ίσες αντίστοιχα με  $S$ ,  $2S$  και  $4S$ . Οι κλάδοι με διατομή  $S$  και  $2S$  αποτελούνται από υλικό με μαγνητική διαπερατότητα  $\mu = 2(\ell/\ell_0)\mu_0$  ( $\gg \mu_0$ ), ενώ ο κεντρικός κλάδος (εκείνος με τη διέγερση  $NI$  και τη διατομή  $4S$ ) αποτελείται, σε αντίθεση με το *παράδ. 2.3-30* του Μέρους Α, από ιστροπικό μη γραμμικό υλικό, του οποίου η συντακτική σχέση εκφράζεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση  $B(H) = B_0 \tanh(H/H_0)$ , όπου  $B_0$  και  $H_0$  είναι σταθερές ποσότητες.

Ζητείται η απαιτούμενη τιμή της διέγερσης  $NI$ , ώστε η μαγνητική ροή σε καθένα από τα δύο διάκενα να είναι ίση με  $\Psi_{m0}$ .

**Επίλυση:** Για το γραμμικό μέρος του κυκλώματος, οι μαγνητικές αντιστάσεις  $R_{m,i} = \ell_i/\mu_i S_i$ , όπως έχουν ήδη προσδιορισθεί στο *παράδ. 2.3-30* του Μέρους Α, είναι:



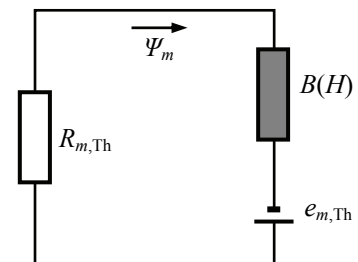
Το ισοδύναμο, ως προς τα άκρα του μη γραμμικού στοιχείου, κύκλωμα κατά *Thevenin* του υπόλοιπου κυκλώματος (δηλαδή, του γραμμικού μέρους) έχει:

- ολική μαγνητική αντίσταση  $R_{m,Th} = (R_{m,2} + R_{m,4} + R_{m,6}) \parallel (R_{m,3} + R_{m,5} + R_{m,7}) = (7/4)(\ell/\mu S)$ ,
- ολική ΜΕΔ (σε σειρά με την  $R_{m,Th}$ ), ίση με  $e_{m,Th} = NI$ .

Εφαρμόζοντας στο μοναδικό βρόχο το β' νόμο του *Kirchhoff*:

$$NI = \frac{7}{4} \frac{\ell}{\mu S} \Psi_m + \ell H_0 \operatorname{arctanh} \left( \frac{\Psi_m}{4SB_0} \right),$$

προκύπτει η διέγερση που απαιτείται, ώστε από το μη γραμμικό υλικό να διέρχεται μαγνητική ροή ίση με  $\Psi_m$ .



Επιστρέφοντας, τέλος, στην αρχική διάταξη, λόγω της συμμετρίας της η ροή από κάθε διάκενο είναι ίση με  $\Psi_{m0} = \frac{1}{2}\Psi_m$ , συνεπώς, η ζητούμενη διέγερση δίδεται από την παραπάνω σχέση με  $\Psi_m = 2\Psi_{m0}$ :

$$NI = \frac{7}{2} \frac{\ell}{\mu S} \Psi_{m0} + \ell H_0 \operatorname{arctanh} \left( \frac{\Psi_{m0}}{2SB_0} \right).$$



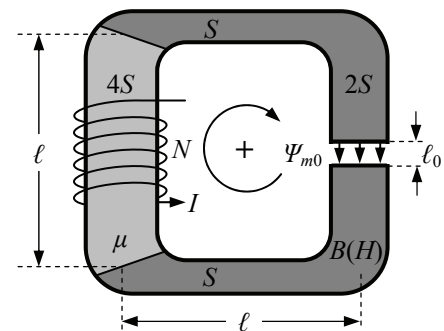
**Σχόλια:**

- Η συνάρτηση της αντίστροφης υπερβολικής εφαπτομένης δεν επιδέχεται όρισμα μεγαλύτερο από τη μονάδα, πρέπει, δηλαδή, να είναι  $\Psi_{m0} < 2SB_0$ . Αυτό σημαίνει, βέβαια, ότι το κύκλωμα δεν είναι δυνατόν να αποδώσει στα διάκενα μαγνητική ροή που να αντιστοιχεί σε τιμές  $B > B_{\text{κόρου}}$  στο εσωτερικό του μη γραμμικού υλικού. Στην ενδεικτική συντακτική σχέση  $B(H) = B_0 \tanh(H/H_0)$  είναι, προφανώς,  $B_{\text{max}} = B_0 \tanh \infty = B_0 = B_{\text{κόρου}}$ , συνεπώς  $2\Psi_{m0,\text{max}} = 2\Psi_{m,\text{max}} = B_0(4S)$ .
- Αν, αντίθετα με την εκφώνηση, ζητούμενη ήταν η μαγνητική ροή  $\Psi_{m0}$  σε κάθε διάκενο με δεδομένη την τιμή  $NI$  της διέγερσης, θα έπρεπε επιπρόσθετα να λυθεί ως προς  $\Psi_{m0}$  η τελική σχέση

$$NI = \frac{7}{2} \frac{\ell}{\mu S} \Psi_{m0} + \ell H_0 \operatorname{arctanh} \left( \frac{\Psi_{m0}}{2SB_0} \right).$$

Η επίλυση θα μπορούσε να γίνει αριθμητικά, ή γραφικά, όπως έχει παρουσιασθεί στο **Σχήμα 4.3-4** (από την τομή ευθείας γραμμής με την αντίστροφη της συνάρτησης  $\tanh$ ).

**Παράδειγμα 4.3-6:** Η μαγνητική διάταξη του σχήματος, με διαστάσεις  $\ell \times \ell$ , τροφοδοτείται με ρεύμα  $I$  (με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα) σε  $N$  ελίγματα, σε κλάδο με διατομή  $4S$  από γραμμικό μαγνητικό υλικό με σταθερή μαγνητική διαπερατότητα  $\mu = (3/2)(\ell/\ell_0)\mu_0$  ( $\gg \mu_0$ ), ενώ ένα διάκενο (με  $\mu_0$ ) έχει μήκος ίσο με  $\ell_0$  ( $\ll \ell$ ). Το διάκενο συνδέεται μαγνητικά με τη διέγερση μέσω κλάδων με διατομές ίσες αντίστοιχα με  $S$  και  $2S$ , οι οποίοι αποτελούνται από ιστροπικό μη γραμμικό υλικό με συντακτική σχέση  $B(H) = B_0 \operatorname{arctan}(H/H_0)$ , όπου  $B_0$  και  $H_0$  είναι σταθερές ποσότητες.



Ζητείται η τιμή της διέγερσης  $NI$ , ώστε η μαγνητική ροή στο διάκενο να είναι ίση με  $\Psi_{m0}$ , με φορά προς τα κάτω.

**Επίλυση:** Προς στιγμή μπορεί να γεννηθεί η απορία πώς θα αντιμετωπισθεί η διάταξη αυτή, καθώς περιλαμβάνει περισσότερους από έναν κλάδο με μη γραμμικές ιδιότητες. Η απάντηση φαίνεται αμέσως, παρατηρώντας ότι ο δεύτερος νόμος του *Kirchhoff* έχει τη μορφή  $\sum_i e_{m,i} = \sum_i U_{m,i}(\Psi_{m,i})$ , δηλαδή αθροίζονται μαγνητικές τάσεις, οι οποίες είναι συναρτήσεις της μαγνητι-

κής ροής (αδιάφορο αν οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικές, όπως στους γραμμικούς κλάδους, ή είναι μη γραμμικές), ενώ, παράλληλα, επειδή το προκείμενο κύκλωμα αποτελείται από έναν βρόχο, η μαγνητική ροή είναι διατηρούμενη ποσότητα, συνεπώς σε κάθε κλάδο είναι ίση με  $\Psi_{m,i} = \Psi_{m0}$ , όση και στο διάκενο.

Το γραμμικό μέρος του κυκλώματος περιλαμβάνει μόνο δύο κλάδους με γραμμικό υλικό, με μαγνητική αντίσταση ίση με  $R_{m,i} = \ell_i/\mu_i S_i$ . Οι λοιποί κλάδοι δεν έχουν γραμμική συμπεριφορά και η μαγνητική αντίστασή τους είναι συνάρτηση της μαγνητικής ροής,  $R_{m,i}(\Psi_{m0}) = \ell_i H_i / B_i S_i$ , που με  $B_i S_i = \Psi_{m0}$  και  $H_i = H_0 \tan(B_i/B_0)$  δίνει:

$$R_{m,i}(\Psi_{m0}) = \frac{\ell_i}{\Psi_{m0}} H_0 \tan\left(\frac{\Psi_{m0}}{S_i B_0}\right).$$

Ο βρόχος επιλέγεται με δεξιόστροφη φορά, ώστε να ταιριάζει με τη φορά της μαγνητικής ροής  $\Psi_{m0}$ , με αποτέλεσμα η μαγνητεγερτική δύναμη να είναι αρνητική,  $e_m = -NI$ . Εισάγοντας τις τιμές των  $\ell_i$  και  $S_i$  κάθε κλάδου, καθώς και των  $\mu_i$  κάθε γραμμικού κλάδου και την εδώ ενιαία συντακτική σχέση κάθε μη γραμμικού κλάδου, προκύπτει, τελικά, το αποτέλεσμα:

$$-NI = \frac{\ell}{\mu S} \Psi_{m0} + \ell H_0 \left[ 2 \tan\left(\frac{\Psi_{m0}}{S B_0}\right) + \tan\left(\frac{\Psi_{m0}}{2S B_0}\right) \right].$$

Ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά των δύο γραμμικών κλάδων (κατά το  $1/4$  του κλάδου με τη διέγερση και κατά τα  $3/4$  του διακένου), ενώ οι άλλοι δύο τη συνεισφορά των μη γραμμικών κλάδων, ειδικότερα ο δεύτερος όρος αναφέρεται στους δύο κλάδους με διατομή  $S$  και συνολικό μήκος  $2\ell$  και ο τρίτος σε εκείνους με διατομή  $2S$  και μήκος  $\ell - \ell_0 \approx \ell$ .)

**Σχόλιο:** Για την επίλυση έγινε εφαρμογή του δεύτερου νόμου του *Kirchhoff*, με χρήση των μαγνητικών αντιστάσεων (είτε γραμμικών, είτε μη γραμμικών). Η έκφραση για το αποτέλεσμα αναγνωρίζεται και ως προϊόν του νόμου του *Ampere*, σε βρόχο  $\ell'$  που ταυτίζεται με την αλληλουχία των μαγνητικών κλάδων. Η αριστερή πλευρά αντιπροσωπεύει το ρεύμα  $\int dI$  που διέρχεται από την επιφάνεια  $S'$  (με  $dS'$  αντίρροπο προς τα ρεύματα  $dI$ ), ενώ στη δεξιά πλευρά το ολοκλήρωμα της κυκλοφορίας  $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$  εκφράζεται ως άθροισμα των συνεισφορών κάθε κλάδου,  $\sum_i H_i \ell_i$ , όπου η ένταση του μαγνητικού πεδίου συνδέεται με τη μαγνητική επαγωγή  $B_i = \Psi_{m0}/S_i$  μέσω της συντακτικής σχέσης που περιγράφει το υλικό του κλάδου (δηλαδή,  $H_i = B_i/\mu_i$  για τους κλάδους με γραμμική συμπεριφορά και  $H_i = H_0 \tan(B_i/B_0)$  για τους λοιπούς).

