

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

#### 7.1 Η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών

Όπως έχει περιγραφεί στην παράγραφο 6.1.2, σε διατάξεις οριακών τιμών με την εξίσωση του *Poisson* το γενικό πρόβλημα μπορεί να διασπασθεί με επαλληλία ως  $\Phi = \Phi_{\text{ειδ}} + \Phi_{\text{συμ}}$ , με τέτοιον τρόπο ώστε η ειδική λύση να περιγράφει τη συνεισφορά των αιτίων που είναι καταναμημένα στο εσωτερικό του χώρου. Το αποτέλεσμα είναι η ειδική λύση  $\Phi_{\text{ειδ}}$  να εκφράζεται με την κλειστή μορφή ενός ολοκληρώματος επαλληλίας, όπως εξειδικεύεται στις σχέσεις (6.1-35) έως (6.1-39), ενώ η συμπληρωματική λύση  $\Phi_{\text{συμ}}$  να ικανοποιεί την εξίσωση του *Laplace* και οριακές συνθήκες με ίδια μορφή όπως στην αρχική διάταξη, αλλά ο μη ομογενής όρος ενδεχομένως έχει πιο σύνθετη εμφάνιση από του αρχικού προβλήματος. Συγκεκριμένα, ο όρος  $\Phi_{\text{συμ}}$  περιγράφεται από το καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών συνθηκών των εξισώσεων (6.1-30) και (6.1-31), δηλαδή:

$$\nabla^2 \Phi_{\text{συμ}} = 0, \text{ στο χώρο } V, \quad (7.1-1)$$

$$\alpha(\mathbf{r}_S) \Phi_{\text{συμ}}(\mathbf{r}_S) + \beta(\mathbf{r}_S) \frac{\partial \Phi_{\text{συμ}}}{\partial n} \Big|_S = \gamma_{\text{συμ}}(\mathbf{r}_S), \text{ στην επιφάνεια } S, \quad (7.1-2)$$

όπου  $\gamma_{\text{συμ}}(\mathbf{r}_S) = \gamma(\mathbf{r}_S) - \alpha(\mathbf{r}_S) \Phi_{\text{ειδ}}(\mathbf{r}_S) - \beta(\mathbf{r}_S) (\partial \Phi_{\text{ειδ}} / \partial n)|_S$ , όπως ορίζεται από τη δεξιά πλευρά της σχέσης (6.1-31). Φυσικά, σε πολλές εφαρμογές δεν υπάρχει αίτιο καταναμημένο στο εσωτερικό του χώρου  $V$ , οπότε δεν χρειάζεται καμία ειδική λύση, είναι  $\Phi_{\text{ειδ}} = 0$ , και οι σχέσεις αυτές δίνουν το δυναμικό  $\Phi_{\text{συμ}} \rightarrow \Phi$ , καθώς αυτό καθορίζεται αποκλειστικά από τις οριακές συνθήκες. Και, φυσικά, για λόγους οικονομίας και μόνο χρησιμοποιείται το σύμβολο  $\Phi$  για να περιγράψει οποιαδήποτε από τις ποσότητες  $\{\Phi, \Phi_{\text{επ}}, A_x, A_y, A_z, \Phi_m, \Phi_{\perp}, \Phi_{\perp m}\}$ .

**Γενική μεθοδολογία:** Στο κεφάλαιο αυτό επιλύεται η εξίσωση του *Laplace*, με τις συνοδούς οριακές συνθήκες, με χωρισμό μεταβλητών. Η μέθοδος αυτή συνίσταται στα εξής:

(α) Αναζητούνται όλες οι λύσεις  $\Phi_j$  της εξίσωσης του *Laplace*, οι οποίες έχουν μορφή γινομένου,  $\Phi_j(s_1, s_2, s_3) = S_{1j}(s_1) \cdot S_{2j}(s_2) \cdot S_{3j}(s_3)$ , τριών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, της αντίστοιχης συντεταγμένης. Εδώ είναι  $(s_1, s_2, s_3) = \{(x, y, z), \text{ ή } (r_T, \varphi, z), \text{ ή } (r, \theta, \varphi)\}$ , αλλά η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί και σε άλλα τρισσορθογώνια συστήματα συντεταγμένων. Οι συναρτήσεις  $S_k(s_k)$  αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης για την περιγραφή των  $\Phi_j$ .

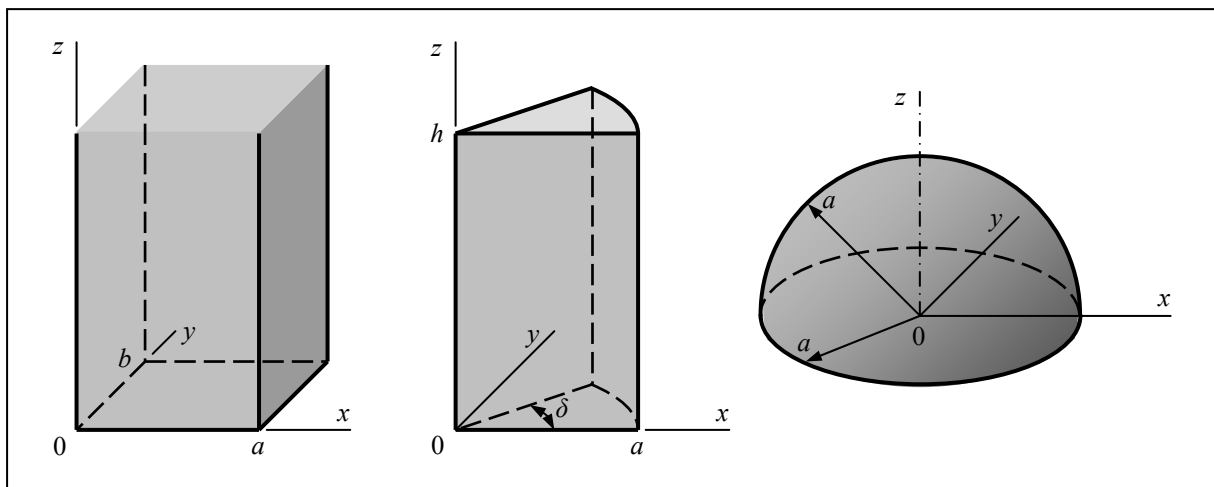
(β) Προσδιορίζεται η λύση  $\Phi$  του προβλήματος οριακών τιμών ως άθροισμα γινομένων:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_j \Phi_j(s_1, s_2, s_3) = \sum_j A_j S_{1j}(s_1) \cdot S_{2j}(s_2) \cdot S_{3j}(s_3). \quad (7.1-3)$$

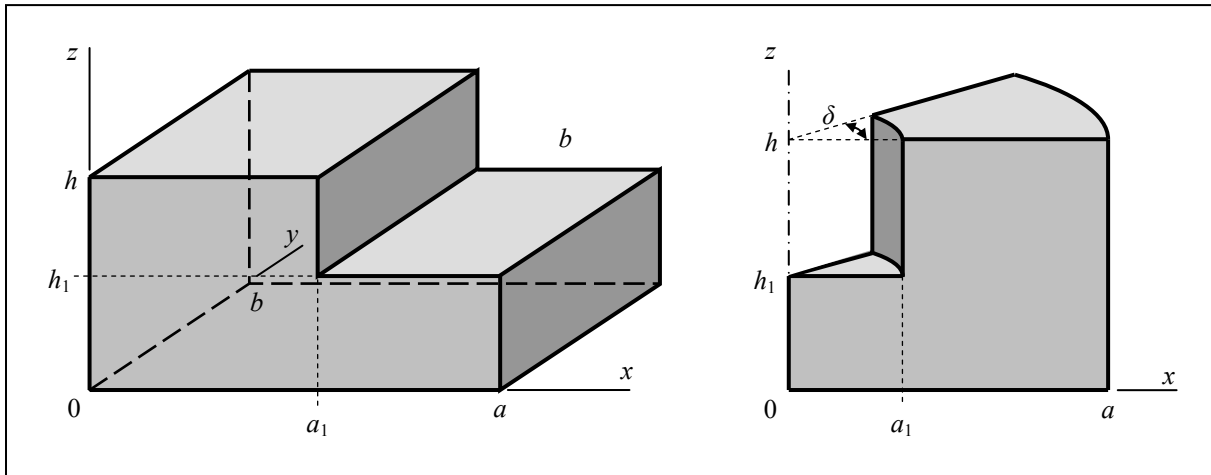
Για κάθε τέτοιο άθροισμα έχει ήδη εξασφαλισθεί ότι είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ , αφού είναι  $\nabla^2 \Phi_j = 0$  για κάθε προσθετέο. Αυτό που χρειάζεται είναι να επιλεγουν οι συντελεστές  $A_j$ , ώστε το άθροισμα να ικανοποιεί και τις οριακές συνθήκες. Η άθροιση μπορεί να αναφέρεται σε πεπερασμένο ή σε άπειρο πλήθος όρων, και τότε πρόκειται για σειρά. Επίσης, η άθροιση μπορεί να αναφέρεται σε ζεύγη  $j = (j_1, j_2)$ .

**Απλές και σύνθετες διατάξεις:** Κατ' εξοχήν κατάλληλες για χωρισμό μεταβλητών είναι οι διατάξεις, των οποίων το όριο αποτελείται από τμήματα με  $s_\kappa = \text{σταθ}$ ,  $\kappa = 1, 2, 3$ . Απλές είναι οι διατάξεις, στις οποίες κάθε συντεταγμένη εκτείνεται μεταξύ δύο ακραίων τιμών  $s_{\kappa, \min} < s_\kappa < s_{\kappa, \max}$ , έτσι ώστε τα άκρα  $s_{\kappa, \min}$  και  $s_{\kappa, \max}$  να αποτελούν το μοναδικό τμήμα της οριακής επιφάνειας  $S$  που να συμπίπτει με  $s_\kappa = \text{σταθ}$ . Το **Σχήμα 7.1-1** παρουσιάζει τέτοιες διατάξεις, όπως ημιάπειρο πρίσμα με διατομή  $a \times b$  (η περιοχή  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $0 < z < \infty$ ), σφήνα με γωνία  $\delta$  και μήκος  $h$  (η περιοχή  $0 < r_T < a$ ,  $0 < \varphi < \delta$ ,  $0 < z < h$ ), ή ημισφαίριο (η περιοχή  $0 < r < a$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$ ). Είναι δυνατόν, κάποια τμήματα του ορίου να είναι στο άπειρο, όπως  $z_{\max} = \infty$  στο πρίσμα, ή να ταυτίζονται με επιφάνειες εκφυλισμένες σε γραμμή, όπως στη σφήνα είναι  $r_{T, \min} = 0$  (ο άξονας  $z$ ), ή στο ημισφαίριο το όριο  $\theta_{\min} = 0$  (ο θετικός ημιάξονας  $z$ ), ή και σε σημείο, όπως είναι η αρχή των αξόνων ( $r_{\min} = 0$ ) στη σφαίρα.

Οι πιο σύνθετες διατάξεις έχουν τμήματα της οριακής επιφάνειας που αντιστοιχούν σε περισσότερες από δύο επιφάνειες  $s_\kappa = \text{σταθ}$ ., όπως αυτές του **Σχήματος 7.1-2**, που παρουσιάζει



Σχήμα 7.1-1



Σχήμα 7.1-2

ένα σύνθετο πρίσμα και μία σύνθετη σφήνα. Τέτοιες σύνθετες διατάξεις αποτελούνται από απλές διατάξεις σε επαφή σε κοινή έδρα. Για παράδειγμα, το σύνθετο πρίσμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο πρίσματα σε επαφή στο επίπεδο  $z = h_1$ , ή, τελείως ισοδύναμα, στο επίπεδο  $x = a_1$ . Όμοια, η σύνθετη σφήνα αποτελείται από δύο στερεά σώματα, με κοινό το όριο στο επίπεδο  $z = h_1$ , ή στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a_1$ . Επίσης, σύνθετη είναι μία διάταξη, αν σε μία ενδιάμεση επιφάνεια  $s_\kappa = \text{σταθ.}$  περιέχει στο εσωτερικό της κατανομημένο αίτιο, ή αν σε κάποια ενδιάμεση θέση  $s_\kappa = \text{σταθ.}$  του ορίου αλλάζει μορφή η οριακή συνθήκη και από *Dirichlet* γίνεται *Neumann*, όπως στην παράγρ. 7.2.3. Και αυτές οι διατάξεις μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από απλές διατάξεις, με κοινή την έδρα  $s_\kappa = \text{σταθ.}$

Σε **διδιάστατες διατάξεις** με  $\partial/\partial z = 0$ , το δυναμικό έχει εξάρτηση  $\Phi = \Phi(x, y)$  ή  $\Phi = \Phi(r_T, \varphi)$ , σε Καρτεσιανές ή πολικές (διδιάστατες κυλινδρικές) συντεταγμένες, συνεπώς αρκεί ο χωρισμός  $\Phi_j = X_j(x)Y_j(y)$  ή  $\Phi_j = R_j(r_T)F_j(\varphi)$ , λαμβάνοντας ως τρίτη συνάρτηση την  $Z_j(z) = 1$ . Τέτοιες είναι οι διατάξεις, στις οποίες συνυπάρχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Η περιοχή  $V$  έχει σχήμα απλού ή σύνθετου ορθού πρίσματος, ή σφήνας με γωνία  $\delta$ , ή κυλίνδρου. Γενικότερα, η περιοχή  $V$  οριοθετείται πλευρικά από το σχήμα του παράγεται από μία γενέτειρα ευθεία, παράλληλη προς τον άξονα  $z$ . Το κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{i}_n$  αυτής της παράπλευρης επιφάνειας είναι παντού κάθετο προς τον άξονα  $z$ ,  $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_z = 0$ .
- Οι βάσεις του πρίσματος ή της σφήνας/κυλίνδρου κλπ. βρίσκονται σε δύο θέσεις  $z = z_{\min}$  και  $z = z_{\max}$  και εκεί επικρατεί ομογενής οριακή συνθήκη *Neumann*,  $\partial\Phi/\partial n = 0$ . Το ίδιο συμβαίνει και σε τυχόν ενδιάμεσες οριακές επιφάνειες, στις οποίες είναι  $z = \text{σταθ.}$
- Στην παράπλευρη επιφάνεια η οριακή συνθήκη είναι ανεξάρτητη από το  $z$ . Αυτό σημαίνει ότι στη γενική περίπτωση της συνθήκης  $(\alpha\Phi + \beta\partial\Phi/\partial n)|_S = \gamma$ , οι ποσότητες  $\alpha, \beta$

και  $\gamma$  έχουν  $\partial\alpha/\partial z = 0$ ,  $\partial\beta/\partial z = 0$  και  $\partial\gamma/\partial z = 0$ , ή η ενδεχόμενη εξάρτηση από το  $z$  περιέχεται σε κοινό παράγοντα που απαλείφεται. Για τις πιο συνήθεις οριακές συνθήκες, αυτή η απαίτηση γράφεται:

- ο Συνθήκη *Dirichlet*,  $\Phi|_S = \Phi_S(x, y)$ , ή  $\Phi|_S = \Phi_S(r_T, \varphi)$ , με  $\partial\Phi_S/\partial z = 0$ .
- ο Συνθήκη *Neumann*,  $(\partial\Phi/\partial n)|_S = -E_S(x, y)$ , ή  $(\partial\Phi/\partial n)|_S = -E_S(r_T, \varphi)$ , με  $\partial E_S/\partial z = 0$ .

Στην ίδια κατηγορία εντάσσονται και οι γραμμές μεταφοράς με τοιχώματα που δεν μεταβάλλονται κατά μήκος του άξονα  $z$ . Οι διατάξεις αυτές περιγράφονται από δυναμικά  $\{\Phi_{\perp}, \Phi_{m\perp}\}$ , τα οποία εξαρτώνται αποκλειστικά από τις δύο εγκάρσιες συντεταγμένες, ενώ η κυματική εξάρτηση από το  $z$  περιέχεται στον συντελεστή φάσης  $\exp(-j\beta z)$ .

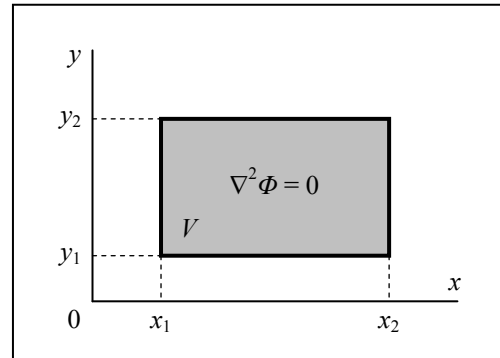
Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται ο χωρισμός μεταβλητών στα τρία βασικά συστήματα. Στο καρτεσιανό (παράγραφος 7.2) και το κυλινδρικό (παράγραφος 7.3) προτάσσεται η παρουσίαση της διδιάστατης περίπτωσης, αρχικά σε απλές διατάξεις που περιγράφονται από  $\Phi = \sum_j A_j \Phi_j$  με λίγους όρους, ακολούθως σε απλές πάλι διατάξεις που απαιτούν ανάπτυγμα του  $\Phi$  σε σειρά και, τέλος, σε σύνθετες διατάξεις. Η επέκταση σε τρεις διαστάσεις είναι στοιχειώδης στο καρτεσιανό σύστημα (παράγραφος 7.2.4), επειδή οι τρεις συντεταγμένες  $x$ ,  $y$  και  $z$  έχουν ακριβώς ίδια φυσιογνωμία. Αντίθετα, στις κυλινδρικές συντεταγμένες (παράγραφος 7.4), η διαφορετική συμπεριφορά μεταξύ των συντεταγμένων  $r_T$ ,  $\varphi$  και  $z$  επιβάλλει την εισαγωγή ειδικών συναρτήσεων (*Bessel* και τροποποιημένων *Bessel*). Τέλος, στην παράγραφο 7.5 εισάγονται τα πολυώνυμα και οι συναρτήσεις *Legendre* για το χωρισμό μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες, καθώς και οι σφαιρικές αρμονικές.

Ας σημειωθεί επίσης ότι ο χωρισμός μεταβλητών είναι τεχνική, της οποίας η εφαρμοσιμότητα δεν περιορίζεται, βέβαια, στην εξίσωση του *Laplace*. Για παράδειγμα, ο χωρισμός μεταβλητών μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη βαθμωτή εξίσωση του *Helmholtz*,  $\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0$ . Όταν πρόκειται για διάδοση σε κυματοδηγό κατά μήκος ενός ευθύγραμμου άξονα, π.χ. του άξονα  $z$ , στη Λαπλασιανή ένας προσθετός απλοποιείται σε  $\partial^2 \Phi/\partial z^2 \rightarrow -\beta^2 \Phi$ , όπου  $\beta$  είναι η σταθερά διάδοσης. Όμοια, για κυματοδηγούμενη διάδοση στη διεύθυνση  $\mathbf{i}_{\varphi}$ , η αντίστοιχη απλοποίηση είναι  $\partial^2 \Phi/\partial \varphi^2 \rightarrow -m^2 \Phi$ . Ανάλογα με το σχήμα της διατομής, οι συναρτήσεις βάσης που σχηματίζονται κατά την ανάλυση συμπίπτουν με τις συναρτήσεις βάσης που συνδέονται με την εξίσωση του *Laplace* στο αντίστοιχο σύστημα συντεταγμένων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, επεκτάσεις που αναφέρονται σε διάδοση παρουσιάζονται στις οικείες ενότητες, μολονότι ο κορμός του κειμένου αναφέρεται στην εξίσωση του *Laplace*.

## 7.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες

### 7.2.1 Συναρτήσεις βάσης σε δύο διαστάσεις

**Εξισώσεις για τις συναρτήσεις βάσης:** Όταν είναι  $\partial/\partial z = 0$ , τότε η Λαπλασιανή του  $\Phi$  είναι  $\nabla^2\Phi = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\Phi$ . Εξετάζεται εδώ ποια μορφή έχουν οι λύσεις της εξίσωσης *Laplace*,  $\nabla^2\Phi = 0$ , σε διαστάσεις με απλή γεωμετρία, όπως στο **Σχήμα 7.2-1**, όπου η περιοχή  $V$  εκτείνεται στο διάστημα  $x_1 < x < x_2$  και  $y_1 < y < y_2$ , ενώ στη διεύθυνση  $z$  υποτίθεται ότι ισχύουν οι απαιτήσεις για διδιάστατες διατάξεις, όπως περιγράφηκαν στην παράγραφο 7.1. Ειδικότερα, γίνεται η υπόθεση χωρισμού μεταβλητών  $\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$  και εξετάζεται ποια ζεύγη συναρτήσεων  $X(x)$  και  $Y(y)$  ικανοποιούν την εξίσωση *Laplace*,  $\nabla^2(XY) = X''Y + XY'' = 0$ , η οποία, διαιρούμενη με το γινόμενο  $\Phi = XY$ , παίρνει τη μορφή:



Σχήμα 7.2-1

γίνεται η υπόθεση χωρισμού μεταβλητών  $\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$  και εξετάζεται ποια ζεύγη συναρτήσεων  $X(x)$  και  $Y(y)$  ικανοποιούν την εξίσωση *Laplace*,  $\nabla^2(XY) = X''Y + XY'' = 0$ , η οποία, διαιρούμενη με το γινόμενο  $\Phi = XY$ , παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\nabla^2\Phi}{\Phi} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0. \quad (7.2-1)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή ως προς  $x$ ,  $(\partial/\partial x)(X''/X) + (\partial/\partial x)(Y''/Y) = (\partial/\partial x)(X''/X) = 0$ , προκύπτει ότι πρέπει να είναι  $X''/X = K_x = \text{σταθ}$ . Με ακριβώς όμοια διαδικασία συνάγεται, πως για τη συνάρτηση  $Y(y)$  πρέπει να είναι  $Y''/Y = K_y = \text{σταθ}$ . Δηλαδή, οι συναρτήσεις  $X(x)$  και  $Y(y)$  πρέπει να ικανοποιούν τις διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} X'' &= K_x X, \\ Y'' &= K_y Y, \end{aligned} \quad (7.2-2)$$

με  $K_x, K_y = \text{σταθ}$ . Όμως,  $K_x + K_y = X''/X + Y''/Y = (\nabla^2\Phi)/\Phi = 0$ , συνεπώς, οι δύο σταθερές συνδέονται από τη σχέση:

$$K_x + K_y = 0. \quad (7.2-3)$$

Ειδικότερα, αν είναι  $K_x = 0$ , αυτό σημαίνει ότι επίσης είναι  $K_y = 0$ , ενώ αν είναι  $K_x = h^2 > 0$ , τότε πρέπει να είναι  $K_y = -h^2 < 0$ , και αντίστροφα. Αν για κάποιο γινόμενο  $X(x)Y(y)$  είναι  $K_x + K_y = X''/X + Y''/Y \neq 0$ , τότε αυτό το γινόμενο δεν ικανοποιεί την εξίσωση *Laplace*.

**Συναρτήσεις βάσης** για την  $X(x)$ : Ανάλογα με το πρόσημο του  $K_x$ , τα ενδεχόμενα είναι:

α)  $K_x = 0$ . Τότε, είναι  $X'' = 0$ ,  $X' = A = \text{σταθ.}$ ,  $X = Ax + B$  με  $B = \text{σταθ.}$ , δηλαδή:

$$K_x = 0 \Rightarrow X(x) = \{x, 1\}, \quad (7.2-4)$$

όπου με την αγκύλη  $\{\dots\}$  παριστάνεται γραμμικός συνδυασμός των περικλειόμενων συναρτήσεων.

β)  $K_x = -h^2 < 0$ . Η γενική λύση της εξίσωσης  $X'' = -h^2 X$  είναι  $X = A \sin(hx) + B \cos(hx)$ , οπότε, με τον ίδιο συμβολισμό  $\{\dots\}$  για τον γραμμικό συνδυασμό, οι λύσεις είναι:

$$K_x = -h^2 < 0 \Rightarrow X(x) = \{\sin(hx), \cos(hx)\}. \quad (7.2-5)$$

γ)  $K_x = +h^2 > 0$ . Τώρα η διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή  $X'' = h^2 X$ , με γενική λύση  $X(x) = A \exp(hx) + B \exp(-hx)$ , συνεπώς:

$$K_x = h^2 > 0 \Rightarrow X(x) = \{\exp(hx), \exp(-hx)\}. \quad (7.2-6\alpha)$$

Γραμμικοί συνδυασμοί των εκθετικών είναι οι υπερβολικές συναρτήσεις:

$$\sinh \zeta = \frac{1}{2}(e^\zeta - e^{-\zeta}) \quad \text{και} \quad \cosh \zeta = \frac{1}{2}(e^\zeta + e^{-\zeta}),$$

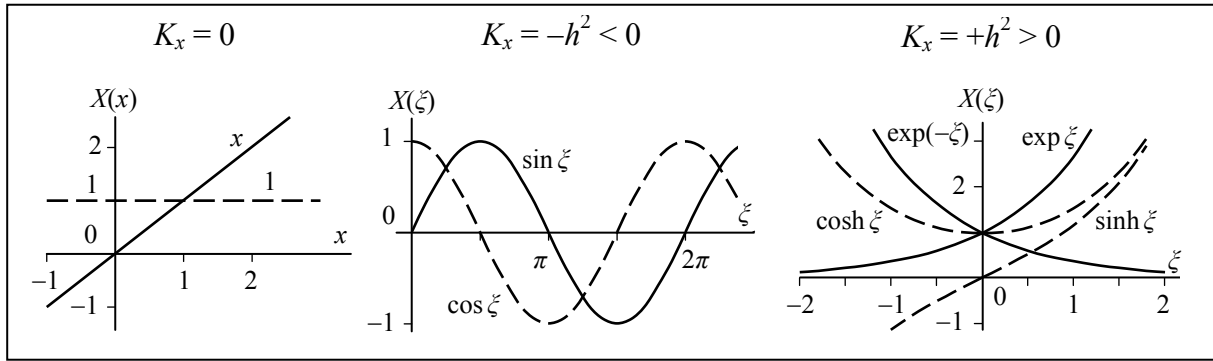
που μπορούν να χρησιμοποιηθούν αντί των εκθετικών:

$$K_x = +h^2 > 0 \Rightarrow X(x) = \{\sinh(hx), \cosh(hx)\}. \quad (7.2-6\beta)$$

Φυσικά, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός εκθετικών και υπερβολικών συναρτήσεων αδιάκριτα, αρκεί οι δύο συναρτήσεις να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επιλογή όπως η  $\{\sinh(hx) + \cosh(hx), \exp(hx)\}$  δεν είναι αποδεκτή, επειδή οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται, ενώ η επιλογή  $X(x) = \{\sinh(hx), \exp(hx)\}$  είναι αποδεκτή.

Στα παραπάνω, η νέα σταθερά  $h$  ορίζεται μέσω του τετραγώνου της,  $h^2 = -K_x$  ή  $h^2 = K_x$ . Πρέπει να τεθεί περιορισμός, συγκεκριμένα επιλέγεται ότι  $h > 0$ , επειδή οι συναρτήσεις με αρνητικό πρόσημο για το  $h$  είναι γραμμικά εξαρτημένες από εκείνες με  $h = |h|$ . Για παράδειγμα, για το ημίτονο είναι  $\sin(-hx) = -\sin(hx) = (-1) \times \sin(hx) + 0 \times \cos(hx)$ , ή για το υπερβολικό συνημίτονο είναι  $\cosh(-hx) = \cosh(hx) = 0 \times \sinh(hx) + 1 \times \cosh(hx)$ .

Ας αναφερθεί, επίσης, μολονότι δεν χρειάζεται για τα επόμενα, ότι η περίπτωση  $K_x = 0$  αποτελεί το όριο των άλλων δύο, καθώς  $h \rightarrow 0$ , που τότε είναι  $\{h^{-1} \sin(hx), \cos(hx)\}|_{h \rightarrow 0} = \{x, 1\}$  και αντίστοιχα  $\{h^{-1} \sinh(hx), \cosh(hx)\}|_{h \rightarrow 0} = \{x, 1\}$ , επίσης.



Σχήμα 7.2-2

**Βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων  $X(x)$ :** Η συμπεριφορά τους υπενθυμίζεται στις γραφικές παραστάσεις του Σχήματος 7.2-2 (με  $\xi = hx$ ) και ιδιαίτερα σημειώνονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, που αντιστοιχούν σε  $K_x < 0$ , είναι περιοδικές, με περίοδο  $2\pi$ , και συνεπώς έχουν άπειρο πλήθος από εναλλαγές προσήμου και από ακρότατα μεταξύ των μηδενισμών, με τα τελευταία στις τιμές  $\pm 1$ . Αντίθετα, οι εκθετικές συναρτήσεις, που αντιστοιχούν σε  $K_x > 0$ , οι  $\exp \xi$  και  $\exp(-\xi)$ , είναι παντού θετικές, είναι μονότονα αύξουσες ή φθίνουσες, όπως και όλες οι παράγωγοί τους, και στα άπειρα  $\xi = \pm\infty$ , απειρίζονται, ή μηδενίζονται ασυμπτωματικά. Όταν  $K_x > 0$ , η περιγραφή μπορεί να γίνει και μέσω των υπερβολικών συναρτήσεων,  $\sinh \xi$  και  $\cosh \xi$ , οι οποίες είναι σχεδόν μονότονες, καθώς έχουν είτε ένα μηδενισμό, είτε ένα ακρότατο, και στο  $\xi = \pm\infty$  απειρίζονται.
- Υπενθυμίζονται οι σχέσεις για τις παραγώγους:

$$\begin{aligned}
 (\sin \xi)' &= \cos \xi, & (\cos \xi)' &= -\sin \xi, \\
 (\exp \xi)' &= \exp \xi, & (\exp(-\xi))' &= -\exp \xi, \\
 (\sinh \xi)' &= \cosh \xi, & (\cosh \xi)' &= \sinh \xi,
 \end{aligned}
 \tag{7.2-7}$$

και για αθροίσματα ή διαφορές στο όρισμα των συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}
 \sin(\xi \pm \xi_0) &= \sin \xi \cos \xi_0 \pm \cos \xi \sin \xi_0, \\
 \cos(\xi \pm \xi_0) &= \cos \xi \cos \xi_0 \mp \sin \xi \sin \xi_0, \\
 \exp(\xi \pm \xi_0) &= \exp \xi \exp(\pm \xi_0), \\
 \sinh(\xi \pm \xi_0) &= \sinh \xi \cosh \xi_0 \pm \cosh \xi \sinh \xi_0, \\
 \cosh(\xi \pm \xi_0) &= \cosh \xi \cosh \xi_0 \pm \sinh \xi \sinh \xi_0.
 \end{aligned}
 \tag{7.2-8}$$

- Μετατόπιση της αφετηρίας οδηγεί σε γραμμικό συνδυασμό συναρτήσεων από το ίδιο ζεύγος συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}\sin[h(x-x_0)] &= [\cos(hx_0)] \cdot \sin(hx) + [-\sin(hx_0)] \cdot \cos(hx), \\ \exp[h(x-x_0)] &= [\exp(-hx_0)] \cdot \exp(hx) + 0 \cdot \exp(-hx).\end{aligned}$$

- Αξιοσημείωτες είναι οι ακόλουθες μετατοπίσεις που προκαλούν μηδενισμούς:
  - $X(x=x_0) = 0$ , όταν:

$$X = x - x_0, \text{ ή } X = \sin[h(x-x_0)], \text{ ή } X = \sinh[h(x-x_0)]. \quad (7.2-9)$$

- $\left. \frac{d}{dx} X(x) \right|_{x=x_0} = 0$ , όταν:

$$X = 1, \text{ ή } X = \cos[h(x-x_0)], \text{ ή } X = \cosh[h(x-x_0)]. \quad (7.2-10)$$

Οι σχέσεις (7.2-9) αντιπροσωπεύουν τους κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς, όταν στο επίπεδο  $x = x_0$  επικρατεί ομογενής συνθήκη *Dirichlet*,  $\Phi = 0$ , και αντίστοιχα οι σχέσεις (7.2-10) είναι κατάλληλες για ομογενή συνθήκη *Neumann*, στην οποία  $\partial\Phi/\partial n = 0$ .

- Αξιοσημείωτοι είναι, επίσης, οι ακόλουθοι μηδενισμοί στο άπειρο:
  - Στο  $x = +\infty$  μηδενίζονται οι ακόλουθες συναρτήσεις, καθώς και οι παράγωγοί τους:

$$X = \exp(-hx) = \cosh(hx) - \sinh(hx). \quad (7.2-11)$$

- Στο  $x = -\infty$  μηδενίζονται οι ακόλουθες συναρτήσεις, καθώς και οι παράγωγοί τους:

$$X = \exp(+hx) = \cosh(hx) + \sinh(hx). \quad (7.2-12)$$

Οι σχέσεις (7.2-11) και (7.2-12) υποδεικνύουν τους κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς, όταν στο  $\pm\infty$  επικρατεί ομογενής οριακή συνθήκη, είτε *Dirichlet*, είτε *Neumann*, ή όταν στο άπειρο δεν δικαιολογείται απειρισμός, εφόσον βέβαια η διάταξη εκτείνεται μέχρι το θετικό ή το αρνητικό άπειρο. Υπενθυμίζεται, ότι λαμβάνεται πάντοτε  $h \geq 0$ .

**Συναρτήσεις βάσης** για τη συνάρτηση  $Y(y)$ : Η συνάρτηση αυτή υπακούει σε ίδιας μορφής διαφορική εξίσωση,  $Y'' = K_y Y$ , οπότε ισχύουν ακριβώς τα ίδια. Όμως, επειδή  $K_x + K_y = 0$ , στο ενδεχόμενο  $K_x = -h^2 < 0$  και  $X(x) = \{\sin(hx), \cos(hx)\}$  αντιστοιχεί  $K_y = -K_x = h^2 > 0$ , δηλαδή  $Y(y) = \{\sinh(hy), \cosh(hy)\}$  ή με εκθετικές συναρτήσεις κλπ., με την ίδια τιμή του  $h$ , και αντίστροφα.



**Συμπέρασμα:** Σε διδιάστατες διατάξεις με καρτεσιανή δομή, στο άθροισμα γινομένων (7.1-3) για το δυναμικό  $\Phi = \sum_j \Phi_j = \sum_j A_j X_j Y_j$  περιλαμβάνονται εν γένει όλα (αλλά μόνο αυτά) τα ακόλουθα γινόμενα γραμμικών συνδυασμών:

$$\Phi_j(x, y) = A_j X_j Y_j = \begin{cases} A_j \{x, 1\}_j \cdot \{y, 1\}_j, \\ A_j \{\sin(h_1 x), \cos(h_1 x)\}_j \cdot \{\sinh(h_1 y), \cosh(h_1 y)\}_j, \\ A_j \{\sinh(h_2 x), \cosh(h_2 x)\}_j \cdot \{\sin(h_2 y), \cos(h_2 y)\}_j, \end{cases} \quad (7.2-13)$$

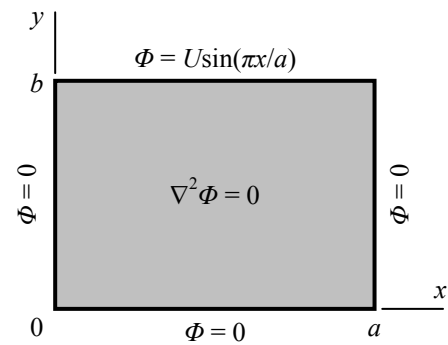
ή άλλες ισότιμες εκφράσεις, όπως με εκθετικές συναρτήσεις αντί των υπερβολικών, ή με μετατόπιση της αρχής (όπως  $hy \rightarrow h(y - y_0)$  κλπ.), και ιδίως οι γραμμικοί συνδυασμοί που αντιπροσωπεύονται από τα συμπλέγματα των σχέσεων (7.2-9) έως (7.2-12).

Για να αποκτηθεί εξοικείωση με τις συναρτήσεις βάσης, στα *παραδ. 7.2-1* έως *7.2-9* που ακολουθούν παρουσιάζονται διατάξεις, των οποίων η λύση εκφράζεται ως ένα απλό γινόμενο  $\Phi = XY$ , ή, μετά από επαλληλία, ως ένα άθροισμα από λίγα τέτοια γινόμενα, ενώ αναβάλλεται μέχρι την επόμενη παράγραφο 7.2.2 ο χειρισμός διατάξεων, των οποίων η λύση εκφράζεται από το άθροισμα (7.1-3), με άπειρο πλήθος όρων με μορφή (7.2-13), δηλαδή, διατάξεων στις οποίες η λύση εκφράζεται ως σειρά. Η διαδικασία περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα, τα οποία επιδεικνύονται και στα παραδείγματα:

- (α) Ελέγχεται, αν οι οριακές συνθήκες επιβάλλουν ασυνέχεια στις πλευρές, αλλά και στις κορυφές. Οι συναρτήσεις βάσης (7.2-13) είναι συνεχείς συναρτήσεις, και μόνο με άθροισμα άπειρων όρων μπορεί να περιγραφεί ασυνέχεια. Αν διαπιστωθεί ασυνέχεια, η λύση υποχρεωτικά εκφράζεται ως σειρά.
- (β) Επιλέγεται η πρώτη συνάρτηση βάσης, π.χ. η  $X(x)$ , μεταξύ των συναρτήσεων που αντιστοιχούν σε  $K_x \leq 0$ , με οδηγό τη μορφή των οριακών συνθηκών. Αυτόματα προσδιορίζεται και η τιμή του  $h$ . Αν οι οριακές συνθήκες δεν υποδεικνύουν αποδεκτή συνάρτηση, πάλι πρέπει να γίνει επίλυση με σειρά.
- (γ) Η δεύτερη συνάρτηση του γινομένου, η  $Y(y)$ , επιλέγεται με  $K_y = -K_x \geq 0$ , συνεπώς με την τιμή του  $h$  που έχει ήδη προσδιορισθεί, ως γραμμικός συνδυασμός που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες.
- (δ) Τελικά, ελέγχεται, ότι ικανοποιούνται όλες οι απαιτήσεις του προβλήματος.

Αν εφαρμοσθεί επαλληλία, τα βήματα αυτά ακολουθούνται σε κάθε επί μέρους πρόβλημα. Σε κάθε περίπτωση, αν στην πορεία, περιλαμβανόμενου του ελέγχου, διαπιστωθεί αδιέξοδος, τότε το δυναμικό  $\Phi$  εκφράζεται ως σειρά (βλ. παράγραφο 7.2.2).

**Παράδειγμα 7.2-1:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Ακολουθούνται κατά σειρά τα βήματα:

(α) Συνέχεια οριακών συνθηκών: Προφανώς, σε κάθε

μία από τις τέσσερις πλευρές οι οριακές συνθήκες είναι συνεχείς, καθώς περιγράφονται από συνεχείς συναρτήσεις. Απαιτείται όμως έλεγχος και στις κορυφές. Στις κορυφές  $(0, 0)$  και  $(a, 0)$  είναι  $\Phi = 0$  και από τις δύο πλευρές του ορίου. Στην κορυφή  $(0, b)$  είναι  $\Phi(x=0, y \rightarrow b) = 0$ , όσο και το  $\Phi(x \rightarrow 0, y=b) = U \sin(\pi x/a)|_{x \rightarrow 0} = 0$ . Όμοια, στην κορυφή  $(a, b)$  είναι  $\Phi = 0$  και από τις δύο πλευρές του ορίου, επειδή  $\sin(\pi x/a)|_{x \rightarrow a} = \sin \pi = 0$ . Άρα, οι οριακές συνθήκες χαρακτηρίζονται από συνέχεια σε ολόκληρο το περίγραμμα..

(β) Η μόνη πλευρά που μπορεί να υποδείξει κάποια συνάρτηση βάσης είναι η πλευρά  $y = b$ , από την οποία εκτιμάται ότι  $X(x) = \sin(\pi x/a)$ . Αυτή η επιλογή σημαίνει ότι ο γραμμικός συνδυασμός επιλέγεται ως  $\{\sin(hx), \cos(hx)\} = 1 \times \sin(hx) + 0 \times \cos(hx)$ , και ότι  $h = \pi/a$ . Επίσης, συνέπεια της επιλογής αυτής είναι ότι η έκφραση για το δυναμικό ως  $\Phi(x, y) = A X(x) Y(y)$  θα ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στα  $x = 0$  και  $x = a$ , ανεξάρτητα από τις επιλογές για τη σταθερά  $A$  και τη συνάρτηση  $Y(y)$ .

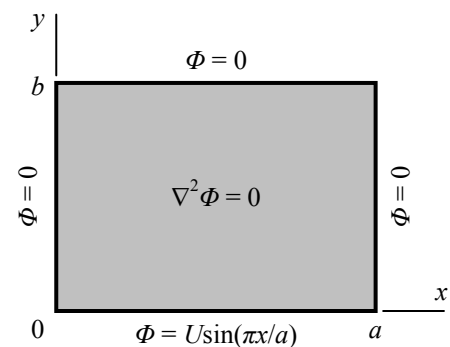
(γ) Οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις πολλαπλασιάζονται με υπερβολικές ή εκθετικές, βλ. σχέση (7.2-13β), με την ίδια σταθερά  $h$ . Οι εκθετικές συναρτήσεις εξυπηρετούν, κυρίως, όταν η περιοχή εκτείνεται μέχρι το άπειρο, βλ. σχέσεις (7.2-11) και (7.2-12), οπότε εδώ προτιμάται για τη συνάρτηση  $Y(y)$  γραμμικός συνδυασμός  $\{\sinh(hy), \cosh(hy)\}$ , με το ίδιο  $h$ , συνεπώς  $Y(y) = \{\sinh(\pi y/a), \cosh(\pi y/a)\}$ . Ο γραμμικός συνδυασμός εξειδικεύεται σε  $Y(y) = 1 \times \sinh(\pi y/a) + 0 \times \cosh(\pi y/a) = \sinh(\pi y/a)$ , για να είναι  $\Phi(x, y=0) = A X(x) Y(0) = 0$ , όπως υπαγορεύει η οριακή συνθήκη στο  $y = 0$ .

Μέχρι τώρα έχει εξειδικευθεί η επιλογή σε  $\Phi(x, y) = A X(x) Y(y) = A \sin(\pi x/a) \sinh(\pi y/a)$ . Δεν έχει προσδιορισθεί, ακόμα, ο συντελεστής  $A$ , ο οποίος υπολογίζεται απαιτώντας  $\Phi(x, y=b) = A \sin(\pi x/a) \sinh(\pi b/a) = U \sin(\pi x/a)$ . Έτσι προκύπτει η τελική έκφραση:

$$\Phi = \frac{U}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{a} y\right).$$

- (δ) Έλεγχος κατά πόσον το αποτέλεσμα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και τις οριακές συνθήκες: Ουσιαστικά, έχει γίνει κατανεμημένα κατά τη διάρκεια της επίλυσης. Ας επισημανθεί, πάντως, ποιο είναι το αντικείμενο του ελέγχου και πού ελέγχθηκε κάθε σημείο:
- Η εξίσωση  $\nabla^2 \Phi = 0$  ικανοποιείται, επειδή το δυναμικό έχει σχηματισθεί ως γινόμενο ημιτονοειδούς με υπερβολική συνάρτηση, της  $X(x) = \sin(\pi x/a)$  με την  $Y(y) = \sinh(\pi y/a)$ , με το ίδιο  $h (= \pi/a)$ , δηλαδή με συναρτήσεις με  $K_x = -h^2$  και  $K_y = h^2$ , ώστε  $K_x + K_y = 0$ .
  - Οι οριακές συνθήκες στα  $x = 0$  και  $x = a$  ικανοποιούνται, επειδή έχει γίνει η επιλογή  $X(x) = \sin(\pi x/a)$ .
  - Η οριακή συνθήκη στο  $y = 0$  ικανοποιείται από την επιλογή  $Y(y) = \sinh(\pi y/a)$ .
  - Η οριακή συνθήκη στο  $y = b$  ικανοποιείται από την τιμή  $A = U/\sinh(\pi b/a)$  για το συντελεστή, σε συνδυασμό με την επιλογή  $X(x) = \sin(\pi x/a)$ .

**Παράδειγμα 7.2-2:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x,y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Πρόκειται για αντεστραμμένη τη διάταξη του προηγούμενου παραδείγματος. Τα βήματα ( $\alpha$ ) και ( $\beta$ ) είναι πανομοιότυπα και με τις ίδιες συνέπειες, ενώ στο ( $\gamma$ ) υπάρχει μια μικρή διαφοροποίηση:

( $\gamma$ ) Πάλι, και για τους ίδιους λόγους, η συνάρτηση  $Y(y)$  θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός  $Y(y) = \{\sinh(\pi y/a), \cosh(\pi y/a)\}$ . Για το σχηματισμό του κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού είναι προσηγορότερο να επισημανθεί ότι η οριακή συνθήκη στο  $y = b$  μπορεί να ικανοποιηθεί αμέσως, αν γίνει η επιλογή, όπως υποδεικνύεται από τη σχέση (7.2-9),  $Y(y) = \sinh[(\pi(y-b)/a)]$ , έτσι ώστε  $Y(y=b) = 0$  (βλ. και σχετικό **σχόλιο**). Με την επιλογή αυτή, ο συντελεστής  $A$  προσδιορίζεται από τη συνθήκη στο  $y = 0$ , και τελικά είναι:

$$\Phi = \frac{U}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{a}(b-y)\right),$$

όπου προτιμήθηκε να γραφεί η υπερβολική συνάρτηση ως  $\sinh[(\pi(b-y)/a)]$ , που είναι ίσο με  $-\sinh[(\pi(y-b)/a)]$ , ώστε στην περιοχή  $0 < y < b$  που ενδιαφέρει να έχει θετικές τιμές τόσο το όρισμα, όσο και η συνάρτηση. (Για τον έλεγχο βλ. πάλι το **παράδ. 7.2-1**.)

**Σχόλιο:** Μαθηματικά ισοδύναμες με την επιλογή  $AY(y) = A \sinh[(\pi(y-b)/a)]$  είναι και οι ακόλουθες:

(i) Είτε: Να γραφεί  $AY(y) = p \sinh(\pi y/a) + q \cosh(\pi y/a)$ , με τους συντελεστές  $p$  και  $q$  να προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες στις πλευρές  $y = 0$  και  $y = b$ :

$$y = 0: \quad p \cdot \sinh 0 + q \cdot \cosh 0 = U,$$

$$y = b: \quad p \cdot \sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right) + q \cdot \cosh\left(\frac{\pi b}{a}\right) = 0.$$

Η επίλυση του συστήματος είναι απλή. Η πρώτη σχέση δίνει  $q = U$ , και με αντικατάσταση στη δεύτερη σχέση προκύπτει  $p = -U \coth(\pi b/a)$ . Εισάγοντας αυτές τις τιμές στην έκφραση  $AY(y) = p \sinh(\pi y/a) + q \cosh(\pi y/a)$  και αναγνωρίζοντας το υπερβολικό ημίτονο διαφοράς, προκύπτει το αποτέλεσμα της προηγούμενης επίλυσης.

(ii) Είτε: Να γραφεί  $AY(y) = p \exp(\pi y/a) + q \exp(-\pi y/a)$ , με τους συντελεστές  $p$  και  $q$  πάλι να προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες στις πλευρές  $y = 0$  και  $y = b$ :

$$y = 0: \quad p \cdot \exp 0 + q \cdot \exp 0 = U,$$

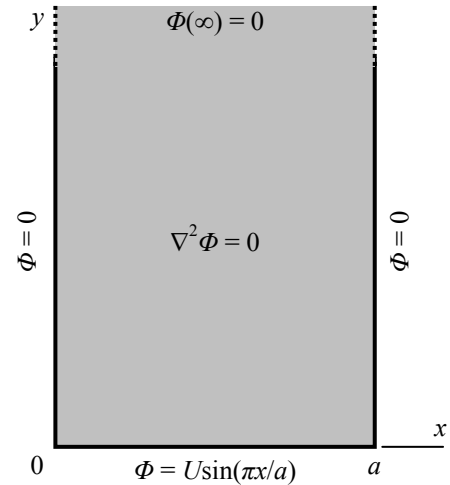
$$y = b: \quad p \cdot \exp\left(\frac{\pi b}{a}\right) + q \cdot \exp\left(-\frac{\pi b}{a}\right) = 0.$$

Η επίλυση του συστήματος είναι πάλι απλή. Μπορεί να ξεκινήσει κανείς από την πρώτη σχέση, που δίνει  $p + q = U$ , και με αντικατάσταση του ενός συντελεστή, όπως  $q = U - p$ , στη δεύτερη σχέση προκύπτει ότι  $[\exp(\pi b/a) - \exp(-\pi b/a)]p = U \exp(-\pi b/a)$ , δηλαδή, η τιμή του  $p$  και ακολούθως του  $q$ . Ενδιάμεσα ας παρατηρηθεί, ότι στην τελευταία σχέση ο συντελεστής του  $p$  είναι ίσος με  $2 \sinh(\pi b/a)$ , όπως στον παρονομαστή του αποτελέσματος.

Ελαφρώς ταχύτερο είναι να ξεκινήσει κανείς από τη δεύτερη σχέση, απ' όπου  $q = -p \exp(2\pi b/a)$  και με αντικατάσταση στην πρώτη σχέση προσδιορίζεται η τιμή του  $p$  και ακολούθως του  $q$ . Τώρα, ο παρονομαστής του αποτελέσματος εμφανίζεται από τη σχέση  $\exp(2\pi b/a) - 1 = \exp(\pi b/a) [\exp(\pi b/a) - \exp(-\pi b/a)] = 2 \exp(\pi b/a) \sinh(\pi b/a)$ , ενώ ο αριθμητής σχηματίζεται από τη διαφορά των εκθετικών συναρτήσεων  $\exp[\pm\pi(y-b)/a]$ .

Οι πράξεις δεν παρουσιάζονται λεπτομερώς, αλλά είναι φανερό ότι η προσπάθεια που απαιτείται με οποιαδήποτε από τις επιλογές αυτές, κι ας μην είναι ιδιαίτερα μεγάλη, είναι πολλαπλάσια από εκείνη που χρειάστηκε κατά την επίλυση. Στη επίλυση η μόνη πράξη που χρειάστηκε ήταν να λυθεί ως προς  $A$  η εξίσωση  $A \sinh[(\pi(-b)/a)] = U$ , πράξη τόσο απλή, που ούτε καν γράφηκε. Το ότι διάφορες πορείες επίλυσης είναι μαθηματικά ισοδύναμες δε σημαίνει, βέβαια, ότι η επιλογή πορείας θα γίνει στην τύχη.

**Παράδειγμα 7.2-3:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x,y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.

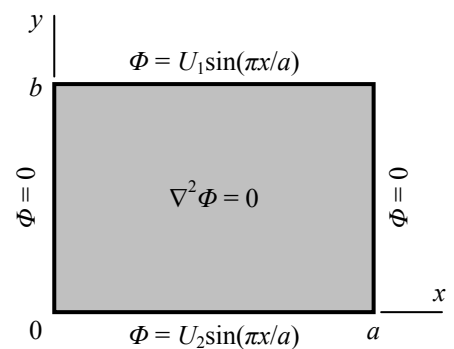


**Επίλυση:** Πρόκειται για τη διάταξη του προηγούμενου παραδείγματος, αλλά τώρα είναι  $b = \infty$ . Τα βήματα ( $\alpha$ ) και ( $\beta$ ) είναι πανομοιότυπα και με τις ίδιες συνέπειες. Η διαφοροποίηση, τώρα, έγκειται στο ότι δεν είναι δυνατόν να ληφθεί  $Y(y) = \sinh[(\pi(y-b)/a)]$ , αφού είναι  $b = \infty$ .

Η κατάλληλη επιλογή είναι η  $Y(y) = 0 \times \exp(hy) + 1 \times \exp(-hy) = \exp(-hy)$ , όπως υποδεικνύεται και από τη σχέση (7.2-11). Με δεδομένη από το βήμα ( $\beta$ ) την επιλογή  $X(x) = \sin(\pi x/a)$ , που σημαίνει  $h = \pi/a$ , θα είναι  $Y(y) = \exp(-\pi y/a)$ , οπότε είναι  $\Phi(x,y) = A \sin(\pi x/a) \exp(-\pi y/a)$ , με  $A = U$  από την οριακή συνθήκη στο  $y = 0$ . Για τον έλεγχο ισχύουν όσα έχουν σημειωθεί στο βήμα ( $\delta$ ) του **παραδ. 7.2-1**.

**Σχόλιο:** Με τις υπερβολικές συναρτήσεις,  $AY(y) = p \sinh(\pi y/a) + q \cosh(\pi y/a)$ , κατά την εφαρμογή της οριακής συνθήκης στο  $y = \infty$  πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι οριακές τιμές (καθώς  $\zeta \rightarrow \infty$ )  $\sinh \zeta = \cosh \zeta = \frac{1}{2} \exp \zeta$ , επειδή  $e^{-\infty} = 0$ , με συνέπεια  $p + q = 0$ , δηλαδή,  $AY(y) = q [\cosh(\pi y/a) - \sinh(\pi y/a)] = q \exp(-\pi y/a)$ , με τη συνέχεια όπως παραπάνω. Με τις συναρτήσεις αυτές η επίλυση είναι, βέβαια, εφικτή, αλλά δυσχεραίνεται λόγω του ορίου στο  $y = \infty$ .

**Παράδειγμα 7.2-4:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x,y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Πρόκειται για επαλληλία των **παραδ. 7.2-1** με  $U \rightarrow U_1$  και **7.2-2** με  $U \rightarrow U_2$ . Αν θεωρηθούν γνωστά τα αποτελέσματα από τα δύο αυτά παραδείγματα (βλ. όμως και το τρίτο **σχόλιο**), είναι:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{U}{\sinh\left(\frac{\pi b}{a}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \left[ \sinh\left(\frac{\pi}{a}y\right) + \sinh\left(\frac{\pi}{a}(b-y)\right) \right].$$

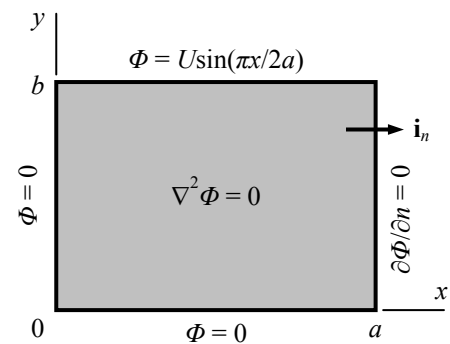
### Σχόλια:

- Η μετατροπή του αθροίσματος των υπερβολικών ημιτόνων σε γινόμενο δεν προσφέρει ουσιαστική απλοποίηση.
- Υπενθυμίζεται [βλ. παράγρ. 6.1.2, σχέσεις (6.1-24) και (6.1-26) για συνθήκη *Dirichlet*, όπως εδώ] ότι κατά την επαλληλία αθροίζονται όλα τα επιμέρους συστατικά του προβλήματος, τα οποία για να μπορούν να αθροισθούν πρέπει να είναι ομοειδή. Πράγματι, και τα δύο επί μέρους προβλήματα αναφέρονται στην εξίσωση του *Laplace*,  $\nabla^2 \Phi_{1,2} = 0$ , άρα  $\nabla^2 \Phi_1 + \nabla^2 \Phi_2 = \nabla^2 (\Phi_1 + \Phi_2) = 0$ . Επίσης, οι οριακές συνθήκες σε αντίστοιχες θέσεις είναι ίδιου είδους (εδώ παντού *Dirichlet*), οπότε μπορούν να γίνουν οι αθροίσεις: Στην πλευρά  $y = 0$  είναι  $\Phi_1 = 0$ ,  $\Phi_2 = U_2 \sin(\pi x/a)$  και για το άθροισμα πράγματι  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , κλπ.
- Αν δεν είναι διαθέσιμα εκ των προτέρων τα αποτελέσματα των δύο επί μέρους προβλημάτων, συνήθως είναι ταχύτερη η απευθείας επίλυση, χωρίς να εφαρμοσθεί επαλληλία. Στην προκειμένη διάταξη, αρχικά η εξέταση των οριακών συνθηκών επιβεβαιώνει ότι δεν υπάρχει ασυνέχεια, και ακολούθως επιλέγεται η συνάρτηση  $X(x) = \sin(\pi x/a)$ , οπότε είναι  $h = \pi/a$ . Για την επιλογή της συνάρτησης  $Y(y)$ , ελαφρώς προτιμότερη είναι η επιλογή  $AY(y) = p \sinh(\pi y/a) + q \cosh(\pi y/a)$ , κυρίως επειδή από την οριακή συνθήκη στο  $y = 0$  προκύπτει αμέσως ότι  $q = U_2$ .

**Παράδειγμα 7.2-5:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x,y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.

**Επίλυση:** Ακολουθώντας κατά σειρά τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης, με ένθετους τους ελέγχους:

- (α) Η συνέχεια στις οριακές συνθήκες αμέσως διαπιστώνεται στις τέσσερις πλευρές, όπου οι συνθήκες περιγράφονται από συνεχείς συναρτήσεις, καθώς και στις κορυφές  $(0, 0)$  και  $(0, b)$ , που και στις δύο είναι  $\Phi = 0$  και από τις δύο πλευρές του ορίου. Το νέο στοιχείο στην παρούσα διάταξη είναι το είδος της οριακής συνθήκης στην πλευρά  $x = a$  (ομογενής συνθήκη *Neumann*). Στην πλευρά αυτή είναι  $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial x$ , επειδή  $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_x$ , συνεπώς  $\partial\Phi/\partial x = 0$ . Στην κορυφή  $(a, 0)$ , από την πλευρά  $y = 0$  είναι  $(\partial\Phi/\partial x)|_{x \rightarrow a} = (\partial/\partial x)0 = 0$ ,



οπότε διαπιστώνεται εκεί η συνέχεια. Στην κορυφή  $(a, b)$  τώρα, από την πλευρά  $y = b$  είναι  $(\partial\Phi/\partial x)|_{x \rightarrow a} = (\partial/\partial x)[U\sin(\pi x/2a)]|_{x \rightarrow a} = U(\pi/2a)[\cos(\pi x/2a)]|_{x \rightarrow a} = U(\pi/2a)\cos(\pi/2) = 0$  επίσης. Άρα, διαπιστώνεται ότι οι οριακές συνθήκες δεν έχουν ασυνέχειες.

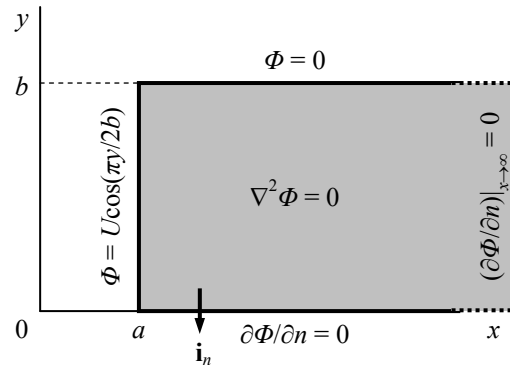
(β) Από την οριακή συνθήκη στην πλευρά  $y = b$  υποδεικνύεται η επιλογή  $X(x) = \sin(\pi x/2a)$ , με συνέπεια ότι  $h = \pi/2a$  και  $K_x = -h^2 = -(\pi/2a)^2 < 0$ , επειδή η συνάρτηση  $X(x)$  είναι ημιτονοειδής. Με αυτή την επιλογή της  $X(x)$ , η έκφραση  $\Phi(x, y) = A X(x) Y(y)$  για το δυναμικό θα ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στα  $x = 0$  και  $x = a$ .

(γ) Στην ημιτονοειδή συνάρτηση  $X(x) = \sin(\pi x/2a)$  αντιστοιχούν υπερβολικές, ή εκθετικές συναρτήσεις  $Y(y)$ , με την ίδια σταθερά  $h = \pi/2a$ , συνεπώς  $K_y = +h^2 = +(\pi/2a)^2$  και  $K_x + K_y = 0$ , που σημαίνει ότι είναι  $\nabla^2(XY) = 0$ . Η οριακή συνθήκη στο  $y = 0$  υποδεικνύει την επιλογή  $Y(y) = \sinh(\pi y/2a)$ . Συνεπώς είναι  $\Phi(x, y) = A \sin(\pi x/2a) \sinh(\pi y/2a)$  και ο συντελεστής  $A$  προσδιορίζεται από τη συνθήκη  $\Phi(x, y=b) = U \sin(\pi x/2a)$ , οπότε, μόλις εξασφαλίσθηκε ότι ικανοποιούνται και οι άλλες δύο οριακές συνθήκες, στα  $y = 0$  και  $y = b$ . Το τελικό αποτέλεσμα συνεπώς είναι:

$$\Phi = \frac{U}{\sinh\left(\frac{\pi b}{2a}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{2a}x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2a}y\right).$$

**Παράδειγμα 7.2-6:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.

**Επίλυση:** Ακολουθώντας κατά σειρά τα βήματα της διαδικασίας:



(α) Στις τέσσερις πλευρές οι οριακές συνθήκες περιγράφονται από συνεχείς συναρτήσεις. Στην κορυφή  $(a, b)$  είναι  $\Phi = 0$  και από τις δύο πλευρές. Στην κορυφή  $(a, 0)$  είναι  $\partial\Phi/\partial n = -\partial\Phi/\partial y = 0$  όταν  $y = 0$ , που ταιριάζει με τη συνθήκη στην πλευρά  $x = a$ ,  $(\partial\Phi/\partial y)|_{y \rightarrow 0} = (\partial/\partial y)[U\cos(\pi y/2b)]|_{y \rightarrow 0} = -U(\pi/2b)\sin(0) = 0$ . Παρόμοια ισχύουν και στην κορυφή  $(\infty, b)$ . Τέλος, στην κορυφή  $(\infty, 0)$  οι οριακές συνθήκες στις δύο πλευρές δεν επιβάλλουν συνέχεια, αλλά ούτε και ασυνέχεια. Αυτό, όμως, που ελέγχεται είναι η παρουσία ασυνέχειας, επειδή η ασυνέχεια είναι αυτή που δεν επιτρέπει να εκφρασθεί η λύση με λίγους όρους.

(β) Τώρα, η πρώτη επιλογή υποδεικνύεται από την πλευρά  $x = a$ , και είναι η συνάρτηση  $Y(y) = U \cos(\pi y/2b)$ , συνεπώς  $h = \pi/2b$  και  $K_y = -(\pi/2b)^2 < 0$ . Με τη συνάρτηση αυτή, οι οριακές συνθήκες στα  $y = 0$  και  $y = b$  ικανοποιούνται αυτόματα.

(γ) Επειδή η διατομή φθάνει μέχρι το  $x = +\infty$ , κατάλληλες είναι οι εκθετικές συναρτήσεις, και μάλιστα η  $X(x) = \exp(-\pi x/2b)$ , ώστε  $X'(x=\infty) = 0$ , και με το ίδιο  $h$  όπως η  $Y(y)$ . Η επιλογή της εκθετικής  $X(x)$  σημαίνει ότι  $K_x = +(\pi/2b)^2 > 0$ , οπότε είναι  $K_x + K_y = 0$  και, συνεπώς,  $\nabla^2(XY) = 0$ . Η τελευταία οριακή συνθήκη, αυτή στο  $x = a$ , προσδιορίζει τον συντελεστή στο γινόμενο  $\Phi(x, y) = A X(x) Y(y)$ , και, τελικά, είναι:

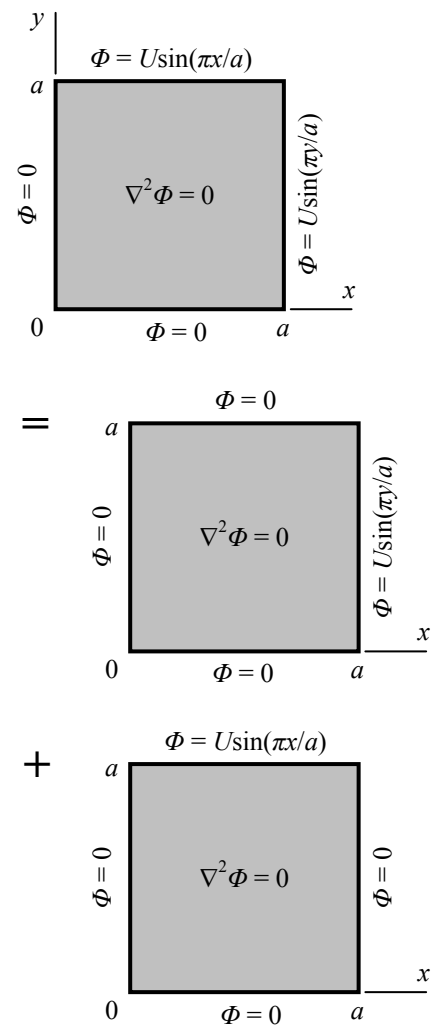
$$\Phi = U \exp\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \exp\left(-\frac{\pi x}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) = U \exp\left(-\frac{\pi(x-a)}{2b}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right).$$

**Παράδειγμα 7.2-7:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.

**Επίλυση:** Μολονότι οι οριακές συνθήκες είναι συνεχείς και οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στις οριακές συνθήκες είναι μεταξύ των αποδεκτών συναρτήσεων βάσης, και μάλιστα με το ίδιο  $h = \pi/a$  και για τις δύο συναρτήσεις, η λύση δεν μπορεί να είναι το γινόμενο των δύο ημιτόνων, επειδή τότε θα ήταν  $K_x = K_y = -(\pi/a)^2$  και  $K_x + K_y \neq 0$ , οπότε η Λαπλασιανή του γινομένου δεν θα μηδενιζόταν.

Η επίλυση θα γίνει εφαρμόζοντας την επαλληλία που φαίνεται στο σχήμα. Σε κάθε επί μέρους διάταξη το αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί αμέσως, είτε με την εμπειρία που έχει μέχρι στιγμής αποκτηθεί, είτε προσαρμόζοντας το αποτέλεσμα του **παραδ. 7.2-1**. Η ζητούμενη έκφραση για το δυναμικό δίδεται από τη σχέση:

$$\Phi = \frac{U}{\sinh \pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sinh\left(\frac{\pi}{a} y\right) + \sinh\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{a} y\right) \right].$$



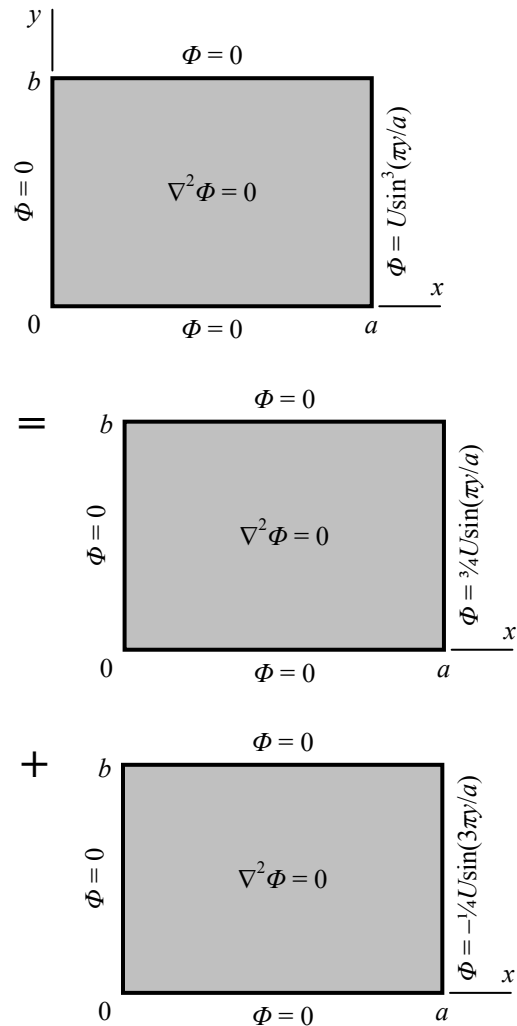


**Παράδειγμα 7.2-8:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.

**Επίλυση:** Δεν υπάρχει ασυνέχεια στις οριακές συνθήκες, όμως η συνάρτηση  $\sin^3(\pi y/a)$  δεν είναι αποδεκτή. Η πρώτη δύναμη,  $\sin(\pi y/a)$ , και μόνο αυτή, είναι αποδεκτή. Είναι, όμως,  $4 \sin^3 \zeta = 3 \sin \zeta - \sin(3\zeta)$ . Συνεπώς, είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί η επαλληλία που φαίνεται στο σχήμα, αφού κάθε επιμέρους διάταξη έχει συνεχείς οριακές συνθήκες, και, επίσης, εμφανίζει ημιτονοειδή συνάρτηση στην οριακή συνθήκη της πλευράς  $x = a$ , συνάρτηση που μπορεί να χρησιμεύσει ως αφητηρία για να συντεθεί η έκφραση  $\Phi_{1,2}(x, y)$ .

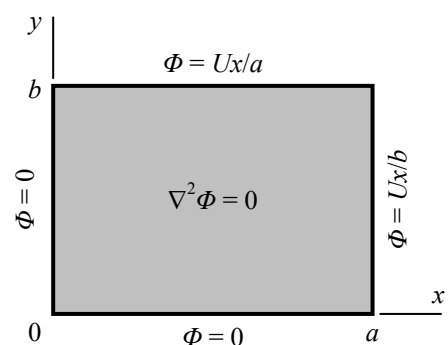
Η επίλυση καθενός από τα επιμέρους προβλήματα είναι στοιχειώδης και απλώς γράφεται το τελικό αποτέλεσμα:

$$\Phi = \frac{U}{4} \left[ \frac{3 \sinh(\pi x/b) \sin(\pi y/b)}{\sinh(\pi a/b)} - \frac{\sinh(3\pi x/b) \sin(3\pi y/b)}{\sinh(3\pi a/b)} \right].$$



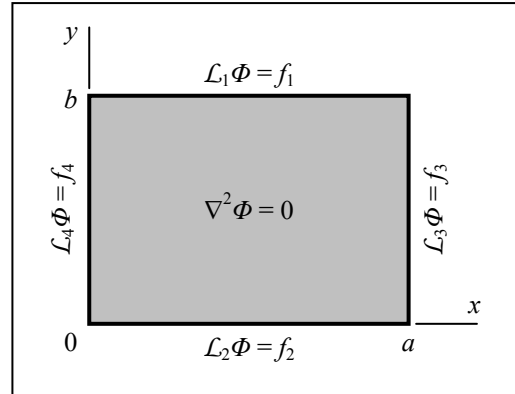
**Παράδειγμα 7.2-9:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.

**Επίλυση:** Οι οριακές συνθήκες δεν έχουν καμία ασυνέχεια, αλλά δεν περιγράφονται από ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Ας μη λησμονηθεί, όμως, πως υπάρχει και η δυνατότητα (7.2-13α) με  $K_x = K_y = 0$ , να είναι  $\Phi = A \{x, 1\} \cdot \{y, 1\}$ . Εδώ, από τις δύο οριακές συνθήκες οι προφανείς επιλογές είναι  $X = x$  και  $Y = y$ , ενώ από τις άλλες δύο προκύπτει τελικά  $\Phi = U(x/a)(y/a)$ .



### 7.2.2 Απλές διδιάστατες διατάξεις

Συνήθως, στις οριακές συνθήκες δεν εμφανίζονται οι επιθυμητές ημιτονοειδείς συναρτήσεις, ή υπάρχουν ασυνέχειες, ίσως μόνο σε ένα σημείο του περιγράμματος. Τότε, σε απλές διατάξεις που εκτείνονται στην περιοχή  $x_0 < x < x_0 + a$ ,  $y_0 < y < y_0 + b$ , ή, χωρίς να ζημιωθεί η γενικότητα, στην  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  (βλ. **Σχήμα 7.2-3**), η λύση του προβλήματος οριακών τιμών εκφράζεται ως σειρά, εφόσον οι οριακές συνθήκες σε κάθε μία από τις  $\kappa = 1$  έως 4 πλευρές  $S_\kappa$  (δηλαδή τις  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$ ) είναι αμιγώς:



Σχήμα 7.2-3

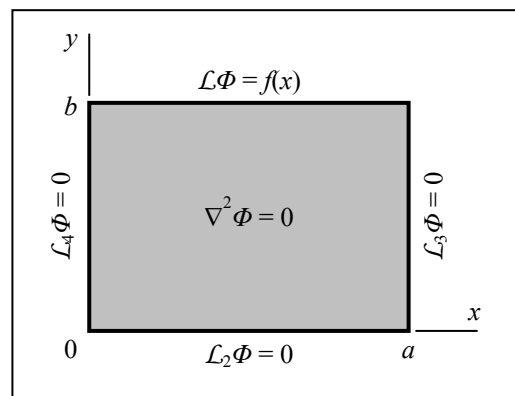
- *Dirichlet*:  $\Phi(\mathbf{r}_{S_\kappa}) = \Phi_S(\mathbf{r}_{S_\kappa}) = f_\kappa(\mathbf{r}_{S_\kappa})$ ,
- *Neumann*:  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_\kappa} = \Phi_{nS}(\mathbf{r}_{S_\kappa}) = f_\kappa(\mathbf{r}_{S_\kappa})$ , (7.2-14αβγ)
- Γενική:  $\Phi(\mathbf{r}_{S_\kappa}) + \ell_\kappa(\mathbf{r}_S) \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{S_\kappa} = \Phi^*(\mathbf{r}_{S_\kappa}) = f_\kappa(\mathbf{r}_{S_\kappa})$ , με σταθερό  $\ell_\kappa > 0$ ,

με τη συνάρτηση  $f_\kappa$  να είναι γνωστή συνάρτηση μιας μεταβλητής,  $f_\kappa(x)$  στις πλευρές  $y = 0$  και  $y = b$ , και  $f_\kappa(y)$  στις πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$ . Ανεξάρτητα από το είδος της, η οριακή συνθήκη μπορεί να γραφεί ως:

$$L_\kappa \Phi = f_\kappa, \tag{7.2-14δ}$$

με τον γραμμικό τελεστή  $L$  να είναι κατά περίπτωση ίσος με  $L = 1$ ,  $L = \partial/\partial n$  ή  $L = 1 + \ell(\partial/\partial n)$ .

**Διατάξεις με μία μη ομογενή οριακή συνθήκη:** Μία αντιπροσωπευτική τέτοια διάταξη φαίνεται στο **Σχήμα 7.2-4**. Στην πλευρά  $y = b$  είναι  $f_1 = f(x) \neq 0$ , ενώ οι άλλες τρεις πλευρές έχουν ομογενείς συνθήκες,  $f_2 = f_3 = f_4 = 0$ . Όπως θα περιγραφεί αργότερα και διαφαίνεται από τώρα, η γενική περίπτωση σχηματίζεται από τέτοιες διατάξεις, είτε ως επαλληλία τεσσάρων επιμέρους προβλημάτων, είτε ως επαλληλία δύο διατάξεων, σε καθεμία από τις οποίες είναι ομογενείς οι οριακές συνθήκες σε ένα ζεύγος από αντιμέτωπες πλευρές.



Σχήμα 7.2-4

Σε τέτοιες διατάξεις, τα βήματα για την επίλυση, που θα περιγραφούν διεξοδικότερα στη συνέχεια, είναι τα ακόλουθα:

- (α) Προσδιορίζονται οι γραμμικοί συνδυασμοί  $X_n(x)$ , που ικανοποιούν τις συνθήκες στις δύο αντιμέτωπες πλευρές με ομογενείς οριακές συνθήκες, στα πλευρικά όρια  $x = 0$  και  $x = a$  στην περίπτωση του **Σχήματος 7.2-4**. Σε κάθε  $X_n(x)$  θα αντιστοιχεί και μία τιμή  $h_n$  για τη σταθερά που εμφανίζεται κατά το χωρισμό των μεταβλητών.
- (β) Προσδιορίζεται για κάθε  $h_n$  η αντίστοιχη συνάρτηση  $Y_n(y)$ , τέτοια ώστε να ικανοποιείται και η τρίτη ομογενής οριακή συνθήκη, εκείνη στην πλευρά  $y = 0$  στο **Σχήμα 7.2-4**.
- (γ) Γράφοντας  $\Phi = \sum_n A_n X_n(x) Y_n(y)$  και θέτοντας  $y = b$ , αξιοποιείται η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $X_n(x)$ , για να προσδιορισθούν οι συντελεστές  $A_n$ . Όπως θα περιγραφεί στη συνέχεια, αυτό σημαίνει:

$$\mathcal{L}\Phi = f(x) \Rightarrow A_n (\mathcal{L}Y_n)|_{y=b} \int_0^a dx X_n^2(x) = \int_0^a dx f(x) X_n(x), \quad (7.2-15)$$

και αντιπροσωπεύει την εξίσωση για κάθε συντελεστή  $A_n$ .

**Προσδιορισμός συναρτήσεων  $X_n(x)$ :** Αναζητούνται, πρώτα, οι γραμμικοί συνδυασμοί  $X_n = \{\sin, \cos\}$ , που ικανοποιούν την ομογενή οριακή συνθήκη στη μία από τις δύο πλευρές  $x = \text{σταθ.}$ , για παράδειγμα στην πλευρά  $x = 0$ , στην οποία η οριακή συνθήκη είναι  $\mathcal{L}_4\Phi = 0$ . Ανάλογα με το είδος της οριακής συνθήκης:

- ο Αν  $\mathcal{L}_4\Phi = \Phi$ , τότε  $X_n = \sin(h_n x)$ , ώστε  $X_n(x=0) = 0$ ,
- ο Αν  $\mathcal{L}_4\Phi = \partial\Phi/\partial n = -\partial\Phi/\partial x$ , τότε  $X_n = \cos(h_n x) = \sin(h_n x + \pi/2)$ , ώστε  $X_n'(x=0) = 0$ ,
- ο Αν  $\mathcal{L}_4\Phi = \Phi + \ell_4 \partial\Phi/\partial n = \Phi - \ell_4 \partial\Phi/\partial x$ , τότε  $X_n = \sin(h_n x + \zeta_n)$ , όπου η σταθερά  $\zeta_n$  προσδιορίζεται, ώστε να είναι  $\mathcal{L}_4 X_n = 0$ , δηλαδή από την εξίσωση  $\sin \zeta_n - (h_n \ell_4) \cos \zeta_n = 0$ . Από την εξίσωση αυτή προκύπτει  $\zeta_n = \arctan(h_n \ell_4)$ , με  $0 < \zeta_n < \pi/2$ , και στο σημείο αυτό φαίνεται η ανάγκη, να είναι  $\ell_\kappa = \text{σταθ.}$ , όπως αναφέρεται στη σχέση (7.2-14γ).

Η γενική συνθήκη στο όριο  $\ell_4 \rightarrow 0$  δίνει  $\zeta_n = 0$ , όπως στη συνθήκη *Dirichlet*, ενώ στο όριο  $\ell_4 \rightarrow \infty$  δίνει  $\zeta_n = \pi/2$ , όπως στη συνθήκη *Neumann*. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση η οριακή συνθήκη  $\mathcal{L}_4\Phi = 0$  δίνει τις συναρτήσεις:

$$X_n(x) = \sin(h_n x + \zeta_n), \quad (7.2-16)$$

με  $0 \leq \zeta_n \leq \pi/2$ , με τις ακραίες τιμές να αντιστοιχούν σε συνθήκη *Dirichlet* και *Neumann*.

## Πίνακας 7.2-1

### Συναρτήσεις $X_n(x)$ και σταθερές $h_n$

Συνθήκη στο $x = 0$	Συνθήκη στο $x = a$	Συνάρτηση $X_n(x)$ ( $0 < x < a$ )	Σταθερά $h_n$ (με $n = 1, 2, 3, \dots$ )
$\Phi = 0$	$\Phi = 0$	$\sin(h_n x)$	$h_n a = n\pi$
$\Phi = 0$	$\partial\Phi/\partial n = 0$	$\sin(h_n x)$	$h_n a = (n - 1/2)\pi$
$\partial\Phi/\partial n = 0$	$\Phi = 0$	$\cos(h_n x)$	$h_n a = (n - 1/2)\pi$
$\partial\Phi/\partial n = 0$	$\partial\Phi/\partial n = 0$	$\cos(h_n x)$	$h_n a = (n - 1)\pi$

**Προσδιορισμός αντίστοιχων σταθερών  $h_n$ :** Με δεδομένη τη μορφή των συναρτήσεων  $X_n(x)$ , η ομογενής οριακή συνθήκη στην άλλη πλευρά με  $x = \text{σταθ.}$ , εδώ η συνθήκη  $\mathcal{L}_3\Phi = f_3$  στην πλευρά  $x = a$ , υποδεικνύει ποιες είναι όλες οι τιμές για τη σταθερά  $h_n$ :

- Αν  $\mathcal{L}_3\Phi = \Phi$ , τότε  $\sin(h_n a + \xi_n) = 0 \Rightarrow h_n a = n\pi - \xi_n$ , με  $n = 1, 2, 3, \dots$
- Αν  $\mathcal{L}_3\Phi = \partial\Phi/\partial n = +\partial\Phi/\partial x$ , τότε  $h_n \cos(h_n a + \xi_n) = 0 \Rightarrow h_n a = (n - 1/2)\pi - \xi_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$
- Αν  $\mathcal{L}_3\Phi = \Phi + \ell_3 \partial\Phi/\partial n = \Phi + \ell_3 \partial\Phi/\partial x$ , τότε  $\tan(h_n a + \xi_n) + (h_n \ell_3) = 0$ , μία υπερβατική εξίσωση για να προσδιορισθεί το  $h_n a$ .

Συνήθως, οι συνθήκες είναι μόνο τύπου *Dirichlet* ή/και *Neumann*. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι συναρτήσεις  $X_n(x)$  και οι αποδεκτές τιμές των σταθερών  $h_n$  παρουσιάζονται συγκεκριμένα στον **Πίνακα 7.2-1**.

Το ενδεχόμενο να είναι η διάταξη συμμετρική ή αντισυμμετρική ως προς το μέσο της, τη θέση  $x = 1/2 a$ , περιορίζει τις αποδεκτές τιμές των  $h_n$ . Μία διάταξη είναι συμμετρική ως προς  $x = 1/2 a$ , όταν αφενός για τη συνάρτηση  $f(x) = \mathcal{L}\Phi$  είναι  $f(1/2 a + \Delta x) = f(1/2 a - \Delta x)$ , όπου  $f(x)$  είναι η συνάρτηση για τις τιμές της μη ομογενούς οριακής συνθήκης στην πλευρά  $y = b$ , και όμοια και για την πλευρά  $y = 0$ , αν και εκεί η συνθήκη είναι μη ομογενής, αφετέρου οι ομογενείς οριακές συνθήκες στις αντιμέτωπες πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  είναι ίδιου τύπου και με το ίδιο  $\ell$ , αν πρόκειται για τη γενική συνθήκη. Τότε, είναι αναγκαστικά  $(dX_n/dx)|_{x=1/2 a} = 0$ . Όμοια, μία αντισυμμετρική διάταξη χαρακτηρίζεται από  $f(1/2 a + \Delta x) = -f(1/2 a - \Delta x)$  και με ίδιου τύπου, πάλι, ομογενείς οριακές συνθήκες σε αντιμέτωπες πλευρές. Σε μια τέτοια διάταξη ισχύει ότι  $X_n(x = 1/2 a) = 0$ . Σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις, στον **Πίνακα 7.2-1** μόνο κάθε δεύτερη τιμή του  $n$  ικανοποιεί αυτή την πρόσθετη συνθήκη συμμετρίας ή αντισυμμετρίας.

**Προσδιορισμός συναρτήσεων  $Y_n(y)$ :** Στις ημιτονοειδείς συναρτήσεις  $X_n(x)$  αντιστοιχούν υπερβολικές ή εκθετικές συναρτήσεις  $Y_n(y)$ , με την ίδια τιμή της σταθεράς  $h_n$ , ώστε να είναι  $K_x + K_y = 0$  και το γινόμενο  $X_n(x)Y_n(y)$  να ικανοποιεί την εξίσωση του *Laplace*. Η μορφή των συναρτήσεων  $Y_n(y)$  καθορίζεται από την τρίτη ομογενή οριακή συνθήκη, εκείνη στο  $y = 0$  για τη διάταξη του **Σχήματος 7.2-4**. Ανάλογα με το είδος της οριακής συνθήκης  $\mathcal{L}_2\Phi$  που επικρατεί εκεί, κατάλληλες είναι οι ακόλουθες συναρτήσεις  $Y_n(y)$ :

- Αν  $\mathcal{L}_2\Phi = \Phi$ , τότε  $Y_n = \sinh(h_n y)$ , ώστε  $Y_n(y=0) = 0$ ,
- Αν  $\mathcal{L}_2\Phi = \partial\Phi/\partial n = -\partial\Phi/\partial y$ , τότε  $Y_n = \cosh(h_n y)$ , ώστε  $Y'_n(y=0) = 0$ ,
- Αν  $\mathcal{L}_2\Phi = \Phi + \ell_2\partial\Phi/\partial n = \Phi - \ell_2\partial\Phi/\partial y$ , τότε  $Y_n = \sinh(h_n y + \eta_n)$ , όπου η σταθερά  $\eta_n$  προσδιορίζεται ώστε να είναι  $\mathcal{L}_2\Phi = 0$ , δηλαδή από την εξίσωση  $\sinh \eta_n - (h_n \ell_2) \cosh \eta_n = 0$ , που δίνει  $\eta_n = \operatorname{arctanh}(h_n \ell_2) > 0$ .

Οι εκφράσεις αυτές για τις συναρτήσεις  $Y_n(y)$  υποθέτουν ότι είναι  $h_n \neq 0$ , όπως συμβαίνει συνήθως. Στην ειδική περίπτωση, όμως, κατά την οποία και στις δύο πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  επικρατούν συνθήκες *Neumann*, μεταξύ των αποδεκτών τιμών της σταθεράς  $h_n$  περιλαμβάνεται και η τιμή  $h_1 = 0$  (βλ. τελευταία γραμμή στον **Πίνακα 7.2-1**, με  $n = 1$ ). Τότε, είναι  $X_1(x) = 1$ , που δεν είναι ημιτονοειδής συνάρτηση, αλλά περιλαμβάνεται στις αποδεκτές συναρτήσεις, καθώς αντιστοιχεί στην ενδιάμεση περίπτωση, με  $K_x = K_y = 0$ . Η συνάρτηση  $X_1(x) = 1$  συνοδεύεται από γραμμικό συδυσασμό  $Y_1(y) = \{1, y\}$ , και είναι, ανάλογα με την περίπτωση:

Όταν  $h_1 = 0$ , οπότε και  $X_1(x) = 1$ :

- Αν  $\mathcal{L}_2\Phi = \Phi$ , τότε  $Y_1 = y$ , ώστε  $Y_1(y=0) = 0$ ,
- Αν  $\mathcal{L}_2\Phi = \partial\Phi/\partial n = -\partial\Phi/\partial y$ , τότε  $Y_1 = 1$ , ώστε  $Y'_1(y=0) = 0$ ,
- Αν  $\mathcal{L}_2\Phi = \Phi + \ell_2\partial\Phi/\partial n = \Phi - \ell_2\partial\Phi/\partial y$ , τότε  $Y_1 = y + \ell_2$ , ώστε  $Y_1(y=0) - \ell_2 Y'_1(y=0) = 0$ .

**Ορθογωνιότητα και πληρότητα των συναρτήσεων  $X_n(x)$ :** Με τις τιμές των  $h_n$  που έχουν προσδιορισθεί, οι συναρτήσεις  $X_n(x)$  αποτελούν λύσεις ενός προβλήματος, με (i) τη διαφορική εξίσωση  $X''_n(x) + h_n^2 X_n(x) = 0$  στο διάστημα  $0 < x < a$  και (ii) τις οριακές συνθήκες που αντιστοιχούν σε  $\mathcal{L}_4\Phi = 0$  και  $\mathcal{L}_3\Phi = 0$  στα άκρα  $x = 0$  και  $x = a$ . Πρόκειται για το απλούστερο πρόβλημα *Sturm-Liouville* και οι συναρτήσεις  $X_n(x)$ , ως λύσεις του, έχουν τις ιδιότητες:

- Είναι ορθογώνιες συναρτήσεις στο διάστημα  $0 < x < a$ , το διάστημα με τα όρια στις θέσεις με τις ομογενείς οριακές συνθήκες, εκείνες που καθόρισαν τις συναρτήσεις  $X_n(x)$  και τις τιμές των  $h_n$ . Αυτό σημαίνει ότι:

$$\int_0^a X_n(x) X_{n'}(x) dx = 0, \text{ όταν } n' \neq n. \quad (7.2-17)$$

- Αποτελούν πλήρη βάση για να αναπτυχθεί κάθε συνάρτηση  $f(x)$  που ορίζεται στο ίδιο διάστημα  $0 < x < a$ , με άλλα λόγια είναι:

$$f(x) = \sum_n C_n X_n(x), \quad (7.2-18\alpha)$$

με κατάλληλους συντελεστές  $C_n$ . Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα:

$$C_n \int_0^a X_n^2(x) dx = \int_0^a f(x) X_n(x) dx. \quad (7.2-18\beta)$$

Η τιμή του ολοκληρώματος του  $X_n^2$  εξαρτάται από τη συνάρτηση  $X_n(x)$ . Στις ειδικές, αλλά εξαιρετικά συνηθισμένες περιπτώσεις που καλύπτει ο **Πίνακας 7.2-1**, είναι:

$$\int_0^a \sin^2(h_n x) dx = \int_0^a \cos^2(h_n x) dx = \frac{1}{2}a \quad (\text{όταν } h_n \neq 0),$$

$$\int_0^a 1^2 dx = a. \quad (7.2-19)$$

Οι τιμές αυτών των ολοκληρωμάτων δεν καλύπτουν τις συναρτήσεις  $X_n(x) = \sin(h_n x + \xi_n)$ , με  $\xi_n \neq 0, \pi/2$ , που συναντώνται στις σπάνιες περιπτώσεις, όταν επικρατεί σε ένα από τα δύο όρια, ή και στα δύο, η γενική συνθήκη  $\mathcal{L}_{3,4}\Phi = \Phi + \ell_{3,4}\partial\Phi/\partial n = 0$  (με  $\ell_{3,4} \neq 0, \infty$ ).

**Προσδιορισμός συντελεστών σειράς:** Η λύση του προβλήματος οριακών τιμών για τη διάταξη του **Σχήματος 7.2-4** πρόκειται να εκφραστεί με τη μορφή σειράς:

$$\Phi(x, y) = \sum_n A_n X_n(x) Y_n(y). \quad (7.2-20)$$

Οι συναρτήσεις  $X_n(x)$  και  $Y_n(y)$  έχουν ήδη προσδιορισθεί, έτσι ώστε από τις απαιτήσεις του προβλήματος οριακών τιμών κάθε όρος της σειράς, άρα και το άθροισμα, να ικανοποιεί τόσο τη διαφορική εξίσωση  $\nabla^2 \Phi = 0$ , όσο και τις τρεις από τις τέσσερις οριακές συνθήκες, τις ομογενείς. Απομένει να προσδιορισθούν οι συντελεστές  $A_n$ , αλλά και να χρησιμοποιηθεί η μη ομογενής οριακή συνθήκη, η οποία στη διάταξη που μελετάται αναφέρεται στο όριο  $y = b$  και έχει εν γένει τη μορφή  $\mathcal{L}\Phi = f$ , με το δείκτη «1» να έχει παραλειφθεί. Στο όριο αυτό, η οριακή συνθήκη  $\mathcal{L}\Phi$  αναφέρεται είτε στην τιμή του δυναμικού, που στο άθροισμα (7.2-20) καλύπτεται θέτοντας  $\Phi(x, y=b) = \sum_n A_n X_n(x) Y_n(b)$ , είτε στην κάθετη παράγωγο  $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial y$ , που

επίσης προσδιορίζεται μέσω του αθροίσματος,  $(\partial\Phi/\partial y)|_{y=b} = \sum_n A_n X_n(x) Y_n'(b)$ , είτε τόσο στην τιμή, όσο και στην παράγωγο. Σε κάθε περίπτωση, με  $\mathcal{L} = 1 + \ell\partial/\partial n$ , είναι:

$$\mathcal{L}\Phi = \mathcal{L}\left(\sum_n A_n X_n Y_n\right)_{y=b} = \sum_n A_n X_n(x) (\mathcal{L}Y_n)|_{y=b}. \quad (7.2-21)$$

Πρόκειται για συνάρτηση μόνο της συντεταγμένης  $x$ , όπως από το  $x$  μόνο εξαρτάται και η συνάρτηση  $f(x) = \mathcal{L}\Phi$ . Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις για το  $\mathcal{L}\Phi$  προκύπτει:

$$\sum_n A_n (\mathcal{L}Y_n)|_{y=b} X_n(x) = f(x), \quad (7.2-22)$$

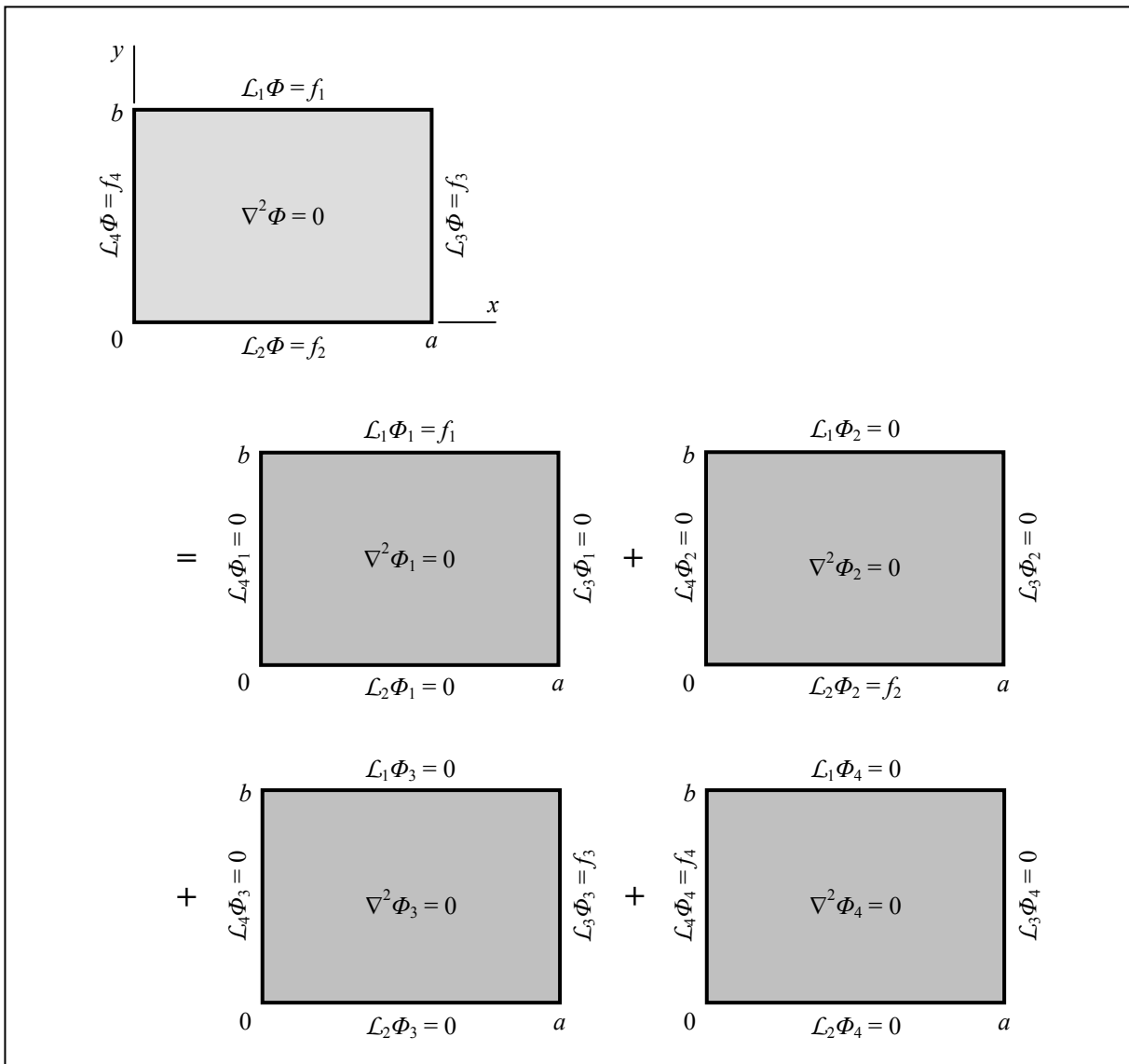
και πολλαπλασιάζοντας με έναν από τους όρους  $X_n(x)$  και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < x < a$ , για να αξιοποιηθεί η ορθογωνιότητα (7.2-17), προσδιορίζεται ο συντελεστής  $A_n$ :

$$A_n (\mathcal{L}Y_n)|_{y=b} \int_0^a dx X_n^2(x) = \int_0^a dx f(x) X_n(x). \quad (7.2-23)$$

**Σύγκριση με τριγωνομετρικές σειρές *Fourier*:** Η διαδικασία, από την οποία προσδιορίζονται οι συντελεστές  $A_n$ , έχει ομοιότητες, αλλά και διαφορές με τις τριγωνομετρικές σειρές *Fourier*. Και στις δύο περιπτώσεις, μία συνάρτηση, όπως εδώ η  $f(x)$ , αναπτύσσεται σε σειρά, χρησιμοποιώντας ως βάση ένα σύνολο συναρτήσεων που χαρακτηρίζεται από ορθογωνιότητα και πληρότητα. Εντελώς συμπτωματικά είναι αυτές οι συναρτήσεις και στις δύο περιπτώσεις ημιτονοειδείς. Όμως, οι τριγωνομετρικές σειρές *Fourier* αναφέρονται σε διατάξεις με περιοδικότητα, όπως είναι οι διατάξεις στην παράγραφο 7.3.2, ενώ εδώ οι συναρτήσεις  $X_n(x)$  σχηματίζονται με βάση ομογενείς οριακές συνθήκες στα άκρα του διαστήματος  $0 < x < a$ , έχουν νόημα μόνο στο εσωτερικό αυτού του διαστήματος, και η ορθογωνιότητα και η πληρότητα βασίζονται στη θεωρία των προβλημάτων *Sturm-Liouville*. Πάντως, οι σειρές που βασίζονται σε αυτή τη θεωρία ονομάζονται πάλι «σειρές *Fourier*», αλλά όχι τριγωνομετρικές.

Όταν οι ομογενείς οριακές συνθήκες στα δύο άκρα είναι συνδυασμός συνθηκών *Dirichlet* και *Neumann*, είναι δυνατόν να σχηματισθεί περιοδικότητα, επεκτείνοντας τη συνάρτηση  $f(x)$  συμμετρικά ως προς το άκρο με συνθήκη *Neumann* και αντισυμμετρικά ως προς το άκρο με συνθήκη *Dirichlet*. Τέτοια τεχνάσματα επιτρέπουν τη χρήση τριγωνομετρικών σειρών *Fourier*, με μόνο ουσιαστικά όφελος ότι δεν αναφέρεται ο όρος «προβλήματα *Sturm-Liouville*», αλλά με τίμημα, πέρα από τις επιπλοκές που συχνά συνοδεύουν κάθε τέχνασμα, την αδυναμία να περιγραφούν καταστάσεις που διέπονται από τη γενική οριακή συνθήκη,  $\mathcal{L}\Phi = \Phi + \ell\partial\Phi/\partial n$ .

**Διατάξεις με μη ομογενείς οριακές συνθήκες σε περισσότερες πλευρές:** Το πιο γενικό ενδεχόμενο είναι να έχουν και οι τέσσερις πλευρές της ορθογωνικής διατομής μη ομογενείς οριακές συνθήκες, όπως στο αρχικό **Σχήμα 7.2-3**, δηλαδή, μη μηδενικές όλες τις συναρτήσεις  $f_k$ , όπου ο δείκτης  $k = 1$  έως 4 αναφέρεται σε καθεμία από τις πλευρές. Αμέσως φαίνεται πως μια τέτοια διάταξη μπορεί να διασπασθεί σε τέσσερις επιμέρους διατάξεις και το δυναμικό να εκφρασθεί ως επαλληλία,  $\Phi = \sum_k \Phi_k$ . Όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7.2-5**, Η διάταξη  $k$  διατηρεί την αρχική μη ομογενή οριακή συνθήκη στην πλευρά  $k$ , αλλά στις άλλες τρεις πλευρές οι οριακές συνθήκες μετατρέπονται σε ομογενείς, διατηρώντας, όμως, τον αρχικό τύπο, τον αρχικό τελεστή  $L_k$ . Από τις τέσσερις αυτές επιμέρους διατάξεις, μόλις προσδιορίστηκε το δυναμικό  $\Phi_1$  της πρώτης. Στη δεύτερη διάταξη, με μη ομογενή τη συνθήκη στο  $y = 0$ , οι συναρτήσεις  $X_n(x)$  και οι σταθερές  $h_n$  είναι πανομοιότυπες με της πρώτης, ενώ οι συναρτήσεις

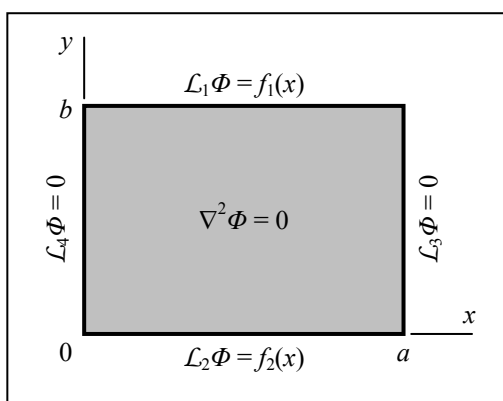


Σχήμα 7.2-5



$Y_n(y)$  παράγονται αντικαθιστώντας  $y \rightarrow (b - y)$  και φροντίζοντας για το σωστό πρόσημο του  $\mathbf{i}_n$ , όπου εμπλέκεται η κάθετη παράγωγος. Στις άλλες δύο διατάξεις του **Σχήματος 7.2-5**, πρώτα προσδιορίζονται οι συναρτήσεις  $Y_n(y)$  και οι σταθερές  $h_n$ , και, ακολούθως, οι  $X_n(x)$ , διαδικασία που καλύπτεται από εκείνη των προηγούμενων δύο διατάξεων, με τις αντικαταστάσεις  $X \leftrightarrow Y, x \leftrightarrow y$ , και βεβαίως,  $a \leftrightarrow b$ . Φυσικά, αν μία ή περισσότερες από τις επιμέρους διατάξεις έχει παντού ομογενείς οριακές συνθήκες, επειδή στην αρχική διάταξη η αντίστοιχη συνθήκη ήταν ομογενής, με  $f_k = 0$ , τότε θα είναι και  $\Phi_k = 0$ .

Συχνά εξυπηρετεί, αντί να επιλυθούν τέσσερα επί μέρους προβλήματα, να εξετασθούν από κοινού οι δύο πρώτες διατάξεις του **Σχήματος 7.2-5**, ως μία διάταξη, και από κοινού οι δύο τελευταίες. Από τις δύο αυτές διατάξεις, η πρώτη (και αντίστοιχα η δεύτερη) θα έχει ομογενείς τις οριακές συνθήκες στο ένα ζεύγος αντιμέτωπων πλευρών,  $\mathcal{L}_3\Phi = 0$  και  $\mathcal{L}_4\Phi = 0$ , αλλά θα διατηρήσει τις αρχικές μη ομογενείς οριακές συνθήκες στο άλλο ζεύγος,  $\mathcal{L}_1\Phi = f_1$  και  $\mathcal{L}_2\Phi = f_2$ , όπως φαίνεται στο **Σχήμα 7.2-6**. Οι



Σχήμα 7.2-6

ημιτονοειδείς συναρτήσεις  $X_n(x)$  που θα χρησιμοποιηθούν για το ανάπτυγμα, καθώς και οι σταθερές  $h_n$ , θα είναι οι ίδιες με τις δύο επιμέρους διατάξεις, αφού προσδιορίζονται από τις ίδιες ομογενείς οριακές συνθήκες. Οι συναρτήσεις  $Y_n(y)$  θα είναι γραμμικοί συνδυασμοί,  $Y_n(y) = A_n Y_{1,n}(y) + B_n Y_{2,n}(y)$ . Έτσι, το δυναμικό εκφράζεται ως  $\Phi(x, y) = \sum_n X_n(x) Y_n(y)$ , με προσδιοριστέους τους συντελεστές  $A_n$  και  $B_n$  που περιέχονται στις συναρτήσεις  $Y_n(y)$ . Υπάρχουν οι ακόλουθες δυνατότητες επιλογών για τις συναρτήσεις  $Y_{1,n}(y)$  και  $Y_{2,n}(y)$ :

- (i) Οι συναρτήσεις  $Y_{1,n}(y)$  και  $Y_{2,n}(y)$  να είναι απλά δύο συναρτήσεις βάσης, υπερβολικές ή εκθετικές. Όποιες αποδεκτές συναρτήσεις και να είναι οι  $Y_{1,n}(y)$  και  $Y_{2,n}(y)$ , εφαρμόζοντας τον τελεστή  $\mathcal{L}_1\Phi$  στο όριο  $y = b$ , όπως στη σχέση (7.2-21), αλλά και τον  $\mathcal{L}_2\Phi$  στο  $y = 0$ , και εξισώνοντας αντίστοιχα με  $f_{1,2}$ , σχηματίζονται δύο ισότητες συναρτήσεων του  $x$ :

$$\mathcal{L}_{1,2} \left( \sum_n X_n Y_n \right) \Big|_{y=b,0} = \sum_n X_n(x) [\mathcal{L}_{1,2} (A_n Y_{1,n} + B_n Y_{2,n})] \Big|_{y=b,0} = f_{1,2}(x), \quad (7.2-24)$$

που αντιστοιχούν στην ισότητα (7.2-22). Πολλαπλασιάζοντας με κάποιο  $X_n(x)$ , ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < x < a$  και με επίκληση της ορθογωνιότητας προκύπτει:

$$A_n (\mathcal{L}_1 Y_{1,n}) \Big|_{y=b} + B_n (\mathcal{L}_1 Y_{2,n}) \Big|_{y=b} = \frac{\int_0^a dx f_1(x) X_n(x)}{\int_0^a dx X_n^2(x)}, \quad (7.2-25)$$

$$A_n (\mathcal{L}_2 Y_{1,n}) \Big|_{y=0} + B_n (\mathcal{L}_2 Y_{2,n}) \Big|_{y=0} = \frac{\int_0^a dx f_2(x) X_n(x)}{\int_0^a dx X_n^2(x)}.$$

Ενώ η σχέση (7.2-23) είναι μία εξίσωση για κάθε συντελεστή, τώρα η σχέση (7.2-25) παρουσιάζει ένα σύστημα  $2 \times 2$ , δύο εξισώσεων για τους δύο συντελεστές  $A_n$  και  $B_n$  που αντιστοιχούν σε κάθε  $n$ . Υπενθυμίζεται ότι ένα καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών τιμών για την εξίσωση του *Laplace* έχει μία και μόνο λύση. Αυτό σημαίνει ότι και το σύστημα (7.2-25) είναι μαθηματικά καλά διατυπωμένο και ότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων δεν είναι ίση με μηδέν.

(ii) Οι συναρτήσεις  $Y_{1,n}(y)$  και  $Y_{2,n}(y)$  να είναι κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί δύο υπερβολικών ή εκθετικών συναρτήσεων βάσης, με στόχο να σχηματισθούν αυτοτελείς εξισώσεις για κάθε συντελεστή, και όχι ένα σύστημα  $2 \times 2$ . Ο στόχος αυτός επιτυγχάνεται, αν οι συναρτήσεις  $Y_{1,n}(y)$  και  $Y_{2,n}(y)$  επιλεγούν, ως γραμμικοί συνδυασμοί των εκθετικών ή υπερβολικών συναρτήσεων βάσης, ώστε κάθε συνάρτηση να ικανοποιεί την ομογενή μορφή μιας οριακής συνθήκης, να είναι  $(\mathcal{L}_1 Y_{2,n}) \Big|_{y=0} = 0$  και  $(\mathcal{L}_2 Y_{1,n}) \Big|_{y=b} = 0$ . Τότε, αντί για το σύστημα (7.2-25), σχηματίζονται δύο χωριστές εξισώσεις:

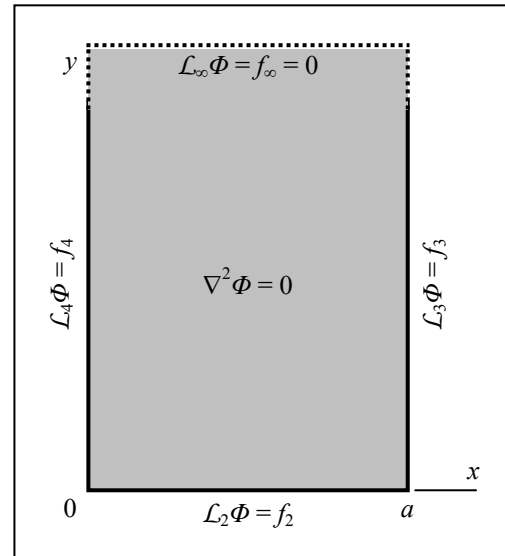
$$(\mathcal{L}_1 Y_{2,n}) \Big|_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_n (\mathcal{L}_1 Y_{1,n}) \Big|_{y=b} = \frac{\int_0^a dx f_1(x) X_n(x)}{\int_0^a dx X_n^2(x)}, \quad (7.2-26)$$

$$(\mathcal{L}_2 Y_{1,n}) \Big|_{y=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_n (\mathcal{L}_2 Y_{2,n}) \Big|_{y=0} = \frac{\int_0^a dx f_2(x) X_n(x)}{\int_0^a dx X_n^2(x)}.$$

Μπορεί να φανεί πως καθεμία από τις δύο επιλογές στις σχέσεις (7.2-26) είναι ακριβώς η επιλογή που θα γινόταν σε κάθε επί μέρους διάταξη επαλληλίας.

Τα *παραδ. 7.2-10* και *7.2-12* παρουσιάζουν την επίλυση διδιάστατων διατάξεων με ανάπτυγμα του δυναμικού σε σειρά, ανεξάρτητα από το ότι για το τρίτο από αυτά τα παραδείγματα δεν είναι αναγκαίο τέτοιο ανάπτυγμα.

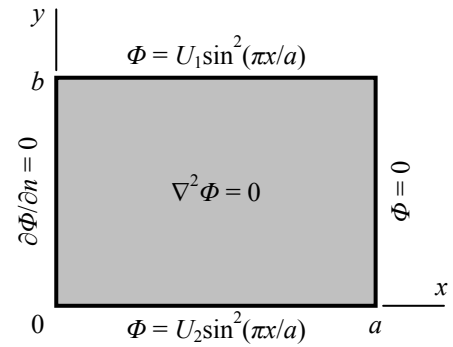
Σε διατάξεις με μία πλευρά στο άπειρο η μόνη οριακή συνθήκη που ενδιαφέρει για το άπειρο είναι η ομογενής,  $f_\infty = 0$ , όπως έχει σημειωθεί και στο **Σχήμα 7.2-7**. Η διαδικασία επίλυσης αποτελεί προσαρμογή της διαδικασίας που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα. Αρχικά, η διάταξη διασπάται σε δύο επιμέρους διατάξεις, η καθεμία με δύο ομογενείς συνθήκες σε αντιμέτωπες πλευρές. Ανάλογα με το ποιες είναι αυτές οι δύο πλευρές, η διαδικασία διαφοροποιείται.



Σχήμα 7.2-7

- Διάταξη με  $L_3\Phi = 0$  και  $L_4\Phi = 0$ : Αυτές οι δύο ομογενείς οριακές συνθήκες προσδιορίζουν τις συναρτήσεις βάσης για το ανάπτυγμα, με τη γενική μορφή  $X_n(x) = \sin(h_n x + \xi_n)$  της σχέσης (7.2-16), και τις διακριτές τιμές για τη σταθερά  $h_n$ . Με δεδομένη τη συνθήκη στο άπειρο, η επιλογή για τις συναρτήσεις  $Y_n$  είναι υποχρεωτικά η  $Y_n(y) = \exp(-h_n y)$ . Στο  $y = 0$  είναι  $Y_n(0) = 1$  και  $Y'_n(0) = -h_n$ , αλλά στην πλευρά  $y = 0$  είναι  $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_y$ , οπότε για την κάθετη παράγωγο, αν εμπλέκεται στην  $L_2\Phi$ , είναι  $\partial\Phi/\partial n = \sum_n A_n X_n(x)[-Y'_n(0)] = -\sum_n A_n h_n X_n(x)$ . Εξισώνοντας  $L_2\Phi = f_2(x)$  και εφαρμόζοντας την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $X_n(x)$  προσδιορίζονται οι συντελεστές  $A_n$ . Συνολικά, η διαδικασία διαφοροποιείται από τα προηγούμενα μόνο ως προς τις συναρτήσεις  $Y_n(y)$ . Σχετικό είναι το **παράδ. 7.2-13**.
- Διάταξη με  $L_3\Phi = f_3(y) \neq 0$  ή/και  $L_4\Phi = f_4(y) \neq 0$ : Τώρα είναι ομογενείς οι αντιμέτωπες έδρες στα  $y = 0$  και  $y = \infty$ . Από τη συνθήκη  $L_2\Phi = 0$  προσδιορίζονται οι αποδεκτές συναρτήσεις, με τη γενική μορφή  $Y_n(y) = \sin(h_n y + \xi_n)$ , από τη σχέση (7.2-16) με  $x \rightarrow y$ . Όμως, επειδή το άλλο όριο είναι στο άπειρο, η σταθερά του χωρισμού δεν έχει διακριτές τιμές, αλλά, με  $h_n \rightarrow h$ , τιμές που ανήκουν σε συνεχές φάσμα τιμών,  $0 < h < \infty$ . Επίσης, καθεμία από τις σταθερές ποσότητες  $\xi_n$  έχει πάλι τις τιμές 0 ή  $\pi/2$ , αν ο τελεστής  $L_2$  αναφέρεται σε συνθήκη *Dirichlet* ή *Neumann*, αλλά μετατρέπεται σε συνάρτηση,  $\xi_n \rightarrow \xi(h)$ , στην περίπτωση της γενικής οριακής συνθήκης  $L_2\Phi = \Phi + \ell_2 \partial\Phi/\partial n$ . Τέλος, το άθροισμα ως προς  $n$  μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα ως προς  $h$ , από το οποίο προσδιορίζονται όχι πια δύο σύνολα διακριτών τιμών  $A_{n,3}$  και  $A_{n,4}$ , αλλά δύο συναρτήσεις  $A_{3,4}(h)$ . Δεν αναπτύσσονται, τώρα, οι συναρτήσεις  $f_{3,4}(y)$  σε γενικευμένη σειρά *Fourier*, αλλά γίνεται μετασχηματισμός *Fourier*, ημιτόνου ή συνημιτόνου, ανάλογα αν η συνθήκη στο  $y = 0$  είναι τύπου *Dirichlet* ή *Neumann*.

**Παράδειγμα 7.2-10:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Οι οριακές συνθήκες χαρακτηρίζονται από συνέχεια σε κάθε πλευρά και σε κάθε κορυφή. Όμως, η συνάρτηση  $\sin^2(\pi x/a)$  δεν είναι αποδεκτή για το σχηματισμό γινομένου που να ικανοποιεί την εξίσωση Laplace. Αν πάλι επιχειρηθεί επαλληλία,  $\Phi = \Phi_I + \Phi_{II}$ , με βάση την τριγωνομετρική σχέση  $\sin^2 \zeta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\zeta)$ , ώστε οι μη ομογενείς οριακές συνθήκες να γραφούν  $\Phi_I = \frac{1}{2}U_{1,2}$ , που θα υποδείκνυε  $K_{I,x} = 0$ , και  $\Phi_{II} = -\frac{1}{2}U_{1,2}\cos(2\pi x/a)$ , που θα αντιστοιχούσε σε  $K_{II,x} = -h_{II}^2 = -(2\pi/a)^2$ , τότε εκδηλώνεται σε κάθε επιμέρους πρόβλημα ασυνέχεια στις οριακές συνθήκες στις δύο κορυφές με  $x = a$ , που απαιτεί επίλυση με σειρά. Φυσικά, προτιμότερο είναι να λυθεί με σειρά η αρχική διάταξη, και όχι οι δύο επιμέρους, πάλι με μορφή σειράς, και επαλληλία να εφαρμοσθεί σε όποιο ενδιάμεσο σημείο της επίλυσης ενδεχομένως παραστεί ανάγκη.

Η ομογενής οριακή συνθήκη στο  $x = 0$  προσδιορίζει την επιλογή  $X_n(x) = \cos(h_n x)$ , ώστε πράγματι να είναι  $-(dX_n/dx)|_{x=0} = 0$ . Για να είναι, επίσης,  $X_n(x=a) = 0$ , πρέπει να είναι  $h_n a = (n - \frac{1}{2})\pi$ . Έτσι, ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες  $(\partial\Phi/\partial n) = -(\partial\Phi/\partial x) = 0$  στο  $x = 0$  και  $\Phi = 0$  στο  $x = a$ , από οποιοδήποτε άθροισμα  $\Phi(x, y) = \sum_n A_n X_n(x) Y_n(y)$ .

Στο σημείο μπορεί να εφαρμοσθεί επαλληλία, ή όχι (βλ. και το πρώτο **σχόλιο**):

A. Χωρίς εφαρμογή επαλληλίας, η συνάρτηση  $Y_n$  μπορεί να γραφεί ως  $Y_n(y) = A_n \sinh(h_n y) + B_n \cosh(h_n y)$ , και οι οριακές συνθήκες στις πλευρές  $y = 0$  και  $y = b$  δίνουν:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad & \sum_n [A_n \sinh(h_n \cdot 0) + B_n \cosh(h_n \cdot 0)] \cos(h_n x) = U_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right), \\ y = b: \quad & \sum_n [A_n \sinh(h_n b) + B_n \cosh(h_n b)] \cos(h_n x) = U_1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right). \end{aligned} \quad (a)$$

Πολλαπλασιάζοντας κάθε σχέση με τον τυχόντα όρο  $X_n(x) = \cos(h_n x)$  του αθροίσματος και ολοκληρώνοντας ως προς  $x$  στο διάστημα  $0 < x < a$ , η ορθογωνιότητα των  $X_n(x)$ , βλ. σχέση (7.2-17), σημαίνει ότι η ισότητα των ολοκληρωμάτων μεταφέρεται σε κάθε όρο της άθροισης ως προς  $n$ . Χρησιμοποιώντας επίσης τις τιμές  $\sinh 0 = 0$  και  $\cosh 0 = 1$ , καθώς, επίσης, ότι είναι  $\int_0^a \cos^2(h_n x) dx = \frac{1}{2}a$ , βλ. σχέση (7.2-19), προκύπτει σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για το οποιοδήποτε ζεύγος συντελεστών  $(A_n, B_n)$ :

$$\frac{a}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sinh(h_n b) & \cosh(h_n b) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \end{bmatrix} \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(h_n x) dx = C_n \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \end{bmatrix}, \quad (\beta)$$

που επιλύεται αμέσως,  $B_n = (2/a)C_n U_2$ ,  $A_n \sinh(h_n b) = (2/a)C_n [U_1 - U_2 \cosh(h_n b)]$ , όπου:

$$C_n = \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(h_n x) dx.$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος  $C_n$  είναι στοιχειώδης, αλλά δεν παρουσιάζεται εδώ για να μην διασπασθεί η συνέχεια. Το τελικό αποτέλεσμα είναι [με  $h_n a = (n - 1/2)\pi$ ]:

$$\Phi(x, y) = \frac{2}{a} \sum_n C_n \cos(h_n x) \left[ \frac{U_1 - U_2 \cosh(h_n b)}{\sinh(h_n b)} \sinh(h_n y) + U_2 \cosh(h_n y) \right]$$

B. Αν εφαρμοσθεί επαλληλία, με μία μόνο μη ομογενή οριακή συνθήκη σε κάθε επιμέρους διάταξη, η επίλυση, μετά από τον προσδιορισμό ότι  $X_n(x) = \cos(h_n x)$ , είναι η εξής:

I. Με  $\Phi_I = U_1 \sin^2(\pi x/a)$  στην πλευρά  $y = b$ , αλλά  $\Phi_I = 0$  στην πλευρά  $y = 0$ : Η κατάλληλη επιλογή είναι  $Y_{I,n}(y) = \sinh(h_n y)$ , οπότε με την έκφραση  $\Phi_I(x, y) = \sum_n A_{I,n} X_n(x) Y_{I,n}(y)$  για το δυναμικό, εφαρμοζόμενη στο όριο  $y = b$ , σχηματίζεται η ισότητα:

$$\sum_n A_{I,n} \sinh(h_n b) \cos(h_n x) = U_1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση αυτή με τον τυχαίο όρο  $X_n(x) = \cos(h_n x)$  του αθροίσματος και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < x < a$  ως προς  $x$ , η ορθογωνιότητα των  $X_n(x)$ , βλ. σχέση (7.2-17), μεταφέρει την ισότητα των ολοκληρωμάτων σε ισότητα για κάθε όρο της άθροισης ως προς  $n$ . Εισάγοντας και την τιμή του ολοκληρώματος  $\int_0^a \cos^2(h_n x) dx = 1/2 a$ , βλ. σχέση (7.2-19), προκύπτει η εξίσωση για τον αντίστοιχο συντελεστή  $A_{I,n}$ :

$$\frac{a}{2} A_{I,n} \sinh(h_n b) = U_1 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(h_n x) dx = C_n U_1.$$

Το ολοκλήρωμα  $C_n$  έχει οριστεί παραπάνω, στην εναλλακτική (χωρίς επαλληλία) πορεία.

II. Με  $\Phi_{II} = U_2 \sin^2(\pi x/a)$  στην πλευρά  $y = 0$ , αλλά  $\Phi_{II} = 0$  στην πλευρά  $y = b$ : Η κατάλληλη επιλογή τώρα είναι  $Y_{II,n}(y) = \sinh[h_n(b-y)]$ , οπότε γράφοντας το δυναμικό ως  $\Phi_{II}(x, y) = \sum_n A_{II,n} X_n(x) Y_{II,n}(y)$ , από την οριακή συνθήκη στο  $y = b$  σχηματίζεται η ισότητα:

$$\sum_n A_{II,n} \sinh(h_n b) \cos(h_n x) = U_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right),$$

από την οποία αμέσως, με απλές αντικαταστάσεις στο αποτέλεσμα της διάταξης I, προκύπτει η εξίσωση για τον αντίστοιχο συντελεστή  $A_{II,n}$ :

$$\frac{a}{2} A_{II,n} \sinh(h_n b) = U_2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(h_n x) dx = C_n U_2.$$

Αθροίζοντας,  $\Phi = \Phi_I + \Phi_{II}$ , με τις παραπάνω εκφράσεις για τα  $A_{I,n}$  και  $A_{II,n}$  διαμορφώνεται το τελικό αποτέλεσμα, ως:

$$\Phi(x, y) = \frac{2}{a} \sum_n \frac{C_n}{\sinh(h_n b)} \cos(h_n x) \{U_1 \sinh(h_n y) + U_2 \sinh[h_n(b-y)]\}.$$

Φυσικά, είτε χρησιμοποιηθεί, είτε όχι επαλληλία, το τελικό αποτέλεσμα είναι το ίδιο, όπως εύκολα επιβεβαιώνεται με βάση και τη σχέση (7.2-8δ) για το υπερβολικό ημίτονο διαφοράς,  $\sinh(\zeta - \eta) = \sinh \zeta \cosh \eta - \cosh \zeta \sinh \eta$ .

### Σχόλια:

- Η μορφή του αποτελέσματος από την επαλληλία υποδεικνύει ένα εναλλακτικό τρόπο να σχηματισθεί ο γραμμικός συνδυασμός  $Y_n(y) = \{\sinh(h_n y), \cosh(h_n y)\}$  στην επίλυση χωρίς επαλληλία. Αντί να γραφεί  $Y_n(y) = A_n \sinh(h_n y) + B_n \cosh(h_n y)$ , με προσδιοριστέους τους συντελεστές  $A_n, B_n$ , να γραφεί  $Y_n(y) = A'_n \sinh(h_n y) + B'_n \sinh[h_n(b-y)]$ , με προσδιοριστέους τους νέους συντελεστές  $A'_n$  και  $B'_n$ . Κίνητρο για την επιλογή ενός τέτοιου γραμμικού συνδυασμού είναι, όταν εφαρμοσθεί ο τελεστής  $\mathcal{L}\Phi$  σε καθεμία από τις δύο απομένουσες πλευρές να μηδενίζεται κάθε φορά από ένας όρος. Συγκεκριμένα, με τη μορφή αυτή, οι μη ομογενείς συνθήκες, αντί για τις σχέσεις (α), γράφονται:

$$y=0: \quad \sum_n [A'_n \sinh(h_n \cdot 0) + B'_n \sinh(h_n b)] \cos(h_n x) = U_2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad (\alpha')$$

$$y=b: \quad \sum_n [A'_n \sinh(h_n b) + B'_n \sinh(h_n \cdot 0)] \cos(h_n x) = U_1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Επειδή  $\sinh 0 = 0$ , φαίνεται η διευκόλυνση που αντιπροσωπεύεται από την επιλογή  $Y_n(y) = A'_n \sinh(h_n y) + B'_n \sinh[h_n(b-y)]$ . Όταν εφαρμοσθεί η ορθογωνιότητα, δεν σχηματίζεται σύστημα  $2 \times 2$  για κάθε ζευγάρι συντελεστών, όπως οι εξισώσεις (β), αλλά προκύπτουν χωριστές εξισώσεις για κάθε συντελεστή:

$$\frac{a}{2} \sinh(h_n b) \begin{bmatrix} A'_n \\ B'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \end{bmatrix} \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(h_n x) dx = C_n \begin{bmatrix} U_2 \\ U_1 \end{bmatrix}, \quad (\beta')$$

όπου  $C_n$  είναι το ίδιο ολοκλήρωμα που έχει οριστεί προηγουμένως.

Η πορεία που ακολουθείται σ' αυτό το σχόλιο αναπαράγει τη διαδικασία που έχει οδηγήσει στις σχέσεις (7.2-26), ενώ η πορεία «Α» αντιστοιχεί σε εκείνη των σχέσεων (7.2-25).

- Στο ολοκλήρωμα  $C_n$ , που έχει ορισθεί ως:

$$C_n = \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(h_n x) dx,$$

η ολοκλήρωση είναι στοιχειώδης, ανεξάρτητα που δεν παρουσιάζεται το αποτέλεσμα. Με τη σχέση  $\sin^2 \zeta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\zeta)$ , από τους δύο όρους ο πρώτος ολοκληρώνεται αμέσως, ενώ στον δεύτερο πρέπει πρώτα να εκφρασθεί το γινόμενο των συνημιτόνων ως το ημίαθροισμα των συνημιτόνων του αθροίσματος και της διαφοράς των ορισμάτων.

- Αν στα όρια  $y = 0$  και  $y = b$  δεν ήταν  $\Phi = U_{1,2} \sin^2(\pi x/a)$ , αλλά  $\Phi = U_{1,2} \cos(3\pi x/2a)$ , τότε, με πορεία ταυτόσημη με της επίλυσης, θα εμφανισθεί, αντί του  $C_n$ , το ολοκλήρωμα:

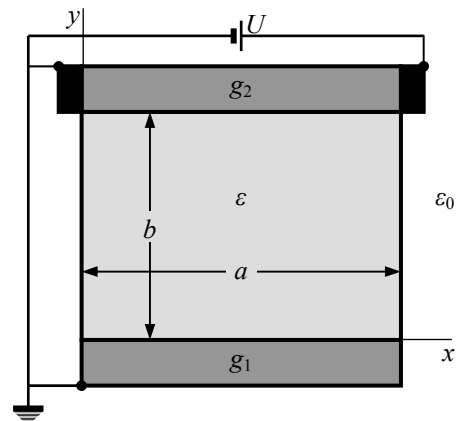
$$C'_n = \int_0^a \cos\left(\frac{3\pi x}{2a}\right) \cos\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{a}\right] dx.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με μηδέν για κάθε  $n$ , εκτός από το  $n = 2$ , και τότε είναι  $C'_2 = a/2$ . Το αποτέλεσμα δεν εκφράζεται, εδώ, ως σειρά, αλλά είναι απλά:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sinh(hb)} \cos(hx) \{U_1 \sinh(hy) + U_2 \sinh[h(b-y)]\},$$

με  $h = h_{n=2} = 3\pi/2a$ . Βέβαια, για να εξαχθεί αυτό το αποτέλεσμα, δεν χρειάζεται να ακολουθηθεί η «βαριά» διαδικασία με το ανάπτυγμα σε σειρά, αλλά αρκεί η απλή διαδικασία της προηγούμενης παραγράφου 7.2.1.

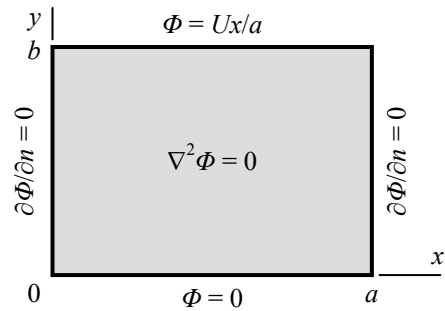
**Παράδειγμα 7.2-11:** Μία ράβδος από ομογενές διηλεκτρικό υλικό, με επιτρεπτότητα  $\varepsilon$  ( $\gg \varepsilon_0$ ), έχει μήκος  $L$  και διατομή  $a \times b$ . Οι έδρες με πλάτος  $a$  είναι σε επαφή με δύο πλάκες από αγωγίμο υλικό, τη μία γειωμένη και την άλλη με το ένα άκρο επίσης γειωμένο και το άλλο σε τάση  $U$ . Ο υπόλοιπος χώρος έχει αέρα, με  $\varepsilon_0$ . Να διατυπωθεί το πρόβλημα οριακών τιμών και να προσδιορισθεί το δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό της ράβδου.



**Επίλυση:** Στις έδρες  $z = 0$ ,  $z = L$ ,  $x = 0$  και  $x = a$ , στον παρακείμενο χώρο είναι  $\varepsilon_0 \approx 0$ , που αντιστοιχεί σε συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$ . Στην έδρα  $y = 0$  είναι προφανώς  $\Phi = 0$ , επειδή ο παρακείμενος αγωγός είναι γειωμένος, ενώ στην περιοχή  $y > b$  τα δεδομένα υποδεικνύουν μονοδιάστατη εξάρτηση, συγκεκριμένα  $\Phi = Ux/a$ , άρα τόσο είναι και στην έδρα  $y = b$ . Στο εσωτερικό

είναι  $\varepsilon = \text{σταθ.}$ , συνεπώς  $\nabla^2 \Phi = 0$ , και όλα τα δεδομένα υποδεικνύουν, ότι  $\partial\Phi/\partial z = 0$ . Πρόκειται για διδιάστατο πρόβλημα οριακών τιμών, με τα δεδομένα που παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στο σχήμα.

Στις κορυφές  $(0, b)$  και  $(a, b)$  οι οριακές συνθήκες εκδηλώνουν ασυνέχεια, καθώς είναι  $\partial\Phi/\partial x = U/a \neq 0$  στα άκρα της πλευράς  $y = b$ , ενώ στις πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  είναι  $\partial\Phi/\partial n = \mp \partial\Phi/\partial x = 0$ . Συνεπώς, το δυναμικό θα εκφρασθεί αναγκαστικά ως σειρά.



Από τις ομογενείς οριακές συνθήκες στις αντιμέτωπες πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  προσδιορίζονται οι συναρτήσεις  $X_n(x) = \cos(h_n x)$ , ώστε να είναι  $-(dX_n/dx)|_{x=0} = 0$ , και με  $\sin(h_n a) = 0$ , για να είναι επίσης  $(dX_n/dx)|_{x=a} = 0$ . Η απαίτηση  $\sin(h_n a) = 0$  ικανοποιείται με  $h_n a = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ , αλλά και με  $h_n a = 0$ . Γράφοντας  $h_n a = n\pi$ , με  $n = 0, 1, 2, \dots$ , στην τιμή  $n = 0$  αντιστοιχεί η συνάρτηση  $X_0(x) = \cos(h_0 x) = \cos 0 = 1$ . [Οι συμβολισμοί διαφέρουν ελαφρώς από αυτούς του Πίνακα 7.2-1, όπου γράφεται  $h_n a = (n-1)\pi$ , αλλά με  $n = 1, 2, 3, \dots$ ]

Οι συναρτήσεις  $Y_n(y)$  πρέπει να ικανοποιούν  $Y_n(y=0) = 0$ , άρα θα είναι  $Y_{n \neq 0}(y) = \sinh(h_n y)$ , αλλά στην τιμή  $h_0 = 0$  αντιστοιχεί  $K_x = K_y = 0$ , συνεπώς είναι εν γένει  $Y_0(y) = \{y, 1\}$  και λόγω της απαίτησης  $Y_0(y=0) = 0$  είναι  $Y_0(y) = y$ . Με τις επιλογές αυτές, κάθε άθροισμα  $\Phi(x, y) = \sum_n A_n X_n(x) Y_n(y)$  ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στις πλευρές  $x = 0, x = a$  και  $y = 0$ , και βεβαίως, την εξίσωση του Laplace στο εσωτερικό της διατομής.

Τέλος, στην πλευρά  $y = b$  η οριακή συνθήκη ικανοποιείται όταν  $\sum_n A_n X_n(x) Y_n(y=b) = Ux/a$ . Πολλαπλασιάζοντας με οποιαδήποτε συνάρτηση  $X_n(x) = \cos(h_n x)$ , μεταξύ των οποίων είναι και η  $X_0(x) = 1$ , και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < x < a$ , στο οποίο είναι ορθογώνιες οι  $X_n$ , προκύπτει:

$$aA_0 b = \frac{U}{a} \int_0^a x dx = \frac{a}{2} U, \quad (n=0)$$

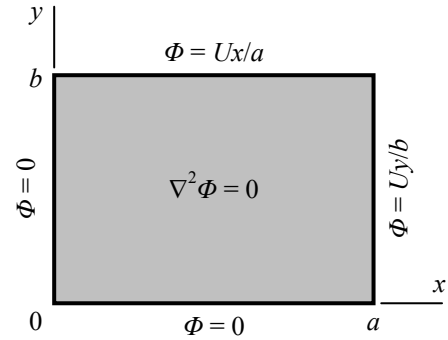
$$\frac{a}{2} A_n \sinh(h_n b) = \frac{U}{a} \int_0^a x \cos(h_n x) dx = \dots = -\frac{1 - (-1)^n}{(n\pi)^2} aU, \quad (n = 2m-1 \neq 0)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι είναι  $\int_0^a \cos^2(h_n x) dx = \frac{1}{2} a$  για  $n \neq 0$ , αλλά για  $n = 0$  είναι  $\int_0^a 1^2 dx = a$ . Εύκολα φαίνεται πως είναι  $A_2 = A_4 = A_6 = \dots = 0$ . Έχοντας προσδιορίσει τις τιμές  $A_n$ , το δυναμικό, τελικά, εκφράζεται ως:

$$\Phi(x, y) = A_0 y + \sum_n A_n \cos(h_n x) \sinh(h_n y), \quad \text{με } h_n a = n\pi \text{ και } n = 1, 3, 5, \dots$$

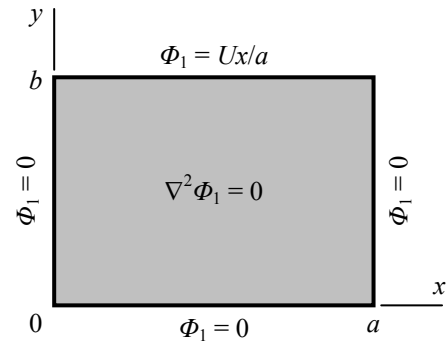


**Παράδειγμα 7.2-12:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Εδώ, οι οριακές συνθήκες είναι συνεχείς, για παράδειγμα, είναι  $\Phi(x=a, y=b) = U$  και από τις δύο πλευρές. Στο όριο δεν εμφανίζονται τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ωστόσο δε χρειάζεται σειρά, επειδή οι οριακές συνθήκες αντιστοιχούν σε  $K_x = K_y = 0$ , δηλαδή σε  $X = \{x, 1\}$  και  $Y = \{y, 1\}$ . Συγκεκριμένα είναι  $\Phi = U(x/a)(y/a)$ , όπως έχει παρουσιασθεί στο **παράδ. 7.2-9**.

Αν δεν προσεχθεί ότι η διάταξη επιλύεται με  $K_x = K_y = 0$ , θα εφαρμοσθεί επαλληλία. Το πρόβλημα 1 θα ορισθεί με  $\Phi_1 = 0$  στο όριο  $x = a$ , με συνέπεια την εμφάνιση ασυνέχειας,  $\Phi_1(x=a, y \rightarrow b) = 0$ , ενώ αντίθετα  $\Phi_1(x \rightarrow a, y=b) = U$ , οπότε για την επίλυση απαιτείται ανάπτυγμα σε σειρά. Οι κατάλληλες συναρτήσεις  $X_{1n}$  είναι  $X_{1n}(x) = \sin(h_{1n}x)$ , ώστε να είναι  $X_{1n}(0) = 0$ , και με



$h_{1n}a = n\pi$ , ώστε να είναι  $X_{1n}(a) = 0$ . Για τις συναρτήσεις  $Y_{1n}(y)$ , η επιλογή αμέσως προσδιορίζεται σε  $Y_{1n}(y) = \sinh(h_{1n}y)$ , ώστε να είναι  $\Phi_1(x, y=0) = 0$ . Εφαρμόζοντας το ανάπτυγμα  $\Phi_1(x, y) = \sum_n A_{1n} X_{1n}(x) Y_{1n}(y)$  στην τελευταία πλευρά  $y = b$ , σχηματίζεται η ισότητα:

$$\Phi_1(x, b) = \sum_n A_{1n} \sinh(h_{1n}b) \sin(h_{1n}x) = U \frac{x}{a}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $\sin(h_{1n}x)$ , ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < x < a$  ορθογωνιότητας των συναρτήσεων  $X_{1n}(x) = \sin(h_{1n}x)$  και με  $\int_0^a \sin^2(h_n x) dx = \frac{1}{2}a$ , προκύπτει:

$$\frac{a}{2} A_{1n} \sinh(h_{1n}b) = \frac{U}{a} \int_0^a x \sin(h_{1n}x) dx = \dots,$$

από όπου προσδιορίζεται η τιμή  $A_{1n}$  για κάθε  $n = 1, 2, 3, \dots$

Στο πρόβλημα 2 θα ήταν  $\Phi_2 = Uy/b$  στο όριο  $x = a$ , αλλά  $\Phi_2 = 0$  στο  $y = b$ . Το δυναμικό  $\Phi_2$  σχηματίζεται αμέσως από το  $\Phi_1$ , με τις αντικαταστάσεις  $1 \rightarrow 2, x \leftrightarrow y$  και  $a \leftrightarrow b$ . Αθροίζοντας, το τελικό αποτέλεσμα της αρχικής διάταξης, αντί για  $\Phi = U(x/a)(y/a)$ , θα γραφόταν ως:

$$\Phi(x, y) = \sum_n [A_{1n} \sin(h_{1n}x) \sinh(h_{1n}y) + A_{2n} \sinh(h_{2n}x) \sin(h_{2n}y)].$$

**Παράδειγμα 7.2-13:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.

**Επίλυση:** Υπάρχει προφανής ασυνέχεια στην κορυφή  $(0, 0)$ , συνεπώς απαιτείται επίλυση με μορφή σειράς. Οι έδρες  $x = 0$  και  $x = a$  είναι αντιμέτωπες και έχουν ομογενείς οριακές συνθήκες, που προσδιορίζουν τις συναρτήσεις  $X_n(x) = \sin(h_n x)$ , ώστε να είναι  $X_n(x=0) = 0$ , και

τις αντίστοιχες τιμές των  $h_n = (n - 1/2)\pi/a$ , με  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ώστε να είναι  $X'_n(x=a) = 0$ , επειδή για την πλευρά  $x = a$  είναι  $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_x$  και συνεπώς εκεί είναι  $\partial/\partial n = \partial/\partial x$ .

Επειδή η διατομή εκτείνεται ως το  $y = \infty$ , όπου είναι  $\Phi(\infty) = 0$ , ενδεικνύεται η χρήση των εκθετικών συναρτήσεων,  $Y_n = \{\exp(h_n y), \exp(-h_n y)\}$ , με την εξειδίκευση  $Y_n(y) = \exp(-h_n y)$ , ώστε να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη στο  $y = \infty$ . Στην κάτω έδρα,  $y = 0$ , είναι:

$$\Phi(x, y=0) = \sum_n X_n(x) Y_n(y=0) = \sum_n A_n \sin(h_n x) e^0 = \sum_n A_n \sin(h_n x) = U.$$

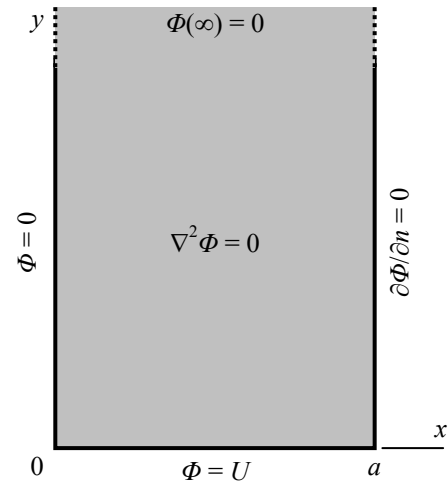
Πολλαπλασιάζοντας με ένα από τα  $\sin(h_n x)$  του αθροίσματος και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < x < a$ , στο οποίο οι συναρτήσεις  $\sin(h_n x)$  είναι ορθογώνιες, σχηματίζεται η ισότητα:

$$A_n \int_0^a \sin^2(h_n x) dx = U \int_0^a \sin(h_n x) dx \Rightarrow \frac{a}{2} A_n = \frac{U}{h_n} [1 - \cos(h_n a)] = \frac{U}{h_n},$$

με  $\cos(h_n a) = 0$ , επειδή  $h_n a = (n - 1/2)\pi$ , και προσδιορίζονται οι συντελεστές  $A_n$ . Τελικά, είναι:

$$\Phi(x, y) = \frac{4}{\pi} U \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin\left[(2n-1)\frac{\pi x}{2a}\right] \exp\left[-(2n-1)\frac{\pi y}{2a}\right].$$

**Σχόλιο:** Αν η οριακή συνθήκη  $\Phi = U$  επεκταθεί συμμετρικά ως προς  $x = a$ , όπου  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , και αντισυμμετρικά ως προς  $x = 0$ , όπου  $\Phi = 0$ , σχηματίζεται η συνάρτηση  $Uf(\xi)$ , με  $f(0 < \xi < \pi) = 1$  και  $f(-\pi < \xi < 0) = -1$ , όπου  $\xi = \pi x/2a$ . Με διαδοχικές παρόμοιες επεκτάσεις, η  $f(\xi)$  αναγνωρίζεται ως περιοδική συνάρτηση, και το ανάπτυγμά της σε τριγωνομετρική σειρά *Fourier* υπολογίζεται σε  $f(\xi) = (4/\pi) \sum_n (2n-1)^{-1} \sin[(2n-1)\xi]$ . Πρόκειται ακριβώς για το ανάπτυγμα που αναγνωρίζεται στο αποτέλεσμα για  $y = 0$ , αλλά με προέλευση από πρόβλημα *Sturm-Liouville*. Αντίστοιχα ισχύουν και για τα προηγούμενα παραδείγματα.



### 7.2.3 Σύνθετες διδιάστατες διατάξεις

Μια διδιάστατη (με  $\partial/\partial z = 0$ ) διάταξη χαρακτηρίζεται σύνθετη, όταν συμβαίνει οποιοδήποτε από τα επόμενα:

- Το όριο της περιλαμβάνει περισσότερες από δύο επιφάνειες, στις οποίες είναι  $x = \text{σταθ.}$  (ή  $y = \text{σταθ.}$ ), δηλαδή, εκτός από τα ακραία όρια στα  $x = x_{\min}$  και  $x = x_{\max}$  (τα  $x = 0$  και  $x = a$  της προηγούμενης παραγράφου), υπάρχουν και ενδιάμεσα όρια, σε θέσεις  $x_{\text{ενδ}}$  με  $x_{\min} < x_{\text{ενδ}} < x_{\max}$ . Τέτοια είναι η διάταξη στο *παράδ. 7.2-14*.
- Κατά μήκος μιας πλευράς  $x = \text{σταθ.}$  (ή  $y = \text{σταθ.}$ ) η οριακή συνθήκη αλλάζει τύπο: από *Dirichlet*,  $\Phi = \dots$ , μετατρέπεται σε *Neumann*,  $\partial\Phi/\partial n = \dots$ , ή στη γενική συνθήκη  $\Phi + \ell\partial\Phi/\partial n = \dots$  αλλάζει η τιμή του  $\ell$  από  $\ell_1$ , σε  $\ell_2$ , κλπ., όπως στο *παράδ. 7.2-15*.
- Στο εσωτερικό και σε επιφάνεια  $x = \text{σταθ.}$  (ή  $y = \text{σταθ.}$ ) υπάρχει επιφανειακό φορτίο  $\sigma$ , ή άλλο αίτιο κατανεμημένο σε επιφάνεια, το οποίο δεν έχει συμπεριληφθεί στο  $\Phi_{\text{ειδ}}$  στη διάσπαση  $\Phi = \Phi_{\text{ειδ}} + \Phi_{\text{συμ}}$ , βλ. παράγρ. 6.1.2, σχέσεις (6.1-28) κ. επ., ή αλλάζουν οι ιδιότητες  $\varepsilon$ ,  $\mu$  ή  $g$  και προκαλείται ασυνέχεια στην κάθετη παράγωγο. Φυσικά, πρέπει να είναι  $\partial\sigma/\partial z = 0$  κλπ., ώστε να πρόκειται για διδιάστατη διάταξη. Το ίδιο μπορεί να γίνει και σε γραμμικό αίτιο, όπως φορτίο  $\lambda$ , σταθερό και παράλληλο προς τον άξονα  $z$ . Τέτοιο αίτιο, όμως, προτιμάται να περιληφθεί στο  $\Phi_{\text{ειδ}}$ , για να αποφευχθεί η πολύ αργή σύγκλιση της σειράς λόγω της εξάρτησης  $\ln(R_T/R_{T0}) \rightarrow -\infty$ , καθώς  $R_T \rightarrow 0$ . Το *παράδ. 7.2-16* εμπλέκει παρουσία φορτίου  $\sigma$ .

Η διαδικασία επίλυσης σύνθετης διάταξης εμπλέκει εν γένει τα ακόλουθα βήματα:

- (α) Η αρχική διάταξη διασπάται με επαλληλία σε δύο επιμέρους διατάξεις. Στη Διάταξη I τίθενται ίσες με μηδέν οι εσωτερικές ασυνέχειες (φορτία  $\sigma$  κλπ.) που συναντώνται σε επιφάνειες  $x = \text{σταθ.}$  και επίσης μετατρέπονται σε ομογενείς οι οριακές συνθήκες στα τμήματα του ορίου με  $x = \text{σταθ.}$ , ενώ οτιδήποτε εμπλέκει εξάρτηση από  $y$  (φορτία  $\sigma$  σε  $y = \text{σταθ.}$ , οριακές συνθήκες σε  $y = \text{σταθ.}$ , αλλαγή τύπου οριακής συνθήκης σε κάποιο  $y$ ) παραμένουν όπως στην αρχική διάταξη. Αντίστοιχες επεμβάσεις, όπως μηδενισμοί φορτίων και μη ομογενών όρων στις οριακές συνθήκες, στις επιφάνειες  $y = \text{σταθ.}$  διαμορφώνουν τη Διάταξη II. Καλό είναι, πάντως, να επιβεβαιώνεται ότι η αρχική οριακή συνθήκη  $\mathcal{L}\Phi = f$  σε κάθε τμήμα του ορίου γίνεται  $\mathcal{L}\Phi_1 = 0$  και  $\mathcal{L}\Phi_2 = f$ , στο ίδιο τμήμα του ορίου και με τον ίδιο τελεστή  $\mathcal{L}$ , και όμοια για τα επιφανειακά φορτία  $\sigma$  κλπ.. Φυσικά, τέτοια διάσπαση δεν χρειάζεται, αν η αρχική διάταξη έχει τα χαρακτηριστικά της Διάταξης I ή II.

(β) Κάθε επιμέρους διάταξη αντιμετωπίζεται ως συνένωση  $m = 1, 2, \dots, M$  απλών περιοχών. Στη Διάταξη I (και αντίστοιχα στη Διάταξη II) ο διαχωρισμός γίνεται σε  $m - 1$  ενδιάμεσες ευθείες γραμμές  $y = \text{σταθ.}$  (που σε τρεις διαστάσεις αντιπροσωπεύουν επίπεδα), στις οποίες περιλαμβάνονται:

- ο Κάθε επιφάνεια  $y = \text{σταθ.}$  στο εξωτερικό όριο, με γνωστή την οριακή συνθήκη,
- ο Κάθε επιφάνεια  $y = \text{σταθ.}$ , που διέρχεται από σημείο, στο οποίο αλλάζει ο τύπος της οριακής συνθήκης σε επιφάνεια  $x = \text{σταθ.}$ ,
- ο Κάθε επιφάνεια  $y = \text{σταθ.}$  με επιφανειακό φορτίο  $\sigma$  ή άλλο αίτιο ασυνέχειας.

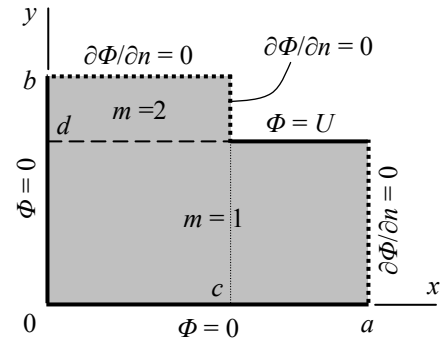
(γ) Κάθε απλή περιοχή, από τις  $M$  που σχηματίζονται στο βήμα (β), έχει όρια σε θέσεις  $x = x_{0m}$  και  $x = x_{1m} = x_{0m} + a_m$ . Εκεί, οι γνωστές ομογενείς οριακές συνθήκες επιτρέπουν να σχηματισθούν κατάλληλες συναρτήσεις  $X_{mn}(x)$ , που αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση στο διάστημα  $x_{0m} < x < x_{0m} + a_m$ . [Ο συμβολισμός  $X_{mn}(x)$  αναφέρεται στη συνάρτηση  $X_n(x)$  για την απλή διάταξη  $m$ . Το ίδιο για τους συμβολισμούς  $h_{mn}, A_{mn}$  κλπ.] Επίσης, η γνώση των τιμών των  $h_{mn}$  επιτρέπει να γραφούν οι συναρτήσεις  $Y_{mn}(y)$  ως  $Y_{mn}(y) = A_{mn}\sinh(h_{mn}y) + B_{mn}\cosh(h_{mn}y)$  ή άλλη ισοδύναμη μορφή, με δύο εν γένει συντελεστές  $A_{mn}$  και  $B_{mn}$ , επειδή εν γένει στα όρια ως προς  $y$  της περιοχής  $m$  δεν υπάρχει κάποια δεδομένη ομογενής οριακή συνθήκη, η οποία θα επέτρεπε να εξειδικευθεί ο γραμμικός συνδυασμός. Συνολικά, το δυναμικό σε κάθε απλή περιοχή  $m$  εκφράζεται ως:

$$\Phi_m(x_{0m} < x < x_{0m} + a_m, y_{0m} < y < y_{0m} + b_m) = \sum_n X_{mn}(x)Y_{mn}(y). \quad (7.2-28)$$

(δ) Εν γένει, τα όρια  $y = y_{0m}$  και  $y = y_{0m} + b_m$  κάθε απλής περιοχής  $m$  είναι κατά ένα μέρος εξωτερικά για την αρχική διάταξη, οπότε από τις αρχικές οριακές συνθήκες είναι γνωστή η τιμή του  $\mathcal{L}\Phi_m$ , και κατά το υπόλοιπο μέρος εσωτερικά, σε επαφή με άλλη παρακείμενη απλή περιοχή  $m'$ , της οποίας το δυναμικό έχει ήδη εκφρασθεί ως  $\sum_n X_{m'n}(x)Y_{m'n}(y)$  στο βήμα (γ) και μπορεί να θεωρηθεί γνωστό για την περιοχή  $m$ . Κατά συνέπεια, η ορθογωνιότητα των  $X_{mn}$  επιτρέπει να συσχετισθούν οι συντελεστές  $A_{mn}$  και  $B_{mn}$  με τις οριακές συνθήκες, αν η  $m$  έχει εξωτερικά όρια, ή/και με τα  $A_{m'n}, B_{m'n}$  των παρακείμενων περιοχών, ώστε η τιμή  $\Phi$  και η κάθετη (αφού στο όριο είναι  $y = \text{σταθ.}$ ) παράγωγος  $\partial\Phi/\partial y$  να είναι και οι δύο συνεχείς, ή να έχουν την ασυνέχεια που επιβάλλει ενδεχόμενο επιφανειακό φορτίο, διπολικό στρώμα, ή άλλο αίτιο που προκαλεί ασυνέχεια.

(ε) Έτσι για κάθε  $n$  σχηματίζονται για τους  $2M$  συντελεστές  $A_{mn}$  και  $B_{mn}$  ισόποσες γραμμικές σχέσεις:  $2(M - 1)$  από κάθε ενδιάμεσο όριο και άλλες 2 από τα ακραία όρια.

**Παράδειγμα 7.2-14:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x,y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Τα όρια με  $x = σταθ.$  (στα  $x = 0, x = c, x = a$ ) έχουν ομογενείς οριακές συνθήκες, συνεπώς, η επαλληλία, το βήμα ( $a$ ) της διαδικασίας, είναι χωρίς αντικείμενο (βλ. και το πρώτο **σχόλιο**).

Η διάταξη χωρίζεται με τη γραμμή  $y = d$  σε δύο απλές ορθογωνικές περιοχές, την περιοχή  $m = 1$ , που εκτείνεται στο  $0 < x < a, 0 < y < d$ , με ομογενείς οριακές συνθήκες στα όρια  $x = 0$  και  $x = a$ , και την περιοχή  $m = 2$ , που εκτείνεται στο  $0 < x < c, d < y < b$ , με ομογενείς οριακές συνθήκες στα όρια  $x = 0$  και  $x = c$ . Σε κάθε απλή περιοχή τα αντιμέτωπα όρια έχουν ομογενείς οριακές συνθήκες.

Οι συναρτήσεις  $X_n(x)$  και οι σταθερές  $h_n$  κάθε απλής περιοχής προσδιορίζονται από τις ομογενείς οριακές συνθήκες στα αντιμέτωπα όρια:

- ο Περιοχή 1:  $X_{1n}(x) = \sin(h_{1n}x)$ , με  $h_{1n} = (n - 1/2)\pi/a$ , ώστε  $X_{1n}(0) = 0$  και  $X'_{1n}(a) = 0$ ,
- ο Περιοχή 2:  $X_{2n}(x) = \sin(h_{2n}x)$ , με  $h_{2n} = (n - 1/2)\pi/c$ , ώστε  $X_{2n}(0) = 0$  και  $X'_{2n}(c) = 0$ .

Με τις ήδη προσδιορισμένες τιμές των σταθερών  $h_{mn}$ , προσδιορίζονται οι αντίστοιχες συναρτήσεις  $Y_{mn}(y)$ . Επειδή συμβαίνει καθεμία από τις δύο απλές περιοχές να τερματίζεται σε εξωτερικό όριο με ομογενή οριακή συνθήκη, αυτή η ομογενής συνθήκη μπορεί να χρησιμοποιηθεί τώρα, ώστε οι συναρτήσεις  $Y_{mn}(y)$  να περιλαμβάνουν μόνο έναν συντελεστή  $A_{mn}$ , και όχι και έναν δεύτερο, τον  $B_{mn}$  (βλ. και το δεύτερο **σχόλιο**). Συγκεκριμένα είναι:

- ο Περιοχή 1:  $Y_{1n}(y) = A_{1n}\sinh(h_{1n}y)$ , ώστε  $Y_{1n}(0) = 0$ ,
- ο Περιοχή 2:  $Y_{2n}(y) = A_{2n}\cosh[h_{2n}(b-y)]$ , ώστε  $Y'_{2n}(b) = 0$ .

Με τις παραπάνω συναρτήσεις περιγράφεται το δυναμικό  $\Phi_{1,2} = \sum_n X_{1,2n}(x)Y_{1,2n}(y)$  σε κάθε απλή περιοχή, και ικανοποιούνται όλες οι οριακές συνθήκες, εκτός από τις απαιτήσεις στο επίπεδο  $y = d$ , που εν μέρει αποτελεί εσωτερικό όριο, εν μέρει εξωτερικό, με  $\Phi = U$ . Από αυτές τις απαιτήσεις θα προσδιορισθούν οι συντελεστές  $A_{1n}$  και  $A_{2n}$ . Συγκεκριμένα:

- ο Στη γραμμή  $y = d$ , είναι από την αρχή γνωστό ότι είναι  $\Phi = U$  σε ένα τμήμα της γραμμής, στο τμήμα  $c < x < a$ . Έχουν, όμως, σχηματισθεί εκφράσεις για το δυναμικό τόσο στο συνολικό μήκος  $0 < x < a$ , όπου το δυναμικό έχει τη μορφή  $\Phi = \Phi_1(y=d) = \sum_n X_{1n}(x)Y_{1n}(d)$ ,

επειδή όλο το διάστημα  $0 < x < a$  είναι όριο της περιοχής 1, όσο και στο υπόλοιπο τμήμα  $0 < x < c$ , το οποίο αποτελεί όριο της περιοχής 2 και γι' αυτό εκεί ισχύει η έκφραση  $\Phi = \Phi_2(y=d) = \sum_n X_{2n}(x)Y_{2n}(d)$ . Συνεπώς, στο συνολικό μήκος  $0 < x < a$  ισχύει η ισότητα:

$$\sum_n A_{1n} \sin(h_{1n}x) \sinh(h_{1n}d) = \begin{cases} \sum_n A_{2n} \sin(h_{2n}x) \cosh[h_{2n}(b-d)], & (0 < x < c) \\ U. & (c < x < a) \end{cases}$$

Όμως, στο διάστημα  $0 < x < a$ , στο οποίο αναφέρεται αυτή η ισότητα, οι συναρτήσεις  $X_{1n}(x) = \sin(h_{1n}x)$  αποτελούν ορθογώνια βάση, συνεπώς πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές με τον τυχαίο όρο  $\sin(h_{1n}x)$  και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < x < a$ , στο οποίο αναφέρεται η ορθογωνιότητα, κάθε  $A_{1n}$ , όπως το  $A_{1n'}$ , συνδέεται με όλα τα  $A_{2n}$ :

$$A_{1n'} \frac{a}{2} \sinh(h_{1n'}d) = \sum_n A_{2n} \left\{ \cosh[h_{2n}(b-d)] \int_0^c \sin(h_{1n'}x) \sin(h_{2n}x) dx \right\} + U \int_c^a \sin(h_{1n'}x) dx. \quad (i)$$

- ο Στην ίδια γραμμή  $y = d$  είναι διαθέσιμη και η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $X_{2n}(x) = \sin(h_{2n}x)$ , που αφορά το διάστημα  $0 < x < c$ . Η ορθογωνιότητα αυτή δεν μπορεί να εφαρμοσθεί στην ισότητα των τιμών του δυναμικού στο τμήμα  $0 < x < c$  της γραμμής  $y = d$ , επειδή η ισότητα αυτή έχει μόλις εξασφαλισθεί. Χρειάζεται μια ανεξάρτητη σχέση ισότητας. Αυτή μπορεί να είναι οποιαδήποτε σχέση  $\Phi + \ell \partial \Phi / \partial n$ , αλλά με  $\ell \neq 0$ , γιατί η σχέση (i) προέρχεται από οριακή συνθήκη με  $\ell = 0$ . Με δεδομένη τη σχέση (i) αρκεί η ισότητα των παραγώγων  $\partial \Phi / \partial y$  από τις δύο πλευρές του ενδιαμέσου ορίου. Επειδή δεν υπάρχει επιφανειακό φορτίο, πρέπει να είναι:

$$\sum_n h_{1n} A_{1n} \sin(h_{1n}x) \cosh(h_{1n}d) = - \sum_n h_{2n} A_{2n} \sin(h_{2n}x) \sinh[h_{2n}(b-d)]. \quad (0 < x < c)$$

Αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $X_{2n}(x) = \sin(h_{2n}x)$  στο διάστημα  $0 < x < c$  σχηματίζεται η δεύτερη σχέση, τώρα για το οποιοδήποτε  $A_{2n'}$ :

$$-h_{2n'} A_{2n'} \frac{c}{2} \sinh[h_{2n'}(b-d)] = \sum_n A_{1n} \left\{ h_{1n} \cosh(h_{1n}d) \int_0^c \sin(h_{1n}x) \sin(h_{2n'}x) dx \right\}. \quad (ii)$$

Με τη μορφή πινάκων, οι δύο σχέσεις (i) και (ii) έχουν τη μορφή:

$$[\vec{\mathbf{A}}_1] = [\vec{\mathbf{P}}_{1,2}] \cdot [\vec{\mathbf{A}}_2] + U [\vec{\mathbf{R}}] \quad \text{και} \quad [\vec{\mathbf{A}}_2] = [\vec{\mathbf{Q}}_{2,1}] \cdot [\vec{\mathbf{A}}_1],$$

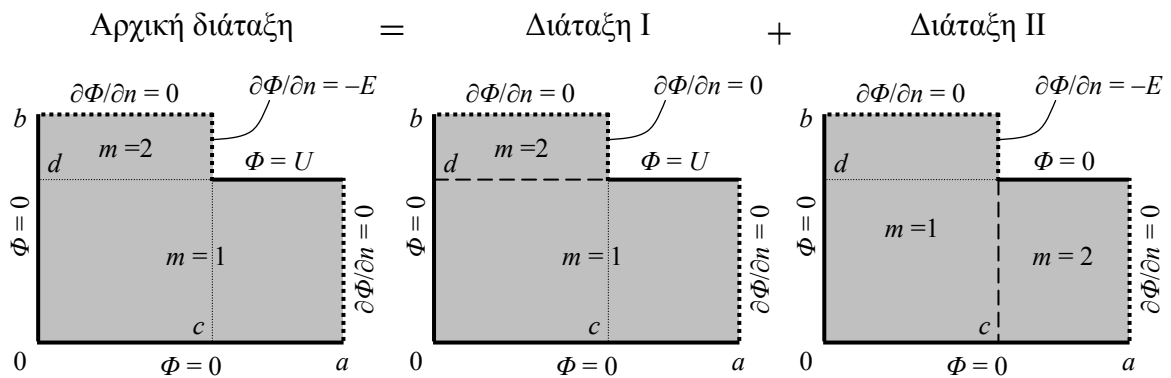
και, απαλείφοντας, σχηματίζεται απειροδιάστατο σύστημα για τους συντελεστές  $A_{1n}$ :

$$\left\{ [\vec{\mathbf{I}}] - [\vec{\mathbf{P}}_{1,2}] \cdot [\vec{\mathbf{Q}}_{2,1}] \right\} \cdot [\vec{\mathbf{A}}_1] = U [\vec{\mathbf{R}}],$$

μετά την επίλυση του οποίου προσδιορίζονται και οι συντελεστές  $A_{2n}$ .

**Σχόλια:**

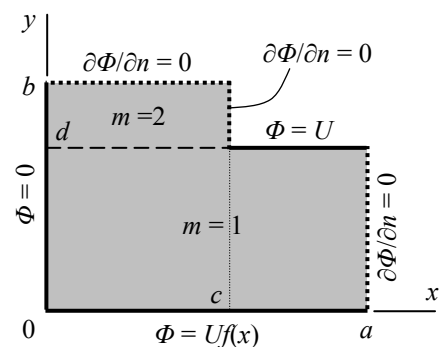
- Αν η διάταξη είχε μη ομογενή οριακή συνθήκη και σε κάποιο όριο με  $x = \text{σταθ.}$ , τότε θα έπρεπε να εφαρμοσθεί επαλληλία. Για παράδειγμα, αν στο όριο  $x = c$  ήταν  $\partial\Phi/\partial n = -E \neq 0$ , τότε στην επαλληλία η Διάταξη I θα είχε σε όλες τις γραμμές  $x = \text{σταθ.}$  οριακή συνθήκη ίδιου τύπου με την αρχική, αλλά ομογενή, και θα επρόκειτο για τη διάταξη που μελετήθηκε, ενώ στη Διάταξη II θα επιβάλλονταν ομογενείς οριακές συνθήκες στις πλευρές  $y = \text{σταθ.}$ , που στη συγκεκριμένη περίπτωση θα αφορούσε μόνο τη συνθήκη στο εξωτερικό μέρος της γραμμής  $y = d$ .



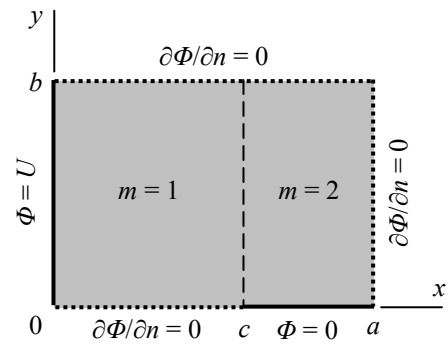
Η επίλυση της Διάταξης II είναι εντελώς χωριστό πρόβλημα από της Διάταξης I. Οι απλές περιοχές 1 και 2 θα διαχωρίζονταν με τη γραμμή  $x = c$ , σε κάθε απλή περιοχή πρώτα θα προσδιορίζονταν οι συναρτήσεις  $Y_{1,2n}$ , που αυτές τώρα αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση, και στην επιφάνεια  $x = c$  θα εξισωνόταν η παράγωγος  $\partial\Phi/\partial x$  από την απλή περιοχή  $m = 1$  για το διάστημα  $0 < y < b$  με την ίδια παράγωγο από την περιοχή  $m = 2$  για το τμήμα  $0 < y < d$  και με  $\partial\Phi/\partial x = -E$  για το τμήμα  $d < y < b$ , κλπ.

- Αν η οριακή συνθήκη στο εξωτερικό όριο  $y = 0$  δεν είναι ομογενής, αλλά είναι  $\Phi|_{y=0} = Uf(x)$ , τότε οι συναρτήσεις  $Y_n$  της περιοχής  $m = 1$  πρέπει να γραφούν ως  $Y_{1n}(y) = A_{1n}\sinh(h_{1n}y) + B_{1n}\cosh(h_{1n}y)$ , με δύο όρους, επειδή τώρα είναι  $Y_{1n}(0) \neq 0$ , οπότε και  $B_{1n} \neq 0$ . Αυτό έχει τις εξής συνέπειες:

- Οι δύο σχέσεις στο  $y = d$  γενικεύονται, ώστε να συμπεριληφθεί και η συνεισφορά του όρου  $B_{1n}\cosh(h_{1n}y)|_{y=d}$  και της παραγώγου του.
  - Η ορθογωνιότητα των  $X_{1n}(x)$  εφαρμόζεται και στην ισότητα  $\sum_n X_{1n}(x)Y_{1n}(0) = Uf(x)$ . Έτσι, σχηματίζεται για κάθε  $n$  πρόσθετη σχέση για τους πρόσθετους αγνώστους  $B_{1n}$ .



**Παράδειγμα 7.2-15:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Η διάταξη είναι σύνθετη, επειδή στο σημείο  $x = a$  της πλευράς  $y = 0$  αλλάζει ο τύπος της οριακής συν-

θήκης, από *Neumann* σε *Dirichlet*. Τα όρια με  $y = \text{σταθ.}$  (στα  $y = 0, y = b$ ) έχουν ομογενείς οριακές συνθήκες, συνεπώς το βήμα ( $a$ ) της διαδικασίας, η επαλληλία, παραλείπεται. Οι δύο απλές περιοχές  $m = 1$  και  $m = 2$  χωρίζονται από τη γραμμή  $x = c$ , η οποία διέρχεται από το σημείο της πλευράς  $y = 0$ , όπου μετατρέπεται η οριακή συνθήκη από *Neumann* σε *Dirichlet*.

Από τις ομογενείς οριακές συνθήκες στις αντιμέτωπες έδρες  $y = 0$  και  $y = b$  σχηματίζονται οι συναρτήσεις  $Y_{1,2n}$  κάθε περιοχής και προσδιορίζονται οι αντίστοιχες σταθερές  $h_{1,2n}$ :

- ο Περιοχή  $m = 1$ :  $Y_{1n}(y) = \cos(h_{1n}y)$ , με  $h_{1n} = (n - 1)\pi/b$ , ώστε  $Y'_{1n}(0) = 0$  και  $Y'_{1n}(b) = 0$ ,
- ο Περιοχή  $m = 2$ :  $Y_{2n}(y) = \sin(h_{2n}y)$ , με  $h_{2n} = (n - 1/2)\pi/b$ , ώστε  $Y_{2n}(0) = 0$  και  $Y'_{2n}(b) = 0$ .

Για τις αντίστοιχες συναρτήσεις  $X_n(x)$  υπάρχει διαθέσιμη ομογενής οριακή συνθήκη μόνο στο άκρο  $x = a$  της περιοχής  $m = 2$ , που επιτρέπει να γίνει η επιλογή  $X_{2n}(x) = C_{2n} \cosh[h_{2n}(a - x)]$ . Για την περιοχή  $m = 1$  κατ' ανάγκη θα συμπεριληφθούν και οι δύο όροι, με μορφή  $X_{1n}(x) = A_{1n} \sinh(h_{1n}x) + B_{1n} \cosh(h_{1n}x)$  όταν  $n = 2, 3, 4, \dots$ , αλλά  $X_{1,n=1}(x) = A_{1,1}x + B_{1,1}$  όταν  $n = 1$ , επειδή τότε είναι  $h_{1,1} = 0$ , όπως συμβαίνει όταν η οριακή συνθήκη είναι τύπου *Neumann* και στα δύο άκρα, όπως εδώ. Το αποτέλεσμα είναι η εμφάνιση συνολικά τριών ομάδων συντελεστών, των  $A_{1n}, B_{1n}$  και  $C_{2n}$ . Οι αντίστοιχες εξισώσεις θα προέλθουν από τις τρεις πληροφορίες που δεν έχουν ακόμα αξιοποιηθεί, συγκεκριμένα την οριακή συνθήκη στο  $x = 0$  και τις συνθήκες συνέχειας της τιμής και της κάθετης παραγώγου του δυναμικού στην ενδιάμεση επιφάνεια  $x = c$  μεταξύ των δύο περιοχών, ενώ η οριακή συνθήκη στο όριο  $x = a$  έχει ήδη χρησιμοποιηθεί για τον σχηματισμό των συναρτήσεων  $X_{2n}(x)$ . Κατά σειρά είναι:

Οριακή συνθήκη στο εξωτερικό όριο  $x = 0$ : Στο όριο αυτό είναι  $X_{1n}(x=0) = A_{1n} \sinh(h_{1n}x)|_{x=0} + B_{1n} \cosh(h_{1n}x)|_{x=0} = B_{1n}$ , όταν  $n \neq 1$ , και  $X_{1,n=1}(x=0) = [A_{1,1}x + B_{1,1}]|_{x=0} = B_{1,1}$ , όταν  $n = 1$ , δηλαδή  $X_{1n}(x=0) = B_{1n}$  για κάθε  $n$ . Με την έκφραση  $\Phi_1 = \sum_n X_{1n}(x) Y_{1n}(y)$  για το δυναμικό της απλής περιοχής  $m = 1$ , εξισώνοντας  $\Phi_1(0, y) = \sum_n X_{1n}(0) Y_{1n}(y) = \sum_n B_{1n} Y_{1n}(y) = U$  και χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $Y_{1n}(y)$  στο διάστημα  $0 < y < b$ , προκύπτουν εξισώσεις για κάθε συντελεστή  $B_{1n}$ :



$$\frac{(1+\delta_{n,1})c}{2}B_{1n} = U \int_0^b \cos(h_{1n}y) dy,$$

όπου το «δέλτα» του *Kronecker* έχει την τιμή  $\delta_{n,n} = 0$ , εκτός αν οι δύο δείκτες ταυτίζονται και τότε έχει την τιμή  $\delta_{n,n} = 1$ . Εδώ, αυτό συμβαίνει όταν  $n = 1$ , επειδή τότε η συνάρτηση  $Y_{1n}$  είναι  $Y_{1n}(y) = 1$  και το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της είναι ίσο με  $c$ , και όχι με  $\frac{1}{2}c$ .

Συνέχεια της τιμής του δυναμικού στο όριο  $x=c$  μεταξύ των δύο περιοχών: Περιγράφεται από την ισότητα  $\Phi_1(x=c, y) = \Phi_2(x=c, y)$ , συνεπώς  $\sum_n X_{1n}(x=c)Y_{1n}(y) = \sum_n X_{2n}(x=c)Y_{2n}(y)$ : Μολονότι οι δύο οικογένειες  $Y_{1n}(y)$  και  $Y_{2n}(y)$  περιέχουν διαφορετικές συναρτήσεις, και οι δύο είναι ορθογώνιες στο διάστημα  $0 < y < b$ . Ας εφαρμοσθεί το ολοκλήρωμα της ορθογωνιότητας με τις συναρτήσεις  $Y_{1n}(y)$ , οπότε σχηματίζονται οι εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} b[A_{1,1}c + B_{1,1}] \\ \frac{b}{2}[A_{1n'} \sinh(h_{1n'}c) + B_{1n'} \cosh(h_{1n'}c)] \end{aligned} \right\} = \sum_n C_{2n} \left\{ \cosh[h_{2n}(a-c)] \int_0^b \sin(h_{2n}y) \cos(h_{1n'}y) dy \right\}.$$

Συνέχεια της παραγώγου του δυναμικού στο όριο  $x=c$  μεταξύ των δύο περιοχών: Τώρα, εξισώνονται οι εκφράσεις των παραγώγων  $(\partial/\partial x)\Phi_{1,2}|_{x=c} = \sum_n X'_{1,2n}(x=c)Y_{1,2n}(y)$ . Έχει, ήδη, χρησιμοποιηθεί η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $Y_{1n}(y)$ , οπότε θα χρησιμοποιηθεί η ορθογωνιότητα των  $Y_{2n}(y)$ . Έτσι σχηματίζονται οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} -\frac{b}{2}C_{2n'}h_{2n'} \sinh[h_{2n'}(a-c)] &= A_{1,1} \int_0^b \sin(h_{2n'}y) dy \\ &+ \sum_{n \geq 2} h_{1n} [A_{1n} \cosh(h_{1n}c) + B_{1n} \sinh(h_{1n}c)] \int_0^b \cos(h_{1n}y) \sin(h_{2n'}y) dy. \end{aligned}$$

Από τις τρεις σχέσεις που έχουν σχηματισθεί, η πρώτη προσδιορίζει αμέσως τις τιμές των  $B_{1n}$ . Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις άλλες δύο σχέσεις, σχηματίζεται γραμμικό σύστημα με δύο ομάδες εξισώσεων, που με μορφή πινάκων είναι:

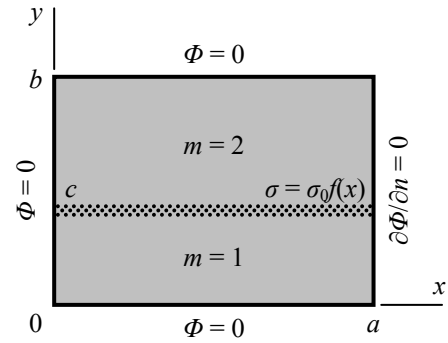
$$[\bar{\mathbf{A}}_1] = [\bar{\mathbf{P}}_{1,2}] \cdot [\bar{\mathbf{C}}_2] + U[\bar{\mathbf{R}}_1] \quad \text{και} \quad [\bar{\mathbf{C}}_2] = [\bar{\mathbf{Q}}_{2,1}] \cdot [\bar{\mathbf{A}}_1] + U[\bar{\mathbf{R}}_2],$$

Απαλείφοντας τους συντελεστές  $C_{2n}$  σχηματίζεται απειροδιάστατο σύστημα για τους συντελεστές  $A_{1n}$ :

$$\left\{ [\bar{\mathbf{I}}] - [\bar{\mathbf{P}}_{1,2}] \cdot [\bar{\mathbf{Q}}_{2,1}] \right\} \cdot [\bar{\mathbf{A}}_1] = U \left\{ [\bar{\mathbf{P}}_{1,2}] \cdot [\bar{\mathbf{R}}_2] + [\bar{\mathbf{R}}_1] \right\},$$

μετά την επίλυση του οποίου προσδιορίζονται και οι συντελεστές  $C_{2n}$ .

**Παράδειγμα 7.2-16:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας η επιτρεπτότητα είναι ίση με  $\epsilon_0$  και δεν υπάρχουν φορτία, εκτός από την επιφάνεια  $y = c$ , όπου υπάρχει επιφανειακό φορτίο  $\sigma = \sigma_0 f(x)$ . Οι διαστάσεις και οι οριακές συνθήκες δίδονται στο σχήμα. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(x, y)$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Η διάταξη είναι σύνθετη, λόγω της παρουσίας του επιφανειακού φορτίου  $\sigma$  στο επίπεδο  $y = c$ . Οι οριακές συνθήκες στα  $x = 0$  και  $x = a$  είναι ομογενείς εξαρχής, οπότε δεν χρειάζεται καμία ειδική παρέμβαση.

Οι δύο απλές περιοχές χωρίζονται από τη φορτισμένη επιφάνεια  $y = c$ . Σε κάθε περιοχή, οι ομογενείς συνθήκες στα άκρα  $x = 0$  και  $x = a$ , κοινές και για τις δύο περιοχές, προσδιορίζουν τις ίδιες συναρτήσεις  $X_n(x) = \sin(h_n x)$ , και με τις ίδιες σταθερές  $h_n = (n - 1/2)\pi/a$ . Οι αντίστοιχες συναρτήσεις  $Y_n$  είναι διαφορετικές σε κάθε μία από τις δύο περιοχές. Η οριακή συνθήκη στο όριο  $y = 0$  υπαγορεύει ότι είναι  $Y_{1n}(y) = A_n \sinh(h_n y)$  για την περιοχή  $m = 1$ , και αντίστοιχα από την οριακή συνθήκη στην πλευρά  $y = b$  προκύπτουν οι συναρτήσεις  $Y_{2n}(y) = C_n \sinh[h_n(b - y)]$  για την περιοχή  $m = 2$ .

Στην οριακή επιφάνεια  $y = c$ , το δυναμικό πρέπει να είναι συνεχές, διαφορετικά θα υπήρχε διπολικό στρώμα, αλλά η κάθετη παράγωγος πρέπει να έχει ασυνέχεια, όπως υπαγορεύεται από τη συνθήκη  $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma$ , δηλαδή  $-(\partial\Phi_2/\partial y - \partial\Phi_1/\partial y)|_{y=c} = (\sigma_0/\epsilon_0)f(x)$ . Εισάγοντας σε αυτές τις δύο συνθήκες τις περιγραφές  $\Phi_{1,2}(x, y) = \sum_n X_n(x) Y_{1,2n}(y)$ , σχηματίζονται οι ισότητες:

$$\begin{aligned} \Phi(c^+) = \Phi(c^-) &\Rightarrow \sum_n C_n \sin(h_n x) \sinh[h_n(b - c)] = \sum_n A_n \sin(h_n x) \sinh(h_n c), \\ -\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)\bigg|_{y=c} &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} f(x) \\ \Rightarrow -\sum_n \left\{ -h_n C_n \sin(h_n x) \cosh[h_n(b - c)] - h_n A_n \sin(h_n x) \cosh(h_n c) \right\} &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} f(x). \end{aligned}$$

Αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα των  $X_n(x)$ , οι σχέσεις αυτές σχηματίζουν ένα απλό σύστημα  $2 \times 2$  για τους συντελεστές  $A_n, C_n$ , χωριστά για κάθε  $n$ :

$$\begin{aligned} A_n \sinh(h_n c) &= C_n \sinh[h_n(b - c)], \\ \frac{a}{2} h_n \left\{ C_n \cosh[h_n(b - c)] + A_n \cosh(h_n c) \right\} &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \int_0^a f(x) \sin(h_n x) dx. \end{aligned}$$

### 7.2.4 Τριδιάστατες διατάξεις με καρτεσιανή δομή

**Συναρτήσεις βάσης σε τρεις διαστάσεις:** Η υπόθεση του χωρισμού των μεταβλητών, ότι το δυναμικό  $\Phi(x, y, z)$  εκφράζεται ως άθροισμα γινομένων  $X(x)Y(y)Z(z)$  και ότι κάθε όρος ικανοποιεί την εξίσωση του *Laplace*, δίνει τη σχέση:

$$\frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0, \quad (7.2-29)$$

και επειδή  $(\partial/\partial x)(\nabla^2 \Phi/\Phi) = (\partial/\partial x)(X''/X) = 0$  κλπ., με διαδικασία όπως στις δύο διαστάσεις:

$$X'' - K_x X = 0, \quad Y'' - K_y Y = 0 \quad \text{και} \quad Z'' - K_z Z = 0. \quad (7.2-30)$$

Όπως σε δύο διαστάσεις, με  $S = (X, Y, Z)$  και  $s = (x, y, z)$ , τα ενδεχόμενα είναι:

- Αν  $K_s = 0 \Rightarrow S(s) = \{s, 1\}$ ,
- Αν  $K_s = -h^2 < 0 \Rightarrow S(s) = \{\sin(hs), \cos(hs)\}$ ,
- Αν  $K_s = +h^2 > 0 \Rightarrow S(s) = \{\sinh(hs), \cosh(hs)\}$ , ή  $\{\exp(hs), \exp(-hs)\}$ .

Τώρα, όμως, η Λαπλασιανή (7.2-29) αποτελείται από τρεις όρους και η απαίτηση για μηδενισμό της είναι  $K_x + K_y + K_z = 0$ . Η απαίτηση αυτή σημαίνει, πως είτε και τα τρία  $K_s$  είναι ίσα με μηδέν, είτε τουλάχιστον ένα, ας πούμε το  $K_x$ , είναι αρνητικό, και τουλάχιστον ένα άλλο είναι υποχρεωτικά θετικό, ας πούμε το  $K_z$ , δηλαδή:

- Είτε  $K_x = K_y = K_z = 0$ , οπότε:

$$\Phi = \{x, 1\} \times \{y, 1\} \times \{z, 1\}. \quad (7.2-31)$$

- Είτε  $K_x = -h_x^2 < 0$ ,  $K_y = +h_y^2 > 0$  και  $K_z = +h_z^2 > 0$ , με  $h_x^2 = (h_y^2 + h_z^2)$ , ή παρόμοια, οπότε:

$$\Phi = \{\sin(h_x x), \cos(h_x x)\} \times \{\sinh(h_y y), \cosh(h_y y)\} \times \{\sinh(h_z z), \cosh(h_z z)\}. \quad (7.2-32)$$

- Είτε π.χ.  $K_x = -h_x^2 < 0$ ,  $K_y = -h_y^2 < 0$  και  $K_z = +h_z^2 > 0$ , δηλαδή τώρα  $h_z^2 = (h_y^2 + h_x^2)$ , οπότε:

$$\Phi = \{\sin(h_x x), \cos(h_x x)\} \times \{\sin(h_y y), \cos(h_y y)\} \times \{\sinh(h_z z), \cosh(h_z z)\}. \quad (7.2-33)$$

Από τα τρία αυτά ενδεχόμενα, το πρώτο συναντάται στην πράξη, αλλά σπάνια, όταν ο παρακείμενος χώρος υπαγορεύει γραμμική εξάρτηση του δυναμικού στο όριο. Το δεύτερο ενδεχόμενο αναφέρεται μόνο για λόγους πληρότητας. Αντίθετα, το τρίτο ενδεχόμενο, με δύο από τις συναρτήσεις  $S(s)$  να είναι ημιτονοειδείς, αποτελεί το θεμέλιο για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος οριακών τιμών σε τριδιάστατες διατάξεις με Καρτεσιανή δομή.

**Λύσεις με λίγους όρους:** Η λύση του προβλήματος οριακών τιμών εκφράζεται ως άθροισμα γινομένων  $\sum X(x)Y(y)Z(z)$  με λίγους όρους, όταν, κατ' αναλογία προς τις δύο διαστάσεις (παράγραφος 7.2.1), (α) οι οριακές συνθήκες δεν επιβάλλουν ασυνέχεια πουθενά, ούτε στις έξι έδρες, ούτε στις δώδεκα ακμές, ούτε στις οκτώ κορυφές της τριδιάστατης διάταξης και (β) στις οριακές συνθήκες εμπλέκονται αποδεκτές συναρτήσεις. Το *παράδ. 7.2-17* παρουσιάζει ένα τέτοιο ενδεχόμενο. Πάντως, στην πράξη δεν συναντώνται διατάξεις με ημιτονοειδή εξάρτηση στις οριακές συνθήκες, και το παράδειγμα αυτό, όπως και συνολικά τα παραδείγματα στην παράγραφο 7.2.1 σε δύο διαστάσεις, χρησιμεύει περισσότερο ως προετοιμασία για την επίλυση με ανάπτυγμα σε σειρά των οριακών συνθηκών.

**Επίλυση απλών διατάξεων με ανάπτυγμα σε σειρά:** Σε απλές τριδιάστατες διατάξεις, η λύση εκφράζεται υποχρεωτικά ως σειρά, όταν αυτό επιβάλλεται από τις οριακές συνθήκες με την παρουσία ασυνέχειας ή την απουσία κατάλληλων συναρτήσεων. Η πορεία αποτελεί επέκταση σε τρεις διαστάσεις της διαδικασίας της παραγράφου 7.2.2, με τα εξής βήματα:

- Εφαρμογή επαλληλίας, με διάσπαση της αρχικής διάταξης σε εν γένει έξι (αντί τρεις) διατάξεις, ώστε σε κάθε επιμέρους διάταξη μόνο σε μία έδρα να είναι η οριακή συνθήκη μη ομογενής, ίδια με της αρχικής διάταξης, ενώ στις υπόλοιπες πέντε έδρες η αρχική οριακή συνθήκη  $\mathcal{L}_\kappa \Phi = f_\kappa$  υποκαθίσταται από ομογενή συνθήκη  $\mathcal{L}_\kappa \Phi = 0$ , ίδιου τύπου (με τον ίδιο τελεστή  $\mathcal{L}_\kappa$ ) με την αρχική, όπου ο τελεστής  $\mathcal{L}$  είναι ίσος με  $\mathcal{L} = 1$  (συνθήκη *Dirichlet*),  $\mathcal{L} = \partial/\partial n$  (συνθήκη *Neumann*) και  $\mathcal{L} = 1 + \ell(\partial/\partial n)$  στη γενική περίπτωση, με  $\ell$  θετικό, σταθερό, και με την ίδια τιμή στην αρχική και στην επιμέρους διάταξη.
- Χρήση των ομογενών οριακών συνθηκών σε δύο ζεύγη από αντιμέτωπες έδρες με τέτοιες συνθήκες, όπως στα  $x = x_0$ ,  $x = x_0 + a$  και  $y = y_0$ ,  $y = y_0 + b$ , για τον προσδιορισμό:
  - των γραμμικών συνδυασμών, εδώ των  $X_n(x) = \{\sin(h_n x), \cos(h_n x)\}$  και  $Y_m(y) = \{\sin(h_m y), \cos(h_m y)\}$ , από τη συνθήκη στη μία έδρα κάθε ζεύγους,
  - των αντίστοιχων σταθερών, εδώ των  $h_x = h_n$  και  $h_y = h_m$ , από τη συνθήκη στην άλλη έδρα κάθε ζεύγους.

Τόσο οι γραμμικοί συνδυασμοί, όσο και οι σταθερές που αντιστοιχούν σε καθεμία από τις δύο αυτές συντεταγμένες προσδιορίζονται αυτοτελώς, γι' αυτό και γίνεται η διαφοροποίηση στους δείκτες  $n$  και  $m$ . Η διαδικασία είναι, πάντως, ακριβώς όπως για τον ένα ημιτονοειδή γραμμικό συνδυασμό σε δύο διαστάσεις (βλ. παράγρ. 7.2.2). Εν γένει είναι  $X_n(x) = \sin(h_n x + \xi_n)$  με  $0 \leq \xi_n \leq \pi/2$  (για  $x_0 = 0$ ), βλ. σχέση (7.2-16), ενώ τα πιο συνηθισμένα ενδεχόμενα οριακών συνθηκών καλύπτονται πάλι από τον **Πίνακα 7.2-1**.

- Επιλογή του κατάλληλου γραμμικού συνδυασμού στην τρίτη διάσταση, ώστε να ικανοποιείται και η πέμπτη ομογενής οριακή συνθήκη. Ήδη, η επιλογή των πρώτων δύο συναρτήσεων ως ημιτονοειδών (δηλαδή με αρνητικά  $K = -h^2$ ), και ο προσδιορισμός των αντίστοιχων σταθερών  $h$  έχει ως συνέπεια, για την τρίτη διάσταση η επιλογή του γραμμικού συνδυασμού να γίνεται μόνο μεταξύ υπερβολικών συναρτήσεων, κατ' εξοχήν κατάλληλων για διατάξεις με πεπερασμένο όγκο, ή εκθετικών, όταν η διάταξη εκτείνεται μέχρι το άπειρο. Σε κάθε περίπτωση, η αντίστοιχη σταθερά είναι  $h_{nm} = (h_n^2 + h_m^2)^{1/2}$ , ώστε να είναι  $K_x + K_y + K_z = 0$  και κάθε γινόμενο  $X(x)Y(y)Z(z)$  να ικανοποιεί τη εξίσωση του Laplace. Για παράδειγμα, αν η τρίτη διάσταση αντιστοιχεί στη συντεταγμένη  $z$  και είναι  $\Phi = 0$  στην έδρα  $z = 0$ , η επιλογή είναι  $Z_{nm}(z) = \sinh(h_{nm}z)$ , αν είναι  $\partial\Phi/\partial n = 0$  στην έδρα  $z = c$ , θα επιλεγεί  $Z_{nm}(z) = \cosh[h_{nm}(z-c)] = \cosh[h_{nm}(c-z)]$ , και αν, τέλος, η ομογενής οριακή συνθήκη αφορά το  $z = +\infty$ , τότε επιλέγεται η εκθετική συνάρτηση,  $Z_{nm}(z) = \exp(-h_{nm}z)$ .
- Αξιοποίηση της ορθογωνιότητας και πληρότητας των ημιτονοειδών συναρτήσεων. Η τελευταία οριακή συνθήκη, η μη ομογενής, μπορεί να εξισωθεί με το διπλό, τώρα, άθροισμα γινομένων από συναρτήσεις που έχουν προσδιορισθεί. Για παράδειγμα, αν η μη ομογενής οριακή συνθήκη αναφέρεται στην έδρα  $z = c$ , το δυναμικό έχει ήδη γραφεί ως  $\Phi = \sum_{nm} A_{nm} X_n(x) Y_m(y) Z_{nm}(z)$  και απομένει μόνο να προσδιορισθούν οι συντελεστές  $A_{nm}$ . Εξισώνοντας με την οριακή συνθήκη  $\mathcal{L}\Phi = f(x, y)$  της έδρας  $z = c$ , είναι:

$$f(x, y) = \mathcal{L}\Phi = \mathcal{L} \left( \sum_{n,m} A_{nm} X_n Y_m Z_{nm} \right) \Big|_{z=c} = \sum_{n,m} A_{nm} X_n(x) Y_m(y) (\mathcal{L} Z_{nm}) \Big|_{z=c}. \quad (7.2-34)$$

Η ισότητα αυτή αποτελεί την επέκταση της ισότητας των σχέσεων (7.2-21) και (7.2-22). Η ισότητα μεταξύ δύο συναρτήσεων δύο μεταβλητών μετατρέπεται αμέσως σε ισότητα για κάθε ζεύγος δεικτών  $(n, m)$ , αν πολλαπλασιασθεί με κάποιο συγκεκριμένο γινόμενο  $X_n(x)Y_m(y)$  και γίνει ολοκλήρωση στη διατομή του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Αν η διατομή είναι στην περιοχή  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , τότε η σχέση (7.2-23) επεκτείνεται σε:

$$A_{nm} \left( \int_0^a X_n^2(x) dx \right) \left( \int_0^b Y_m^2(y) dy \right) (\mathcal{L} Z_{nm}) \Big|_{z=c} = \int_0^a dx X_n(x) \left( \int_0^b dy Y_m(y) f(x, y) \right), \quad (7.2-35)$$

που προσδιορίζει τις τιμές για τους συντελεστές  $A_{nm}$ . Φυσικά, στη δεξιά πλευρά οι δύο ολοκληρώσεις μπορούν να γίνει και με την αντίθετη σειρά.

Τα παραπάνω βήματα παρουσιάζονται και εξειδικεύονται στο *παράδ. 7.2-18*.

**Κυματοδότηση σε κυματοδηγό με ορθογωνική διατομή:** Γενικά, σε απλό ιδανικό κυματοδηγό [ευθύγραμμο, μονοστρωματικό (δηλαδή, με σταθερές τις ιδιότητες  $(\epsilon, \mu)$  στο εσωτερικό του) και με ιδανικά αγωγίμα τοιχώματα, βλ. π.χ. παράγραφο 2.4.3 στο Μέρος Α, ειδικότερα τη σχέση (2.4-76) κ. επ.], γράφοντας τις διαμήκειες συνιστώσες των πεδίων ως  $E_z = E_0 e_z(\mathbf{r}_\perp) \exp(-j\beta z)$  και αντίστοιχα ως  $H_z = H_0 h_z(\mathbf{r}_\perp) \exp(-j\beta z)$ , διαπιστώνεται ότι οι ρυθμοί  $TM$ , με  $H_z = 0$ , και οι ρυθμοί  $TE$ , με  $E_z = 0$ , διαδίδονται αυθυπόστατα. Για οποιαδήποτε από τις δύο αυτές οικογένειες ρυθμών, οι συναρτήσεις  $e_z(\mathbf{r}_\perp)$  και  $h_z(\mathbf{r}_\perp)$  ικανοποιούν τη διδιάστατη εξίσωση του *Helmholtz*,

$$\nabla_\perp^2 \begin{Bmatrix} e_z \\ h_z \end{Bmatrix} + h^2 \begin{Bmatrix} e_z \\ h_z \end{Bmatrix} = 0, \quad (7.2-36)$$

όπου  $\nabla_\perp^2 = \nabla^2 - (\partial^2/\partial z^2)$  είναι η διδιάστατη Λαπλασιανή και  $h^2 = \epsilon\mu\omega^2 - \beta^2$ . Η διαφορική εξίσωση (7.2-36) συνοδεύεται από τις συνθήκες, ότι στο ιδανικά αγωγίμο όριο  $S$  είναι:

$$e_z|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_s} = 0, \quad \left. \frac{\partial h_z}{\partial n} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_s} = 0. \quad (7.2-37)$$

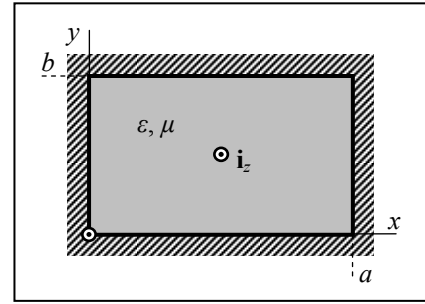
Η εξίσωση του *Helmholtz* αναφέρεται σε φυσικά φαινόμενα με κυματική συμπεριφορά, ενώ η εξίσωση *Laplace* συνήθως αφορά στατικά φαινόμενα. Παρ' όλα αυτά, οι συναρτήσεις  $e_z$  και  $h_z$  μπορούν να προσδιορισθούν από την επίλυση ενός βοηθητικού προβλήματος οριακών τιμών για την εξίσωση του *Laplace*. Ας εξετασθεί η βοηθητική συνάρτηση:

$$F(\mathbf{r}) = \begin{Bmatrix} e_z(\mathbf{r}_\perp) \\ h_z(\mathbf{r}_\perp) \end{Bmatrix} \exp(-hz), \quad (7.2-38)$$

στο εσωτερικό μιας ευθύγραμμης διάταξης, που εκτείνεται στο διάστημα  $0 < z < \infty$  και με διατομή όση του κυματοδηγού. Για τη συνάρτηση αυτή, από τη σχέση (7.2-36) είναι  $\nabla^2 F = 0$ , και οι οριακές συνθήκες στην παράπλευρη επιφάνεια είναι τύπου *Dirichlet* ή *Neumann*, ανάλογα με την περίπτωση στις σχέσεις (7.2-37), στο  $z = \infty$  είναι  $F = 0$  και, τέλος, στη βάση  $z = 0$ , την είσοδο του κυματοδηγού, ας θεωρηθεί γνωστή η κατανομή  $f(\mathbf{r}_\perp)$  του πεδίου  $e_z$  ή  $h_z$ , οπότε εκεί είναι  $F = f(\mathbf{r}_\perp)$ . Συνεπώς, η βοηθητική συνάρτηση  $F(\mathbf{r})$  περιγράφεται από καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών τιμών για την εξίσωση του *Laplace*: Σε κλειστή επιφάνεια προσδιορίζονται οριακές συνθήκες αποδεκτού τύπου.

Ειδικά η περίπτωση κυματοδηγού με ορθογωνική διατομή  $a \times b$ , όπως στο **Σχήμα 7.2-8**, ανήκει ακριβώς στο αντικείμενο της παρούσας παραγράφου. Συγκεκριμένα, η διαδικασία

επίλυσης με ανάπτυγμα σε σειρά, όπως μόλις παρουσιάστηκε, μπορεί να εφαρμοσθεί και στη βοηθητική συνάρτηση  $F$  που ορίζεται στη σχέση (7.2-38) και το αποτέλεσμα να μεταγραφεί αμέσως για τις συναρτήσεις  $\{e_z, h_z\} = F \exp(hz)$ , που αυτές άλλωστε ενδιαφέρουν. Κατά σειρά, η διαδικασία, όπως προσαρμόζεται εδώ, είναι:



Σχήμα 7.2-8

- Οι ομογενείς οριακές συνθήκες (7.2-37) στα εγκάρσια όρια καθορίζουν την εγκάρσια εξάρτηση, ότι είναι  $e_{z, nm}(x, y) = E_{nm} \sin(h_n x) \sin(h_m y)$  για τους ιδιορρυθμούς  $TM$ , και  $h_{z, nm}(x, y) = H_{nm} \cos(h_n x) \cos(h_m y)$  για τους  $TE$ , όπου  $E_{nm}$  και  $H_{nm}$  είναι τα πλάτη του αντίστοιχου ρυθμού και  $h_n = n\pi/a$  και  $h_m = m\pi/b$  είναι εγκάρσιοι κυματοαριθμοί με τις τιμές διακριτές τους.
- Προκειμένου να ικανοποιείται η εξίσωση του *Laplace* από τη βοηθητική συνάρτηση  $F$ , συνεπώς και η σχέση (7.2-38) από τις συναρτήσεις  $e_z$  και  $h_z$ , πρέπει να είναι  $K_x + K_y + K_z = 0$ , που εδώ εξειδικεύεται σε  $h = h_{nm} = (h_n^2 + h_m^2)^{1/2}$ . Για δοσμένη κυκλική συχνότητα  $\omega$ , ο διαμήκης κυματοαριθμός είναι, συνεπώς, ίσος με  $\beta_{nm} = (\epsilon\mu\omega^2 - h_{nm}^2)^{1/2} = (\epsilon\mu\omega^2 - h_n^2 - h_m^2)^{1/2}$ .
- Στη θέση  $z = 0$ , η βοηθητική συνάρτηση  $F$  και οι διαμήκεις συνιστώσες των ρυθμών  $TM$  και  $TE$  ταυτίζονται,  $F(z=0) = \{e_z, h_z\} \exp(-h_{nm}z)|_{z=0} = \{e_z, h_z\}$ . Η συνθήκη  $F(z=0) = f(\mathbf{r}_{\perp}) = f(x, y)$  περιγράφει, συνεπώς, ποια είναι η εγκάρσια κατανομή του πεδίου στην είσοδο του κυματοδηγού. Στη συνάρτηση  $f(x, y)$  περιλαμβάνονται όλοι οι ιδιορρυθμοί,  $TM$  ή  $TE$ , ανάλογα με την περίπτωση. Εξισώνοντας τη διέγερση  $f(x, y)$  με το άθροισμα των ιδιορρυθμών, είναι:

$$f_{TM}(x, y) = \sum_{n,m} E_{nm} \sin(h_n x) \sin(h_m y),$$

$$f_{TE}(x, y) = \sum_{n,m} H_{nm} \cos(h_n x) \cos(h_m y).$$
(7.2-39)

Χρησιμοποιώντας, τέλος, την ορθογωνιότητα των γινομένων  $X_n(x)Y_m(y)$ , προσδιορίζονται τα πλάτη κάθε συστατικού ρυθμού:

$$E_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy f_{TM}(x, y) \sin(h_n x) \sin(h_m y),$$

$$H_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b dy f_{TE}(x, y) \cos(h_n x) \cos(h_m y).$$
(7.2-40)

Οι σύνθετες τριδιάστατες διατάξεις με καρτεσιανή δομή χαρακτηρίζονται από ιδιότητες όπως αυτές που έχουν καταγραφεί στην παράγραφο 7.2.3, αλλά σε τρεις διαστάσεις τώρα, δηλαδή:

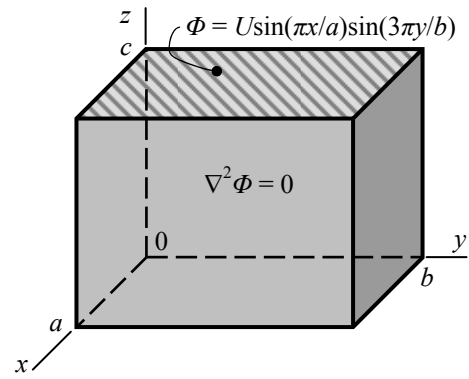
- ο Στο εξωτερικό όριο υπάρχουν και ενδιάμεσες επιφάνειες, με  $x = \text{σταθ.}$ , ή/και  $y = \text{σταθ.}$ , ή/και  $z = \text{σταθ.}$ . Τέτοια είναι η διάταξη στο **Σχήμα 7.1-2α**.
- ο Σε κάποια έδρα η οριακή συνθήκη αλλάζει τύπο, αλλά κατά μήκος μιας γραμμής με  $x = \text{σταθ.}$ , ή με  $y = \text{σταθ.}$ , ή με  $z = \text{σταθ.}$ .
- ο Στο εσωτερικό της διάταξης και σε επιφάνεια  $s = \text{σταθ.}$ , με  $s = (x, y, z)$ , υπάρχει επιφανειακό φορτίο  $\sigma$ , ή άλλο αίτιο κατανεμημένο σε επιφάνεια, που κατά τη διάσπαση  $\Phi = \Phi_{\text{ειδ}} + \Phi_{\text{συμ}}$  δεν έχει συμπεριληφθεί στην ειδική λύση, ή ασυνέχεια στις ιδιότητες του χώρου.

Τέτοιες διατάξεις αντιμετωπίζονται με γενίκευση της διαδικασίας της παραγράφου 7.2.3, όπως επιδεικνύεται και στο **παράδ. 7.2-19**. Συγκεκριμένα:

- (α) Η σύνθετη διάταξη διασπάται σε τρεις επιμέρους διατάξεις  $j = 1, 2, 3$ , μηδενίζοντας στη διάταξη  $j$  κάθε συνεισφορά στο δυναμικό από κάθε επιφάνεια  $s_{j\pm 1} = \text{σταθ.}$
- (β) Καθεμία από αυτές τις τρεις διατάξεις χωρίζεται σε περιοχές  $\kappa$ , που είναι μεταξύ τους σε επαφή στα ενδιάμεσα επίπεδα όρια, όπως τα  $s_3 = \text{σταθ.}$  για τη διάταξη  $j = 3$ .
- (γ) Σε κάθε περιοχή  $\kappa$ , οι ομογενείς οριακές συνθήκες προσδιορίζουν τους γραμμικούς συνδυασμούς ημιτονοειδών συναρτήσεων, τους συνδυασμούς  $S_{1n,\kappa}(s_1)$  και  $S_{2m,\kappa}(s_2)$  για τη διάταξη  $j = 3$  κλπ., καθώς και τις αντίστοιχες σταθερές  $h_{n,\kappa}$  και  $h_{m,\kappa}$ .
- (δ) Με τις τιμές των σταθερών  $h_{n,\kappa}$  και  $h_{m,\kappa}$  προσδιορίζονται οι τιμές των  $h_{nm,\kappa} = (h_{n,\kappa}^2 + h_{m,\kappa}^2)^{1/2}$  και σχηματίζονται οι γραμμικοί συνδυασμοί  $S_{3nm,\kappa}(s_3)$  από υπερβολικές ή εκθετικές συναρτήσεις.
- (ε) Στα δύο ακραία όρια, όπως τα  $s_3 = s_{3\max}$  και  $s_3 = s_{3\min}$  της διάταξης  $j = 3$ , επιβάλλονται οι αρχικές οριακές συνθήκες στις εκφράσεις  $\Phi_\kappa = \sum_{nm} S_{1n,\kappa}(s_1) S_{2m,\kappa}(s_2) S_{3nm,\kappa}(s_3 = s_{3\max/\min})$  των αντίστοιχων περιοχών, και η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $S_{1n,\kappa}(s_1)$  και  $S_{2m,\kappa}(s_2)$  προσδιορίζει σχέση μεταξύ των δύο συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού  $S_{3nm,\kappa}(s_3)$ .
- (ζ) Σε κάθε ενδιάμεση επιφάνεια, όπως τις  $s_3 = s_{3\ell}$  για τη διάταξη  $j = 3$ , εφαρμόζονται οι συνθήκες συνέχειας στο δυναμικό και στην κάθετη παράγωγό του, ή της απαιτούμενης ασυνέχειας, αν εκεί υπάρχει κατανεμημένο αίτιο, όπως  $\sigma$  κλπ., χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις  $\Phi_\kappa = \sum_{nm} S_{1n,\kappa}(s_1) S_{2m,\kappa}(s_2) S_{3nm,\kappa}(s_3 = s_{3\ell})$  των παρακείμενων περιοχών, και η ορθογωνιότητα δίνει δύο γραμμικές σχέσεις που συνδέουν τους συντελεστές των δύο  $S_{3nm,\kappa}$ .



**Παράδειγμα 7.2-17:** Στο εσωτερικό του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις  $a \times b \times c$  ικανοποιείται η εξίσωση του Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Στις πέντε από τις έξι έδρες είναι  $\Phi = 0$ , ενώ στην πάνω έδρα είναι  $\Phi(z=c) = U \sin(\pi x/a) \sin(3\pi y/b)$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό του παραλληλεπιπέδου.

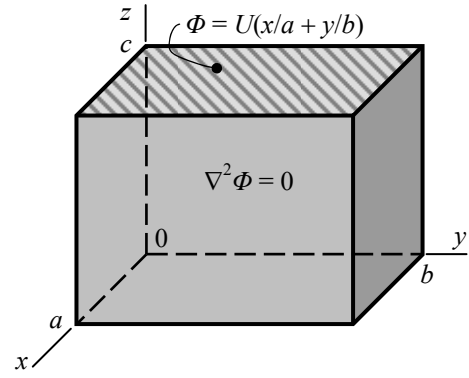


**Επίλυση:** Οι οριακές συνθήκες περιγράφονται από συνεχείς συναρτήσεις και στις έξι έδρες, οπότε δεν τίθεται θέμα ασυνέχειας σε κάποια έδρα. Η συνάρτηση  $\sin(\pi x/a)$  μηδενίζεται όταν  $x = 0$ , καθώς και όταν  $x = a$ , ενώ η συνάρτηση  $\sin(3\pi y/b)$  μηδενίζεται όταν  $y = 0$ , καθώς και όταν  $y = b$ , συνεπώς, το γινόμενο τους μηδενίζεται σε ολόκληρο το περίγραμμα της πάνω έδρας (στις τέσσερες ακμές και στις τέσσερεις κορυφές), σε συμφωνία με την οριακή συνθήκη  $\Phi = 0$  στις παράπλευρες έδρες και ακμές. Επίσης, στην οριακή συνθήκη  $\Phi = U \sin(\pi x/a) \sin(3\pi y/b)$  εμφανίζονται οι συναρτήσεις  $\sin(\pi x/a)$  και  $\sin(3\pi y/b)$ , που είναι αποδεκτές για να εκφρασθεί το δυναμικό με μορφή γινομένου.

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, επιλέγεται  $X(x) = \sin(\pi x/a)$  και  $Y(y) = \sin(3\pi y/b)$ . Συνέπεια των επιλογών αυτών είναι ότι το γινόμενο  $X(x)Y(y)Z(z)$  μηδενίζεται όταν  $x = 0$  ή  $x = a$ , αλλά επίσης και όταν  $y = 0$  ή  $y = b$ , δηλαδή το γινόμενο ικανοποιεί την οριακή συνθήκη  $\Phi = 0$  στις τέσσερες παράπλευρες έδρες, όποια και να είναι η επιλογή για τη συνάρτηση  $Z(z)$ . Επίσης, οι συναρτήσεις  $X(x)$  και  $Y(y)$ , ως ημιτονοειδείς, αντιστοιχούν σε αρνητικά  $K_x = -h_x^2 = -(\pi/a)^2$  και  $K_y = -h_y^2 = -(3\pi/b)^2$ , οπότε είναι  $K_z = +h_z^2 = (h_y^2 + h_x^2) > 0$ , και συγκεκριμένα  $h_z^2 = (\pi/a)^2 + (3\pi/b)^2$ , με συναρτήσεις  $Z(z)$  εκθετικές ή υπερβολικές. Εδώ, βέβαια, δεν διευκολύνουν οι εκθετικές συναρτήσεις, των οποίων η χρήση ταιριάζει σε διατάξεις που εκτείνονται μέχρι το θετικό, ή το αρνητικό, άπειρο. Εξυπηρετεί η χρήση των υπερβολικών συναρτήσεων, και μάλιστα ο γραμμικός συνδυασμός, με γενική μορφή  $Z(z) = \{\sinh(h_z z), \cosh(h_z z)\}$ , να εξειδικευθεί σε  $Z(z) = A \sinh(h_z z)$ , με βάση την ομογενή οριακή συνθήκη στην έδρα  $z = 0$ . Όλοι οι όροι του γινομένου  $\Phi = X(x)Y(y)Z(z)$  έχουν προσδιορισθεί, εκτός από τον συντελεστή  $A$  στη συνάρτηση  $Z(z)$ . Παράλληλα, όλες οι απαιτήσεις του προβλήματος ικανοποιούνται ( $\nabla^2 \Phi = 0$  στο εσωτερικό,  $\Phi = 0$  στις πέντε έδρες), εκτός από τη συνθήκη στην πάνω έδρα. Θέτοντας, όμως,  $X(x)Y(y)Z(z=c) = U \sin(\pi x/a) \sin(3\pi y/b)$  προσδιορίζεται η σταθερά  $A$ , και, τελικά, το αποτέλεσμα είναι:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{U}{\sinh(h_z c)} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{b} y\right) \sinh(h_z z), \quad \text{με } h_z^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{b}\right)^2.$$

**Παράδειγμα 7.2-18:** Στο εσωτερικό του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις  $a \times b \times c$  ικανοποιείται η εξίσωση του Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Στις πέντε (από τις έξι) έδρες είναι  $\Phi = 0$ , ενώ στην πάνω έδρα  $z = c$  είναι  $\Phi = U(x/a + y/b)$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό του παραλληλεπίπεδου.



**Επίλυση:** Οι οριακές συνθήκες έχουν ασυνέχεια σε όλες τις 4 ακμές της έδρας  $z = c$ , οπότε είναι απαραίτητο να εκφρασθεί το δυναμικό ως σειρά. Εξαρχής υπάρχουν δύο ζεύγη αντιμέτωπων εδρών ( $x = 0$  και  $x = a$  αφενός,  $y = 0$  και  $y = b$ , αφετέρου) με ομογενείς οριακές συνθήκες, συνεπώς δεν απαιτείται επαλληλία.

Για να είναι  $\Phi(x=0) = 0$  και  $\Phi(x=a) = 0$ , η εξάρτηση από τη συντεταγμένη  $x$  θα είναι  $X_n(x) = \sin(h_n x)$  με  $h_n a = n\pi$ , όπου  $K_x = -h_n^2 < 0$ , ενώ από τις ομογενείς οριακές συνθήκες,  $\Phi(y=0) = 0$  και  $\Phi(y=b) = 0$ , προσδιορίζεται ότι  $Y_m(y) = \sin(h_m y)$  με  $h_m b = m\pi$ ,  $K_y = -h_m^2$ , με  $n, m = 1, 2, 3, \dots$ . Για την τρίτη συνάρτηση, τη  $Z_{nm}(z)$ , πρέπει να είναι  $K_z = -(K_x + K_y) = h_n^2 + h_m^2 = (n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2 = h_{nm}^2 > 0$ , συνεπώς η συνάρτηση αυτή θα είναι γραμμικός συνδυασμός υπερβολικών ή εκθετικών συναρτήσεων. Η πέμπτη οριακή συνθήκη,  $\Phi(z=0) = 0$ , υποδεικνύει την επιλογή  $Z_{nm}(z) = A_{nm} \sinh(h_{nm} z)$ . Επομένως, το δυναμικό περιγράφεται από τη διπλή σειρά:

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m} A_{nm} \sin(h_n x) \sin(h_m y) \sinh(h_{nm} z).$$

Απομένει να προσδιορισθούν οι συντελεστές  $A_{nm}$ . Εξισώνοντας το δυναμικό  $\Phi(x, y, z=c)$ , εκφραζόμενο από τη διπλή σειρά, με την οριακή συνθήκη στην έδρα  $z = c$  δίνει την ισότητα:

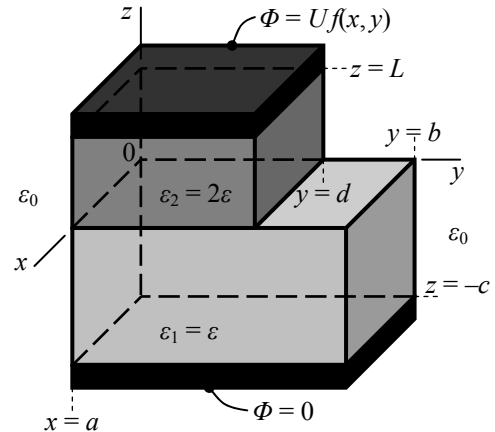
$$\sum_{n,m} A_{nm} \sinh(h_{nm} c) \sin(h_n x) \sin(h_m y) = U \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$

Η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $X_n(x) = \sin(h_n x)$  και  $Y_m(y) = \sin(h_m y)$  αντίστοιχα στα διαστήματα  $0 < x < a$  και  $0 < y < b$  αξιοποιείται, πολλαπλασιάζοντας την ισότητα με το γινόμενο  $X_n(x)Y_m(y) = \sin(h_n x)\sin(h_m y)$  και ολοκληρώνοντας στην περιοχή του ορθογώνιου ( $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ). Κατά τη διαδικασία, χρησιμοποιούνται και οι σχέσεις (7.2-19α) για τα ολοκληρώματα των  $X_n^2(x)$  και  $Y_m^2(y)$ , οπότε προκύπτει:

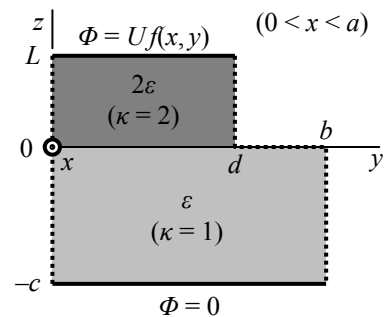
$$A_{nm} \frac{a}{2} \frac{b}{2} \sinh(h_{nm} c) = U \int_0^a dx \int_0^b dy \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \sin(h_n x) \sin(h_m y),$$

η σχέση για τους συντελεστές  $A_{nm}$ , ενώ έχουν ήδη προσδιορισθεί οι σταθερές  $h_n = n\pi/a$ ,  $h_m = m\pi/b$  και  $h_{nm} = [(n\pi/a)^2 + (m\pi/b)^2]^{1/2}$ , με  $n$  και  $m = 1, 2, 3, \dots$

**Παράδειγμα 7.2-19:** Δύο εξαρτήματα, με σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με το πρώτο να έχει διαστάσεις  $a \times b \times c$  και το δεύτερο  $a \times d \times L$ , με  $d < b$ , αποτελούνται από ομογενή διηλεκτρικά υλικά, το πρώτο με επιτρεπτότητα ίση με  $\epsilon_1 = \epsilon$  ( $\gg \epsilon_0$ ) και το δεύτερο με  $\epsilon_2 = 2\epsilon$ . Τα εξαρτήματα είναι τοποθετημένα, όπως φαίνεται στο σχήμα, μεταξύ δύο αγωγικών βάσεων, από τις οποίες η κάτω βάση είναι γειωμένη ( $\Phi = 0$ ), ενώ στην πάνω βάση το ηλεκτροστατικό δυναμικό περιγράφεται από σχέση  $\Phi = Uf(x, y)$ , με τη συνάρτηση  $f(x, y)$  να θεωρείται γνωστή (ενδεχομένως, από την επίλυση ενός χωριστού προβλήματος μόνιμης ροής ρεύματος). Στον υπόλοιπο χώρο βρίσκεται αέρας, με επιτρεπτότητα  $\epsilon_0$ . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi_{1,2}$  στο εσωτερικό των δύο διηλεκτρικών εξαρτημάτων.



**Επίλυση:** Στις έδρες  $z = -c$  και  $z = L$  η κατανομή του δυναμικού είναι όπως στον παρακείμενο αγωγό,  $\Phi(z = -c) = 0$  και  $\Phi(z = L) = Uf(x, y)$ , επειδή είναι  $\Phi_+ = \Phi_-$ , όταν δεν υπάρχει διπολικό στρώμα. Στις υπόλοιπες εξωτερικές έδρες, μεταξύ των οποίων είναι και το τμήμα  $0 < x < a, d < y < b$  του  $z = 0$ , καθώς και οι έδρες με  $x = 0$  και  $x = a$ , η ιδιότητα  $\epsilon_0 \ll \epsilon, 2\epsilon$  του παρακείμενου χώρου επιτρέπει την προσέγγιση  $\mathbf{D}_0 \approx 0$ , που από τη σχέση  $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma$  ( $= 0$  μεταξύ μονωτών) οδηγεί στο συμπέρασμα  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , ιδιότητα που στο σχήμα αποδίδεται με γραμμή με στιγμές. Στο εσωτερικό κάθε διηλεκτρικού είναι  $\epsilon_{1,2} = \text{σταθ.}$  και  $\rho = 0$ , συνεπώς το δυναμικό περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace, που συνοδεύεται από τις συνθήκες συνέχειας στην διεπιφάνεια  $z = 0$  (φυσικά, μόνο στο τμήμα  $0 < x < a, 0 < y < d$ ), στην οποία είναι  $p_{S\perp} = 0$  και  $\sigma = 0$ . Συνολικά, οι οριακές συνθήκες σημειώνονται στο σχήμα, και στο εσωτερικό της διάταξης το δυναμικό υπακούει στις σχέσεις:



$$\nabla^2 \Phi_{1,2} = 0,$$

$$\Phi_2(z = 0^+) = \Phi_1(z = 0^-) \quad \text{και} \quad \epsilon_2 \left. \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right|_{z=0^+} = \epsilon_1 \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{z=0^-}.$$

Η διάταξη είναι σύνθετη, επειδή υπάρχει ενδιαμέσο εξωτερικό όριο, αλλά και επειδή στην επιφάνεια  $z = 0$  υπάρχει αλλαγή στις ιδιότητες του χώρου. Θα ακολουθηθούν, κατά σειρά, τα βήματα της διαδικασίας:

- (α) Όλες οι εξωτερικές επιφάνειες με  $x = \text{σταθ.}$  και με  $y = \text{σταθ.}$  έχουν ομογενείς οριακές συνθήκες, και δεν υπάρχει ενδιάμεσο επιφανειακό αίτιο ασυνέχειας σε τέτοιες επιφάνειες. Συνεπώς, δεν υπάρχει ανάγκη προκαταρκτικής διάσπασης για εφαρμογή επαλληλίας.
- (β) Προφανώς κάθε διηλεκτρικό εξάρτημα αντιστοιχεί σε μία απλή διάταξη. Στην επιφάνεια  $z = 0$  βρίσκονται και τα δύο αίτια που καθιστούν τη διάταξη σύνθετη: η αλλαγή ιδιοτήτων από  $\varepsilon$  σε  $2\varepsilon$ , και το ενδιάμεσο εξωτερικό όριο. Συνεπώς, δεν υπάρχει ανάγκη για τρίτη επιμέρους απλή διάταξη. Ας ονομασθεί  $\kappa = 1$  το εξάρτημα με διαστάσεις  $a \times b \times c$  και με  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , και  $\kappa = 2$  εκείνο με διαστάσεις  $a \times d \times L$  και με  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$ .
- (γ) Οι ομογενείς οριακές συνθήκες σε αντιμέτωπες εξωτερικές έδρες προσδιορίζουν τους γραμμικούς συνδυασμούς από ημιτονοειδείς συναρτήσεις:

$$X_{n,\kappa}(x) = \cos(h_{n,\kappa}x), \quad \text{με} \quad h_{n,1} = h_{n,2} = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y_{m,\kappa}(y) = \cos(h_{m,\kappa}y), \quad \text{με} \quad h_{m,1} = \frac{m\pi}{b} \quad \text{και} \quad h_{m,2} = \frac{m\pi}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Επειδή και στις δύο αντιμέτωπες έδρες επικρατεί ομογενής συνθήκη *Neumann*,  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , στις τιμές των  $n$  και  $m$  περιλαμβάνεται και το μηδέν, με αντίστοιχες συναρτήσεις τις  $X_{0,\kappa}(x) = 1$  και  $Y_{0,\kappa}(y) = 1$ .

- (δ) Σε κάθε ζευγάρι τιμών των σταθερών  $h_{n,\kappa}$  και  $h_{m,\kappa}$  αντιστοιχεί για τις συναρτήσεις  $Z_{nm,\kappa}(z)$  η σταθερά:

$$h_{nm,\kappa} = \sqrt{h_{n,\kappa}^2 + h_{m,\kappa}^2}.$$

Είναι  $h_{nm,\kappa} \neq 0$ , εκτός από το ενδεχόμενο  $n = m = 0$ , το οποίο πρέπει να εξετασθεί χωριστά, επειδή αντιστοιχεί σε  $h_{00,\kappa} = 0$ . Για την περιοχή  $\kappa = 1$ , με  $-c < z < 0$ , η ομογενής συνθήκη  $\Phi = 0$  στο άκρο  $z = -c$  επιτρέπει να εξειδικευθούν οι συναρτήσεις, ως:

$$Z_{00,1}(z) = A_{00} \cdot (z + c) \quad \text{και} \quad Z_{nm,1}(z) = A_{nm} \sinh[h_{nm,1}(z + c)].$$

Για την περιοχή  $\kappa = 2$ , με  $0 < z < h$ , δεν υπάρχει στο όριο  $z = L$  ομογενής οριακή συνθήκη προς αξιοποίηση, οπότε οι αντίστοιχες συναρτήσεις  $Z_{nm,2}$  θα γραφούν με δύο όρους. Η επικείμενη εφαρμογή της οριακής συνθήκης στο όριο  $z = L$  υποδεικνύει ως πιο πρόσφορο να γραφούν οι συναρτήσεις ως:

$$Z_{00,2}(z) = B_{00} \cdot (L - z) + C_{00},$$

$$Z_{nm,2}(z) = B_{nm} \sinh[h_{nm,2}(L - z)] + C_{nm} \cosh[h_{nm,2}(L - z)].$$

Με τις συναρτήσεις  $X_{n,\kappa}$ ,  $Y_{m,\kappa}$  και  $Z_{nm,\kappa}$ , καθώς και τις σταθερές  $h_{n,\kappa}$ ,  $h_{m,\kappa}$  και  $h_{nm,\kappa}$ , που προσδιορίστηκαν στα βήματα (γ) και (δ), σε κάθε περιοχή  $\kappa$ , το δυναμικό εκφράζεται ως:

$$\Phi_{\kappa}(x, y, z) = \sum_{n,m} X_{n,\kappa}(x) Y_{m,\kappa}(y) Z_{nm,\kappa}(z), \quad (i)$$

και απομένουν προς προσδιορισμό οι συντελεστές  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  και  $C_{nm}$ .

- (ε) Η οριακή συνθήκη στο ακραίο όριο  $z = -c$  έχει ήδη χρησιμοποιηθεί. Στο άλλο ακραίο όριο  $z = L$ , η οριακή συνθήκη περιγράφεται από την ισότητα  $\Phi_{\kappa=2}(x, y, z=L) = Uf(x, y)$ . Στην αριστερή πλευρά εμπλέκονται οι τιμές  $Z_{nm,2}(z=L)$ , οι οποίες είναι απλά ίσες με  $Z_{nm,2}(z=L) = C_{nm}$ , χάρη στη συγκεκριμένη επιλογή για τους γραμμικούς συνδυασμούς  $Z_{nm,2}$  στο προηγούμενο βήμα. Έτσι, η οριακή συνθήκη στο όριο  $z = L$  γράφεται:

$$\sum_{n,m} X_{n,2}(x) Y_{m,2}(y) C_{nm} = Uf(x, y),$$

και αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $X_{n,2}(x)$  και  $Y_{m,2}(y)$  στην περιοχή  $0 < x < a$ ,  $0 < y < d$  σχηματίζεται η σχέση:

$$\frac{(1 + \delta_{n,0})a}{2} \frac{(1 + \delta_{m,0})d}{2} C_{nm} = U \int_0^a dx X_{n,2}(x) \int_0^d dy Y_{m,2}(y) f(x, y). \quad (ii)$$

Από τη σχέση αυτή προσδιορίζονται οι συντελεστές  $C_{nm}$ . Υπενθυμίζεται ο συμβολισμός  $\delta_{n,0} = 1$ , όταν  $n = 0$ , και  $\delta_{n,0} = 0$ , όταν  $n \neq 0$ .

- (ζ) Απομένουν οι δύο συνθήκες συνέχειας στην επιφάνεια  $z = 0$ , αλλά και η συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$  στο τμήμα  $0 < x < a$ ,  $d < y < b$  του ίδιου επιπέδου  $z = 0$ . Κατά σειρά:

ο Η συνθήκη  $\Phi_+ = \Phi_-$  αφορά μόνο την περιοχή  $0 < x < a$ ,  $0 < y < d$  και γράφεται:

$$\sum_{n,m} X_{n,2}(x) Y_{m,2}(y) Z_{nm,2}|_{z=0} = \sum_{n,m} X_{n,1}(x) Y_{m,1}(y) Z_{nm,1}|_{z=0}.$$

Οι συναρτήσεις  $X_{n,2}(x)$  είναι ορθογώνιες στο διάστημα  $0 < x < a$  και οι συναρτήσεις  $Y_{m,2}(y)$  ομοίως στο διάστημα  $0 < y < d$ . (Δηλαδή, η ορθογωνιότητα των δύο αυτών οικογενειών συναρτήσεων αφορά την περιοχή που ισχύει αυτή η ισότητα). Συνεπώς, πολλαπλασιασμός με κάποιο γινόμενο  $X_{n,2}(x)Y_{m,2}(y)$  και ολοκλήρωση στην περιοχή  $0 < x < a$ ,  $0 < y < d$  διατηρεί στην αριστερή πλευρά μόνο έναν όρο. Στη γενική περίπτωση, στη δεξιά πλευρά παραμένει το διπλό άθροισμα, όχι, όμως, εδώ, που είναι  $X_{n,1}(x) = X_{n,2}(x)$ , καθώς και οι δύο περιοχές έχουν το ίδιο πλάτος  $\Delta x = a$  και τις ίδιες οριακές συνθήκες στα άκρα του. Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι:

$$\frac{(1 + \delta_{m,0})d}{2} Z_{nm,2}|_{z=0} = \sum_{m'} Z_{nm',1}|_{z=0} \int_0^d dy Y_{m',1}(y) Y_{m,2}(y). \quad (iii)$$

Οι τιμές των συναρτήσεων  $Z_{nm,\kappa}$  στο  $z = 0$  είναι:

$$Z_{00,2}|_{z=0} = B_{00}L + C_{00} \quad \text{και} \quad Z_{nm,2}|_{z=0} = B_{nm} \sinh(h_{nm,2}h) + C_{nm} \cosh(h_{nm,2}h),$$

$$Z_{00,1}|_{z=0} = A_{00}c \quad \text{και} \quad Z_{nm',1}|_{z=0} = A_{nm'} \sinh(h_{nm',1}c).$$

Με δεδομένο ότι οι συντελεστές  $C_{nm}$  έχουν ήδη προσδιορισθεί στη σχέση (ii) του βήματος ( $\varepsilon$ ), η σχέση (iii) δίνει την τιμή κάθε συντελεστή  $B_{nm}$  ως γραμμική σχέση όλων των συντελεστών  $A_{nm}$ .

- ο Για την παράγωγο  $\partial\Phi/\partial z$  στο επίπεδο  $z = 0$  υπάρχουν πληροφορίες σε ολόκληρη την περιοχή  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ , στο τμήμα  $0 < y < d$  από τη συνθήκη  $(\varepsilon E)_+ = (\varepsilon E)_-$  και στο υπόλοιπο τμήμα  $d < y < b$  απλά ότι είναι  $\partial\Phi/\partial n = 0$ . Αυτές οι πληροφορίες περιγράφονται από τη σχέση:

$$\varepsilon_1 \sum_{n,m} X_{n,1}(x) Y_{m,1}(y) \frac{dZ_{nm,1}}{dz} \Big|_{z=0} = \begin{cases} \varepsilon_2 \sum_{n,m} X_{n,2}(x) Y_{m,2}(y) \frac{dZ_{nm,2}}{dz} \Big|_{z=0} & (0 < y < d), \\ 0 & (d < y < b). \end{cases}$$

Θα αξιοποιηθεί η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $X_{n,1}(x)$  στο διάστημα  $0 < x < a$  και των συναρτήσεων  $Y_{m,1}(y)$  στο διάστημα  $0 < y < b$ . Επειδή είναι  $X_{n,2}(x) = X_{n,1}(x)$ , ο πολλαπλασιασμός με κάποιο  $X_{n,1}(x)$  και η ολοκλήρωση στο διάστημα  $0 < x < a$  διατηρεί και στις δύο πλευρές μόνο τους όρους με το συγκεκριμένο  $n$ . Ακολουθώντας, πολλαπλασιασμός με κάποιο  $Y_{m,1}(y)$  με ολοκλήρωση στο διάστημα  $0 < y < b$ , με τη δεξιά πλευρά να δίνει μη μηδενική συνεισφορά μόνο από το διάστημα  $0 < y < d$ , διατηρεί στην αριστερή πλευρά μόνο τον όρο με το συγκεκριμένο  $m$ , αλλά στη δεξιά πλευρά παραμένει το άθροισμα. Συγκεκριμένα, προκύπτει:

$$\frac{(1 + \delta_{m,0})b}{2} \frac{dZ_{nm,1}}{dz} \Big|_{z=0} = 2 \sum_{m'} \frac{dZ_{nm',2}}{dz} \Big|_{z=0} \int_0^d dy Y_{m',2}(y) Y_{m,1}(y). \quad (iv)$$

Οι παράγωγοι που εμφανίζονται είναι ίσες με:

$$\frac{dZ_{00,1}}{dz} \Big|_{z=0} = A_{00} \quad \text{και} \quad \frac{dZ_{nm,1}}{dz} \Big|_{z=0} = k_{nm,1} A_{nm} \cosh(h_{nm,1}c),$$

$$\frac{dZ_{00,2}}{dz} \Big|_{z=0} = -B_{00} \quad \text{και} \quad \frac{dZ_{nm',2}}{dz} \Big|_{z=0} = -k_{nm,2} B_{nm} \cosh(h_{nm,2}h) - k_{nm,2} C_{nm} \sinh(h_{nm,2}h),$$

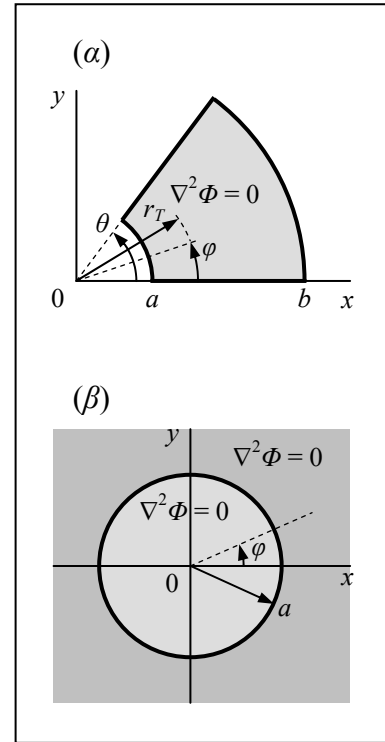
άρα, η σχέση (iv) συνδέει γραμμικά κάθε συντελεστή  $A_{nm}$  με όλους τους  $B_{nm}$ .

Συνοψίζοντας, το δυναμικό δίδεται από τη σχέση (i), με τις συναρτήσεις  $X_{n,\kappa}$ ,  $Y_{m,\kappa}$  και  $Z_{nm,\kappa}$ , καθώς και τις σταθερές  $h_{n,\kappa}$ ,  $h_{m,\kappa}$  και  $h_{nm,\kappa}$ , όπως αναφέρονται στα βήματα ( $\gamma$ ) και ( $\delta$ ). Από τους συντελεστές, οι  $C_{nm}$  προσδιορίζονται απευθείας από τη σχέση (ii), ενώ οι  $B_{nm}$  και  $A_{nm}$  από το απειροδιάστατο σύστημα που αποτελούν από κοινού οι σχέσεις (iii) και (iv).

## 7.3 Πολικές συντεταγμένες

### 7.3.1 Συναρτήσεις βάσης

**Εξισώσεις για τις συναρτήσεις βάσης:** Σε διδιάστατες διατάξεις (με  $\partial/\partial z = 0$ ), δηλαδή σε διατάξεις που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις που περιγράφονται στην παράγραφο 7.1, η χρήση πολικών (διδιάστατων κυλινδρικών) συντεταγμένων  $(r_T, \varphi)$  εξυπηρετεί, όταν η διατομή της διάταξης οριοθετείται από γραμμές  $r_T = \text{σταθ.}$  και  $\varphi = \text{σταθ.}$ , όπως στο **Σχήμα 7.3-1α**, όπου είναι  $a < r_T < b$  και  $0 < \varphi < \theta$ . Ειδικές περιπτώσεις τέτοιων διατάξεων αντιπροσωπεύονται από τις δύο περιοχές του **Σχήματος 7.3-1β**. Σ' αυτές το κάτω ή αντίστοιχα το άνω ακτινικό όριο έχει την ακραία τιμή  $a = 0$  ή  $b = \infty$ , οπότε στο εσωτερικό της διάταξης περιλαμβάνεται η αρχή των αξόνων ή το άπειρο. Επίσης, δεν υπάρχουν όρια στη διεύθυνση  $\varphi$ , και τότε το δυναμικό πρέπει να ικανοποιεί συνθήκη περιοδικότητας,  $\Phi(r_T, \varphi + 2\pi) = \Phi(r_T, \varphi)$ .



Σχήμα 7.3-1

Σε πολικές συντεταγμένες η Λαπλασιανή είναι:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T} \left( r_T \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) + \frac{1}{r_T^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (7.3-1)$$

Επιχειρώντας το χωρισμό των μεταβλητών, γράφοντας, δηλαδή, το δυναμικό ως γινόμενο  $\Phi = R_T(r_T)F(\varphi)$ , από την εξίσωση του Laplace σχηματίζεται η σχέση:

$$r_T^2 \frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi} = \frac{r_T}{R_T} \frac{d}{dr_T} \left( r_T \frac{dR_T}{dr_T} \right) + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0. \quad (7.3-2)$$

Επειδή είναι  $r_T^2 \nabla^2 \Phi / \Phi = 0$ , η παράγωγός του είτε ως προς  $r_T$ , είτε ως προς  $\varphi$ , είναι ίση με μηδέν και αναφέρεται μόνο σε έναν όρο στο άθροισμα (7.3-2). Συνεπώς, είναι:

$$\begin{aligned} r_T \frac{d}{dr_T} \left( r_T \frac{dR_T}{dr_T} \right) &= K_T R_T, \\ \frac{d^2 F}{d\varphi^2} &= K_\varphi F, \end{aligned} \quad (7.3-3)$$

όπου οι ποσότητες  $K_T$  και  $K_\varphi$  είναι σταθερές και απαιτείται  $K_T + K_\varphi = 0$ , ώστε να είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ .

**Συναρτήσεις  $F(\varphi)$ :** Τα ενδεχόμενα είναι ακριβώς όπως για τις συναρτήσεις  $X(x)$ , που εμφανίζονται κατά το χωρισμό μεταβλητών σε καρτεσιανές συντεταγμένες (παράγρ. 7.2.1):

α)  $K_\varphi = 0$ . Τότε, είναι  $F(\varphi) = A\varphi + B$ , και με το σύμβολο  $\{\dots\}$  να δηλώνει γραμμικό συνδυασμό των περικλειόμενων συναρτήσεων, είναι:

$$K_\varphi = 0 \Rightarrow F(\varphi) = \{\varphi, 1\}. \quad (7.3-4)$$

Όταν δεν υπάρχουν όρια  $\varphi = \text{σταθ}$ , τότε πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη περιοδικότητας,  $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$ , οπότε η μόνη επιλογή είναι  $F(\varphi) = 0 \cdot \varphi + B \cdot 1 = B = \text{σταθ}$ .

β)  $K_\varphi = -m^2 < 0$ . Στην περίπτωση αυτή, οι συναρτήσεις  $F$  είναι ημιτονοειδείς:

$$K_\varphi = -m^2 < 0 \Rightarrow F(\varphi) = \{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\}. \quad (7.3-5)$$

Δεν υπάρχει, γενικά, κανείς περιορισμός ως προς τις τιμές του αριθμού  $m$ , ο οποίος μπορεί να μην είναι ακέραιος. Αν όμως δεν υπάρχουν όρια  $\varphi = \text{σταθ}$ , τότε η συνθήκη περιοδικότητας,  $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$ , περιορίζει στις ακέραιες τιμές  $m = 1, 2, 3, \dots$

γ)  $K_\varphi = m^2 > 0$ . Τώρα, οι συναρτήσεις είναι υπερβολικές ή εκθετικές:

$$K_\varphi = m^2 > 0 \Rightarrow F(\varphi) = \{\sinh(m\varphi), \cosh(m\varphi)\}, \text{ ή } \{\exp(m\varphi), \exp(-m\varphi)\}, \quad (7.3-6)$$

ή συνδυασμούς τους. Δεν είναι δυνατόν να σχηματισθεί γραμμικός συνδυασμός αυτών των συναρτήσεων, ο οποίος να ικανοποιεί συνθήκες περιοδικότητας. Αυτές οι συναρτήσεις χρησιμεύουν μόνο όταν υπάρχουν όρια  $\varphi = \text{σταθ}$ , σε διατάξεις με μορφή «σφήνας».

Υπενθυμίζονται οι σχέσεις (7.2-7) κ. επ., και ιδίως οι ακόλουθοι εύχρηστοι γραμμικοί συνδυασμοί:

- Συνδυασμοί, για τους οποίους είναι  $F(\varphi = \varphi_0) = 0$ :

$$F(\varphi) = \varphi - \varphi_0, \quad F(\varphi) = \sin[m(\varphi - \varphi_0)], \quad F(\varphi) = \sinh[m(\varphi - \varphi_0)], \quad (7.3-7)$$

- Συνδυασμοί, για τους οποίους είναι  $(d/d\varphi)F(\varphi)|_{\varphi=\varphi_0} = 0$ :

$$F(\varphi) = 1, \quad F(\varphi) = \cos[m(\varphi - \varphi_0)], \quad F(\varphi) = \cosh[m(\varphi - \varphi_0)]. \quad (7.3-8)$$

Οι **συναρτήσεις  $R_T(r_T)$**  προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης  $r_T(d/dr_T)(r_T dR_T/dr_T) = K_T R_T$ , βλ. σχέση (7.3-3α). Η αλλαγή μεταβλητής  $r_T = r_{T0} e^\xi \Leftrightarrow \xi = \ln(r_T/r_{T0})$  έχει ως συνέπεια, ότι  $r_T dR_T/dr_T = d/d\xi$ , και η διαφορική εξίσωση μετασχηματίζεται σε  $d^2 R_T/d\xi^2 = K_T R_T$ . Επειδή είναι  $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 (FR_T) = 0$  και συνεπώς  $K_T = -K_\varphi$ , τα αντίστοιχα ενδεχόμενα είναι:



$$K_T = -K_\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad R_T(\rho_T = r_T/r_{T0}) = \{1, \ln \rho_T\}, \quad (7.3-9)$$

$$K_T = -K_\varphi = m^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad R_T(\rho_T) = \{\rho_T^m, \rho_T^{-m}\}, \quad (7.3-10)$$

$$K_T = -K_\varphi = -m^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad R_T(\rho_T) = \{\sin(m \ln \rho_T), \cos(m \ln \rho_T)\}. \quad (7.3-11)$$

Η αδιάστατη ακτινική απόσταση  $\rho_T = r_T/r_{T0}$  εισήχθη, έτσι ώστε το όρισμα του λογαρίθμου να είναι αδιάστατο,  $\ln(r_T/r_{T0})$ , και όχι  $\ln r_T$ . Η τιμή της σταθερής θετικής ποσότητας  $r_{T0}$ , με διαστάσεις μήκους, δεν έχει καμία συνέπεια ως προς τη γενικότητα: Κάποια διαφορετική επιλογή για τη σταθερά  $r_{T0}$  ισοδυναμεί με την αντικατάσταση  $\rho_T \rightarrow C\rho_T$ , και τότε οποιαδήποτε από τις συναρτήσεις αυτές έχει μορφή γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων του ίδιου τύπου.

Τόσο στις συναρτήσεις  $F(\varphi)$ , όσο και στις  $R_T(r_T)$ , η σταθερά χωρισμού  $m$  πρέπει να ληφθεί ως θετική (ή, έστω, μη αρνητική, αν συμπεριληφθεί το ενδεχόμενο  $K_\varphi = 0$ ), δηλαδή  $m = |m|$ , επειδή οι συναρτήσεις με  $m = -|m|$  είναι γραμμικοί συνδυασμοί εκείνων με  $m = |m|$ . Για παράδειγμα, αν είναι  $m = -|m|$ , τότε  $\sin(m\varphi) = -\sin(+|m|\varphi)$ ,  $\rho_T^m = \rho_T^{-|m|}$  κλπ.

**Συμπεριφορά των συναρτήσεων  $R_T(r_T)$ :** Με την αλλαγή μεταβλητής  $\xi = \ln \rho_T$ , που χρησιμοποιήθηκε για να μετασχηματισθεί και να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση, οι σχέσεις (7.3-9) έως (7.3-11) έχουν αντίστοιχα μορφή γραμμικών, εκθετικών και ημιτονοειδών συναρτήσεων του  $\xi$ . Απλά, ο λογάριθμος μετατοπίζει το  $\xi = -\infty$  στο  $\rho_T = 0$  και καθιστά πιο απότομες τις μεταβολές των συναρτήσεων  $R_T$  κοντά στο  $\rho_T = 0$ . Πιο συγκεκριμένα:

- Η λογαριθμική συνάρτηση έχει έναν πολύ ασθενή απειρισμό, καθώς  $\rho_T \rightarrow 0$ , ασθενέστερο από το  $\rho_T^{-m}$  με οσοδήποτε μικρό  $m$ , και έναν αργό απειρισμό, καθώς  $\rho_T \rightarrow \infty$ , βραδύτερο από οποιοδήποτε  $\rho_T^{+m}$ . Υπενθυμίζεται ότι λαμβάνεται  $m > 0$ .
- Οι συναρτήσεις  $R_T(\rho_T) = \{\rho_T^{+m}, \rho_T^{-m}\}$  είναι μονότονες, με την πρώτη να μηδενίζεται στο  $\rho_T = 0$  και να έχει εκεί και μηδενική παράγωγο, εφόσον  $m > 1$ , και να απειρίζεται καθώς  $\rho_T \rightarrow \infty$ , ενώ η δεύτερη έχει την αντίθετη συμπεριφορά. Κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι σχεδόν μονότονη συνάρτηση, δηλαδή έχει έναν και μόνο μηδενισμό είτε της τιμής, είτε της παραγώγου.
- Οι συναρτήσεις  $R_T(\rho_T) = \{\sin(m \ln \rho_T), \cos(m \ln \rho_T)\}$  έχουν άπειρες εναλλαγές προσήμου, με τους διαδοχικούς μηδενισμούς, ή τα διαδοχικά ακρότατα να πυκνώνουν, καθώς  $\rho_T \rightarrow 0$ , και να αραιώνουν, καθώς  $\rho_T \rightarrow \infty$ . Στα όρια αυτά,  $\rho_T \rightarrow 0$  και  $\rho_T \rightarrow \infty$ , οι συναρτήσεις δεν συγκλίνουν, παραμένοντας πάντως φραγμένες.

- Οι συναρτήσεις  $R_T(r_T - r_{T0})$  **δεν** είναι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων (7.3-9) έως (7.3-11), και, συνεπώς, τέτοιες συναρτήσεις, που σχηματίζονται με μετατόπιση της αφετηρίας, **δεν** μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε γινόμενα  $R_T(r_T)F(\varphi)$ , που να ικανοποιούν την εξίσωση του *Laplace*. Αυτό οφείλεται στη διαφορετική φυσιογνωμία της συντεταγμένης  $r_T$ , που έχει αφετηρία  $r_T = 0$  και ικανοποιεί διαφορετική διαφορική εξίσωση, σε σχέση με τις συναρτήσεις  $F$ , καθώς και τις  $X$ ,  $Y$  και  $Z$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες.
- Ιδιαίτερα χρήσιμοι είναι οι ακόλουθοι γραμμικοί συνδυασμοί:
  - ο Αυτοί, οι οποίοι μηδενίζονται στη θέση  $r_{T0}$ ,  $R_T(r_T = r_{T0}) = 0$ :

$$R_T(r_T) = \ln\left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right), \quad R_T(r_T) = \left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)^m - \left(\frac{r_{T0}}{r_T}\right)^m, \quad R_T(r_T) = \sin\left[m \ln\left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)\right]. \quad (7.3-12)$$

- ο Αυτοί, των οποίων μηδενίζεται η παράγωγος στη θέση  $r_{T0}$ ,  $(d/dr_T)R_T|_{r_T=r_{T0}} = 0$ :

$$R_T(r_T) = 1, \quad R_T(r_T) = \left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)^m + \left(\frac{r_{T0}}{r_T}\right)^m, \quad R_T(r_T) = \cos\left[m \ln\left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)\right]. \quad (7.3-13)$$

**Συμπέρασμα:** Με  $\Phi = \sum_j \Phi_j = \sum_j A_j R_{Tj} F_j$ , σε πολικές συντεταγμένες είναι αποδεκτά τα ακόλουθα γινόμενα γραμμικών συνδυασμών, ως λύσεις της εξίσωσης  $\nabla^2 \Phi = 0$ :

$$\Phi_j(r_T, \varphi) = A_j F_j(\varphi) R_{Tj}(r_T) = \begin{cases} A_j \{1, \varphi\}_j \cdot \{1, \ln \rho_T\}_j, \\ A_j \{\sin(m_1 \varphi), \cos(m_1 \varphi)\}_j \cdot \{\rho_T^{m_1}, \rho_T^{-m_1}\}_j, \\ A_j \left\{ \begin{array}{l} \sinh(m_2 \varphi) \\ \cosh(m_2 \varphi) \end{array} \right\}_j \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin(m_2 \ln \rho_T) \\ \cos(m_2 \ln \rho_T) \end{array} \right\}_j, \end{cases} \quad (7.3-14)$$

με  $m_1, m_2 > 0$ , όπου οι ακτινική συντεταγμένη περιγράφεται αδιάστατα, ως  $\rho_T = r_T/r_{T0}$ .

Επαναλαμβάνοντας πληροφορίες που έχουν ήδη παρουσιασθεί, για την επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων είναι χρήσιμες οι ακόλουθες ιδιότητες:

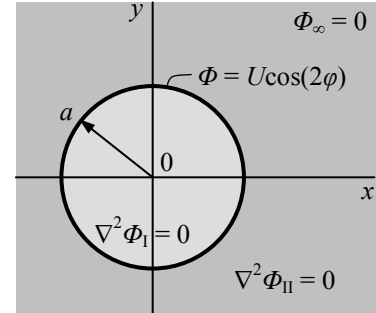
- Οι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων  $F(\varphi)$ , που έχουν μηδενισμό  $F(\varphi_0) = 0$  ή  $F'(\varphi_0) = 0$  στη θέση  $\varphi_0$ , είναι αυτοί που αναφέρονται στις σχέσεις (7.3-7) και (7.3-8), και εκείνοι των συναρτήσεων  $R_T(r_T)$ , για τους οποίους είναι  $R_T(r_{T0}) = 0$  ή  $R_T'(r_{T0}) = 0$ , αναφέρονται στις σχέσεις (7.3-12) και (7.3-13).

- Οι συναρτήσεις  $\ln(r_T/r_{T0})$  και  $r_T^{-m}$  απειρίζονται στο  $r_T = 0$ , ενώ πάλι η  $\ln(r_T/r_{T0})$  και τώρα η  $r_T^m$  απειρίζονται στο  $r_T = \infty$ .
- Οι συναρτήσεις  $\sin[m\ln(r_T/r_{T0})]$  και  $\cos[m\ln(r_T/r_{T0})]$  είναι απροσδιόριστες τόσο στο  $r_T = 0$ , όσο στο  $r_T = \infty$ .
- Οι αριθμοί  $m_{1,2}$  μπορούν να έχουν οποιαδήποτε θετική τιμή, εν γένει όχι κατ' ανάγκην ακέραιη.
- Αν η διάταξη χαρακτηρίζεται από περιοδικότητα, πρέπει να είναι  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$  και από τα τρία ενδεχόμενα στη σχέση (7.3-14) στο δεύτερο πρέπει η σταθερά  $m_1$  να είναι ακέραιος αριθμός, από το πρώτο είναι αποδεκτή μόνο η συνάρτηση  $F = 1$ , που μπορεί να θεωρηθεί το συνημίτονο  $\cos(m_1\varphi)$  με  $m_1 = 0$ , ενώ το τρίτο ενδεχόμενο δεν έχει νόημα.

Όταν οι οριακές συνθήκες το επιτρέπουν, μπορούν να αναζητηθούν λύσεις, που το άθροισμα  $\Phi = \sum_m \Phi_m = \sum_m A_m R_{Tm} F_m$  να περιέχει λίγους όρους (έναν, ή έστω μικρό μονοψήφιο αριθμό). Τα κριτήρια που ενθαρρύνουν μια τέτοια αναζήτηση είναι ίδια με αυτά στα παραδείγματα της παραγράφου 7.2.1, να μην επιβάλλουν οι οριακές συνθήκες ασυνέχεια και επίσης να περιέχουν αποδεκτές συναρτήσεις των  $r_T$  ή  $\varphi$ . Αν αυτό δεν είναι εφικτό, η λύση έχει μορφή σειράς, όπως παρουσιάζεται στις επόμενες δύο παραγράφους, χωριστά για απλές διατάξεις με περιοδικότητα και χωριστά για λοιπές διδιάστατες διατάξεις, είτε είναι απλές, είτε σύνθετες.

Τα *παραδ. 7.3-1* έως *7.3-6* παρουσιάζουν τη χρήση των συναρτήσεων  $F(\varphi)$  και  $R_T(r_T)$  σε απλές διατάξεις, στις οποίες η λύση εκφράζεται μόνο ως ένα γινόμενο  $\Phi(r_T, \varphi) = AF(\varphi)R_T(r_T)$ , ή ως άθροισμα μικρού αριθμού τέτοιων γινομένων. Όπως και στην αντίστοιχη παράγραφο 7.2.1, η παρουσίαση παραδειγμάτων με τέτοιες απλές διατάξεις γίνεται με στόχο την εξοικείωση του αναγνώστη με τις συναρτήσεις  $F(\varphi)$  και  $R_T(r_T)$ , που χρησιμεύουν για να περιγραφεί το δυναμικό  $\Phi$  σε πολικές συντεταγμένες, αδιαφορώντας για το κατά πόσο τα παραδείγματα περιγράφουν ρεαλιστικές διατάξεις (που τα περισσότερα δεν περιγράφουν).

**Παράδειγμα 7.3-1:** Στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a$  το δυναμικό είναι ίσο με  $\Phi(r_T = a) = U \cos(2\varphi)$ , ενώ στο άπειρο είναι  $\Phi_\infty = 0$ . Παντού είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  στις περιοχές  $r_T < a$  και  $r_T > a$ .



**Επίλυση:** Σε καθεμία από τις περιοχές  $r_T < a$  και  $r_T > a$  δίδονται οι οριακές συνθήκες σε ολόκληρο το όριο, συνεπώς στοιχειοθετούνται δύο αυθυπόστατα προβλήματα. Οι οριακές συνθήκες είναι συνεχείς και δεν υπάρχουν κορυφές που θα χρειαζόταν να εξετασθούν χωριστά.

Περιοχή I ( $r_T < a$ ): Η οριακή συνθήκη  $\Phi(r_T = a) = U \cos(2\varphi)$  υποδεικνύει  $F(\varphi) = \cos(2\varphi)$ , δηλαδή,  $m = 2$  και  $K_\varphi = -m^2 < 0$ , οπότε  $R_T(r_T) = \{r_T^2, r_T^{-2}\}$ . Δεν υπάρχει λόγος απειρισμού του δυναμικού, οπότε για να είναι  $\Phi(r_T = 0) \neq \infty$  επιλέγεται  $R_T = A r_T^2 + 0 r_T^{-2} = A r_T^2$  και για να είναι  $\Phi(r_T = a) = U \cos(2\varphi) = (A a^2) \cos(2\varphi)$  πρέπει  $A = U/a^2$ . Επομένως, είναι  $\Phi_I = \Phi(r_T < a) = U(r_T/a)^2 \cos(2\varphi)$ .

Περιοχή II ( $r_T > a$ ): Πάλι, η οριακή συνθήκη υποδεικνύει  $F = \cos(2\varphi)$ , δηλαδή,  $m = 2$  και συνεπώς  $R_T(r_T) = \{r_T^2, r_T^{-2}\}$ . Τώρα, επιλέγεται  $R_T = A' r_T^{-2}$ , ώστε  $\Phi(r_T = \infty) = 0$ , με  $A' = U a^2$ , ώστε  $\Phi(r_T = a) = U \cos(2\varphi)$ . Δηλαδή,  $\Phi_{II} = \Phi(r_T > a) = U(a/r_T)^2 \cos(2\varphi)$ .

Συνεπώς, το δυναμικό είναι:

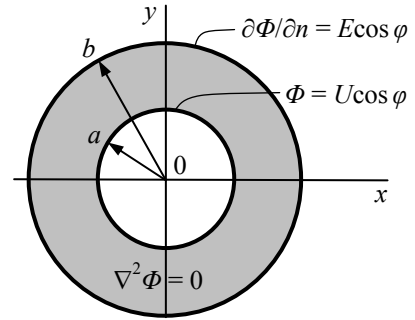
$$\Phi(r_T < a) = \Phi_I = U \left( \frac{r_T}{a} \right)^2 \cos(2\varphi),$$

$$\Phi(r_T > a) = \Phi_{II} = U \left( \frac{a}{r_T} \right)^2 \cos(2\varphi).$$

**Σχόλια:**

- Μολονότι είναι αυτονόητο, ας αναφερθεί ότι τα  $\Phi_I$  και  $\Phi_{II}$  περιγράφουν το δυναμικό σε δύο διαφορετικές περιοχές  $r_T < a$  και  $r_T > a$ , και όχι το δυναμικό δύο επί μέρους προβλημάτων επαλληλίας. Δηλαδή, το δυναμικό  $\Phi$  δεν είναι το άθροισμα  $\Phi_I + \Phi_{II}$ .
- Δεν έχει καμία σημασία, ότι είναι  $\Phi_{II}(r_T \rightarrow 0) = \infty$ , επειδή η έκφραση  $\Phi_{II}$  δίνει το δυναμικό στην περιοχή II, ενώ στην περιοχή  $r_T < a$ , στην οποία ανήκει το σημείο  $r_T = 0$  με αυτόν τον απειρισμό, το δυναμικό περιγράφεται από την έκφραση  $\Phi_I$ , ενώ η  $\Phi_{II}$  δεν περιγράφει τίποτα. Ακριβώς το ίδιο αφορά τη συνάρτηση  $\Phi_I$ , η οποία απειρίζεται καθώς  $r_T \rightarrow \infty$ , χωρίς, βέβαια, ούτε αυτό να έχει καμία σημασία, επειδή η έκφραση  $\Phi_I$  ισχύει μόνο την περιοχή I, με  $r_T < a$ , και αυτή η περιοχή δεν περιλαμβάνει το  $r_T = \infty$ .

**Παράδειγμα 7.3-2:** Στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a$  το δυναμικό είναι ίσο με  $\Phi(r_T = a) = U \cos \varphi$ , ενώ στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = b$  η κάθετη (προς τα έξω) παράγωγος του δυναμικού είναι ίση με  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=b} = E \cos \varphi$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  στην περιοχή  $a < r_T < b$ , στην οποία είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ .



**Επίλυση:** Δεν υπάρχει θέμα ασυνέχειας στις οριακές συνθήκες, οι οποίες υποδεικνύουν τη συνάρτηση  $F(\varphi) = \cos \varphi$ , με  $m = 1$  και  $K_\varphi = -m^2 < 0$ . Στην ακτινική διεύθυνση, η συνάρτηση αυτή συνοδεύεται από τη συνάρτηση  $R_T(r_T) = \{r_T^m, r_T^{-m}\} = \{r_T, r_T^{-1}\} = Ar_T + B/r_T$ , όπου τα  $A, B$  θα προσδιορισθούν από τις οριακές συνθήκες:

$$r_T = a: \quad \Phi = U \cos \varphi = \left( Aa + \frac{B}{a} \right) \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad Aa + \frac{B}{a} = U,$$

$$r_T = b: \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = E \cos \varphi = \left( A - \frac{B}{b^2} \right) \cos \varphi \quad \Rightarrow \quad A - \frac{B}{b^2} = E,$$

δεδομένου ότι στην επιφάνεια  $r_T = b$  είναι  $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_T$  και  $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial r_T$ .

Επιλύοντας το σύστημα προκύπτει:

$$A = \frac{Ua + Eb^2}{a^2 + b^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{(U - Ea)ab^2}{a^2 + b^2}$$

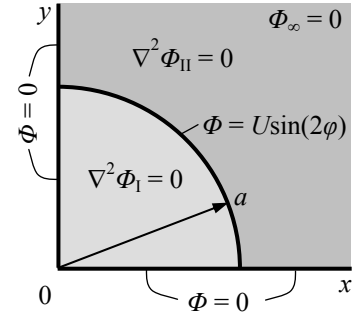
οπότε:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \left[ \frac{Uab}{a^2 + b^2} \left( \frac{r_T}{b} + \frac{b}{r_T} \right) + \frac{Eab^2}{a^2 + b^2} \left( \frac{r_T}{a} - \frac{a}{r_T} \right) \right] \cos \varphi.$$

**Σχόλιο:** Εναλλακτικά, είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί επαλληλία (που, όμως, δεν συνιστάται):

- Πρόβλημα 1, με  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=b} = 0$ : Επιλέγεται ως συνάρτηση  $R_T(r_T)$  ο γραμμικός συνδυασμός  $A'R_T(r_T) = A'[(r_T/b) + (b/r_T)]$ , βλ. σχέση (7.3-13β), του οποίου μηδενίζεται η παράγωγος στη θέση  $r_T = b$ , με κατάλληλο συντελεστή  $A'$ , ώστε στη θέση  $r_T = a$  να προκύπτει η τιμή  $U$ . Εύκολα συνάγεται πως ο συντελεστής αυτός πρέπει να είναι ίσος με  $A' = U/R_T(r_T=a) = U/[(a/b) + (b/a)] = Uab/(a^2 + b^2)$ . Το δυναμικό αυτού του προβλήματος αποδίδεται από τον πρώτο όρο του συνολικού αποτελέσματος.
- Πρόβλημα 2, με  $\Phi(r_T=a) = 0$ : Επιλέγεται ως συνάρτηση  $R_T(r_T)$  ο γραμμικός συνδυασμός  $B'R_T(r_T) = B'[(r_T/a) - (a/r_T)]$ , βλ. σχέση (7.3-12β), που μηδενίζεται στη θέση  $r_T = a$ . Τώρα, ο κατάλληλος συντελεστής είναι ίσος με  $B' = E/R_T'(r_T=a)$ . Ο δεύτερος όρος του συνολικού αποτελέσματος αποδίδει το δυναμικό για το πρόβλημα 2.

**Παράδειγμα 7.3-3:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας διάταξης με  $\partial/\partial z = 0$ , στο εσωτερικό της οποίας είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Η διατομή εκτείνεται στο πρώτο τεταρτημόριο  $0 < \varphi < \pi/2$ , στις πλευρές του οποίου είναι  $\Phi = 0$ , όπως είναι και στο άπειρο, ενώ στην επιφάνεια  $r_T = a$  το δυναμικό κατανέμεται ως  $\Phi(r_T = a) = U\sin(2\varphi)$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  στις δύο περιοχές  $r_T < a$  και  $r_T > a$  του διαστήματος  $0 < \varphi < \pi/2$ .

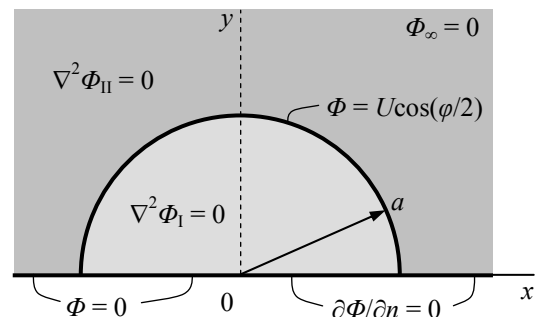


**Επίλυση:** Τα όρια της διάταξης έχουν και κορυφές, και πρέπει να ελεγχθεί και εκεί μήπως οι οριακές συνθήκες εκδηλώνουν ασυνέχεια. Στην αρχή των αξόνων είναι  $\Phi = 0$  και από τις δύο πλευρές. Στο καμπύλο ενδιάμεσο όριο  $r_T = a$ , τόσο όταν είναι  $\varphi \rightarrow 0$ , όσο και όταν  $\varphi \rightarrow \pi/2$ , είναι  $\Phi = U\sin(2\varphi) = 0$ , όσο είναι και στις πλευρές  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pi/2$  καθώς  $r_T \rightarrow a$ . Συνεπώς, οι οριακές συνθήκες δεν εμφανίζουν ασυνέχεια.

Και στις δύο περιοχές επιλέγεται  $F(\varphi) = \sin(2\varphi)$ , με βάση την οριακή συνθήκη. Είναι  $F(0) = 0$  και  $F(\pi/2) = 0$ , συνεπώς το ίδιο συμβαίνει, όπως απαιτείται από την οριακή συνθήκη, και από οποιοδήποτε γινόμενο  $R_T(r_T)F(\varphi = 0, \pi/2)$ . Η επιλογή αυτή σημαίνει πως είναι  $m = 2$  και  $K_\varphi = -m^2 < 0$ , με αντίστοιχη συνάρτηση την  $R_T(r_T) = \{r_T^2, r_T^{-2}\}$ . Η συνέχεια είναι ακριβώς όπως στο παράδ. 7.3-1. Για την περιοχή I, η οποία περιέχει τη θέση  $r_T = 0$ , είναι  $R_T = A r_T^2$  και από τη συνθήκη στο  $r_T = a$  προσδιορίζεται ότι  $A = U/a^2$ . Αντίθετα, στην περιοχή II περιέχεται το  $r_T = \infty$ , συνεπώς εκεί  $R_T = A' r_T^{-2}$ , με  $A' = Ua^2$ . Συνολικά, το δυναμικό είναι:

$$\Phi_I = \Phi(r_T < a) = U \left( \frac{r_T}{a} \right)^2 \sin(2\varphi), \quad \Phi_{II} = \Phi(r_T > a) = U \left( \frac{a}{r_T} \right)^2 \sin(2\varphi).$$

**Παράδειγμα 7.3-4:** Ενδιαφέρει η περιοχή  $y > 0$ , στην οποία είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ . Στο ημιεπίπεδο  $y = 0, x > 0$ , το δυναμικό  $\Phi$  υπακούει στη συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , ενώ είναι  $\Phi = 0$  στο ημιεπίπεδο  $y = 0, x < 0$ , καθώς και στο άπειρο. Επιπλέον, στην ημικυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a$ , στο διάστημα  $0 < \varphi < \pi$ , το δυναμικό είναι ίσο με  $\Phi(r_T = a) = U\cos(\varphi/2)$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  στις δύο περιοχές  $r_T < a$  και  $r_T > a$  στο διάστημα  $0 < \varphi < \pi$ .

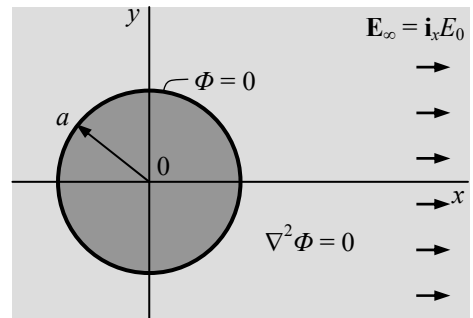


**Επίλυση:** Στα άκρα του καμπύλου ενδιάμεσου ορίου είναι  $-\partial\Phi/\partial\varphi = \frac{1}{2}U\sin(\varphi/2)|_{\varphi=0} = 0$ , σε συμφωνία με τη συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , και  $\Phi = U\cos(\varphi/2)|_{\varphi=\pi} = 0$ , πάλι σε συμφωνία με τη

συνθήκη  $\Phi = 0$ . Στην αρχή των αξόνων, οι δύο συνθήκες  $\partial\Phi/\partial n = 0$  και  $\Phi = 0$  δεν είναι αντικρουόμενες, δεν επιβάλλουν συνέχεια, αλλά ούτε και ασυνέχεια. Όμως, ζητούμενο για λύση με λίγους όρους είναι να μην επιβάλλεται ασυνέχεια από τις οριακές συνθήκες. Τα δεδομένα ικανοποιούν αυτό το ζητούμενο και στην αρχή των αξόνων.

Η συνάρτηση  $\cos(\varphi/2)$  αντιστοιχεί σε  $m = 1/2$  και είναι, συνεπώς, αποδεκτή. (Μόνο σε διατάξεις που εκτείνονται σε ολόκληρο τον κύκλο, όπως στα *παραδ. 7.3-1* και *7.3-2*, απαιτείται ακέραιη τιμή του  $m$ .) Η αντίστοιχη ακτινική συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός  $R_T(r_T) = \{r_T^m, r_T^{-m}\} = \{r_T^{1/2}, r_T^{-1/2}\}$ . Η επιλογή του γραμμικού συνδυασμού εξαρτάται από την περιοχή. Αν περιέχει την αρχή των αξόνων, πρέπει να είναι  $A R_T(r_T) = A r_T^{1/2}$ , ενώ αν εκτείνεται ως το άπειρο, η επιλογή είναι  $A R_T(r_T) = A r_T^{-1/2}$ . Οι τιμές του συντελεστή  $A$  επιλέγονται από τη συνθήκη στο όριο  $r_T \rightarrow a$ , και ο πιο σύντομος τρόπος είναι να γραφεί ως  $A = U/R_T(a)$ . Η τελική απάντηση είναι  $\Phi_1 = \Phi(r_T < a) = U(r_T/a)^{1/2} \cos(\varphi/2)$  και  $\Phi(r_T > a) = U(a/r_T)^{1/2} \cos(\varphi/2)$ .

**Παράδειγμα 7.3-5:** Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_x E_0$  αλλοιώνεται από την παρουσία γειωμένου κυλίνδρου με ακτίνα  $a$ . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  στην περιοχή  $r_T > a$ .



**Επίλυση:** Η παρουσία του γειωμένου κυλίνδρου δεν γίνεται αισθητή σε αποστάσεις μεγάλες σε σχέση με

την ακτίνα  $a$ , συνεπώς στο άπειρο παραμένει το ηλεκτρικό πεδίο ως  $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{i}_x E_0$ . Η συνθήκη  $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{i}_x E_0$  αναφέρεται παντού στο άπειρο, σε κάθε  $\varphi$ , και όχι μόνο στο  $x = +\infty$ .

Επειδή είναι  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\mathbf{i}_T \partial\Phi/\partial r_T - \mathbf{i}_\varphi (1/r_T) \partial\Phi/\partial\varphi$ , η συνθήκη στο άπειρο παρέχει την πληροφορία  $(\partial\Phi/\partial r_T)|_\infty = -\mathbf{i}_T (E_0 \mathbf{i}_x) = -E_0 \cos\varphi$ , που είναι αποδεκτή ως οριακή συνθήκη (τύπου *Neumann*) για την εξίσωση *Laplace*. Η άλλη πληροφορία,  $(\partial\Phi/\partial\varphi)|_\infty = E_0 r_T \sin\varphi$ , πλεονάζει. Όπως, πάντως, θα φανεί στο τέλος, και αυτή η σχέση ικανοποιείται, βλ. και σχετικό *σχόλιο*.

Η συνθήκη  $(\partial\Phi/\partial r_T)|_\infty = -E_0 \cos\varphi$ , η μόνη που δεν είναι ομογενής, υποδεικνύει  $F(\varphi) = \cos\varphi$ , άρα  $m = 1$  και  $R_T(r_T) = \{r_T, r_T^{-1}\}$ . Στη διεύθυνση  $r_T$ , κατάλληλος είναι ο γραμμικός συνδυασμός  $A R_T = A[(r_T/a) - (a/r_T)]$ , ώστε  $R_T(a) = 0$ . Επειδή είναι  $(dR_T/dr_T)|_\infty = A[(1/a) + (a/r_T^2)]|_\infty = A/a$ , εξισώνοντας  $-E_0 \cos\varphi = (A/a) \cos\varphi$ , προκύπτει  $A = -E_0 a$ . Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

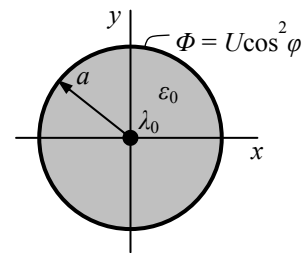
$$\Phi(r_T > a, \varphi) = -E_0 a \left( \frac{r_T}{a} - \frac{a}{r_T} \right) \cos\varphi.$$

Εύκολα ελέγχεται η πλεονάζουσα πληροφορία ότι είναι  $-(1/r_T)(\partial\Phi/\partial\varphi)|_\infty = -E_0 \sin\varphi = \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{E}_\infty$ .

**Σχόλια:**

- Το συμπληρωματικό πρόβλημα, εκείνο με  $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=a} = 0$ , επιλύεται με τον ίδιο τρόπο, με τη διαφορά ότι τώρα επιλέγεται το σύμπλεγμα  $A R_T = A[(r_T/a) + (a/r_T)]$ , ώστε να είναι  $R_T'(r_T = a) = 0$ . Και οι δύο διατάξεις επιλύονται και με κατοπτρισμό (βλ. *παράδ. 6.2-22*).
- Όταν δίδεται το ηλεκτρικό πεδίο, δίδονται πλεονάζουσες πληροφορίες. Όμως, προϋπόθεση, για να ορίζεται το δυναμικό  $\Phi$ , είναι να ισχύει  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , με συνέπεια, οι πλεονάζουσες πληροφορίες να είναι συμβατές με τις μαθηματικά ελάχιστες απαιτούμενες.

**Παράδειγμα 7.3-6:** Στο εσωτερικό κυλίνδρου με ακτίνα  $a$  η επιτρεπτότητα είναι ίση με  $\epsilon_0$ . Στον άξονα του κυλίνδρου βρίσκεται γραμμικό φορτίο ίσο με  $\lambda_0$ , ενώ στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a$  επιβάλλεται δυναμικό με κατανομή  $\Phi(r_T = a) = U \cos^2 \varphi$ . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  στην περιοχή  $r_T < a$ .



**Επίλυση:** Η παρουσία του φορτίου  $\lambda_0$  στον άξονα  $r_T = 0$  υποδεικνύει να γίνει η διάσπαση  $\Phi = \Phi_{\text{ειδ}} + \Phi_{\text{συμ}}$ , ώστε  $\nabla^2 \Phi_{\text{συμ}} = 0$  σε ολόκληρο το χώρο  $r_T < a$ , συμπεριλαμβανόμενου του  $r_T = 0$ . Το φορτίο  $\lambda_0$  παράγει δυναμικό ίσο με  $\Phi_{\text{ειδ}} = -(\lambda_0/2\pi\epsilon_0)\ln(r_T/r_{T0}) = -(\lambda_0/2\pi\epsilon_0)\ln(r_T/a)$ . Έγινε η επιλογή  $r_{T0} = a$  για το σημείο αναφοράς, ώστε να είναι  $\Phi_{\text{ειδ}}(r_T = a) = 0$  και συνεπώς εκεί να είναι  $\Phi_{\text{συμ}}(r_T = a) = \Phi(r_T = a) - \Phi_{\text{ειδ}}(r_T = a) = \Phi(r_T = a) = U \cos^2 \varphi$ .

Η συνάρτηση  $\cos^2 \varphi$  δεν έχει τη μορφή που απαιτείται για τις συναρτήσεις  $F(\varphi)$ . Όμως, είναι  $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\varphi)]$ , άθροισμα όρων με μορφή που ταιριάζει στις συναρτήσεις  $F(\varphi)$ , με  $m = 0$  και  $m = 2$ . Προφανώς, θα γίνει εφαρμογή επαλληλίας.

Στη διάταξη 1 λαμβάνεται  $\Phi_{\text{συμ},1}(r_T = a) = \frac{1}{2}U$ , με προφανή τη λύση  $\Phi_{\text{συμ},1}(r_T < a) = \frac{1}{2}U$ . Αν ακολουθηθεί με σχολαστικότητα η διαδικασία, η οριακή συνθήκη υποδεικνύει  $F(\varphi) = 1$  και  $m = 0$ , και από τις συναρτήσεις  $R_T(r_T)$ , με  $m = 0$ , επιλέγεται η  $R_T = A \cdot 1$ , ώστε  $R_T(0) \neq \infty$ .

Στη διάταξη 2, η οριακή συνθήκη  $\Phi_{\text{συμ},2}(r_T = a) = \frac{1}{2}U \cos(2\varphi)$  υποδεικνύει  $F(\varphi) = \cos(2\varphi)$  και  $m = 2$ . Από τους γραμμικούς συνδυασμούς  $R_T(r_T) = \{r_T^2, r_T^{-2}\}$  η επιλογή είναι  $R_T(r_T) = A r_T^2$ , πάλι ώστε να είναι  $R_T(0) \neq \infty$ . Τέλος, η συνθήκη  $\Phi_{\text{συμ},2}(r_T = a) = \frac{1}{2}U \cos(2\varphi) = A a^2 \cos(2\varphi)$  προσδιορίζει τον συντελεστή  $A$ .

Αθροίζοντας προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα:

$$\Phi = \Phi_{\text{ειδ}} + \Phi_{\text{συμ},1} + \Phi_{\text{συμ},2} = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_T}{a} + \frac{1}{2}U \left( 1 + \frac{r_T^2}{a^2} \cos(2\varphi) \right).$$



### 7.3.2 Απλές διατάξεις με περιοδικότητα

Σε διδιάστατες κυλινδρικές διατάξεις, με οριακές συνθήκες που παρουσιάζουν ασυνέχεια ή περιγράφονται από συναρτήσεις που δεν αναγνωρίζονται ως αποδεκτές συναρτήσεις  $F(\varphi)$  ή  $R_T(r_T)$ , ή, έστω, ως άθροισμα τέτοιων συναρτήσεων, το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  εκφράζεται ως σειρά. Η διαδικασία είναι παρόμοια με εκείνη σε καρτεσιανές συντεταγμένες (παράγρ. 7.2.2), αλλά με ορισμένες σημαντικές διαφοροποιήσεις που οφείλονται στο ότι:

- Οι συντεταγμένες  $r_T$  και  $\varphi$  έχουν διαφορετική φυσιογνωμία από τις  $x$  και  $y$ , καθώς οι γραμμές  $r_T = r_{T1}$  και  $r_T = r_{T2}$  είναι ομόκεντρα κυκλικά τόξα, και οι  $\varphi = \varphi_1$  και  $\varphi = \varphi_2$  είναι μη παράλληλα ευθύγραμμα τμήματα, ενώ οι γραμμές  $x = x_1$  και  $x = x_2$  είναι ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.
- Στη διεύθυνση  $\varphi$  είναι δυνατόν να υπάρχουν δύο όρια, στα  $\varphi = \varphi_1, \varphi_2$  (βλ. παράγρ. 7.3.3), αλλά είναι δυνατόν και να μην υπάρχουν καθόλου όρια, χωρίς, όμως, η διάταξη να εκτείνεται μέχρι το άπειρο, όπως θα συνέβαινε αν δεν υπήρχαν όρια στη διεύθυνση  $x$ . Τότε, για το δυναμικό  $\Phi$  ισχύει ο περιορισμός  $\Phi(r_T, \varphi + 2\pi) = \Phi(r_T, \varphi)$ , η συνθήκη περιοδικότητας, η οποία υποκαθιστά τις συνθήκες *Dirichlet* ή *Neumann*, ή τη γενική, που θα εμφανίζονταν αν υπήρχαν όρια  $\varphi = \varphi_1$  και  $\varphi = \varphi_2$ .

**Διαδικασία επίλυσης:** Όταν δεν υπάρχουν όρια στη διεύθυνση  $\varphi$  και, επομένως, είναι  $\Phi(r_T, \varphi + 2\pi) = \Phi(r_T, \varphi)$ , τότε τα βήματα για την επίλυση με μορφή σειράς είναι τα ακόλουθα, όπως εξειδικεύονται και σχολιάζονται στα *παραδ. 7.3-7* και *7.3-8*:

(α) Χρήση κατάλληλων συναρτήσεων  $F(\varphi)$ , ειδικότερα, εκείνων που ικανοποιούν τη συνθήκη περιοδικότητας. Αυτές οι συναρτήσεις είναι, βέβαια, οι  $F_m(\varphi) = \{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\} = A_m \sin(m\varphi) + B_m \cos(m\varphi)$ , αλλά, επίσης, και η  $F_0(\varphi) = \{\varphi, 1\} = 0 \cdot \varphi + B_0 \cdot 1$ , δηλαδή, η  $F_0(\varphi) = B_0$ . Δεδομένου ότι η περίοδος είναι  $2\pi$ , πρέπει η σταθερά  $m$  να είναι ακέραιος αριθμός, συμπεριλαμβάνοντας και την τιμή  $m = 0$ , που αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $F_0(\varphi) = B_0$ . Συγκεντρωτικά, κατάλληλες είναι οι συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} F_0(\varphi) &= B_0, \\ F_m(\varphi) &= A_m \sin(m\varphi) + B_m \cos(m\varphi). \end{aligned} \tag{7.3-15}$$

(β) Αξιοποίηση συμμετριών. Οι συντελεστές  $(A_m, B_m)$  συνήθως προσδιορίζονται κατά το τελευταίο βήμα. Αν, όμως, η διάταξη χαρακτηρίζεται από συμμετρίες, είναι δυνατόν, να αξιοποιηθούν αυτές οι συμμετρίες, ώστε από την αρχή να εξειδικευθεί ο γραμμικός

συνδυασμός, και έτσι να μειωθεί το πλήθος των προσδιοριστέων συντελεστών  $A_m, B_m$ . Τέτοιες περιπτώσεις είναι:

- ο Συμμετρία όλης της διάταξης ως προς κάποια γωνιακή θέση  $\varphi = \varphi_{\text{συμ}}$ . Τότε, πρέπει και το δυναμικό να παρουσιάζει την ίδια συμμετρία και να είναι  $\Phi(\varphi = \varphi_{\text{συμ}} + \Delta\varphi) = \Phi(\varphi = \varphi_{\text{συμ}} - \Delta\varphi)$  για οποιοδήποτε  $\Delta\varphi$ , άρα και για  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , συνεπώς πρέπει να είναι  $(\partial\Phi/\partial\varphi)|_{\varphi=\varphi_{\text{συμ}}} = 0$ . Αυτό έχει ως συνέπεια, να είναι αποδεκτές οι συναρτήσεις, για τις οποίες στη σχέση (7.3-15β) είναι  $A_m \cos(m\varphi_{\text{συμ}}) - B_m \sin(m\varphi_{\text{συμ}}) = 0$ , προσδιορίζοντας, έτσι, την τιμή του πηλίκου  $A_m/B_m$ . Το πιο απλό, βέβαια, είναι να μετατοπισθεί η αφετηρία, ώστε να μηδενίζεται η παράγωγος στη γωνιακή θέση  $\varphi = \varphi_{\text{συμ}}$ . Αυτό επιτυγχάνεται με τις συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} F_0(\varphi) &= B_0, \\ F_m(\varphi) &= B_m \cos[m(\varphi - \varphi_{\text{συμ}})], \end{aligned} \quad (7.3-16)$$

που εμπλέκουν μόνο ανά έναν συντελεστή  $B_m$ .

- ο Αντισυμμετρία όλης της διάταξης ως προς κάποια τιμή της γωνίας  $\varphi = \varphi_{\text{αντ}}$ . Τότε αναμένεται να είναι  $\Phi(\varphi = \varphi_{\text{αντ}} + \Delta\varphi) = -\Phi(\varphi = \varphi_{\text{αντ}} - \Delta\varphi)$  για οποιοδήποτε  $\Delta\varphi$ , συνεπώς πρέπει να είναι  $\Phi(\varphi = \varphi_{\text{αντ}}) = 0$ . Αυτό έχει ως συνέπεια, αποδεκτές να είναι εκείνες οι συναρτήσεις, για τις οποίες  $A_m \sin(m\varphi_{\text{αντ}}) + B_m \cos(m\varphi_{\text{αντ}}) = 0$ , ή, ισοδύναμα και απλούστερα, να χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} F_0(\varphi) &= 0, \\ F_m(\varphi) &= A_m \sin[m(\varphi - \varphi_{\text{αντ}})], \end{aligned} \quad (7.3-17)$$

για τις οποίες είναι  $F_m(\varphi = \varphi_{\text{αντ}}) = 0$  και οι οποίες περιέχουν μόνο συντελεστές  $A_m$ .

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η αξιοποίηση της συμμετρίας ή αντισυμμετρίας ελαφρύνει σημαντικά τον υπολογιστικό φόρτο, επειδή αντί των δύο ομάδων συντελεστών ( $A_m, B_m$ ) της σχέσης (7.3-15β) χρειάζεται να προσδιορισθούν μόνο οι  $B_m$  ή  $A_m$ , που, βέβαια, διαφέρουν από τους ομώνυμους συντελεστές της σχέσης (7.3-15β).

Συμμετρία ή/και αντισυμμετρία μπορεί να εμφανίζεται ως προς περισσότερες γωνίες  $\varphi_{\text{συμ}}$  ή  $\varphi_{\text{αντ}}$ , χωρίς να προσμετρηθούν οι γωνίες  $\varphi_{\text{συμ}} \pm \pi$  ή  $\varphi_{\text{αντ}} \pm \pi$ , που αυτόματα είναι κέντρα συμμετρίας ή αντισυμμετρίας. Η αξιοποίησή μιας τέτοιας ιδιότητας περιορίζει τις αποδεκτές τιμές της παραμέτρου  $m$  σε υποσύνολο των ακέραιων αριθμών, ωστόσο αυτό δεν μειώνει σημαντικά τη συνολική υπολογιστική προσπάθεια.

(γ) Επιλογή κατάλληλων συναρτήσεων  $R_T(r_T)$ . Στις συναρτήσεις  $F_0$  και  $F_m$  αντιστοιχούν οι γραμμικοί συνδυασμοί:

$$\begin{aligned} R_{T_0}(r_T) &= C_0 + D_0 \ln\left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right), \\ R_{Tm}(r_T) &= C_m \left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)^m + D_m \left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)^{-m}, \end{aligned} \quad (7.3-18)$$

όπου η αναγωγή της ακτινικής απόστασης σε πολλαπλάσια κάποιου μήκους  $r_{T0}$  δεν έγινε μόνο για να έχει η λογαριθμική συνάρτηση αδιάστατο όρισμα, αλλά και για γενικότερη διευκόλυνση, όπως θα φανεί σε λίγο. Ανάλογα με τη φύση της οριακής συνθήκης στα ακτινικά όρια, εύχρηστες, ή και απαραίτητες επιλογές είναι οι συναρτήσεις  $R_T$ , που παρουσιάζονται στη συνέχεια. Στις συναρτήσεις αυτές δεν υπάρχει καμία ανάγκη να εισαχθούν κάποιοι συντελεστές, όπως οι  $C_m$  και  $D_m$ , επειδή τότε οι συντελεστές  $A_m$  και  $B_m$  των συναρτήσεων  $F_m$  θα εμφανίζονταν μόνο μέσω γινομένων όπως το  $A_m C_m \rightarrow A_m$ .

- Αν ο άξονας  $r_T = 0$  περιλαμβάνεται στο χώρο  $V$  και δεν υπάρχει ειδικός λόγος για απειρισμό του δυναμικού, τότε πρέπει να είναι  $R_T(r_T=0) \neq \infty$  και κατάλληλες ακτινικές συναρτήσεις είναι οι:

$$\begin{aligned} R_{T_0}(r_T) &= 1, \\ R_{Tm}(r_T) &= \left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)^m. \end{aligned} \quad (7.3-19)$$

Αν στον άξονα υπάρχει αίτιο για απειρισμό του δυναμικού (φορτίο  $\lambda_0$ , με λογαριθμική εξάρτηση του δυναμικού, ή διπολική ταινία  $\mathbf{p}_{\ell \perp 0}$ , με δυναμικό ανάλογο προς την αντίστροφη απόσταση, ή ανώτερες πολυπολικές κατανομές), είναι συνήθως προτιμότερο να συμπεριληφθεί η συνεισφορά τους στην ειδική λύση και να διατηρηθεί για τη συμπληρωματική λύση η συνθήκη  $R_T(r_T=0) \neq \infty$ , όπως έγινε στο **παράδ. 7.3-6**.

- Αν στο χώρο  $V$  περιλαμβάνεται και το άπειρο και δεν υπάρχουν λόγοι για απειρισμό του δυναμικού, όπως αν ήταν γνωστό το πεδίο στο άπειρο, βλ. **παράδ. 7.3-5**, τότε κατάλληλες είναι οι συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} R_{T_0}(r_T) &= 1, \\ R_{Tm}(r_T) &= \left(\frac{r_T}{r_{T0}}\right)^{-m}. \end{aligned} \quad (7.3-20)$$

- Αν στην ακτινική θέση  $r_T = a$  επικρατεί ομογενής συνθήκη *Dirichlet*,  $\Phi(r_T = a) = 0$ , τότε επιλέγονται οι συναρτήσεις:

$$R_{T0}(r_T) = \ln\left(\frac{r_T}{a}\right),$$

$$R_{Tm}(r_T) = \left(\frac{r_T}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{r_T}\right)^m. \quad (7.3-21)$$

- Αν στην ακτινική θέση  $r_T = a$  επικρατεί ομογενής συνθήκη *Neumann*, δηλαδή αν εκεί είναι  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=a} = 0$ , που σημαίνει (ανεξάρτητα από το αν είναι  $\mathbf{i}_n = +\mathbf{i}_T$  ή  $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_T$ , αφού η συνθήκη είναι ομογενής) ότι εκεί πρέπει να μηδενίζεται η παράγωγος  $R'_T(r_T = a) = 0$ , οι κατάλληλες συναρτήσεις είναι:

$$R_{T0}(r_T) = 1,$$

$$R_{Tm}(r_T) = \left(\frac{r_T}{a}\right)^m + \left(\frac{a}{r_T}\right)^m. \quad (7.3-22)$$

- Αν σε κανένα από τα δύο ακτινικά όρια ( $r_T = a$  και  $r_T = b$ ) δεν υπάρχουν ομογενείς οριακές συνθήκες, τότε μπορεί να εφαρμοσθεί επαλληλία, μετατρέποντας σε κάθε επιμέρους πρόβλημα από μία οριακή συνθήκη στην αντίστοιχη ομογενή. Ισοδύναμη ενέργεια είναι να γραφούν οι συναρτήσεις  $R_{Tm}$  ως γραμμικοί συνδυασμοί δύο εκφράσεων, όπως οι (7.3-21) ή (7.3-22), που στη μία να εμφανίζεται το πηλίκο  $r_T/a$  και στην άλλη το πηλίκο  $r_T/b$ . Η επιλογή μεταξύ των (7.3-21) και (7.3-22) σε κάθε όριο βασίζεται στη μορφή της οριακής συνθήκης, αν είναι τύπου *Dirichlet* ή *Neumann*, με κριτήριο να εμφανισθεί σε κάθε οριακή συνθήκη μόνο ένας από τους δύο συντελεστές, όπως παρουσιάζεται στο δεύτερο **σχόλιο** του **παραδ. 7.3-8**.

Σε κάθε περίπτωση, για τη συνάρτηση  $R_{Tm}$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γενική μορφή με δύο συντελεστές, όπως στις σχέσεις (7.3-18). Αλλά και τότε προτιμότερο είναι να γραφεί ως  $R_{Tm} = C_m(r_T/a)^m + D_m(a/r_T)^m$ , που στο όριο  $r_T = a$  δίνει την τιμή  $R_{Tm}(a) = C_m + D_m$ . Αντίθετα, η φαινομενικά πιο απλή γραφή  $R_{Tm} = C_m r_T^m + D_m r_T^{-m}$  έχει στη θέση  $r_T = a$  την τιμή  $R_{Tm}(a) = C_m a^m + D_m a^{-m}$ , που είναι σαφώς πιο δύσχρηστη.

- (δ) Ορθογωνιότητα και πληρότητα των συναρτήσεων  $F_m(\varphi)$ . Οι συναρτήσεις  $F = \{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\}$  από το βήμα ( $\beta$ ), με  $m = 1, 2, 3, \dots$ , αλλά και  $m = 0$ , όταν πρόκειται για το συνημίτονο, ικανοποιούν τη συνθήκη ορθογωνιότητας στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi F_j(\varphi) F_k(\varphi) = 0 \text{ όταν } F_j \neq F_k. \quad (7.3-23)$$

Η ανισότητα  $F_j \neq F_k$  για να είναι οι δύο συναρτήσεις ορθογώνιες αναφέρεται τόσο σε συναρτήσεις με διαφορετικές τιμές του  $m$ , συμπεριλαμβανόμενου του  $m = 0$ , όσο και σε διαφορετικές συναρτήσεις και γενικότερα σε διαφορετικούς γραμμικούς συνδυασμούς με την ίδια τιμή του  $m$ , όπως στις συναρτήσεις  $\sin(m\varphi)$  και  $\cos(m\varphi)$ , αλλά και σε συνδυασμούς όπως  $A_m \sin(m\varphi) + B_m \cos(m\varphi)$  και  $A'_m \sin(m\varphi) + B'_m \cos(m\varphi)$ , με  $A_m/B_m \neq A'_m/B'_m$ .

Οι ίδιες συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  έχουν, επίσης, την ιδιότητα, να συναποτελούν πλήρη βάση για το ανάπτυγμα σε σειρά οποιασδήποτε συνάρτησης  $f(\varphi)$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ . Πρόκειται ακριβώς για την ιδιότητα που επιτρέπει τον σχηματισμό σειράς *Fourier*, και μάλιστα με την πιο απλή μορφή, εκείνη που αναφέρεται σε περίοδο  $2\pi$ . Επιπρόσθετα, από τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  αυτές που αναφέρονται στις σχέσεις (7.3-16) αποτελούν πλήρη βάση για τις συναρτήσεις (πάντοτε με περίοδο  $2\pi$ ) που είναι συμμετρικές ως προς κάποια θέση  $\varphi = \varphi_{\text{συμ}}$  και αντίστοιχα εκείνες των σχέσεων (7.3-17) για τις συναρτήσεις που είναι αντισυμμετρικές ως προς κάποια θέση  $\varphi = \varphi_{\text{αντ}}$ .

Τέλος, ας σημειωθούν οι προφανείς σχέσεις:

$$\int_0^{2\pi} 1^2 d\varphi = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 [m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 [m(\varphi - \varphi_0)] d\varphi = \pi, \quad (7.3-24)$$

μέσω των οποίων προσδιορίζονται οι τιμές των ολοκληρωμάτων  $\int_0^{2\pi} F_m^2 d\varphi$ .

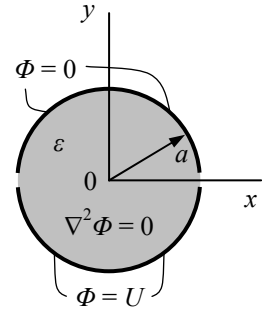
(ε) Με βάση τις επιλογές των συναρτήσεων  $F_m(\varphi)$  και  $R_{Tm}(r_T)$  κατά τα προηγούμενα βήματα, το δυναμικό εκφράζεται ως σειρά:

$$\Phi(r_T, \varphi) = F_0(\varphi) R_{T0}(r_T) + \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\varphi) R_{Tm}(r_T), \quad (7.3-25)$$

παντού στο χώρο  $V$ ,

(ζ) Στη σειρά (7.3-25) εφαρμόζεται ο τελεστής  $\mathcal{L} = 1 + \ell \partial / \partial n$  των οριακών συνθηκών στα όρια  $r_T = r_{T\min}$  και  $r_T = r_{T\max}$  (αλλά όχι στον άξονα, αν  $r_{T\min} = 0$ , ή στο άπειρο, αν  $r_{T\max} = \infty$ ), και εξισώνεται  $\mathcal{L}\Phi = f(\varphi)$ . Η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $F_m$  εφαρμόζεται στην ισότητα  $\mathcal{L}\Phi = f(\varphi)$  και έτσι σχηματίζονται οι εξισώσεις, από τις οποίες προσδιορίζονται όσοι από τους συντελεστές  $A_m, B_m, C_m, D_m$ , εμφανίζονται στο άθροισμα και δεν έχουν προσδιορισθεί προηγουμένως, στα βήματα (β) και (γ).

**Παράδειγμα 7.3-7:** Ένας κύλινδρος με ακτίνα  $a$  και μήκος  $L$  αποτελείται από διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα  $\epsilon \gg \epsilon_0$ . Η εξωτερική κυλινδρική επιφάνειά του είναι σε επαφή κατά το ήμισυ με ιδανικό αγωγό σε δυναμικό  $U$  και κατά το ήμισυ με ιδανικό αγωγό γειωμένο, ενώ οι δύο βάσεις του είναι σε επαφή με αέρα, με  $\epsilon_0$ . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό του κυλίνδρου.



**Επίλυση:** Στις δύο βάσεις, η ιδιότητα  $\epsilon_0 \ll \epsilon$  σημαίνει ότι εκεί είναι  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , δηλαδή  $(\partial\Phi/\partial z)|_{z=0,L} = 0$ . Επίσης, είναι  $\partial/\partial z = 0$  και σε κάθε άλλο στοιχείο της διάταξης (το σχήμα, την οριακή συνθήκη και την επιτρεπτότητα). Συνεπώς, πρέπει να είναι συνολικά  $\partial\Phi/\partial z = 0$ , δηλαδή  $\Phi = \Phi(r_T, \varphi)$ . Η εξάρτηση από τη γωνία  $\varphi$  επιβάλλεται από την οριακή συνθήκη, που έχει μορφή  $\Phi = Uf(\varphi)$ , ενώ η εξάρτηση από την ακτίνα  $r_T$  επιβάλλεται από την παρουσία του ορίου στην ακτινική θέση  $r_T = a$ .

Η θέση της αφετηρίας  $\varphi = 0$  επιλέγεται έτσι ώστε στο όριο να είναι  $\Phi(r_T = a, 0 < \varphi < \pi) = 0$  και  $\Phi(r_T = a, \pi < \varphi < 2\pi) = U$ . Επισημαίνεται η ασυνέχεια στην οριακή συνθήκη όταν  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pi$ , οπότε το δυναμικό θα εκφραστεί με τη μορφή σειράς. Κατά σειρά, τα βήματα είναι:

(α) Η εξάρτηση από τη γωνία  $\varphi$  περιγράφεται εν γένει μέσω των συναρτήσεων  $F_0 = B_0$  και  $F_m = A_m \sin(m\varphi) + B_m \cos(m\varphi)$ , με  $m = 1, 2, 3, \dots$

(β) Όμως, η εξάρτηση της οριακής συνθήκης από τη γωνία  $\varphi$  είναι συμμετρική ως προς τη θέση  $\varphi = \pi/2$  (ή  $\varphi = 3\pi/2$ ), δηλαδή,  $\Phi(\pi/2 + \Delta\varphi) = \Phi(\pi/2 - \Delta\varphi)$ , οπότε  $(\partial\Phi/\partial\varphi)|_{\varphi=\pi/2} = 0$ , με συνέπεια ότι οι συναρτήσεις  $F_0 = B_0$  και  $F_m = B_m \cos[m(\varphi - \pi/2)]$  αρκούν για την περιγραφή του δυναμικού. [Υπάρχει και αντισυμμετρία ως προς τη γωνία  $\varphi = 0$  (ή  $\varphi = \pi$ ), για την οποία προτιμήθηκε να γίνει αναφορά στα σχετικά **σχόλια**, ώστε να μην προκληθεί διάσπαση της συνέχειας.] Οι συναρτήσεις  $F_m$ , με  $m = 0, 1, 2, \dots$ , αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση για να αναπτυχθεί η οριακή συνθήκη, με τη συμμετρία που σημειώθηκε, σε τριγωνομετρική σειρά *Fourier*.

(γ) Για να είναι  $\Phi(r_T = 0) \neq \infty$ , από τους γραμμικούς συνδυασμούς για τις συναρτήσεις  $R_T$  θα αποκλεισθεί η λογαριθμική συνάρτηση, όταν  $m = 0$ , και οι δυνάμεις με αρνητικό εκθέτη, όταν  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Έτσι, ως ακτινικές συναρτήσεις θα επιλεγούν η  $R_{T0} = 1$  και οι  $R_{Tm} = (r_T/a)^m$ . Στην τελευταία έκφραση έχει εισαχθεί στον παρονομαστή η ακτίνα  $a$ , ώστε κατά τον επικείμενο υπολογισμό των  $R_{Tm}$  στη θέση του ορίου να είναι απλά  $R_{Tm}(r_T = a) = 1$ .

(δ) Με βάση τις επιλογές στα βήματα (β) και (γ), το δυναμικό εκφράζεται ως:

$$\Phi(r_T, \varphi) = B_0 + \sum_m B_m \left(\frac{r_T}{a}\right)^m \cos\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

(ε) Εξισώνοντας με την οριακή συνθήκη στο όριο  $r_T = a$ , σχηματίζεται η ισότητα:

$$B_0 + \sum_m B_m \cos\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \begin{cases} 0, & \text{όταν } 0 < \varphi < \pi, \\ U, & \text{όταν } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά με 1 και με  $\cos[m(\varphi - \pi/2)]$  και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ , στο οποίο αυτές οι συναντήσεις είναι ορθογώνιες, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} B_0 \int_0^{2\pi} 1^2 d\varphi &= \int_0^{\pi} 0 d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} U d\varphi \Rightarrow 2\pi B_0 = \pi U, \\ B_m \int_0^{2\pi} \cos^2\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] d\varphi &= \int_0^{\pi} 0 \cos\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} U \cos\left[m\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] d\varphi \\ \Rightarrow \pi B_m &= \frac{U}{m} \left[ \sin\left(3m\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) \right] = \begin{cases} 0, & \text{όταν } m = 2, 4, 6, \dots = 2n, \\ (-1)^n \frac{2U}{m}, & \text{όταν } m = 1, 3, 5, \dots = 2n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Όταν  $m = 2n - 1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , τότε οι συναρτήσεις  $B_m \cos[m(\varphi - \pi/2)]$  είναι ίσες με:

$$\cos\left[(2n-1)\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin[(2n-1)\varphi] \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right] = -(-1)^n \sin[(2n-1)\varphi],$$

συνεπώς, το δυναμικό περιγράφεται από τη σειρά:

$$\Phi(r_T < a, \varphi) = \frac{1}{2}U - \frac{2U}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{r_T}{a}\right)^{2n-1} \sin[(2n-1)\varphi].$$

### Σχόλια:

- Αν το πρόβλημα αναφερόταν στην εξωτερική περιοχή και ζητούμενο ήταν το δυναμικό στο χώρο  $r_T > a$ , με την ίδια οριακή συνθήκη στο όριο  $r_T = a$ , η διαδικασία θα ήταν πανομοιότυπη με την παραπάνω, ή με τις παραλλαγές που αναφέρονται στα επόμενα σχόλια, με μόνη διαφορά την αντικατάσταση  $(r_T/a)^m \rightarrow (a/r_T)^m$  στις συναρτήσεις  $R_{Tm}$ .
- Όπως αναφέρεται στο βήμα (β), στην οριακή συνθήκη υπάρχει και αντισυμμετρία ως προς τη γωνιακή θέση  $\varphi = 0$  (ή  $\varphi = \pi$ ), όχι ακριβώς στο δυναμικό  $\Phi$ , αλλά στη διαφορά  $\Phi_1 = \Phi - \frac{1}{2}U$ , δηλαδή, η αντισυμμετρία  $\Phi_1(0 + \Delta\varphi) = -\Phi_1(0 - \Delta\varphi)$ . Η ποσότητα  $\Phi_1$ , ως αντισυμμετρική, έχει μηδενικό τον σταθερό όρο και εκείνους με τα συνημίτονα  $\cos(m\varphi)$ . Έτσι, για το δυναμικό  $\Phi$  θα είναι  $B_0 = \frac{1}{2}U$  και  $F_m = A_m \sin(m\varphi)$ . Η επιλογή αυτή δεν έχει, ούτε θα μπορούσε να έχει, καμία συνέπεια ως προς τις συναρτήσεις  $R_T$ , οπότε με τις επιλογές αυτές η σειρά έχει τη μορφή:

$$\Phi = \frac{1}{2}U + \sum_m A_m \left(\frac{r_T}{a}\right)^m \sin(m\varphi).$$

Εξισώνοντας την έκφραση αυτή (για  $r_T = a$ ) με τις τιμές του δυναμικού στο όριο και εφαρμόζοντας την ορθογωνιότητα, τώρα με τις συναρτήσεις  $\sin(m\varphi)$ , προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα, όπως στην επίλυση.

- Θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί στο βήμα ( $\beta$ ) τόσο η συμμετρία ως προς  $\varphi = \pi/2$ , όσο και η αντισυμμετρία ως προς  $\varphi = 0$ . Πρέπει να είναι  $F_m = B_m \cos[m(\varphi - \pi/2)] = B_m \cos(m\varphi) \cos(m\pi/2) + B_m \sin(m\varphi) \sin(m\pi/2)$ , αλλά και  $F_m = A_m \sin(m\varphi)$ . Εξισώνοντας τις δύο εκφράσεις για τη συνάρτηση  $F_m$ , διαπιστώνεται πως πρέπει να είναι  $\cos(m\pi/2) = 0$ , δηλαδή  $m = 2n - 1$ , πληροφορία που στην επίλυση προέκυψε καθαρά αλγεβρικά. Πάντως, μετά το βήμα ( $\beta$ ) οι ίδιες αλγεβρικές πράξεις πρέπει να γίνουν, είτε είναι  $m = 1, 2, 3, \dots$ , είτε είναι  $m = 1, 3, 5, \dots$
- Αν, αντίθετα, δεν είχε διαπιστωθεί καμία συμμετρία στο βήμα ( $\beta$ ), θα είχαν διατυπωθεί οι συναρτήσεις  $F(\varphi)$  ως  $F_0 = B_0$ ,  $F_m = A_m \sin(m\varphi) + B_m \cos(m\varphi)$ , με  $m = 1, 2, 3, \dots$ , ενώ για τις ακτινικές συναρτήσεις θα μπορούσε πάλι να είχε ληφθεί  $R_{T0} = 1$  και  $R_{Tm} = (r_T/a)^m$ . Τότε, η οριακή συνθήκη στο  $r_T = a$  θα έδινε την ισότητα:

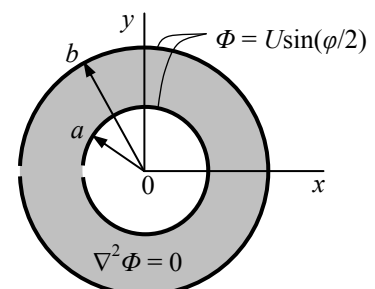
$$B_0 + \sum_m [A_m \sin(m\varphi) + B_m \cos(m\varphi)] = \begin{cases} 0, & \text{όταν } 0 < \varphi < \pi, \\ U, & \text{όταν } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Η αξιοποίηση της ορθογωνιότητας [πολλαπλασιασμός με καθεμία από τις συναρτήσεις  $1, \sin(m\varphi)$  και  $\cos(m\varphi)$  και ολοκλήρωση στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ ] θα δώσει:

- ο Με τη συνάρτηση  $1$ : ότι  $B_0 = \frac{1}{2}U$ ,
- ο Με τη συνάρτηση  $\cos(m\varphi)$ : ότι  $B_m = 0$ , για κάθε  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,
- ο Με τη συνάρτηση  $\sin(m\varphi)$ : ότι  $A_m = 0$ , όταν  $m = 2, 4, 6, \dots$ , και τις τιμές του  $A_m$  που προσδιορίστηκαν προηγουμένως, όταν  $m = 2n - 1$ .

Το έργο για να μεταφερθούν οι όροι  $B_m \cos(m\varphi)$  μέχρι το τελευταίο βήμα αποφεύγεται, αν επισημανθεί από την αρχή πως οι συμμετρίες υποδεικνύουν ότι είναι  $B_m = 0$ .

**Παράδειγμα 7.3-8:** Στην ομοαξονική διάταξη του σχήματος, στα δύο κυλινδρικά όρια η οριακή συνθήκη είναι  $\Phi(r_T = a) = \Phi(r_T = b) = U \sin(\varphi/2)$ , όπου η γωνία  $\varphi$  μετράται στο διάστημα  $-\pi < \varphi < \pi$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  στον ενδιάμεσο χώρο,  $a < r_T < b$ , στον οποίο είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ .





**Επίλυση:** Απαιτείται επίλυση με σειρά, για δύο λόγους:

- Η συνάρτηση  $\sin(\varphi/2)$  δεν είναι αποδεκτή ως συνάρτηση  $F_m(\varphi)$ , με  $m = 1/2$ , επειδή δεν είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .
- Η συνάρτηση  $\Phi = U\sin(\varphi/2)$ , που ορίζεται στο διάστημα  $-\pi < \varphi < \pi$ , προσδιορίζει ασυνέχεια στη θέση  $\varphi = \pm\pi$ .

Συνολικά, η διάταξη είναι αντισυμμετρική ως προς την τιμή  $\varphi = 0$ , ή  $\varphi = \pm\pi$ . Συνεπώς,  $F_m(\varphi) = A_m\sin(m\varphi)$  με  $m = 1, 2, 3, \dots$ , χωρίς τους συμμετρικούς όρους 1 και  $\cos(m\varphi)$ .

Για τις συναρτήσεις  $R_{Tm} = \{r_T^m, r_T^{-m}\}$ , οι οριακές συνθήκες στα όρια  $r_T = a$  και  $r_T = b$  δεν προσφέρουν κάποια ειδικότερη υπόδειξη για τον κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των  $r_T^m$  και  $r_T^{-m}$ . Μπορεί, όμως, να εφαρμοσθεί επαλληλία.

Στο Πρόβλημα 1, η οριακή συνθήκη στο όριο  $r_T = a$  μετατρέπεται σε ομογενή,  $\Phi_1(r_T=a) = 0$ , και οι συναρτήσεις  $R_{T1}$  μπορούν να εξειδικευθούν σε  $R_{T1,m} = (r_T/a)^m - (a/r_T)^m$ , ώστε να είναι  $R_{T1,m}(r_T=a) = 0$ . Έτσι, το δυναμικό γράφεται με μορφή σειράς,

$$\Phi_1(r_T, \varphi) = \sum_m A_{1,m} \left[ \left( \frac{r_T}{a} \right)^m - \left( \frac{a}{r_T} \right)^m \right] \sin(m\varphi),$$

και στο όριο  $r_T = b$  σχηματίζεται η ισότητα:

$$\Phi_1(a, \varphi) = \sum_m A_{1,m} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^m - \left( \frac{a}{b} \right)^m \right] \sin(m\varphi) = U \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον αντιπροσωπευτικό όρο  $\sin(m\varphi)$  και αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα με ολοκλήρωση στο διάστημα  $-\pi < \varphi < \pi$  (το διάστημα, στο οποίο αναφέρεται η δεξιά πλευρά, ενώ η αριστερή αναφέρεται σε οποιοδήποτε διάστημα πλάτους  $2\pi$ ), προσδιορίζεται αμέσως ο συντελεστής  $A_{1,m}$ :

$$\pi A_{1,m} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^m - \left( \frac{a}{b} \right)^m \right] = U P_m, \quad \text{με } P_m = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \sin(m\varphi) d\varphi = \dots = -(-1)^m \frac{2m}{m^2 - \frac{1}{4}}.$$

Για το δεύτερο πρόβλημα, με ομογενή τώρα την οριακή συνθήκη  $\Phi_2(r_T=b) = 0$ , αρκεί η αντικατάσταση  $1 \rightarrow 2$  και  $a \leftrightarrow b$ , οπότε τελικά το αποτέλεσμα της επαλληλίας είναι:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \frac{U}{\pi} \sum_m P_m \frac{\left[ \left( \frac{r_T}{a} \right)^m - \left( \frac{a}{r_T} \right)^m \right] + \left[ \left( \frac{b}{r_T} \right)^m - \left( \frac{r_T}{b} \right)^m \right]}{\left( \frac{b}{a} \right)^m - \left( \frac{a}{b} \right)^m} \sin(m\varphi).$$

**Σχόλια:**

- Αν δεν εφαρμοσθεί επαλληλία, η συνάρτηση  $R_{Tm}$  θα γραφεί και με τους δύο όρους,  $R_{Tm} = C_m(r_T/a)^m + D_m(a/r_T)^m$ , οπότε η έκφραση για το δυναμικό ως σειρά είναι:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \sum_m \left[ C_m \left( \frac{r_T}{a} \right)^m + D_m \left( \frac{a}{r_T} \right)^m \right] \sin(m\varphi).$$

Στη σχέση αυτή, ο συντελεστής  $A_m$  του ημιτόνου  $\sin(m\varphi)$  στον ορισμό των συναρτήσεων  $F_m$  έχει παραλειφθεί, δηλαδή, έχει τεθεί  $A_m = 1$ , ως πλεονάζων. Αν δεν παραλειφθεί, συντελεστές των δύο συναρτήσεων  $(r_T/a)^m$  και  $(a/r_T)^m$  θα είναι, ουσιαστικά, τα γινόμενα  $A_m C_m$  και  $A_m D_m$ , τα οποία στην παραπάνω έκφραση έχουν μετονομασθεί σε  $C_m$  και  $D_m$ .)

Εξισώνοντας τη σειρά που περιγράφει το δυναμικό, με  $r_T = a$  και με  $r_T = b$ , με τις οριακές συνθήκες, σχηματίζονται οι ισότητες:

$$\Phi(a, \varphi) = \sum_m [C_m + D_m] \sin(m\varphi) = U \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\Phi(b, \varphi) = \sum_m \left[ C_m \left( \frac{b}{a} \right)^m + D_m \left( \frac{a}{b} \right)^m \right] \sin(m\varphi) = U \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με κάποιο  $\sin(m\varphi)$  και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $-\pi < \varphi < \pi$  για να αξιοποιηθεί η ορθογωνιότητα, σχηματίζεται, για κάθε  $m$ , το γραμμικό σύστημα:

$$\pi \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \left(\frac{b}{a}\right)^m & \left(\frac{a}{b}\right)^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_m \\ D_m \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} P_m \\ P_m \end{bmatrix}, \text{ με } P_m = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \sin(m\varphi) d\varphi = \dots = -(-1)^m \frac{2m}{m^2 - \frac{1}{4}}.$$

Από την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι συντελεστές  $C_m$  και  $D_m$ , δηλαδή, τα γινόμενα  $A_m C_m$  και  $A_m D_m$ , αν δεν είχε τεθεί  $A_m = 1$ , που χρειάζονται για το δυναμικό  $\Phi$ .

- Εναλλακτικά, η συνάρτηση  $R_{Tm}$  μπορεί να επιλεγεί ώστε το δυναμικό να γραφεί ως:

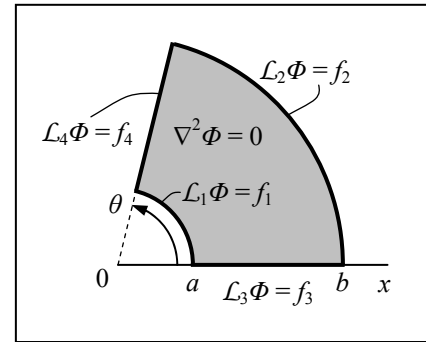
$$\Phi(r_T, \varphi) = \sum_m \left\{ E_m \left[ \left( \frac{r_T}{a} \right)^m - \left( \frac{a}{r_T} \right)^m \right] + F_m \left[ \left( \frac{r_T}{b} \right)^m - \left( \frac{b}{r_T} \right)^m \right] \right\} \sin(m\varphi).$$

Με τη μορφή αυτή, στην έκφραση του  $\Phi(a, \varphi)$  εμφανίζονται μόνο οι συντελεστές  $F_m$  και στο  $\Phi(b, \varphi)$  μόνο οι  $E_m$ , οπότε, μετά την εφαρμογή της ορθογωνιότητας, προκύπτουν αυτοτελείς εξισώσεις για κάθε  $E_m$  και  $F_m$ , και όχι ένα σύστημα  $2 \times 2$ .

- Αν ληφθεί η ακτινική συνάρτηση ως  $R_{Tm} = C_m r_T^m + D_m r_T^{-m}$ , τότε ο πίνακας με τους συντελεστές έχει τα στοιχεία  $\pi(a^m, a^{-m})$  και  $\pi(b^m, b^{-m})$  και η επίλυση του συστήματος είναι ελαφρά πιο χρονοβόρα.

### 7.3.3 Λοιπές διδιάστατες διατάξεις

**Προετοιμασία για επίλυση με σειρά σε απλές διατάξεις:** Σε διάταξη με  $\partial/\partial z = 0$ , όταν η περιοχή  $V$  εκτείνεται ως προς τη γωνία  $\varphi$  σε εύρος μικρότερο από  $2\pi$  (ενδεχομένως απειροστά), η πιο απλή διατομή έχει σχήμα καμπυλόγραμμου ορθογωνίου, όπως στο **Σχήμα 7.3-2**, με όρια  $\varphi = \varphi_1$  και  $\varphi = \varphi_2$ , που, χωρίς να ζημιωθεί η γενικότητα, μπορούν να ληφθούν ως  $\varphi_1 = 0$  και  $\varphi_2 = \theta < 2\pi$ , και επίσης  $r_T = a$  και  $r_T = b$ , που μπορεί να έχουν τις ακραίες τιμές  $a =$



Σχήμα 7.3-2

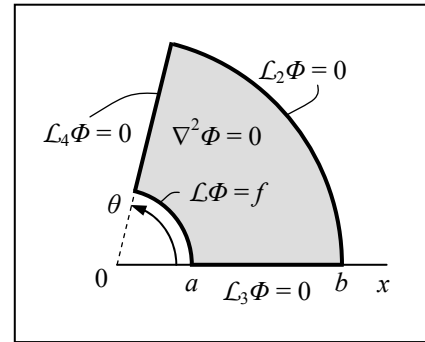
0 ή  $b = \infty$ . Στις τέσσερις πλευρές  $S_k$  του ορίου επικρατούν οριακές συνθήκες  $L_k \Phi = f_k$ , όπου ο τελεστής  $L$  μπορεί να συμβολίζει τη συνθήκη *Dirichlet* ( $L = 1$ ), *Neumann* ( $L = \partial/\partial n$ ) ή τη γενική, με  $L = 1 + \ell(\partial/\partial n)$ , όπου  $\ell \geq 0$ . Σε μια τέτοια διάταξη, με  $\nabla^2 \Phi = 0$  στο εσωτερικό της, το δυναμικό  $\Phi$  μπορεί να εκφραστεί ως σειρά, με όρους γινόμενα από τις συναρτήσεις που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 7.3.1, με τους ακόλουθους περιορισμούς:

- (α) Όταν είναι  $a = 0$  ή  $b = \infty$ , στις πλευρές με  $\varphi = \text{σταθ.}$  πρέπει να επικρατεί ομογενής οριακή συνθήκη, να είναι  $f_3 = f_4 = 0$  στη διάταξη του σχήματος.
- (β) Στη σπάνια περίπτωση της γενικής συνθήκης, πρέπει σε όρια με  $r_T = \text{σταθ.}$  (όπως στις  $L_1$  και  $L_2$  στο Σχήμα) να είναι  $\ell_k = \text{σταθ.}$ , ενώ σε όρια με  $\varphi = \text{σταθ.}$  (όπως στις  $L_3$  και  $L_4$ ) να είναι  $\ell_k = \text{σταθ.} \times r_T$ , ανάλογο της ακτινικής απόστασης.

Η γενική διαδικασία ακολουθεί τα βήματα της αντίστοιχης περίπτωσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, παράγραφος 7.2.2, με πρώτο βήμα την εφαρμογή επαλληλίας, έτσι ώστε σε κάθε επιμέρους πρόβλημα να είναι ομογενείς οι οριακές συνθήκες στις τρεις πλευρές και μόνο στην τέταρτη πλευρά να είναι η οριακή συνθήκη μη ομογενής, όση και στην αρχική διάταξη. Όμως, οι συναρτήσεις  $R_T$  και  $F$  διαφέρουν, όπως διαφέρει και η φυσιογνωμία των συντεταγμένων  $r_T$  και  $\varphi$ . Γι' αυτό, θα εξετασθούν χωριστά οι δύο αντιπροσωπευτικές περιπτώσεις, η μη ομογενής οριακή συνθήκη να αναφέρεται σε πλευρά με  $r_T = \text{σταθ.}$ , ή με  $\varphi = \text{σταθ.}$

Είναι, πάντως, δυνατόν, να εξετασθούν επιμέρους διατάξεις με ομογενείς τις οριακές συνθήκες σε δύο αντιμέτωπες έδρες, εκείνες με  $r_T = \text{σταθ.}$ , ή με  $\varphi = \text{σταθ.}$ . Τότε, οι συντελεστές της σειράς προσδιορίζονται από τις μη ομογενείς οριακές συνθήκες στις άλλες δύο έδρες, αντίστοιχα εκείνες με  $\varphi = \text{σταθ.}$ , ή με  $r_T = \text{σταθ.}$ . Η διαδικασία έχει κατά το μεγαλύτερο μέρος τα ίδια βήματα και τον ίδιο συνολικό υπολογιστικό φόρτο, και επί πλέον πρέπει να επιλυθεί ένα γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$ , εκτός αν επιλεγούν κατάλληλα οι γραμμικοί συνδυασμοί.

**Διατάξεις με τη μη ομογενή οριακή συνθήκη σε καμπύλο όριο:** Ας θεωρηθεί ως τέτοια η πλευρά  $r_T = a$ , ενώ στις άλλες τρεις πλευρές είναι  $\mathcal{L}_\kappa \Phi = 0$ , όπως στο **Σχήμα 7.3-3**. Λόγω της ομοιότητας μεταξύ των συναρτήσεων  $F_m = \{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\}$  και  $X_n = \{\sin(h_n x), \cos(h_n x)\}$ , η διαδικασία δεν παρουσιάζει ουσιώδεις διαφορές σε σχέση με τα βήματα της παραγράφου 7.2.2, και μάλιστα στην περίπτωση αυτή αποτελεί παραλλαγή της διαδικασίας της παραγράφου 7.3.2. Τα βήματα, όπως παρουσιάζονται και στα **παραδ. 7.3-9** έως **7.3-11**, είναι:



Σχήμα 7.3-3

(α) Από τη μία ομογενή οριακή συνθήκη προσδιορίζεται ο κατάλληλος γραμμικός συνδυασμός  $F_m = \{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\}$  και από τη δεύτερη οι αποδεκτές τιμές για τη σταθερά  $m$ . Ειδικότερα, αν οι συνθήκες είναι μόνο *Dirichlet* ή/και *Neumann*, που αποτελεί και το πιο σύνηθες ενδεχόμενο, τότε, με τα όρια στο  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \theta$ , είναι:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_3 \Phi = \Phi \text{ και } \mathcal{L}_4 \Phi = \Phi & \Rightarrow F_m(\varphi) = \sin(m\varphi), m\theta = n\pi, \\
 \mathcal{L}_3 \Phi = \Phi \text{ και } \mathcal{L}_4 \Phi = \partial\Phi/\partial n & \Rightarrow F_m(\varphi) = \sin(m\varphi), m\theta = (n - 1/2)\pi, \\
 \mathcal{L}_3 \Phi = \partial\Phi/\partial n \text{ και } \mathcal{L}_4 \Phi = \Phi & \Rightarrow F_m(\varphi) = \cos(m\varphi), m\theta = (n - 1/2)\pi, \\
 \mathcal{L}_3 \Phi = \partial\Phi/\partial n \text{ και } \mathcal{L}_4 \Phi = \partial\Phi/\partial n & \Rightarrow F_m(\varphi) = \cos(m\varphi), m\theta = (n - 1)\pi,
 \end{aligned}
 \tag{7.3-26}$$

με  $n = 1, 2, 3, \dots$  Επισημαίνεται ότι:

- ο Σε αντίθεση με την περίπτωση με περιοδικότητα, εδώ δεν υπάρχει κανένας λόγος να έχει η σταθερά  $m$  ακέραιες τιμές, και εν γένει δεν έχει, εκτός αν η γωνία  $\theta$  είναι ακέραιο υποπολλαπλάσιο του  $\pi$ .
- ο Στην τελευταία περίπτωση (*Neumann/Neumann*) στις τιμές του  $m$  περιλαμβάνεται και η  $m = 0$ , με συνάρτηση  $F_0(\varphi) = 1$ , όπως και στην περίπτωση με περιοδικότητα.

Στη σπάνια περίπτωση να διέπει η γενική συνθήκη μία από τις έδρες αυτές, ή και τις δύο, ας πούμε, στην έδρα  $\varphi = 0$  [με  $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_\varphi$ ,  $\partial\Phi/\partial n = \mathbf{i}_n \cdot \nabla \Phi = -(1/r_T)\partial\Phi/\partial\varphi$ ], τότε θα είναι:

$$\mathcal{L}_3 \Phi = (\Phi + \ell_3 \partial\Phi/\partial n)|_{\varphi=0} = R_{Tm}(r_T)[F_m(\varphi=0) - (\ell_3/r_T)F'_m(\varphi=0)].
 \tag{7.3-27}$$

Φαίνεται αμέσως η αναγκαιότητα να είναι η θετική σταθερά  $\ell_3$  (με διαστάσεις μήκους) ανάλογη της ακτινικής θέσης  $r_T$ , ώστε να μπορεί να προσδιορισθεί συνάρτηση  $F_m$ , εξαρτώμενη μόνο από τη γωνία  $\varphi$ . Τότε, η ζητούμενη συνάρτηση είναι  $F_m(\varphi) = \sin(m\varphi + \zeta_m)$ , όπου η σταθερά  $\zeta_m$  προσδιορίζεται από την εξίσωση  $\tan \zeta_m = m\ell_3/r_T = \text{σταθ}$ .

(β) Για κάθε τιμή του  $m$ , η αντίστοιχη συνάρτηση  $R_{Tm}$  προσδιορίζεται από την τρίτη ομογενή οριακή συνθήκη, ως υποτεθεί αυτή στην ακτινική θέση  $r_T = a$  για τη διάταξη του **Σχήματος 7.3-3**. Όταν είναι  $a \neq 0$ , και  $b \neq \infty$  για το εξωτερικό καμπύλο όριο, τότε, ανάλογα με το είδος της οριακής συνθήκης, κατάλληλοι είναι οι ακόλουθοι συνδυασμοί:

$$\begin{aligned} \Phi|_{r_T=a} = 0 & \Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \left(\frac{r_T}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{r_T}\right)^m, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\bigg|_{r_T=a} = 0 & \Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \left(\frac{r_T}{a}\right)^m + \left(\frac{a}{r_T}\right)^m, \\ \left(\Phi \mp \ell \frac{\partial \Phi}{\partial r_T}\right)\bigg|_{r_T=a} = 0 & \Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \left(1 \pm m \frac{\ell}{a}\right) \left(\frac{r_T}{a}\right)^m - \left(1 \mp m \frac{\ell}{a}\right) \left(\frac{a}{r_T}\right)^m. \end{aligned} \quad (7.3-28)$$

Στην τελευταία σχέση, που αφορά τη γενική οριακή συνθήκη, η πάνω επιλογή στο διπλό πρόσημο αναφέρεται στο όριο  $r_T = a$ , το πλησιέστερο προς την αρχή των αξόνων, όπως δηλαδή είναι στο **Σχήμα 7.3-3**, επειδή τότε είναι  $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_T$ . Η αντίθετη περίπτωση καλύπτεται από την επιλογή του κάτω πρόσημου. Είναι φανερό ότι πρέπει να είναι  $\ell = \text{σταθ.}$ , προκειμένου η συνάρτηση  $R_{Tm}$  να είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\{r_T^m, r_T^{-m}\}$ . Επίσης, μπορεί εύκολα να φανεί ότι με τις ακραίες τιμές  $\ell = 0$  ή  $\ell = \infty$  αναπαράγονται οι προηγούμενες εκφράσεις, που αφορούν την ομογενή συνθήκη *Dirichlet* ή *Neumann*.

Αν οι οριακές συνθήκες που καθορίζουν τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  είναι αμφίπλευρα τύπου *Neumann*, τότε στις αποδεκτές τιμές για τη σταθερά  $m$  περιλαμβάνεται και η τιμή  $m = 0$ , βλ. σχέση (7.3-26δ), στην οποία αντιστοιχούν οι συναρτήσεις  $R_{T0}(r_T) = \{1, \ln(r_T/r_{T0})\}$ , και τα τρία ενδεχόμενα (7.3-28) περιλαμβάνουν τώρα και τις συναρτήσεις, αντίστοιχα:

$$R_{T0}(r_T) = \ln\left(\frac{r_T}{a}\right), \quad R_{T0}(r_T) = 1, \quad R_{T0}(r_T) = \ell \pm a \ln\left(\frac{r_T}{a}\right) \quad (7.3-29)$$

Αν το όριο βρίσκεται στη θέση  $r_T = 0$  ή  $r_T = \infty$ , τότε η απαίτηση να μην απειρίζεται το δυναμικό (εκτός αν υπάρχουν ειδικοί λόγοι), καθορίζει τις συναρτήσεις  $R_{Tm}(r_T)$  ως:

$$\begin{aligned} \Phi|_{r_T=0} \neq \infty & \Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \left(\frac{r_T}{b}\right)^m, \\ \Phi|_{r_T=\infty} \neq \infty & \Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \left(\frac{b}{r_T}\right)^m, \end{aligned} \quad (7.3-30)$$

με την ακτινική θέση να έχει αναχθεί στην ακτίνα  $b$  του πεπερασμένου καμπύλου ορίου.

(γ) Με τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  και  $R_{Tm}(r_T)$ , το δυναμικό  $\Phi$  γράφεται ως σειρά:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \sum_m A_m R_{Tm}(r_T) F_m(\varphi), \quad (7.3-31)$$

και απομένει να χρησιμοποιηθεί η μη ομογενής οριακή συνθήκη  $\mathcal{L}\Phi = f$  στην ακτινική θέση  $r_T = b$ , για να προσδιορισθούν οι συντελεστές  $A_m$ . Στην πλευρά αυτή είναι  $\mathcal{L}\Phi = \mathcal{L}[\sum_m A_m F_m(\varphi) R_{Tm}(r_T)]|_{r_T=b} = \sum_m A_m F_m(\varphi) \mathcal{L}R_{Tm}(r_T)|_{r_T=b}$  και, εξισώνοντας με τη συνάρτηση  $f$ , σχηματίζεται ισότητα μεταξύ δύο συναρτήσεων της γωνίας  $\varphi$ . Πολλαπλασιάζοντας κάθε πλευρά με τον αντιπροσωπευτικό όρο  $F_m(\varphi)$  και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < \varphi < \theta$  (για το **Σχήμα 7.3-3**, αλλιώς στο διάστημα που καθορίζει τις συναρτήσεις  $F_m$  και τις τιμές του  $m$ ), αξιοποιείται η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $F_m(\varphi)$  στο διάστημα αυτό και, έτσι, σχηματίζεται η εξίσωση για τον αντίστοιχο συντελεστή  $A_m$ . Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \sum_m A_m \mathcal{L}R_{Tm}(r_T)|_{r_T=b} F_m(\varphi) &= f(\varphi) \\ \Rightarrow A_m \mathcal{L}R_{Tm}(r_T)|_{r_T=b} \int_0^\theta F_m^2(\varphi) d\varphi &= \int_0^\theta F_m(\varphi) f(\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (7.3-32)$$

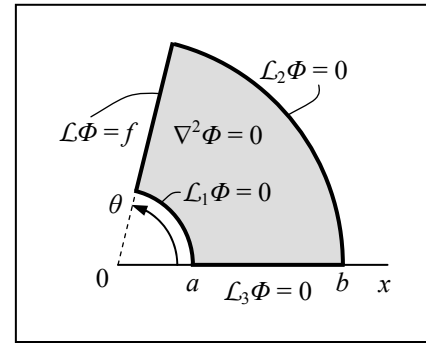
Ως εναλλακτική θεώρηση, οι συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$ , από το βήμα (α) και με τις αντίστοιχες τιμές της σταθεράς  $m$ , αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση για κάθε συνάρτηση στο διάστημα  $0 < \varphi < \theta$ , και χρησιμεύουν για να αναπτυχθεί σε σειρά η συνάρτηση  $f(\varphi)$  της μη ομογενούς οριακής συνθήκης, δηλαδή:

$$f(\varphi) = \sum_m P_m F_m(\varphi), \quad \text{με} \quad P_m \int_0^\theta F_m^2(\varphi) d\varphi = \int_0^\theta f(\varphi) F_m(\varphi) d\varphi, \quad (7.3-33)$$

και ακολούθως στην ισότητα  $\mathcal{L}\Phi = f$  εξισώνονται οι συντελεστές κάθε συνάρτησης  $F_m(\varphi)$ , για να προσδιορισθούν οι συντελεστές  $A_m$ .

Αν μη ομογενείς οριακές συνθήκες επικρατούν και στα δύο όρια  $r_T = a$  και  $r_T = b$ , τότε στο βήμα (β) οι συναρτήσεις  $R_{Tm}$  θα περιέχουν δύο όρους και δύο συντελεστές, όπως  $R_{Tm} = A_m r_T^m + B_m r_T^{-m}$  ή  $A_m (r_T/a)^m + B_m (a/r_T)^m$ . Εξισώνοντας  $\sum_m F_m(\varphi) \mathcal{L}R_{Tm}(r_T)|_{r_T=a,b} = f_{a,b}(\varphi)$  και αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα σχηματίζεται, για κάθε  $m$ , ένα γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$  για τους αντίστοιχους συντελεστές  $A_m$  και  $B_m$ . Αν, ωστόσο, η συνάρτηση  $R_{Tm}$  εκφρασθεί ως κατάλληλος γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων μεταξύ των (7.3-28), στη μία με μεταβλητή το πηλίκο  $r_T/a$  και στην άλλη το  $r_T/b$ , όπως στο **παράδ. 7.3-11**, τότε προκύπτουν αυτοτελείς εξισώσεις για κάθε συντελεστή, και όχι σύστημα  $2 \times 2$ . Εναλλακτικά, μπορεί βέβαια να εφαρμοσθεί επαλληλία.

**Διατάξεις με μη ομογενή οριακή συνθήκη σε ευθύ-γραμμο όριο:** Ενδεικτική είναι η διάταξη στο **Σχήμα 7.3-4**, με μη ομογενή τη συνθήκη στην πλευρά  $\varphi = \theta$ , ενώ στις άλλες τρεις πλευρές είναι  $\mathcal{L}_\kappa \Phi = 0$ . Τώρα, οι ακτινικές συναρτήσεις  $R_{Tm}(r_T) = \{\sin[m \ln(r_T/r_{T0})], \cos[m \ln(r_T/r_{T0})]\}$  και οι συναρτήσεις  $X_n(x) = \{\sin(h_n x), \cos(h_n x)\}$  έχουν μειωμένη ομοιότητα, λόγω της λογαριθμικής συνάρτησης στο όρισμα. Πάντως, η διαδικασία ακολουθεί εννοιολογικά τα ίδια βήματα, με διαφορές που οφείλονται μόνο στη μορφή των συναρτήσεων  $R_{Tm}$ . Η κύρια διαφορά είναι, ότι στην ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $R_{Tm}(r_T)$  εμπλέκεται και συνάρτηση βάρους. Τα βήματα τώρα είναι τα εξής (βλ. και **παραδ. 7.3-12** και **7.3-13**):



Σχήμα 7.3-4

(α) Οι γραμμικοί συνδυασμοί  $R_{Tm}(r_T) = \{\sin[m \ln(r_T/r_{T0})], \cos[m \ln(r_T/r_{T0})]\}$  και οι αντίστοιχες τιμές της σταθεράς  $m$  προσδιορίζονται, ώστε να ικανοποιούνται οι ομογενείς οριακές συνθήκες στο ζεύγος αντιμέτωπων πλευρών. Για τη διάταξη του **Σχήματος 7.3-4** αυτές βρίσκονται στις ακτινικές θέσεις  $r_T = a$  και  $r_T = b$ . Επειδή, όμως, οι συναρτήσεις που θα σχηματίσουν τον γραμμικό συνδυασμό δεν συγκλίνουν ούτε στο  $r_T = 0$ , ούτε στο  $r_T = \infty$ , πρέπει να είναι  $(a, b) \neq (0, \infty)$ . Αντίστοιχος περιορισμός έχει σχολιασθεί στην παράγραφο 7.2.2, όταν μία πλευρά είναι στο άπειρο, όπως στο **Σχήμα 7.2-6**. Ειδικά στη συνηθέστερη περίπτωση συνθηκών *Dirichlet* ή/και *Neumann*, οι συναρτήσεις αυτές είναι:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \Phi = \Phi \text{ και } \mathcal{L}_2 \Phi = \Phi &\Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \sin\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right), m \ln \frac{b}{a} = n\pi, \\ \mathcal{L}_1 \Phi = \Phi \text{ και } \mathcal{L}_2 \Phi = \partial \Phi / \partial n &\Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \sin\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right), m \ln \frac{b}{a} = (n - \frac{1}{2})\pi, \\ \mathcal{L}_1 \Phi = \partial \Phi / \partial n \text{ και } \mathcal{L}_2 \Phi = \Phi &\Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \cos\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right), m \ln \frac{b}{a} = (n - \frac{1}{2})\pi, \\ \mathcal{L}_1 \Phi = \partial \Phi / \partial n \text{ και } \mathcal{L}_2 \Phi = \partial \Phi / \partial n &\Rightarrow R_{Tm}(r_T) = \cos\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right), m \ln \frac{b}{a} = (n - 1)\pi, \end{aligned} \quad (7.3-34)$$

με  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Επισημαίνεται ότι η τιμή της σταθεράς  $m$  είναι, κατά κανόνα, ένας θετικός **μη** ακέραιος αριθμός. Υποτίθεται, ότι  $b > a$ , που συνοδεύεται από  $r_T > a$ . Στην ειδική περίπτωση, κατά την οποία και οι δύο πλευρές χαρακτηρίζονται από συνθήκη *Neumann*, η πρώτη τιμή του  $m$  είναι η τιμή  $m = 0$ , με αντίστοιχη συνάρτηση την  $R_{T0}(r_T) = 1$ .

Τέλος, αν σε μία έδρα, όπως στην  $r_T = a (< b)$ , η οριακή συνθήκη είναι η γενική, τότε η συνάρτηση είναι η  $R_{Tm}(r_T) = \sin[m \ln(r_T/a) + \zeta_m]$ , με  $\tan \zeta_m = m\ell/a$ .

(β) Για κάθε τιμή του  $m$ , για την αντίστοιχη συνάρτηση  $F_m$  είναι σαφώς προτιμότερο να γίνει η επιλογή μεταξύ των υπερβολικών συναρτήσεων  $\{\sinh(m\varphi), \cosh(m\varphi)\}$ , όχι μόνο επειδή το διάστημα  $0 < \varphi < \theta$  είναι πεπερασμένο, αλλά και επειδή διευκολύνει ο μηδενισμός  $\sinh(m\varphi)|_{\varphi=0} = (d/d\varphi)\cosh(m\varphi)|_{\varphi=0} = 0$ . Η ειδικότερη επιλογή του γραμμικού συνδυασμού καθορίζεται από την τρίτη ομογενή οριακή συνθήκη. Αν, όπως στο **Σχήμα 7.3-4**, αυτή η συνθήκη συναντάται στην πλευρά  $\varphi = 0$ , τότε τα ενδεχόμενα είναι:

$$\begin{aligned} \Phi|_{\varphi=0} = 0 & \Rightarrow F_m(\varphi) = \sinh(m\varphi), \\ \frac{1}{r_T} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0 & \Rightarrow F_m(\varphi) = \cosh(m\varphi), \\ \left( \Phi \mp \frac{\ell}{r_T} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0} = 0 & \Rightarrow F_m(\varphi) = \sinh(m\varphi) \pm m \frac{\ell}{r_T} \cosh(m\varphi). \end{aligned} \quad (7.3-35)$$

Στο τελευταίο ενδεχόμενο, το πάνω πρόσημο αναφέρεται σε διατάξεις, στις οποίες το όριο  $\varphi = 0$  είναι εκείνο με την ελάχιστη τιμή για τη γωνία  $\varphi$ , όπως στο **Σχήμα 7.3-4**, ενώ το κάτω πρόσημο αναφέρεται στην αντίθετη περίπτωση, σε διατάξεις που εκτείνονται σε περιοχή με αρνητικές τιμές για τη γωνία  $\varphi$ . Στην ίδια σχέση (7.3-35γ) υπενθυμίζεται ότι η ποσότητα  $\ell$  στην οριακή συνθήκη πρέπει να είναι ανάλογη προς την ακτίνα  $r_T$ , συνεπώς, στην έκφραση για τη συνάρτηση  $F_m$  το πηλίκο  $\ell/r_T$  είναι σταθερή ποσότητα.

Με τις παραπάνω συναρτήσεις  $R_{Tm}(r_T)$  και  $F_m(\varphi)$ , το δυναμικό εκφράζεται ως σειρά:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \sum_m A_m F_m(\varphi) R_{Tm}(r_T). \quad (7.3-36)$$

(γ) Οι συναρτήσεις  $R_{Tm}(r_T)$  αποτελούν πάλι πλήρη ορθογώνια βάση στο διάστημα  $a < r_T < b$ , αλλά το νέο στοιχείο είναι η συνάρτηση βάρους, ίση με  $1/r_T$ , ενώ προηγουμένως συνάρτηση βάρους ήταν η μονάδα, και δεν είχε νόημα να αναφερθεί. Αυτό σημαίνει ότι:

$$\int_a^b \frac{1}{r_T} R_{Tm}(r_T) R_{Tm'}(r_T) dr_T = 0, \quad \text{όταν } m' \neq m \text{ (ορθογωνιότητα)}, \quad (7.3-37)$$

$$f(r_T) = \sum_m P_m R_{Tm}(r_T), \quad \text{για κάθε συνάρτηση } f(r_T) \text{ (πληρότητα)}, \quad (7.3-38)$$

όπου οι συντελεστές  $P_m$  προσδιορίζονται εφαρμόζοντας την ορθογωνιότητα:

$$P_m \int_a^b \frac{1}{r_T} R_{Tm}^2(r_T) dr_T = \int_a^b \frac{1}{r_T} f(r_T) R_{Tm}(r_T) dr_T. \quad (7.3-39)$$



Στην τελευταία πλευρά (στη θέση  $\varphi = \theta$ ), η μη ομογενής οριακή συνθήκη γράφεται  $\mathcal{L}\Phi = \mathcal{L}[\sum_m A_m R_{Tm}(r_T) F_m(\varphi)]_{\varphi=\theta} = \sum_m A_m R_{Tm}(r_T) \mathcal{L}F_m(\varphi)|_{\varphi=\theta}$ . Η σχέση αυτή είναι μια ισότητα μεταξύ δύο συναρτήσεων της ακτίνας  $r_T$ . Πολλαπλασιάζοντας κάθε πλευρά με τον αντιπροσωπευτικό όρο  $R_{Tm}(r_T)$  και τη συνάρτηση βάρους  $1/r_T$ , ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $a < r_T < b$ , και γενικότερα στο διάστημα που καθορίζει τις συναρτήσεις  $R_{Tm}$  και τις τιμές του  $m$ , και αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα (7.3-37), σχηματίζεται η εξίσωση για τον αντίστοιχο συντελεστή  $A_m$ :

$$A_m \mathcal{L}F_m(\varphi)|_{\varphi=\theta} \int_a^b \frac{1}{r_T} R_{Tm}^2(r_T) dr_T = \int_a^b \frac{1}{r_T} R_{Tm}(r_T) f(r_T) dr_T. \quad (7.3-40)$$

Όταν η συνάρτηση  $R_{Tm}(r_T)$  έχει σχηματισθεί από συνθήκες *Dirichlet* ή/και *Neumann* στις δύο πλευρές  $r_T = a$  και  $r_T = b$ , δηλαδή στα τέσσερα ενδεχόμενα που παρουσιάζονται στις σχέσεις (7.3-34), τότε το ολοκλήρωμα στην αριστερή πλευρά έχει την τιμή:

$$\int_a^b \frac{1}{r_T} R_{Tm}^2(r_T) dr_T = \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}. \quad (7.3-41)$$

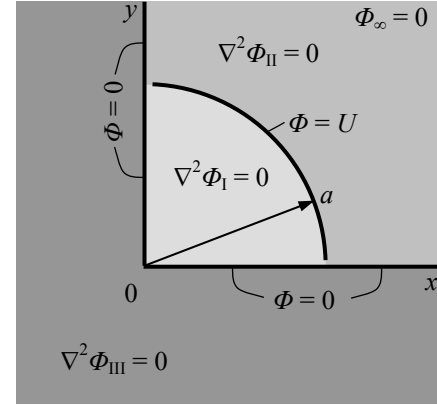
εκτός αν είναι  $m = 0$ , που τότε είναι  $R_{T0} = 1$  και το ολοκλήρωμα είναι ίσο με  $\ln(b/a)$ .

[Η ορθογωνιότητα προκύπτει από τη θεωρία των προβλημάτων *Sturm-Liouville*, όπως εφαρμόζεται εδώ στη διαφορική εξίσωση  $(d/dr_T)(r_T dR_{Tm}/dr_T) = -(m^2/r_T)R_{Tm}$ . Π.χ. η συνάρτηση βάρους είναι ο συντελεστής του  $m^2$  στη διαφορική εξίσωση. Όλα τα παραπάνω μπορούν να προκύψουν και με την αλλαγή μεταβλητής  $\xi = \ln(r_T/r_{T1})$ , κατάλληλη άρτια ή περιττή επέκταση της συνάρτησης  $R_{Tm}$  και αναφορά στις ιδιότητες των τριγωνομετρικών σειρών *Fourier*, όπως έχει σχολιασθεί και στην παράγραφο 7.2.2, χωρίς να γίνει επίκληση των ιδιοτήτων ενός προβλήματος *Sturm-Liouville*.]

Οι **σύνθετες διατάξεις**, αυτές με τα χαρακτηριστικά που περιγράφονται στην παράγραφο 7.2.3, προσαρμοσμένα σε κυλινδρική δομή, αντιμετωπίζονται με παρόμοια διαδικασία. Η σύνθετη διάταξη, μετά από αρχική επαλληλία, αν χρειάζεται, διασπάται σε επιμέρους απλές περιοχές. Σε κάθε τέτοια περιοχή, το δυναμικό  $\Phi$  εκφράζεται ως σειρά, που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες, όπου το όριο της περιοχής είναι και εξωτερικό όριο της αρχικής διάταξης. Στα όρια που είναι εσωτερικές επιφάνειες της αρχικής σύνθετης διάταξης, συσχετίζονται οι τιμές  $\Phi$  και οι παράγωγοι  $\partial\Phi/\partial n$  των σειρών που περιγράφουν τις παρακείμενες απλές περιοχές και με εφαρμογή της ορθογωνιότητας δύο φορές, μία από κάθε πλευρά, συνδέονται οι συντελεστές των δύο σειρών. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται στα **παράδ. 7.3-14** έως **7.3-16**.

**Παράδειγμα 7.3-9:** Στη διάταξη του σχήματος είναι  $\Phi = 0$  σε ολόκληρα τα ημιεπίπεδα  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pi/2$ , ενώ στο τμήμα της κυλινδρικής επιφάνειας  $r_T = a$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$  είναι  $\Phi = U$ . Ζητείται το δυναμικό παντού στο χώρο, με  $\Phi|_{\infty} = 0$ .

**Επίλυση:** Στην περιοχή III ( $0 < r_T < \infty$ ,  $\pi/2 < \varphi < 2\pi$ ) είναι προφανώς  $\Phi_{III} = 0$ . Ικανοποιεί την απαίτηση  $\Phi_{III} = 0$  σε ολόκληρο το όριο, καθώς και την εξίσωση  $\nabla^2 \Phi_{III} = 0$ , άρα είναι η μοναδική λύση.)



Οι περιοχές I ( $r_T < a$ ) και II ( $r_T > a$ ) εκτείνονται και οι δύο στο διάστημα  $0 < \varphi < \pi/2$ . Οι οριακές συνθήκες στα άκρα  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pi/2$  υποδεικνύουν  $F_m = \sin(m\varphi)$ , με  $m = 2, 4, 6, \dots = 2n$ , ώστε πράγματι να είναι  $\Phi_m(\varphi = 0) = \Phi_m(\varphi = \pi/2) = 0$ . Στις ίδιες περιοχές, οι συναρτήσεις  $R_T$  θα επιλεγούν ως  $R_{II,m}(r_T < a) = (r_T/a)^m$ , ώστε να είναι  $R_{II,m}(r_T = 0) \neq \infty$ , και  $R_{II,m}(r_T > a) = (a/r_T)^m$ , για να είναι  $R_{II,m}(r_T = \infty) \neq \infty$ . Στις σχέσεις αυτές η ακτίνα  $r_T$  εκφράζεται μέσω του πηλίκου  $r_T/a$ , ώστε κατά την επικείμενη χρήση της οριακής συνθήκης στην ακτίνα  $r_T = a$  να είναι απλά  $R_{II,m}(r_T = a) = R_{II,m}(r_T = a) = 1$ . Έτσι, το δυναμικό εκφράζεται ως σειρά, στην περιοχή I ως  $\Phi_I = \sum_m A_{Im} R_{II,m}(r_T) F_m(\varphi)$  και αντίστοιχα το  $\Phi_{II}$ . Το καμπύλο όριο  $r_T = a$  είναι κοινό και για τις δύο περιοχές και το ίδιο ισχύει για την οριακή συνθήκη  $\Phi = U$ , που δίνει τη διπλή ισότητα:

$$\sum_m A_{I,m} \sin(m\varphi) = \sum_m A_{II,m} \sin(m\varphi) = U.$$

Με την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $F_m$  στο διάστημα  $0 < \varphi < \pi/2$  προκύπτει:

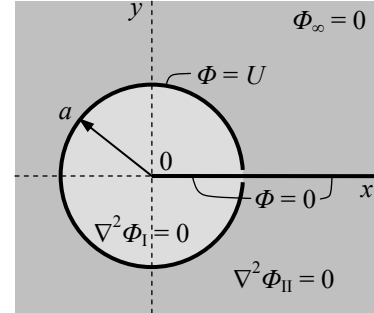
$$\frac{\pi}{4} A_{I,m} = \frac{\pi}{4} A_{II,m} = U \int_0^{\pi/2} \sin(m\varphi) d\varphi = \frac{U}{m} \left( 1 - \cos \frac{m\pi}{2} \right),$$

η εξίσωση για τα  $A_m$  ( $= A_{Im} = A_{II,m}$ ). Δεδομένου ότι κατ' αρχήν είναι  $m = 2, 4, 6, \dots$ , διαπιστώνεται αμέσως ότι μόνο όταν  $m = 2, 6, 10, \dots = 2(2n-1)$  είναι οι συντελεστές  $A_m$  μη μηδενικοί. Συνολικά, για τις περιοχές I και II, που εκτείνονται στο διάστημα  $0 < \varphi < \pi/2$ , είναι:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \frac{4}{\pi} U \sum_n \frac{1}{2n-1} \sin[2(2n-1)\varphi] \min \left\{ \left( \frac{r_T}{a} \right)^{2(2n-1)}, \left( \frac{a}{r_T} \right)^{2(2n-1)} \right\}, \text{ με } n = 1, 2, 3, \dots$$

**Σχόλιο:** Οι όροι με  $m = 4n$  δεν υπάρχουν, επειδή η διάταξη είναι συμμετρική ως προς τη θέση  $\varphi_{\text{συμ}} = \pi/4$ . Λόγω αυτής της συμμετρίας πρέπει να είναι  $F_m'(\varphi = \pi/4) = 0$ . Θα μπορούσε εξ αρχής από τις συναρτήσεις  $F_m = \sin(m\varphi)$ ,  $m = 2, 4, 6, \dots$  να είχαν κρατηθεί μόνο αυτές με  $\cos(m\pi/4) = 0$ , δηλαδή με  $m = 2(2n-1)$ , χωρίς, πάντως, ουσιαστικό υπολογιστικό όφελος.

**Παράδειγμα 7.3-10:** Σε ομογενή χώρο με άπειρο μήκος, ένα κυλινδρικό κέλυφος με ακτίνα  $a$  είναι σε δυναμικό  $U$ , ενώ ένα γειωμένο ημιάπειρο έλασμα διεισδύει στο εσωτερικό του κελύφους μέσω κατάλληλης σχισμής, ώστε το πεπερασμένο άκρο του ελάσματος να συμπίπτει με τον άξονα του κελύφους. Στο άπειρο είναι  $\Phi|_{\infty} = 0$ . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi$  παντού, τόσο στην περιοχή  $r_T < a$ , όσο και στην περιοχή  $r_T > a$ .



**Επίλυση:** Μολονότι η διάταξη εκτείνεται σε ολόκληρο το διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ , δεν υπακούει σε συνθήκη περιοδικότητας, λόγω της παρουσίας ορίων στα  $\varphi = 0$  και  $\varphi = 2\pi$ . Κατά τα λοιπά, η διάταξη είναι ταυτόσημη με εκείνη στο **παράδ. 7.3-9**, μόνο που τώρα η γωνία στην αρχή των αξόνων είναι ίση με  $2\pi$ , αντί για  $\pi/2$ , και η περιοχή  $\pi/2 < \varphi < 2\pi$  του **παράδ. 7.3-9** εδώ συμπίπτει στον ημιάξονα  $y = 0, x > 0$ .

Επιλέγεται  $F_m(\varphi) = \sin(m\varphi)$ , τώρα με  $m = 1/2, 1, 3/2, \dots$ , ώστε να είναι  $F_m(\varphi=0) = F_m(\varphi=2\pi) = 0$ . Η διάταξη είναι συμμετρική ως προς  $\varphi_{\text{συμ}} = \pi$ , συνεπώς πρέπει να είναι  $F_m'(\varphi=\pi) = 0$ , δηλαδή  $\cos(m\pi) = 0$ . Έτσι, απορρίπτονται οι ακέραιες τιμές  $m$  και παραμένουν μόνο οι τιμές  $m = 1/2(2n-1)$ . Με  $R_{\text{I},m}(r_T < a) = (r_T/a)^m$  και  $R_{\text{II},m}(r_T > a) = (a/r_T)^m$ , κατά περίπτωση, ώστε να αποκλεισθεί το ενδεχόμενο απειρισμού, το δυναμικό περιγράφεται από τις σειρές  $\Phi_{\text{I,II}} = \sum_m A_{m\text{I,II}} R_{\text{I,II},m}(r_T) F_m(\varphi)$ . Στο κοινό όριο των δύο περιοχών είναι  $R_{\text{I},m}(r_T = a) = R_{\text{II},m}(r_T = a) = 1$ , επειδή προνοήθηκε να γραφούν οι συναρτήσεις  $R_{Tm}$  ως συναρτήσεις του πηλίκου  $r_T/a$ . Συνεπώς, η οριακή συνθήκη  $\Phi = U$  γράφεται:

$$\sum_m A_{m\text{I}} F_m(\varphi) = \sum_m A_{m\text{II}} F_m(\varphi) = U.$$

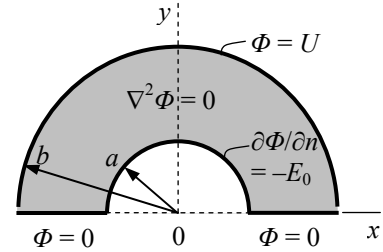
Προφανώς, είναι  $A_{m\text{I}} = A_{m\text{II}} = A_m$ , όπως θα μπορούσε να είχε επισημανθεί και νωρίτερα, αφού και οι δύο περιοχές υπακούουν στην ίδια οριακή συνθήκη. Η ορθογωνιότητα δίνει:

$$\pi A_m = U \int_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi = \frac{U}{m} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) \right] = \frac{2U}{m} = \frac{4U}{2n-1},$$

και τελικά, με  $n = 1, 2, 3, \dots$ , το αποτέλεσμα γράφεται:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \frac{4U}{\pi} \sum_n \frac{1}{2n-1} \sin\left[\frac{1}{2}(2n-1)\varphi\right] \times \begin{cases} \left(\frac{r_T}{a}\right)^{(2n-1)/2} & (r_T < a), \\ \left(\frac{a}{r_T}\right)^{(2n-1)/2} & (r_T > a). \end{cases}$$

**Παράδειγμα 7.3-11:** Ζητείται το δυναμικό  $\Phi$  στην περιοχή  $a < r_T < b$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , της οποίας τα κυλινδρικά όρια διέπονται από τις οριακές συνθήκες  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=a} = -E_0$  και  $\Phi|_{r_T=b} = U$ , ενώ τα επίπεδα όρια είναι γειωμένα.



**Επίλυση:** Η παρουσία ασυνέχειας στα δύο άκρα του ημικυκλίου  $r_T = b$  οδηγεί στη διατύπωση του δυναμικού με μορφή σειράς. Από τις ομογενείς συνθήκες στα όρια  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pi$  προσδιορίζονται οι συναρτήσεις  $F_m(\varphi) = \sin(m\varphi)$ , με αποδεκτές τιμές τις  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Όμως, η διάταξη είναι συμμετρική ως προς τη γωνιακή θέση  $\varphi = \pi/2$ , και αυτό περιορίζει τις συναρτήσεις  $F_m$  σε εκείνες με  $F'_m(\varphi = \pi/2) = 0$ , συνεπώς, τελικά αποδεκτές είναι μόνο οι περιττές τιμές,  $m = 1, 3, 5, \dots = 2n - 1$ .

Οι δύο αντιμέτωπες πλευρές με  $\varphi = \text{σταθ.}$  διέπονται από μη ομογενείς οριακές συνθήκες. Μπορεί, βέβαια, να εφαρμοσθεί επαλληλία, αλλά είναι ταχύτερο να αξιοποιηθεί η μέχρι τώρα εμπειρία και να γίνει για τις συναρτήσεις  $R_{Tm}(r_T)$  η «διορατική» επιλογή:

$$R_{Tm}(r_T) = A_m \left[ \left( \frac{r_T}{a} \right)^m + \left( \frac{a}{r_T} \right)^m \right] + B_m \left[ \left( \frac{r_T}{b} \right)^m - \left( \frac{b}{r_T} \right)^m \right],$$

με παράγωγο:

$$\frac{d}{dr_T} R_{Tm}(r_T) = A_m \frac{m}{r_T} \left[ \left( \frac{r_T}{a} \right)^m - \left( \frac{a}{r_T} \right)^m \right] + B_m \frac{m}{r_T} \left[ \left( \frac{r_T}{b} \right)^m + \left( \frac{b}{r_T} \right)^m \right].$$

Η επιλογή αυτή είναι βέβαια αποδεκτή, αφού οι συναρτήσεις είναι γραμμικοί συνδυασμοί των  $r_T^m$  και  $r_T^{-m}$ . Το βασικό χαρακτηριστικό της είναι ότι ο πρώτος όρος έχει μηδενική παράγωγο στη θέση  $r_T = a$ , εκεί που η οριακή συνθήκη ορίζει την τιμή της παραγώγου,  $\partial\Phi/\partial n = \dots$ , και ο δεύτερος έχει μηδενική τιμή στην ακτίνα  $r_T = b$ , εκεί που η οριακή συνθήκη δίνει την τιμή του δυναμικού,  $\Phi = \dots$ . Χάρη σε αυτή την επιλογή των συναρτήσεων  $R_T$ , περιγράφοντας το δυναμικό από το άθροισμα  $\Phi = \sum_m R_{Tm}(r_T) F_m(\varphi)$  και με  $\partial\Phi/\partial n = -\partial\Phi/\partial r_T$  στο όριο  $r_T = a$  (όπου  $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_T$ ), οι δύο μη ομογενείς οριακές συνθήκες γράφονται:

$$\begin{aligned} r_T = a: \quad \sum_m R'_{Tm}(a) F_m(\varphi) &= \sum_m B_m \frac{m}{a} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^m + \left( \frac{b}{a} \right)^m \right] F_m(\varphi) = E_0, \\ r_T = b: \quad \sum_m R_{Tm}(b) F_m(\varphi) &= \sum_m A_m \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^m + \left( \frac{a}{b} \right)^m \right] F_m(\varphi) = U. \end{aligned}$$

Αμέσως προβάλλεται το πλεονέκτημα της επιλογής. Κάθε οριακή συνθήκη εμπλέκει μόνο μία οικογένεια συντελεστών: η πρώτη σχέση τους  $B_m$  και η δεύτερη τους  $A_m$ .

Η τιμή κάθε συντελεστή προσδιορίζεται αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $F_m$ . Έτσι, προκύπτουν οι ισότητες:

$$\frac{\pi}{2} B_m \frac{m}{a} \left[ \left( \frac{a}{b} \right)^m + \left( \frac{b}{a} \right)^m \right] = \frac{E_0}{m} [1 - \cos(m\pi)] = \frac{2E_0}{m},$$

$$\frac{\pi}{2} A_m \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^m + \left( \frac{a}{b} \right)^m \right] = U [1 - \cos(m\pi)] = \frac{2U}{m},$$

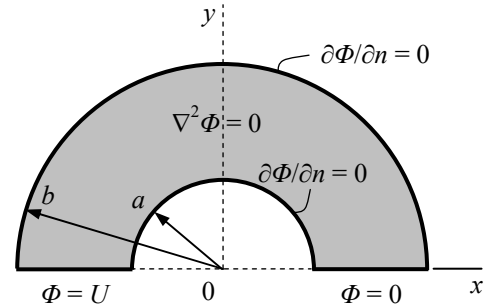
με  $m = 1, 3, 5, \dots = 2n - 1$ , συνεπώς  $\cos(m\pi) = -1$ . Η τελική έκφραση για το δυναμικό είναι:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=2n-1} \frac{1}{\left( \frac{a}{b} \right)^m + \left( \frac{b}{a} \right)^m} \left\{ \frac{U}{m} \left[ \left( \frac{r_T}{a} \right)^m + \left( \frac{a}{r_T} \right)^m \right] + \frac{E_0 a}{m^2} \left[ \left( \frac{r_T}{b} \right)^m - \left( \frac{b}{r_T} \right)^m \right] \right\} \sin(m\varphi).$$

### Σχόλια:

- Οι συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  μπορούν να διατυπωθούν εναλλακτικά, ξεκινώντας από τη συμμετρία ως προς τη γωνιακή θέση  $\varphi = \pi/2$ . Η συμμετρία σημαίνει ότι πρέπει  $F'_m(\varphi = \pi/2) = 0$ , συνεπώς οι συναρτήσεις πρέπει να έχουν τη μορφή  $F_m(\varphi) = \cos[m(\varphi - \pi/2)]$ . Η απαίτηση  $F_m(\varphi = 0) = 0$  [ή  $F_m(\varphi = \pi) = 0$ ] από τις οριακές συνθήκες προσδιορίζει τις αποδεκτές τιμές  $m = 2n - 1$ . Για τέτοιες τιμές του  $m$  είναι, βέβαια,  $\cos[m(\varphi - \pi/2)] = \pm \sin(m\varphi)$ .
- Στις τελικές εκφράσεις για τους συντελεστές, ο όρος  $[1 - \cos(m\pi)]$  μηδενίζεται, όταν είναι  $m = 2n$ , δηλαδή, τότε είναι  $A_m = 0$  και  $B_m = 0$ . Έτσι προσδιορίζεται αλγεβρικά ότι η σειρά περιέχει μόνο τους όρους με  $m = 2n - 1$ . Στην επίλυση, η πληροφορία αυτή εξάγεται από τη συμμετρία της διάταξης (χωρίς από αυτό να μειωθεί η αλγεβρική προσπάθεια).
- Κάθε άλλη επιλογή για τη συνάρτηση  $R_{Tm}$  θα κατέληγε σε γραμμικό σύστημα  $2 \times 2$ , πιο πολύπλοκο με  $R_{Tm} = A_m r_T^m + B_m r_T^{-m}$ , λιγότερο πολύπλοκο με  $R_{Tm} = A_m (r_T/a)^m + B_m (a/r_T)^m$ .
- Αν εφαρμοσθεί επαλληλία, και στις δύο διατάξεις η μία οικογένεια συναρτήσεων είναι οι  $F_m(\varphi) = \sin(m\varphi)$ , με  $m = 1, 2, 3, \dots$  που περιορίζονται σε  $m = 1, 3, 5, \dots$ . Στην πρώτη διάταξη θα τεθεί  $(\partial\Phi_1/\partial n)|_{r_T=a} = 0$  (αντί  $= -E_0$ ), με συνέπεια για την ακτινική συνάρτηση να γίνει η επιλογή  $R_{T1m} = A_m [(r_T/a)^m + (a/r_T)^m]$ , όπως ο πρώτος όρος της συνάρτησης  $R_{Tm}$ . Η χρήση της οριακής συνθήκης στο  $r_T = b$  και η εφαρμογή της ορθογωνιότητας είναι ακριβώς όσο στην επίλυση, με αποτέλεσμα το δυναμικό  $\Phi_1$  της πρώτης διάταξης να περιγράφεται από τον πρώτο όρο του τελικού αποτελέσματος. Στη δεύτερη διάταξη θα τεθεί  $\Phi_2|_{r_T=b} = 0$  (αντί  $= U$ ), οπότε η συνάρτηση  $R_{T2m}$  επιλέγεται όσο ο δεύτερος όρος της συνάρτησης  $R_{Tm}$  κλπ., με αποτέλεσμα το δυναμικό  $\Phi_2$  να είναι ο δεύτερος όρος του αποτελέσματος.

**Παράδειγμα 7.3-12:** Στη διδιάστατη διάταξη του σχήματος, με τις εκεί διδόμενες οριακές συνθήκες, ζητείται το δυναμικό  $\Phi$  στην περιοχή  $a < r_T < b$ ,  $0 < \varphi < \pi$ .



**Επίλυση:** Για τη διάταξη αυτή δεν απαιτείται επίλυση με σειρά. Συγκεκριμένα, πρώτα διαπιστώνεται ότι στις οριακές συνθήκες δεν υπάρχει ασυνέχεια, αφού στις τέσσερις κορυφές είναι  $\partial\Phi/\partial n = \mp\partial\Phi/\partial r_T = 0$ , που είναι συμβατό με  $\Phi = 0$  και  $\Phi = U$ , δηλαδή, με  $\Phi = \text{σταθ}$ . Ακολουθώντας, παρατηρείται ότι οι συναρτήσεις  $F = \{\varphi, 1\}$  και  $R_T = \{1, \ln r_T\}$ , που είναι αποδεκτές, με  $K_\varphi = K_T = 0$ , αρκούν για να ικανοποιηθούν οι οριακές συνθήκες. Ειδικότερα, επιλέγεται  $R_T = 1$ , για να μηδενίζεται η παράγωγος, και  $F = \varphi$ , ώστε  $F(0) = 0$ , και τελικά  $\Phi = U\varphi/\pi$ . Η, ισοδύναμα, διαπιστώνεται ότι πρόκειται για μονοδιάστατη διάταξη με εξάρτηση  $\Phi(\varphi)$ , οπότε είναι  $\nabla^2\Phi = (1/r_T^2)\partial^2\Phi/\partial\varphi^2 = 0$  και αρκούν δύο απλές ολοκληρώσεις.

**Σχόλιο:** Αν δεν παρατηρηθεί ότι υπάρχει δυνατότητα για γρήγορο προσδιορισμό της λύσης, χωρίς ανάπτυγμα σε σειρά, θα ακολουθηθεί η πλήρης διαδικασία, η οποία παρουσιάζεται μόνο για λόγους επίδειξης της μεθόδου. Συγκεκριμένα, προκειμένου να είναι  $\partial\Phi/\partial n = \mp\partial\Phi/\partial r_T = 0$  στις αντιμέτωπες έδρες  $r_T = a$  και  $r_T = b$ , επιλέγεται  $R_{Tm} = \cos[m \ln(r_T/a)]$ , με  $m \ln(b/a) = n\pi$ , όπου  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Στην πρώτη τιμή,  $n = 0$ , όπως απαιτείται όταν οι ομογενείς συνθήκες είναι τύπου *Neumann* και στις δύο αντιμέτωπες πλευρές, αντιστοιχεί  $m = 0$  και  $R_{T0} = 1$ .

Από τις συναρτήσεις  $F_m = \{\sinh(m\varphi), \cosh(m\varphi)\}$  και  $F_0 = \{\varphi, 1\}$  λαμβάνεται  $F_m = \sinh(m\varphi)$  και  $F_0 = \varphi$ , ώστε  $F(\varphi=0) = 0$ . Συνεπώς το δυναμικό εκφράζεται ως η σειρά:

$$\Phi = A_0\varphi + \sum_{m \neq 0} A_m \sinh(m\varphi) \cos\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right),$$

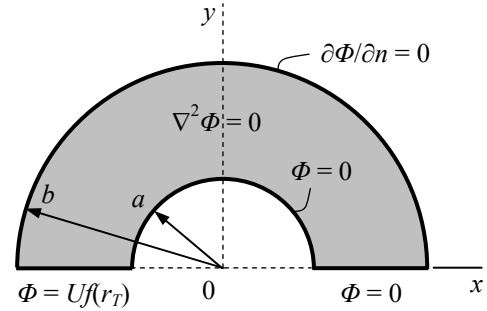
που ικανοποιεί  $\nabla^2\Phi = 0$ , επειδή οι συναρτήσεις  $R_{Tm}$  έχουν συνδυασθεί με τις κατάλληλες συναρτήσεις  $F_m$ , καθώς και τις τρεις ομογενείς οριακές συνθήκες, λόγω των συγκεκριμένων επιλογών για τις συναρτήσεις  $R_{Tm}$  και  $F_m$ , καθώς και για τις τιμές του  $m = n\pi/\ln(b/a)$ .

Στο όριο  $\varphi = \pi$ , του οποίου δεν έχει ακόμα χρησιμοποιηθεί η οριακή συνθήκη, είναι:

$$A_0\pi + \sum_{m \neq 0} A_m \sinh(m\pi) \cos\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right) = U.$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $(1/r_T)R_{T0} = 1/r_T$  και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $a < r_T < b$ , προκύπτει  $A_0\pi \ln(b/a) + 0 = U$ . Πολλαπλασιάζοντας με  $(1/r_T)R_{Tm} = (1/r_T)\cos[m \ln(r_T/a)]$  και ολοκληρώνοντας στο ίδιο διάστημα προκύπτει  $0 + \frac{1}{2}A_m \ln(b/a) \sinh(m\pi) = 0$ . Συνεπώς,  $A_0 = U/\pi$  και  $A_{m \neq 0} = 0$  και η λύση είναι η  $\Phi = (U/\pi)\varphi$ , όπως προέκυψε από τη μονοδιάστατη επίλυση.

**Παράδειγμα 7.3-13:** Ζητείται το δυναμικό  $\Phi$  στην περιοχή  $a < r_T < b$ ,  $0 < \varphi < \pi$ , όταν στην έδρα  $\varphi = \pi$  η οριακή συνθήκη είναι  $\Phi = Uf(r_T)$ , και ειδικότερα (α)  $f(r_T) = \ln(r_T/a)$  και (β)  $f(r_T) = \sin[\pi(r_T-a)/2(b-a)]$ , χωρίς, όμως, να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα με τη συνάρτηση  $f(r_T)$ .



**Επίλυση:** Και για τις δύο συναρτήσεις  $f(r_T)$  απαιτείται επίλυση με σειρά, επειδή:

- Όταν  $f(r_T) = \ln(r_T/a)$ , τότε  $U(df/dr_T)|_{r_T=b} = U/b \neq 0$ , που στην κορυφή  $r_T = b$ ,  $\varphi = \pi$  είναι ασυμβίβαστο με τη συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$  της παρακείμενης πλευράς. Ότι είναι  $f(r_T) = R_{T,m=0}$  είναι τελείως αδιάφορο.
- Όταν  $f(r_T) = \sin[\pi(r_T-a)/2(b-a)]$ , η συνάρτηση αυτή δεν εκφράζεται ως σύντομο άθροισμα από συναρτήσεις  $R_{Tm}$ , που είναι κατάλληλες για τη μεταβλητή  $r_T$ , αλλά μόνο ως σειρά. Ότι είναι  $Uf(r_T=a) = 0$  και  $U(df/dr_T)|_{r_T=b} = 0$  είναι αδιάφορο.

Αντιμέτωπες έδρες με ομογενείς οριακές συνθήκες βρίσκονται σε επιφάνειες  $r_T = \text{σταθ.}$ , συνεπώς, πρώτα θα προσδιορισθούν οι συναρτήσεις  $R_{Tm}(r_T)$ . Για να είναι  $\Phi(r_T=a) = 0$  επιλέγεται  $R_{Tm} = \sin[m \ln(r_T/a)]$ , με  $m \ln(b/a) = (2n-1)\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ώστε να είναι επίσης  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=b} = (\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=b} = 0$ . Με αυτές τις τιμές των  $m$ , λαμβάνεται  $F_m = \sinh(m\varphi)$ , ώστε  $F(\varphi=0) = 0$ . Συνεπώς, το δυναμικό εκφράζεται ως η σειρά:

$$\Phi = \sum_m A_m \sinh(m\varphi) \sin\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right),$$

με  $m = (2n-1)\pi/\ln(b/a)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Με αυτό το ανάπτυγμα, στην τέταρτη και τελευταία πλευρά του ορίου, στην πλευρά  $\varphi = \pi$ , η οριακή συνθήκη γράφεται:

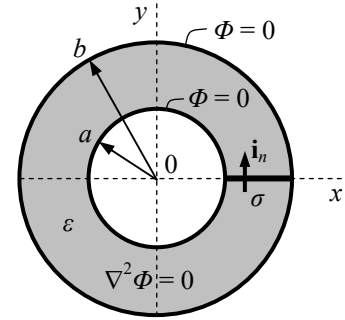
$$\sum_m A_m \sinh(m\pi) \sin\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right) = Uf(r_T).$$

Οι συναρτήσεις  $\sin[m \ln(r_T/a)]$ , με  $m = (2n-1)\pi/\ln(b/a)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , είναι ορθογώνιες στο διάστημα  $a < r_T < b$ , με συνάρτηση βάρους  $1/r_T$ . Συνεπώς, πολλαπλασιάζοντας την ισότητα αυτή με  $(1/r_T)\sin[m \ln(r_T/a)]$ , με οποιαδήποτε συγκεκριμένη τιμή του  $m$ , και ολοκληρώνοντας στο διάστημα ορθογωνιότητας  $a < r_T < b$ , προσδιορίζονται οι συντελεστές  $A_m$ :

$$\frac{1}{2} A_m \sinh(m\pi) \ln \frac{b}{a} = U \int_a^b \frac{f(r_T)}{r_T} \sin\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right) dr_T = U \int_0^{\ln \frac{b}{a}} f(r_T = ae^\xi) \sin(m\xi) d\xi,$$

για κάθε  $f(r_T)$ . Το ολοκλήρωμα  $\int_a^b (dr_T/r_T) \sin^2[m \ln(r_T/a)] = \frac{1}{2} \ln(b/a)$  που πολλαπλασιάζει τους συντελεστές  $A_m$  υπολογίστηκε με την αλλαγή μεταβλητής  $\xi = \ln(r_T/a)$ , βλ. και σχέση (7.3-41).

**Παράδειγμα 7.3-14:** Στον ενδιάμεσο χώρο της γειωμένης ομοαξονικής διάταξης, με ακτίνες  $a$  και  $b$ , υπάρχει υλικό με επιτρεπτικότητα  $\varepsilon$ . Στη γωνιακή θέση  $\varphi = 0$ , τα τοιχώματα συνδέονται με μία φορτισμένη ταινία άπειρου μήκους με πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου  $\sigma = \sigma_0 f(x)$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(a < r_T < b, \varphi)$ .



**Επίλυση:** Η παρουσία του φορτίου στη γωνιακή θέση  $\varphi = 0$  καταστρέφει την περιοδικότητα, κατά τα λοιπά όμως, μόνο οριακά μπορεί να χαρακτηριστεί η διάταξη ως σύνθετη. Έχει σχήμα καμπυλόγραμμου ορθογώνιου τετράπλευρου, όπως οι απλές διατάξεις, και το φορτίο  $\sigma$  βρίσκεται στο διπλό όριο ( $\varphi = 0^+$  και  $\varphi = 2\pi^-$ ) και δεν επιβάλλει χωρισμό σε επιμέρους περιοχές. Στο διπλό όριο οι οριακές συνθήκες απλά υποκαθίστανται από τις συνθήκες συνέχειας του δυναμικού, επειδή δεν υπάρχει διπολικό στρώμα, και ασυνέχειας της παραγώγου του, λόγω του επιφανειακού φορτίου, με αποτέλεσμα τις σχέσεις :

$$\Phi(\varphi = 0^+) - \Phi(\varphi = 2\pi^-) = 0, \quad \left( \frac{1}{r_T} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0^+} - \left( \frac{1}{r_T} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=2\pi^-} = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon} f(x = r_T).$$

Οι ομογενείς οριακές συνθήκες,  $\Phi = 0$ , στις αντιμέτωπες έδρες  $r_T = a$  και  $r_T = b$ , προσδιορίζουν ότι  $R_{Tm} = \sin[m \ln(r_T/a)]$ , με  $m \ln(b/a) = n\pi$ , όπου  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Για τις συναρτήσεις  $F_m$ , αντί να ληφθεί ο γενικός γραμμικός συνδυασμός  $F_m = \{\sinh(m\varphi), \cosh(m\varphi)\}$  και για κάθε  $m$  να προσδιορισθούν οι δύο συντελεστές από τις δύο παραπάνω συνθήκες, είναι ταχύτερο να επιλεγεί ο γραμμικός συνδυασμός  $F_m = \cosh[m(\varphi - \pi)]$ , επειδή στο  $0 < \varphi < 2\pi$  η διάταξη συνολικά είναι συμμετρική ως προς τη θέση  $\varphi = \pi$ . Έτσι, είναι  $F_m(\varphi = 2\pi^-) = F_m(\varphi = 0^+)$ , και η συνθήκη  $\Phi(\varphi = 2\pi^-) = \Phi(\varphi = 0^+)$  ικανοποιείται αυτόματα από το ανάπτυγμα:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \sum_m A_m \sin\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right) \cosh[m(\varphi - \pi)].$$

Με  $(d/d\varphi)\cosh[m(\varphi - \pi)] = m \sinh[m(\varphi - \pi)]$ , η συνθήκη για την παράγωγο  $\partial\Phi/\partial n$  είναι:

$$\frac{1}{r_T} \sum_m (-2) A_m \sin\left[m \ln \frac{r_T}{a}\right] m \sinh(m\pi) = -\frac{\sigma_0}{\varepsilon} f(r_T),$$

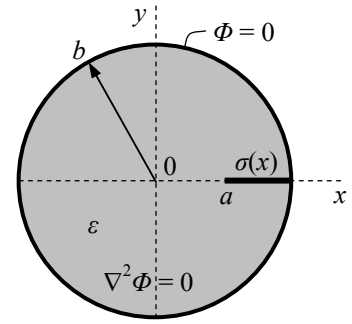
όπου ο συντελεστής  $(-2)$  προέρχεται από τη σχέση  $-\sinh[m(0-\pi)] = +\sinh[m(2\pi-\pi)]$ . Η συνάρτηση βάρους  $1/r_T$  ήδη υπάρχει στην αριστερή πλευρά, προερχόμενη από το  $\partial\Phi/\partial n = \mathbf{i}_\varphi \cdot \nabla\Phi = (1/r_T)\partial\Phi/\partial\varphi$  στην οριακή συνθήκη, άρα αρκεί ο πολλαπλασιασμός με το τυχαίο  $\sin[m \ln(r_T/a)]$ .

Με ολοκλήρωση στο διάστημα  $a < r_T < b$  προκύπτει, τελικά, η σχέση για κάθε συντελεστή  $A_m$ :

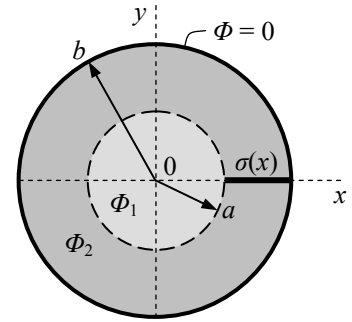
$$A_m m \sinh(m\pi) \ln \frac{b}{a} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \int_a^b f(r_T) \sin\left(m \ln \frac{r_T}{a}\right) dr_T.$$



**Παράδειγμα 7.3-15:** Ένας κύλινδρος με ακτίνα  $b$ , από υλικό με επιτρεπτότητα  $\epsilon$ , έχει την εξωτερική κυλινδρική επιφάνειά του γειωμένη. Στον κύλινδρο έχει διεισδύσει μία φορτισμένη ταινία (στο  $y = 0, a < x < b$ ) με επιφανειακό φορτίο  $\sigma(x) = \sigma_0 f(x)$ . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi(r_T < b, \varphi)$ .



**Επίλυση:** Η παρουσία του επιφανειακού φορτίου καθιστά τη διάταξη σύνθετη. Για να αποφασισθεί με ποιον τρόπο θα χωρισθεί η περιοχή  $r_T < b$  σε επιμέρους περιοχές, κριτήριο είναι τα διαθέσιμα αναπτύγματα. Σε πολικές συντεταγμένες υπάρχουν δύο αναπτύγματα, εκείνα με βάση τις συναρτήσεις  $F_m = \{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\}$  και εκείνα με βάση τις συναρτήσεις  $R_{Tm} = \{\sin[\ln(r_T/r_{T0})], \cos[\ln(r_T/r_{T0})]\}$ . Οι συναρτήσεις  $F_m$  δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο τμήμα  $a < r_T < b$ , λόγω της ασυνέχειας που προκαλείται από το φορτίο  $\sigma$ , μπορούν, ωστόσο, να χρησιμοποιηθούν στο  $r_T < a$ , όπου δεν υπάρχει η ασυνέχεια. Αντίθετα, οι συναρτήσεις  $R_{Tm}$  δεν συγκλίνουν στο  $r_T \rightarrow 0$ , επειδή εμπλέκουν τη λογαριθμική συνάρτηση, όμως συμπεριφέρονται καλά σε οποιοδήποτε άλλο πεπερασμένο διάστημα, συνεπώς αποτελούν κατάλληλη βάση για το διάστημα  $a < r_T < b$ . Το συμπέρασμα είναι ότι η αρχική σύνθετη διάταξη θα χωρισθεί σε δύο περιοχές, τις 1 και 2, με κοινό όριο τον κύλινδρο  $r_T = a$ .



**Περιοχή 1:** Το δυναμικό θα έχει τη μορφή  $\Phi_1 = \sum_{m_1} C_{m_1} R_{T1,m_1}(r_T) F_{1,m_1}(\varphi)$ . Η συνολική διάταξη είναι συμμετρική ως προς τη θέση  $\varphi = 0$ , ή  $\varphi = \pi$ , συνεπώς και το δυναμικό στο τμήμα 1 θα χαρακτηρίζεται από την ίδια συμμετρία, άρα κατάλληλη είναι η επιλογή  $F_{1,m_1} = \cos(m_1\varphi)$ , με  $m_1 = 0, 1, 2, \dots$  λόγω περιοδικότητας. Οι ακτινικές συναρτήσεις επιλέγονται ως  $R_{T1,m_1} = (r_T/a)^{m_1}$ , ώστε να αποφευχθεί απειρισμός στο  $r_T = 0$  και να έχουν απλή τιμή, τη μονάδα, όταν χρησιμοποιηθούν στο  $r_T = a$ , στις συνθήκες συνέχειας με το δυναμικό της περιοχής 2. Με όλες αυτές τις παρατηρήσεις, το δυναμικό στην περιοχή  $r_T < a$  γράφεται, με τον όρο  $m_1 = 0$  χωριστά:

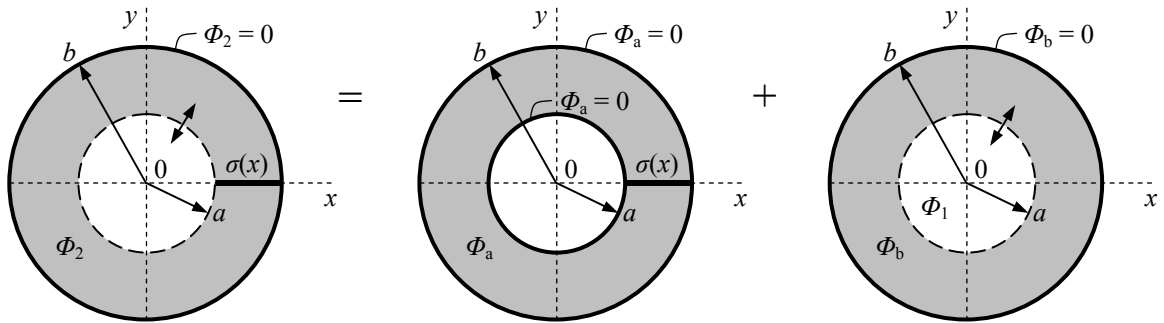
$$\Phi_1(r_T < a) = C_0 + \sum_{m_1} C_{m_1} \left(\frac{r_T}{a}\right)^{m_1} \cos(m_1\varphi), \quad m_1 = 1, 2, 3, \dots$$

Το ανάπτυγμα αυτό πρόκειται να χρησιμοποιηθεί στην ακτινική θέση  $r_T = a$ . Εκεί είναι:

$$\Phi_1(r_T = a) = C_0 + \sum_{m_1} C_{m_1} \cos(m_1\varphi),$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial r_T} \right|_{r_T = a} = \frac{1}{a} \sum_{m_1} m_1 C_{m_1} \cos(m_1\varphi).$$

Επαλληλία για την περιοχή 2: Το δυναμικό  $\Phi_2(a < r_T < b)$  πρέπει να εκφρασθεί έτσι, ώστε να ικανοποιεί την οριακή συνθήκη  $\Phi_2(r_T=b) = 0$ , καθώς και τις συνθήκες συνέχειας του  $\Phi_2$  και ασυνέχειας του  $\partial\Phi/\partial\varphi$  στο φορτίο  $\sigma = \sigma(r_T)$ . Όμως, για να χρησιμοποιηθούν ως βάση στην περιοχή  $a < r_T < b$  οι συναρτήσεις  $R_{Tm} = \{\sin[m \ln(r_T/r_{T0})], \cos[m \ln(r_T/r_{T0})]\}$ , οι μόνες που είναι κατάλληλες να περιγράψουν την ασυνέχεια λόγω του  $\sigma(r_T)$ , απαιτείται ομογενής οριακή συνθήκη και στα δύο άκρα  $r_T = a$  και  $r_T = b$ . Μολονότι είναι  $\Phi_2(r_T=b) = 0$ , στο άλλο άκρο  $r_T = a$  τόσο η τιμή, όσο και η παράγωγος του δυναμικού καθορίζονται από τη συνέχεια με την περιοχή  $r_T = a$ , και δεν υπάρχει κανένας λόγος να είναι κάποιος προκαθορισμένος γραμμικός συνδυασμός τους ίσος με μηδέν. Η διέξοδος είναι να εφαρμοσθεί επαλληλία στην περιοχή 2:



Αμέσως φαίνεται ότι στο όριο  $r_T = b$  είναι  $\Phi_2 = \Phi_a + \Phi_b$ , και ότι το ίδιο συμβαίνει με τα φορτία, ενώ στην ακτίνα  $r_T = a$  πρέπει λόγω επαλληλίας να είναι:

$$\Phi_2(r_T=a) = \Phi_a(r_T=a) + \Phi_b(r_T=a) = \Phi_b(r_T=a) = \Phi_1(r_T=a),$$

$$\left. \frac{\partial\Phi_2}{\partial r_T} \right|_{r_T=a} = \left. \frac{\partial\Phi_a}{\partial r_T} \right|_{r_T=a} + \left. \frac{\partial\Phi_b}{\partial r_T} \right|_{r_T=a} = \left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial r_T} \right|_{r_T=a},$$

Λόγω συνέχειας, αυτές οι ποσότητες πρέπει να είναι ίσες και με τις αντίστοιχες ποσότητες του δυναμικού  $\Phi_1$ , όπως σημειώνεται στη δεξιά πλευρά των ισοτήτων.

Η διάταξη a είναι πλήρως προσδιορισμένη. Το δυναμικό περιγράφεται από έκφραση:

$$\Phi_a(r_T, \varphi) = \sum_{m_a} A_{m_a} \sin\left(m_a \ln \frac{r_T}{a}\right) \cosh[m_a(\varphi - \pi)],$$

με  $m_a \ln(b/a) = n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ώστε να μηδενίζεται στα όρια  $r_T = a$  και  $r_T = b$  και να είναι συμμετρικό ως προς τη γωνία  $\varphi = \pi$ . Οι συντελεστές προσδιορίζονται από την ασυνέχεια που επιβάλλει το φορτίο  $\sigma$  στην κάθετη παράγωγο του δυναμικού,  $\partial\Phi/\partial n = (1/r_T)\partial\Phi/\partial\varphi$ . Οι τιμές τους έχουν προσδιορισθεί στο προηγούμενο **παράδ. 7.3-14** και, με  $\sigma(x=r_T) = \sigma_0 f(r_T)$ , είναι:

$$A_{m_a} m_a \sinh(m_a \pi) \ln \frac{b}{a} = \frac{\sigma_0}{\epsilon} \int_a^b f(r_T) \sin\left(m_a \ln \frac{r_T}{a}\right) dr_T.$$

Στη διάταξη b, στην οποία δεν υπάρχει φορτίο που θα προκαλούσε ασυνέχεια, κατάλληλες συναρτήσεις βάσης για το ανάπτυγμα του δυναμικού είναι οι  $F_{b,m_b} = \{\sin(m_b\varphi), \cos(m_b\varphi)\}$ , με  $m_b = 0, 1, 2, \dots$  (δηλαδή και η  $F_{b,0} = 1$ ), και μάλιστα, λαμβάνοντας υπ' όψιν τις συμμετρίες της αρχικής διάταξης, μόνο οι  $F_{b,m_b} = \cos(m_b\varphi)$ . Ως προς τις συναρτήσεις  $R_{Tb,m_b}$ , η οριακή συνθήκη  $\Phi_b(r_T=b) = 0$  υποδεικνύει ότι οι κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί είναι  $R_{Tb,m_b} = (b/r_T)^{m_b} - (r_T/b)^{m_b}$  και  $R_{Tb,0} = \ln(b/r_T)$  για τον όρο  $m_b = 0$ . Συνεπώς:

$$\Phi_b(r_T, \varphi) = B_0 \ln \frac{b}{r_T} + \sum_{m_b} B_{m_b} \frac{\left(\frac{b}{r_T}\right)^{m_b} - \left(\frac{r_T}{b}\right)^{m_b}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_b} - \left(\frac{a}{b}\right)^{m_b}} \cos(m_b\varphi), \quad m_b = 1, 2, 3, \dots$$

Προτιμήθηκε να γραφούν οι συντελεστές ως  $B_{m_b}/[(b/a)^{m_b} - (a/b)^{m_b}]$ , να περιλαμβάνουν, δηλαδή, και παρονομαστές που θα απλοποιήσουν τις εκφράσεις του  $\Phi_b$  και της παραγώγου του εκεί που θα χρησιμοποιηθούν, στο  $r_T = a$ . Πράγματι, εκεί είναι:

$$\Phi_b(r_T=a) = B_0 \ln \frac{b}{a} + \sum_{m_b} B_{m_b} \cos(m_b\varphi),$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_b}{\partial r_T} \right|_{r_T=a} = -\frac{1}{a} B_0 - \frac{1}{a} \sum_{m_b} m_b B_{m_b} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_b} + \left(\frac{a}{b}\right)^{m_b}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_b} - \left(\frac{a}{b}\right)^{m_b}} \cos(m_b\varphi).$$

Συνέχεια δυναμικού στην επιφάνεια  $r_T = a$ : Το δυναμικό πρέπει να είναι συνεχές, επειδή στην επιφάνεια  $r_T = a$  δεν υπάρχει διπολικό στρώμα. Αυτό σημαίνει ότι  $\Phi_1(r_T=a) = \Phi_2(r_T=a) = \Phi_b(r_T=a)$ , επειδή  $\Phi_a(r_T=a) = 0$ . Όμως, τόσο οι σταθερές  $m_1$ , όσο και οι  $m_b$  είναι οι ακέραιοι  $0, 1, 2, \dots$ , οπότε η ισότητα  $\Phi_1(r_T=a) = \Phi_b(r_T=a)$  αντιπροσωπεύει ισότητα δύο αναπτυγμάτων στο ίδιο διάστημα και με την ίδια βάση. Σε τέτοια περίπτωση, η ορθογωνιότητα σημαίνει ισότητα των αντίστοιχων συντελεστών. Συνεπώς, γράφοντας  $m_b = m_1$  λόγω ταύτισής τους, είναι:

$$C_0 = B_0 \ln \frac{b}{a} \quad \text{και} \quad C_{m_1} = B_{m_1}.$$

Συνέχεια κάθετης παραγώγου δυναμικού στην ίδια επιφάνεια  $r_T = a$ : Στη επιφάνεια αυτή δεν υπάρχει επιφανειακό φορτίο, που θα προκαλούσε ασυνέχεια στην κάθετη παράγωγο  $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial r_T$ . Συνεπώς, είναι  $\partial\Phi_1/\partial r_T = (\partial/\partial r_T)(\Phi_a + \Phi_b)$ . Προτιμότερο είναι να γραφεί αυτή η σχέση ως  $\partial(\Phi_1 - \Phi_b)/\partial r_T = \partial\Phi_a/\partial r_T$ , επειδή τα  $\Phi_1$  και  $\Phi_b$  εκφράζονται στην ίδια βάση, με  $m_b = m_1$ . Απαλείφοντας τα  $C_{m_1}$  υπέρ των  $B_{m_1}$ , προκύπτει:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial r_T} (\Phi_1 - \Phi_b) \right|_{r_T=a} &= \frac{1}{a} B_0 + \frac{1}{a} \sum_{m_1} m_1 B_{m_1} \frac{2 \left( \frac{b}{a} \right)^{m_1}}{\left( \frac{b}{a} \right)^{m_1} - \left( \frac{a}{b} \right)^{m_1}} \cos(m_1 \varphi) \\ &= \left. \frac{\partial \Phi_a}{\partial r_T} \right|_{r_T=a} = \frac{1}{a} \sum_{m_a} m_a A_{m_a} \cosh[m_a (\varphi - \pi)]. \end{aligned}$$

Εφαρμογή ορθογωνιότητας: Η τελευταία σχέση εκφράζει την ισότητα δύο συναρτήσεων του  $\varphi$  στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ . Στην πρώτη γραμμή, η συνάρτηση περιγράφεται ως σειρά, με την ορθογώνια βάση  $\{1, \cos \varphi, \cos(2\varphi), \dots\}$ , που είναι πλήρης για συναρτήσεις συμμετρικές ως προς  $\varphi = 0$  ή  $\varphi = \pi$ . Η δεύτερη γραμμή περιγράφει τη συνάρτηση πάλι ως σειρά, αλλά με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Στη σειρά αυτή οι συναρτήσεις του υπερβολικού συνημιτόνου δεν ικανοποιούν καμία σχέση ορθογωνιότητας, ούτε σχετίζονται με οποιονδήποτε τρόπο με τα συνημίτονα της πρώτης σειράς, ούτε τα  $m_a = n\pi/\ln(b/a)$  σχετίζονται με τα  $m_1$ . Όμως, οι συντελεστές  $A_{m_a}$  είναι πλήρως προσδιορισμένοι από την επίλυση της διάταξης  $a$  (δηλαδή, του προηγούμενου **παράδ. 7.3-14**). Μόνο οι συντελεστές  $B_{m_1}$  απομένει να προσδιορισθούν, και αρκεί η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $\cos(m_1 \varphi)$ , που εφαρμόζεται στην ισότητα αυτή:

- ο Πολλαπλασιάζοντας με τη μονάδα και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ :

$$2\pi B_0 = 2 \sum_{m_a} A_{m_a} \sinh(m_a \pi).$$

- ο Πολλαπλασιάζοντας με  $\cos(m_1 \varphi)$ , για κάποια τιμή του  $m_1 = 1, 2, 3, \dots$ , και ολοκληρώνοντας πάλι στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ :

$$\frac{2\pi m_1}{1 - (a/b)^{2m_1}} B_{m_1} = \sum_{m_a} m_a A_{m_a} \int_0^{2\pi} \cosh[m_a (\varphi - \pi)] \cos(m_1 \varphi) d\varphi.$$

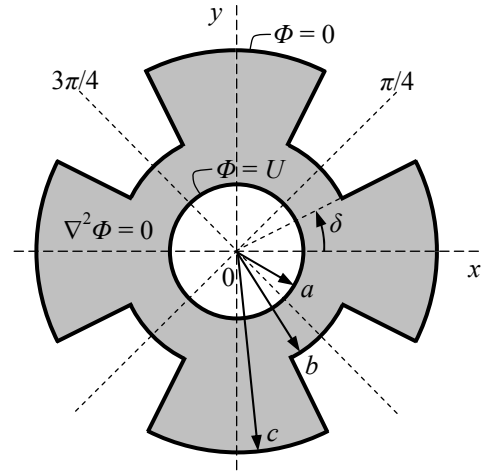
Έχοντας προσδιορίσει και τους συντελεστές  $B_{m_1}$ , ολοκληρώθηκε η επίλυση.

**Σχόλιο:** Η επίλυση μπορεί να γίνει και με κατοπτρισμό σε κύλινδρο (παράγραφος 6.2.4). Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα επαλληλίας, σχέση (6.2-41), με  $\varphi' = 0$ ,  $r_T' = x'$  και  $dl' = \sigma_0 f(x') dx'$  στο διάστημα  $a < x' < b$ , δίνει την έκφραση:

$$\Phi(r_T, \varphi) = \frac{-\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b dx' f(x') \ln \frac{x'^2 - 2x'r_T \cos \varphi + r_T^2}{\left(\frac{r_T}{b}\right)^2 x'^2 - 2x'r_T \cos \varphi + b^2}.$$

Βέβαια, το πραγματικό ζητούμενο εδώ δεν είναι ο προσδιορισμός του δυναμικού  $\Phi$  στη συγκεκριμένη διάταξη, αλλά μόνο να παρουσιασθεί η εφαρμογή της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών σε κάποιο παράδειγμα σύνθετης διάταξης με κυλινδρική δομή.

**Παράδειγμα 7.3-16:** Στην ομοαξονική διάταξη του σχήματος, η εσωτερική κυλινδρική ράβδος με ακτίνα  $a$  είναι σε δυναμικό  $U$ , ενώ το εξωτερικό τοίχωμα είναι γειωμένο ( $\Phi = 0$ ). Το εξωτερικό τοίχωμα έχει βασική ακτίνα  $b$ , αλλά επιπρόσθετα έχει τέσσερις αυλακώσεις, παράλληλες με τον άξονα  $z$ , συμμετρικά τοποθετημένες στην περιφέρεια, με γωνιακό πλάτος  $2\delta$  και με βάθος μέχρι την ακτίνα  $r_T = c$ . Ζητείται το δυναμικό στον ενδιάμεσο χώρο ( $a < r_T < c$  ή  $a < r_T < b$ ).



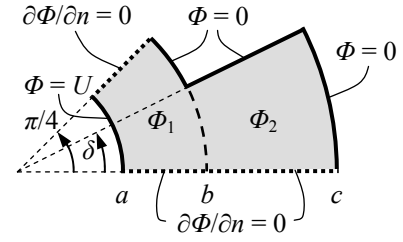
**Επίλυση:** Αμέσως παρατηρείται ότι η διάταξη είναι σύνθετη και η πρώτη σκέψη είναι, ίσως, να χωρισθεί σε πέντε απλές περιοχές: στην περιοχή  $a < r_T < b$  και στις τέσσερις αυλακώσεις. Η διαδικασία θα περιέχει ως διαδοχικά βήματα τα εξής:

- Διατύπωση του δυναμικού σε κάθε περιοχή με μορφή σειράς.
- Εφαρμογή της ισότητας  $\Phi(r_T=b^-) = \Phi(r_T=b^+)$  σε ολόκληρη την περιφέρεια, όπου η σειρά της περιοχής  $a < r_T < b$  δίνει το  $\Phi(r_T=b^-)$ , ενώ το  $\Phi(r_T=b^+)$  είναι ίσο είτε με μηδέν, είτε με το δυναμικό από την πλευρά της αυλάκωσης που αντιστοιχεί στην τιμή της γωνίας  $\varphi$  (μία εξίσωση).
- Εφαρμογή της ισότητας  $(\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=b^-} = (\partial\Phi/\partial r_T)|_{r_T=b^+}$ , χωριστά σε κάθε επαφή με κάθε αυλάκωση ( $N = 4$  εξισώσεις).
- Εφαρμογή της ορθογωνιότητας στις  $N + 1 = 5$  εξισώσεις. Διατυπώνονται έτσι οι σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των πέντε σειρών, με τη μορφή ενός απειροδιάστατου συστήματος γραμμικών εξισώσεων, από την επίλυση του οποίου προκύπτουν οι συντελεστές.

Αυτή η εξαιρετικά επίπονη διαδικασία είναι αναγκαία μόνο αν η διάταξη των αυλακώσεων δεν είναι συμμετρική, αν, για παράδειγμα, οι αυλακώσεις δεν ισαπέχουν, ή αν δεν έχουν όλες το ίδιο μέγεθος. Η αξιοποίηση των συμμετριών της διάταξης απλοποιεί το πρόβλημα, ώστε να εμπλέκει μόνο δύο αναπτύγματα σε σειρά και ισόποσες εξισώσεις, αντί για  $N + 1 = 5$ .

**Αξιοποίηση συμμετριών:** Η αρχική διάταξη είναι συμμετρική τόσο ως προς τις γωνίες  $\varphi = 0, \pi/2 (+ \pi)$ , τους άξονες των αυλακώσεων, όσο και ως προς τις γωνίες  $\varphi = \pi/4, 3\pi/4 (+ \pi)$ , τους άξονες των ενδιάμεσων οδοντώσεων. Επομένως, πρέπει να είναι  $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$  στις θέσεις  $\varphi = \kappa\pi/4, \kappa = 0, 1, 2, \dots$ . Όμως, με  $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_\varphi$ ,  $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$  σημαίνει και  $\partial\Phi/\partial n = 0$  στις ίδιες θέσεις. Αν, λοιπόν, από την αρχική διάταξη επιλεγεί ένα ογδοημόριο, όπως το  $0 < \varphi < \pi/4$ , και στις

πλευρές του  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pi/4$  τεθεί ως οριακή συνθήκη ότι  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , για το ογδομημόριο προκύπτει ένα καλά διατυπωμένο πρόβλημα, του οποίου η λύση  $\Phi$  ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του αρχικού προβλήματος, άρα αποτελεί τη λύση του αρχικού προβλήματος στο  $0 < \varphi < \pi/4$ , ενώ για τα υπόλοιπα ογδομημόρια το δυναμικό μπορεί να προσδιορισθεί με διαδοχικές ανακλάσεις.



Η διάταξη του ογδομημορίου είναι σύνθετη, με δύο απλές περιοχές, οι οποίες είναι σε επαφή στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = b$ ,  $0 < \varphi < \delta$ . Σε κάθε περιοχή, το δυναμικό εκφράζεται με μορφή σειράς. Με δεδομένη την εμπειρία από τα προηγούμενα παραδείγματα, η παρουσίαση μπορεί να γίνει λίγο πιο συνοπτικά. Συγκεκριμένα:

Περιοχή 1 ( $a < r_T < b$ ,  $0 < \varphi < \pi/4$ ): Είναι  $F_{m_1} = \cos(m_1\varphi)$ , με  $m_1 = 0, 4, 8, \dots$ , οπότε για  $m_1 = 0$ , με  $F_0 = 1$ , είναι  $R_{T0} = U + A_0 \ln(r_T/a)$ , επειδή  $(\Phi_1 - U)|_{r_T=a} = 0$  και  $\nabla^2 U = 0$ , και για  $m_1 \neq 0$  είναι  $R_{Tm_1} = (r_T/a)^{m_1} - (a/r_T)^{m_1}$ . Κανονικοποιώντας κατάλληλα τους συντελεστές, το δυναμικό στην περιοχή αυτή περιγράφεται από το ανάπτυγμα:

$$\Phi_1(r_T, \varphi) = U + A_0 \ln \frac{r_T}{a} + \sum_{m_1 \neq 0} A_{m_1} \frac{\left(\frac{r_T}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{r_T}\right)^{m_1}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{m_1}} \cos(m_1\varphi),$$

και ειδικά στο όριο  $r_T = b^-$ :

$$\Phi_1|_{r_T=b} = U + A_0 \ln \frac{b}{a} + \sum_{m_1 \neq 0} A_{m_1} \cos(m_1\varphi),$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r_T} \Big|_{r_T=b} = \frac{1}{b} A_0 + \frac{1}{b} \sum_{m_1 \neq 0} m_1 A_{m_1} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{m_1}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{m_1}} \cos(m_1\varphi).$$

Περιοχή 2 ( $b < r_T < c$ ,  $0 < \varphi < \delta$ ): Τώρα  $F_{m_2} = \cos(m_2\varphi)$ , με  $m_2 = (\pi/\delta)(n_2 - 1/2)$ ,  $n_2 = 1, 2, 3, \dots$  (όπου το  $m_2$  είναι άρρητος αριθμός, εκτός από ειδικές επιλογές για τη γωνία  $\delta$ ) και με  $R_{Tm_2}$  παρόμοιο με το  $R_{Tm_1}$ , με την αντικατάσταση  $a \rightarrow c$ , αλλά χωρίς όρο  $R_{T0}$ , επειδή η τιμή  $m = 0$  αφορά μόνο διατάξεις με ομογενείς συνθήκες *Neumann* σε αντιμέτωπες πλευρές. Άρα:

$$\Phi_2(r_T, \varphi) = \sum_{m_2} B_{m_2} \frac{\left(\frac{c}{r_T}\right)^{m_2} - \left(\frac{r_T}{c}\right)^{m_2}}{\left(\frac{c}{b}\right)^{m_2} - \left(\frac{b}{c}\right)^{m_2}} \cos(m_2\varphi),$$

και στο όριο  $r_T = b^+$  είναι:

$$\Phi_2|_{r_T=b} = \sum_{m_2} B_{m_2} \cos(m_2\varphi),$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial r_T} \Big|_{r_T=b} = -\frac{1}{b} \sum_{m_2} m_2 B_{m_2} \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{m_2} + \left(\frac{b}{c}\right)^{m_2}}{\left(\frac{c}{b}\right)^{m_2} - \left(\frac{b}{c}\right)^{m_2}} \cos(m_2\varphi).$$

Συνέχεια τιμής του δυναμικού: Στο όριο  $r_T = b$  είναι γνωστό το δυναμικό τόσο από την όψη  $r_T = b^-$ , όπου είναι  $\Phi = \Phi_1(r_T=b)$ , όσο και από την όψη  $r_T = b^+$ , όπου στο διάστημα  $0 < \varphi < \delta$  είναι  $\Phi = \Phi_2(r_T=b)$ , ενώ στο υπόλοιπο διάστημα  $\delta < \varphi < \pi/4$  είναι  $\Phi = 0$ , δηλαδή:

$$U + A_0 \ln \frac{b}{a} + \sum_{m_1 \neq 0} A_{m_1} \cos(m_1\varphi) = \begin{cases} \sum_{m_2} B_{m_2} \cos(m_2\varphi) & (0 < \varphi < \delta), \\ 0 & (\delta < \varphi < \pi/4). \end{cases}$$

Στο διάστημα, όμως,  $0 < \varphi < \pi/4$ , οι συναρτήσεις  $\{1, \cos 4\varphi, \dots, \cos(m_1\varphi), \dots\}$ , μέσω των οποίων έχει εκφραστεί η αριστερή πλευρά, αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση. Συνεπώς, από το ολοκλήρωμα ορθογωνιότητας προκύπτει, για τον σταθερό όρο  $m_1 = 0$  ότι:

$$\frac{\pi}{4} \left( U + A_0 \ln \frac{b}{a} \right) = \sum_{m_2} B_{m_2} \int_0^\delta \cos(m_2\varphi) d\varphi = \sum_{m_2} B_{m_2} \frac{\sin(m_2\delta)}{m_2},$$

και για τις λοιπές τιμές  $m_1 = 4, 8, 12, \dots$  είναι:

$$\frac{\pi}{8} A_{m_1} = \sum_{m_2} B_{m_2} \int_0^\delta \cos(m_2\varphi) \cos(m_1\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m_2} B_{m_2} \left[ \frac{\sin\left[\frac{(m_1+m_2)\delta}{2}\right]}{\frac{m_1+m_2}{2}} + \frac{\sin\left[\frac{(m_1-m_2)\delta}{2}\right]}{\frac{m_1-m_2}{2}} \right],$$

όπου το ενδεχόμενο να είναι  $m_1 - m_2 = 0$  εξετάζεται στο τέλος. Οι σχέσεις αυτές αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα. Εισάγοντας τους ακέραιους αριθμούς  $n_1$  και  $n_2$ , επειδή  $m_1 = 4n_1$  και  $m_2 = (\pi/2\delta)(2n_2-1)$  και γράφοντας  $A_{(n_1)} = A_{m_1}$  και  $B_{(n_2)} = B_{m_2}$ , το σύστημα έχει τη μορφή:

$$\begin{bmatrix} A_{(0)} \\ A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{(1)} \\ B_{(2)} \\ \dots \end{bmatrix} + U \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{με } R_0 = -\frac{\pi}{4 \ln \frac{b}{a}},$$

δηλαδή  $[\vec{\mathbf{A}}] = [\vec{\mathbf{P}}] \cdot [\vec{\mathbf{B}}] + U[\vec{\mathbf{R}}]$ , όπου  $[\vec{\mathbf{A}}]$  και  $[\vec{\mathbf{B}}]$  είναι οι στήλες με τους συντελεστές των δύο αναπτυγμάτων,  $[\vec{\mathbf{R}}]$  είναι στήλη με σταθερές, με μόνο το πρώτο στοιχείο μη μηδενικό, και  $[\vec{\mathbf{P}}]$  είναι ο πίνακας με τους συντελεστές του γραμμικού συστήματος.

Συνέχεια κάθετης παραγώγου του δυναμικού: Στο όριο  $r_T = b$ , πάλι, η κάθετη παράγωγος δίδεται από τις παραγώγους  $\partial\Phi_1/\partial r_T$  και  $\partial\Phi_2/\partial r_T$  στις αντίστοιχες όψεις και στα οικεία διαστήματα ( $0 < \varphi < \pi/2$  και  $0 < \varphi < \delta$ , αντίστοιχα). Η διαφορά τώρα είναι ότι στο διάστημα  $\delta < \varphi < \pi/4$  η παράγωγος δεν είναι γνωστή από την πλευρά  $r_T = b^+$ . Αυτό δεν έχει καμία συνέπεια. Αντιθέτως, αν ήταν γνωστή εκεί και η παράγωγος, οι συνέπειες θα ήταν ενοχλητικές, επειδή το πρόβλημα θα ήταν υπερπροσδιορισμένο. Αρκεί που είναι γνωστό ότι στο διάστημα  $0 < \varphi < \delta$  οι συναρτήσεις  $\cos(m_2\varphi)$  αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση, και εφαρμόζοντας την ορθογωνιότητα στην ισότητα  $(\partial\Phi_1/\partial r_T)|_{r_T=b} = (\partial\Phi_2/\partial r_T)|_{r_T=b}$  προκύπτει:

$$-\delta \sum_{m_2} m_2 B_{m_2} \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{m_2} + \left(\frac{b}{c}\right)^{m_2}}{\left(\frac{c}{b}\right)^{m_2} - \left(\frac{b}{c}\right)^{m_2}} = 2A_0 \frac{\sin(m_2\delta)}{m_2} + \sum_{m_1 \neq 0} m_1 A_{m_1} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{m_1}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{m_1}} \left[ \frac{\sin[(m_1 + m_2)\delta]}{m_1 + m_2} + \frac{\sin[(m_1 - m_2)\delta]}{m_1 - m_2} \right],$$

που αντιπροσωπεύει γινόμενο πινάκων  $[\vec{\mathbf{B}}] = [\vec{\mathbf{Q}}] \cdot [\vec{\mathbf{A}}]$ .

Επίλυση γραμμικού συστήματος: Απαλείφοντας μεταξύ των  $[\vec{\mathbf{A}}] = [\vec{\mathbf{P}}] \cdot [\vec{\mathbf{B}}] + U[\vec{\mathbf{R}}]$  και  $[\vec{\mathbf{B}}] = [\vec{\mathbf{Q}}] \cdot [\vec{\mathbf{A}}]$  προσδιορίζονται οι συντελεστές στο ανάπτυγμα  $\Phi_1$  της περιοχής  $a < r_T < b$ , ως οι λύσεις του  $([\vec{\mathbf{I}}] - [\vec{\mathbf{P}}] \cdot [\vec{\mathbf{Q}}]) \cdot [\vec{\mathbf{A}}] = U[\vec{\mathbf{R}}]$ , δηλαδή  $[\vec{\mathbf{A}}] = U([\vec{\mathbf{I}}] - [\vec{\mathbf{P}}] \cdot [\vec{\mathbf{Q}}])^{-1} \cdot [\vec{\mathbf{R}}]$ , και ακολούθως οι συντελεστές του αναπτύγματος  $\Phi_2$  της περιοχής  $b < r_T < c$ ,  $0 < \varphi < \delta$  είναι  $[\vec{\mathbf{B}}] = [\vec{\mathbf{Q}}] \cdot [\vec{\mathbf{A}}]$ . Από τα δεδομένα της διάταξης, η τάση  $U$  της εσωτερικής ράβδου εμφανίζεται μόνο ως συντελεστής, ενώ οι διαστάσεις ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  και  $\delta$ ) στα  $[\vec{\mathbf{P}}]$ ,  $[\vec{\mathbf{Q}}]$  και  $[\vec{\mathbf{R}}]$ .

Στην πρώτη γραμμή του πίνακα  $[\vec{\mathbf{P}}]$  και στην πρώτη στήλη του πίνακα  $[\vec{\mathbf{Q}}]$ , όλα τα στοιχεία έχουν ως συντελεστές τις ποσότητες  $\sin(m_2\delta)/m_2$ , που όμως απλοποιούνται σημαντικά, επειδή είναι  $m_2\delta = \pi(n_2 - 1/2)$  και συνεπώς  $\sin(m_2\delta) = -\cos(n_2\pi) = -(-1)^{n_2}$ .

Επίσης, όλα τα υπόλοιπα στοιχεία περιέχουν τις ποσότητες  $\sum_{\pm} \sin[(m_1 \pm m_2)\delta]/(m_1 \pm m_2)$ . Με  $m_1 = 4n_1$  και  $m_2 = (\pi/\delta)(n_2 - 1/2)$ , οι ποσότητες αυτές υπολογίζονται κανονικά, με βάση τις τιμές των  $n_1$  και  $n_2$  σε κάθε στοιχείο του πίνακα. Υπάρχει όμως το ενδεχόμενο, σε κάποια στοιχεία να είναι  $m_1 = m_2$ . Αυτό προϋποθέτει να είναι η σταθερά  $m_2$  πολλαπλάσιο του 4, πράγμα που συμβαίνει όταν είναι  $\delta = (\pi/8\kappa)$ ,  $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ . Τότε η ισότητα  $m_1 = m_2$  συναντάται στα ζεύγη  $(n_1, n_2)$ , για τα οποία είναι  $n_1 = \kappa(2n_2 - 1)$ . Σ' αυτά τα στοιχεία του πίνακα είναι  $\sin[(m_1 + m_2)\delta] = \sin[(2n_2 - 1)\delta] = 0$  και  $\sin[(m_1 - m_2)\delta]/(m_1 - m_2) \rightarrow \delta \neq 0$ .



## 7.4 Κυλινδρικές συντεταγμένες

### 7.4.1 Συναρτήσεις βάσης

**Εξισώσεις για τις συναρτήσεις βάσης:** Οι κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r_T, \varphi, z)$  αποτελούν την επέκταση σε τρεις διαστάσεις των πολικών συντεταγμένων. Προσιδιάζουν σε διατάξεις που οριοθετούνται από επιφάνειες  $r_T = \text{σταθ.}$ ,  $\varphi = \text{σταθ.}$  και  $z = \text{σταθ.}$  Οι διατάξεις μπορεί να έχουν δύο διακριτά και πεπερασμένα όρια σε καθεμία από τις τρεις διευθύνσεις, όπως στο **Σχήμα 7.4-1α**. Επίσης, είναι δυνατόν να μην υπάρχει κάτω ή άνω όριο στην ακτινική διεύθυνση  $r_T$  και στο εσωτερικό της διάταξης να περιλαμβάνεται η αρχή των αξόνων ή το άπειρο, όπως στις περιοχές (I) και (II) του **Σχήματος 7.4-1β**, ή να μην υπάρχουν όρια στη διεύθυνση  $\varphi$ , όπως στις δύο περιοχές της διάταξης του **Σχήματος 7.4-1γ**, ή ακόμα να εκτείνεται η διάταξη μέχρι το  $z = +\infty$ , όπως η περιοχή (I) του ίδιου **Σχήματος 7.4-1γ**.

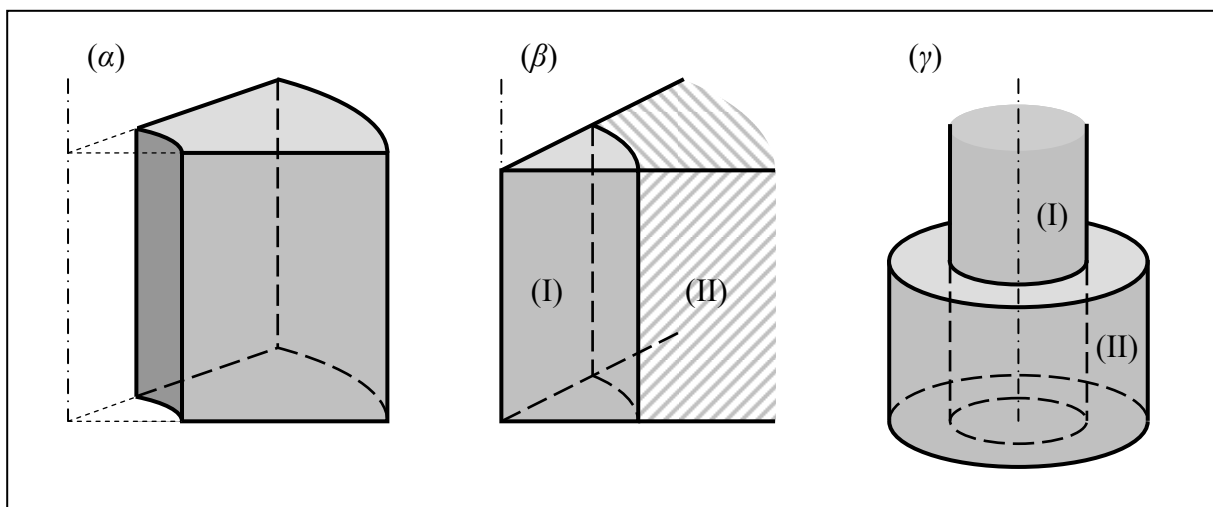
Σε κυλινδρικές συντεταγμένες η Λαπλασιανή εκφράζεται ως:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T} \left( r_T \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) + \frac{1}{r_T^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}. \quad (7.4-1)$$

Το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi, z)$  είναι συνάρτηση τριών μεταβλητών, οπότε για το χωρισμό μεταβλητών θα γραφεί ως γινόμενο με τρεις όρους,  $\Phi = R_T(r_T)F(\varphi)Z(z)$  και, διαιρώντας τη Λαπλασιανή  $\nabla^2 \Phi$  με το δυναμικό, σχηματίζεται η σχέση:

$$\frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi} = \frac{1}{r_T R_T} \frac{d}{dr_T} \left( r_T \frac{dR_T}{dr_T} \right) + \frac{1}{r_T^2 F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \quad (7.4-2)$$

Επειδή είναι  $\nabla^2 \Phi / \Phi = 0$ , η παράγωγός του ως προς  $z$  είναι ίση με μηδέν, συνεπώς ο τελευταί-



Σχήμα 7.4-1

ος όρος, που εμπλέκει μόνο την αξονική συντεταγμένη  $z$ , είναι ίσος με κάποια σταθερή τιμή  $K_z$ . Έπειτα από μία μικρή αναδιάταξη, η σχέση (7.4-2) παίρνει τη μορφή:

$$r_T^2 \frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi} = \left[ \frac{r_T}{R_T} \frac{d}{dr_T} \left( r_T \frac{dR_T}{dr_T} \right) + K_z r_T^2 \right] + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0. \quad (7.4-3)$$

Όμοια, είναι  $r_T^2 \nabla^2 \Phi / \Phi = 0$  και, συνεπώς, η παράγωγός του ως προς  $\varphi$  είναι ίση με μηδέν. Ο τελευταίος όρος στη σχέση (7.4-3) αφορά μόνο τη γωνία  $\varphi$ , επομένως και αυτός είναι ίσος με κάποια σταθερή τιμή  $K_\varphi$ . Άρα, στην ίδια σχέση και η ποσότητα στην αγκύλη, που αναφέρεται μόνο στην ακτινική συντεταγμένη  $r_T$ , πρέπει να είναι ίση με  $-K_\varphi$ . Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, οι συναρτήσεις  $Z(z)$ ,  $F(\varphi)$  και  $R_T(r_T)$  πρέπει να υπακούουν στις διαφορικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} - K_z Z &= 0, \\ \frac{d^2 F}{d\varphi^2} - K_\varphi F &= 0, \\ \frac{1}{r_T} \frac{d}{dr_T} \left( r_T \frac{dR_T}{dr_T} \right) + \left( K_z + \frac{K_\varphi}{r_T^2} \right) R_T &= 0. \end{aligned} \quad (7.4-4)$$

Από τις τρεις διαφορικές εξισώσεις, οι δύο πρώτες έχουν την ίδια μορφή και είναι οικείες από τις προηγούμενες παραγράφους, όπου και έχουν παρουσιασθεί εκτενώς οι ιδιότητες των αντίστοιχων συναρτήσεων  $Z(z)$  και  $F(\varphi)$ , οπότε αρκεί εδώ μία σύντομη υπόμνηση. Η τρίτη διαφορική εξίσωση έχει διαφορετική μορφή. Πρόκειται για την εξίσωση *Bessel*, της οποίας οι λύσεις, οι ομώνυμες συναρτήσεις, θα παρουσιασθούν στη συνέχεια.

Οι **συναρτήσεις**  $Z(z)$  έχουν συμπεριφορά εξαρτώμενη από το πρόσημο του  $K_z$ . Χρησιμοποιώντας την αγκύλη  $\{\dots\}$  για να παρασταθεί γραμμικός συνδυασμός των περικλειόμενων συναρτήσεων, υπενθυμίζεται ότι τα ενδεχόμενα είναι:

$$\begin{aligned} K_z = 0 &\quad \Rightarrow \quad Z(z) = \{1, z\}, \\ K_z = -h^2 < 0 &\quad \Rightarrow \quad Z(z) = \{\cos(hz), \sin(hz)\}, \\ K_z = +h^2 > 0 &\quad \Rightarrow \quad Z(z) = \left\{ \begin{aligned} &\{\cosh(hz), \sinh(hz)\}, \\ &\{\exp(+hz), \exp(-hz)\}. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (7.4-5)$$

Υπενθυμίζεται ότι υποτίθεται  $h = |h|$ , και ότι στο ενδεχόμενο  $K_z = h^2 > 0$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί γραμμικός συνδυασμός εκθετικών ή/και υπερβολικών συναρτήσεων χωρίς διάκριση. Επίσης, υπενθυμίζεται η συμπεριφορά των ημιτονοειδών συναρτήσεων με τις διαδοχικές εναλλαγές προσήμου, σε αντίθεση με των εκθετικών και υπερβολικών συναρτήσεων.

**Συναρτήσεις  $F(\varphi)$ :** Τα ενδεχόμενα είναι ακριβώς όπως για τις συναρτήσεις  $Z(z)$ :

$$\begin{aligned} K_\varphi = 0 & \Rightarrow F(\varphi) = \{1, \varphi\}, \\ K_\varphi = -m^2 < 0 & \Rightarrow F(\varphi) = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}, \\ K_\varphi = +m^2 > 0 & \Rightarrow F(\varphi) = \{\cosh(m\varphi), \sinh(m\varphi)\}. \end{aligned} \quad (7.4-6)$$

Στο ενδεχόμενο  $K_\varphi = m^2 > 0$  δεν έχουν αναγραφεί οι εκθετικές συναρτήσεις, που εδώ δεν εξυπηρετούν, επειδή η μεταβλητή  $\varphi$  δεν εκτείνεται μέχρι το  $\pm\infty$ . Η μεταβλητή  $m$ , με  $m > 0$ , εν γένει έχει οποιαδήποτε τιμή. Αν, όμως, δεν υπάρχουν όρια  $\varphi = \text{σταθ}$ , τότε πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη περιοδικότητας,  $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$ , με την οποία είναι συμβατές αφενός οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις,  $F_m(\varphi) = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$  και μόνο με ακέραιες τιμές  $m = 1, 2, 3, \dots$ , αφετέρου η συνάρτηση  $F_0(\varphi) = 1$ , η οποία προέρχεται από το ενδεχόμενο  $K_\varphi = 0$  και μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε  $m = 0$ .

**Οι συναρτήσεις  $R_T(r_T)$**  υπακούουν στη διαφορική εξίσωση (7.4-4γ), που περιέχει δύο παραμέτρους, τις σταθερές ποσότητες  $K_z$  και  $K_\varphi$ . Θα εξετασθούν χωριστά οι πιο ενδιαφέροντες συνδυασμοί στα πρόσημα των δύο αυτών σταθερών. Το πιο απλό ενδεχόμενο να είναι  $K_z = 0$ , που τότε είναι  $Z(z) = \{1, z\}$ , έχει εμφανισθεί και στην παράγραφο 7.3.1. Σε αυτή την περίπτωση, οι συναρτήσεις  $R_T(r_T)$  είναι:

$$K_z = 0 \text{ και } \begin{cases} K_\varphi = 0 & \Rightarrow R_T(\rho_T = r_T/r_{T0}) = \{1, \ln \rho_T\}, \\ K_\varphi = +m^2 > 0 & \Rightarrow R_T(\rho_T) = \{\cos(m \ln \rho_T), \sin(m \ln \rho_T)\}, \\ K_\varphi = -m^2 < 0 & \Rightarrow R_T(\rho_T) = \{\rho_T^m, \rho_T^{-m}\}. \end{cases} \quad (7.4-7)$$

Προτιμήθηκε πάλι να χρησιμοποιηθεί η αδιάστατη ακτινική απόσταση  $\rho_T = r_T/r_{T0}$ , ώστε το όρισμα της λογαριθμικής συνάρτησης να μην έχει διαστάσεις, χωρίς να επηρεάζεται η γενικότητα, οποιαδήποτε τιμή  $r_{T0}$  και αν χρησιμοποιηθεί.

Το ενδεχόμενο  $K_z = 0$  διευρύνει ελαφρώς το περιεχόμενο της παραγράφου 7.3.1, κατά το ότι οι συναρτήσεις  $Z(z)$  γενικεύονται από  $Z(z) = \text{σταθ}$ . (όταν  $\partial/\partial z = 0$ ) σε  $Z(z) = A + Bz$ . Η ουσιαστική γενίκευση καλύπτεται από τα δύο άλλα ενδεχόμενα για τη σταθερά  $K_z$ :

$$\begin{aligned} K_z = +h^2 > 0 \text{ και } K_\varphi = -m^2 \leq 0 & \Rightarrow R_T(r_T) = \{J_m(hr_T), Y_m(hr_T)\}, \\ K_z = -h^2 < 0 \text{ και } K_\varphi = -m^2 \leq 0 & \Rightarrow R_T(r_T) = \{I_m(hr_T), K_m(hr_T)\}. \end{aligned} \quad (7.4-8)$$

Οι συναρτήσεις ( $J_m, Y_m$ ) ονομάζονται «συναρτήσεις *Bessel*», α' και β' είδους τάξης  $m$  και οι ( $I_m, K_m$ ) είναι οι αντίστοιχες «τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*». Το ενδεχόμενο  $K_\varphi > 0$  δεν εξετάζεται, έχει άλλωστε περιορισμένο ενδιαφέρον.

**Οι συναρτήσεις Bessel** εμφανίζονται γενικότερα σε διατάξεις με κυλινδρική δομή. Τέτοιες είναι οι κυλινδρικές διατάξεις (κυματοδηγός και κοιλότητα) των *παραδ. 2.4-9* και *2.4-10* στην παράγραφο 2.4.2 του Μέρους Α, ή τα κυλινδρικά κύματα της παραγράφου 2.4.3 πάλι στο Μέρος Α (σελ. 450 κ. επ.), ή επίσης τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά και πεδία που παράγονται από νηματοειδές ρεύμα, ή από μαγνητική διπολική ταινία, με άπειρο μήκος (βλ. παράγραφο 5.4.2). Γράφοντας στην εξίσωση (7.4.5γ)  $K_z = h^2$  και  $K_\phi = -m^2$  και εισάγοντας την αδιάστατη ακτινική απόσταση  $\zeta = hr_T$ , η εξίσωση αυτή παίρνει την τυποποιημένη μορφή της διαφορικής εξίσωσης *Bessel*:

$$\zeta^2 \frac{d^2}{d\zeta^2} R_T + \zeta \frac{d}{d\zeta} R_T + (\zeta^2 - m^2) R_T = 0. \quad (7.4-9)$$

Οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης αυτής είναι οι συναρτήσεις *Bessel* α' είδους,  $J_m(\zeta)$ , και β' είδους,  $Y_m(\zeta)$ , δηλαδή,  $R_T(r_T) = \{J_m(\zeta), Y_m(\zeta)\}$ . Η παράμετρος  $m$  ονομάζεται τάξη της συνάρτησης και όσο αφορά τη διαφορική εξίσωση δεν υπάρχει κανένας περιορισμός ως προς την τιμή της, που μπορεί να είναι κλασματική, άρρητη, ή ακόμα και μιγαδική ποσότητα. Υπενθυμίζεται, πάντως, ότι η παράμετρος  $m$  συνδέεται με τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi) = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$ , οπότε, ειδικά όταν η διάταξη χαρακτηρίζεται από περιοδικότητα στη γωνία  $\varphi$ , η παράμετρος  $m$  πρέπει να έχει ακέραιη τιμή.

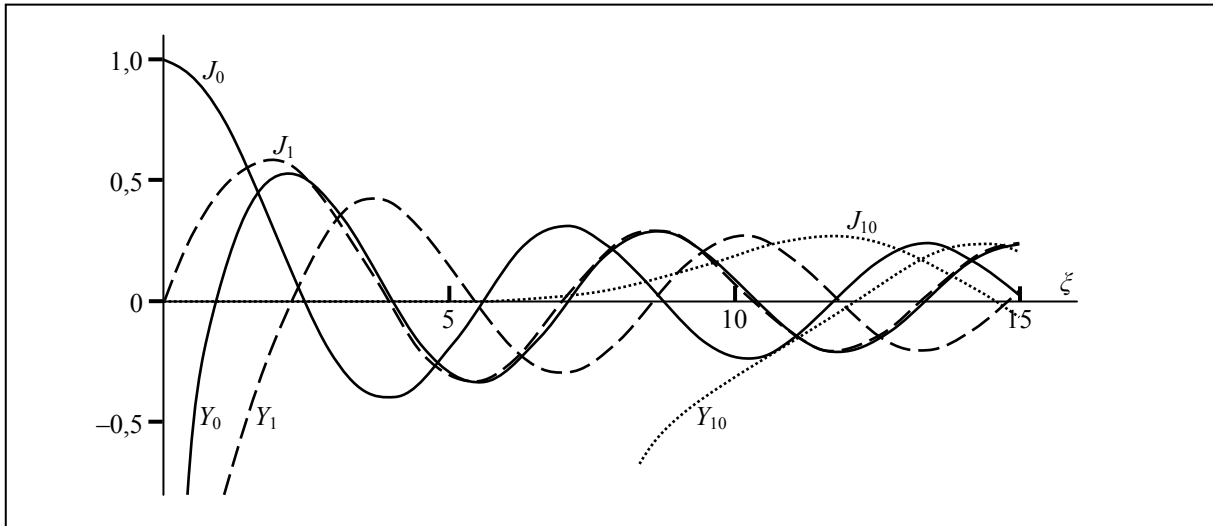
Οι συναρτήσεις  $J_m(\zeta)$  και  $Y_m(\zeta)$  διαδοχικών τάξεων, καθώς και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, συνδέονται με τις αναδρομικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \{J_{m+1}(\zeta), Y_{m+1}(\zeta)\} &= \frac{m}{\zeta} \{J_m(\zeta), Y_m(\zeta)\} - \frac{d}{d\zeta} \{J_m(\zeta), Y_m(\zeta)\} \\ &= \frac{2m}{\zeta} \{J_m(\zeta), Y_m(\zeta)\} - \{J_{m-1}(\zeta), Y_{m-1}(\zeta)\}. \end{aligned} \quad (7.4-10)$$

Το **Σχήμα 7.4-2** παρουσιάζει τις συναρτήσεις  $J_m(\zeta)$  και  $Y_m(\zeta)$ , σε τάξεις  $m = 0$  και  $m = 1$ , καθώς και για  $m = 10$ , τιμή αντιπροσωπευτική για τις υψηλές τάξεις. Τα κυριότερα χαρακτηριστικά τους είναι τα εξής:

- Για μικρές τιμές του ορίσματος (πρακτικά, όταν  $\zeta \ll m + 1$ ), οι δεσπόζοντες όροι είναι:

$$\begin{aligned} J_m(\zeta \ll m + 1) &\sim \frac{1}{2^m \Gamma(m + 1)} \zeta^m, \\ Y_{m > 0}(\zeta \ll m + 1) &\sim -\frac{2^m \Gamma(m)}{\pi} \frac{1}{\zeta^m}, \quad Y_{m=0}(\zeta \ll 1) \sim \frac{2}{\pi} \ln \zeta, \end{aligned} \quad (7.4-11)$$



Σχήμα 7.4-2

όπου για ακέραιες τιμές η συνάρτηση «Γάμμα» είναι  $\Gamma(m+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (m-1) \cdot m = m!$ . Οι σχέσεις (7.4-11) υποδηλώνουν ότι οι συναρτήσεις  $R_T(r_T) = \{J_m(\xi), Y_m(\xi)\}$ , με  $\xi = hr_T$ , συμπεριφέρονται στο όριο  $r_T \ll (m+1)/h$  όπως και όταν  $K_z = 0$ , βλ. σχέσεις (7.4-7α,γ).

- Για μεγάλες τιμές του ορίσματος, πρακτικά, ήδη όταν  $\xi > m+1$ , οι συναρτήσεις *Bessel* αποκτούν εναλλασσόμενο χαρακτήρα, σχεδόν ημιτονοειδή, αλλά με πλάτος που φθίνει με την τετραγωνική ρίζα της απόστασης. Τώρα, οι δεσπόζοντες όροι είναι:

$$J_m(\xi \gg m+1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$Y_m(\xi \gg m+1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \sin\left(\xi - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (7.4-12)$$

Αυτή η εναλλασσόμενη συμπεριφορά είναι βασικό γνώρισμα των συναρτήσεων *Bessel*, ανεξάρτητα από τη συμπεριφορά τους σε μικρά  $\xi$ . Με τέτοια συμπεριφορά, οι συναρτήσεις  $R_T(r_T) = \{J_m(\xi), Y_m(\xi)\}$  συμπληρώνουν την εκθετική ή υπερβολική (όταν  $K_z = h^2 > 0$ , όπως εδώ) συμπεριφορά των συναρτήσεων  $Z(z)$ , σε αντιστοιχία με την παρόμοια περίπτωση στις καρτεσιανές συντεταγμένες, όπου ημιτονοειδείς συναρτήσεις συνεργάζονται με εκθετικές.

- Με την εναλλασσόμενη συμπεριφορά τους, οι συναρτήσεις *Bessel*, αλλά και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, έχουν ένα άπειρο πλήθος μηδενισμών, με ενδιάμεσα ανά ένα ακρότατο. Η  $n$ -στή ρίζα κάθε συνάρτησης και παραγώγου συμβολίζεται με το αντίστοιχο μικρό γράμμα, με δεύτερο δείκτη το  $n$ , αλλά χωρίς να προσμετρώνται οι ρίζες στο  $\xi = 0$  των συναρτήσεων  $J_m$ . Δηλαδή, για τις ρίζες χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί:

$$\begin{aligned} J_m(j_{m,n}) &= 0, & J'_m(j'_{m,n}) &= 0, \\ Y_m(y_{m,n}) &= 0, & Y'_m(y'_{m,n}) &= 0. \end{aligned} \quad (7.4-13)$$

Για τις ρίζες ισχύει η διάταξη:

$$m < j'_{m,1} < y_{m,1} < y'_{m,1} < j_{m,1} < j'_{m,2} < y_{m,2} < y'_{m,2} < j_{m,2} < j'_{m,3} < \dots \quad (7.4-14)$$

Όλες οι συγκρίσεις εμπλέκουν ανισότητες, όμως, ειδικά για την πρώτη ρίζα της παραγώγου  $(d/d\xi)J_0$  είναι  $0 = j'_{0,1}$ , ως ισότητα, και όχι ως ανισότητα. Οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, ιδιαίτερα όταν  $n \gg m$ , είναι:

$$\begin{aligned} j_{m,n} &= \left(n + \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}\right)\pi - \frac{4m^2 - 1}{8\left(n + \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}\right)} - \dots, \\ y_{m,n} &= \left(n + \frac{1}{2}m - \frac{3}{4}\right)\pi - \frac{4m^2 - 1}{8\left(n + \frac{1}{2}m - \frac{3}{4}\right)} - \dots, \\ j'_{m,n} &= \left(n + \frac{1}{2}m - \frac{3}{4}\right)\pi - \frac{4m^2 + 3}{8\left(n + \frac{1}{2}m - \frac{3}{4}\right)} - \dots, \\ y'_{m,n} &= \left(n + \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}\right)\pi - \frac{4m^2 + 3}{8\left(n + \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}\right)} - \dots \end{aligned} \quad (7.4-15)$$

Μετά τα πρώτα λίγα σημεία στη διάταξη (7.4-14), οι ρίζες ομαδοποιούνται σε ζεύγη  $(j'_{m,n}, y_{m,n})$  και  $(y'_{m,n}, j_{m,n})$  ριζών με πολύ γειτονικές τιμές, που απέχουν από τα επόμενα ζεύγη περίπου κατά  $\pi$ , όπως άλλωστε υποδεικνύεται και από τις προσεγγίσεις (7.4-15).

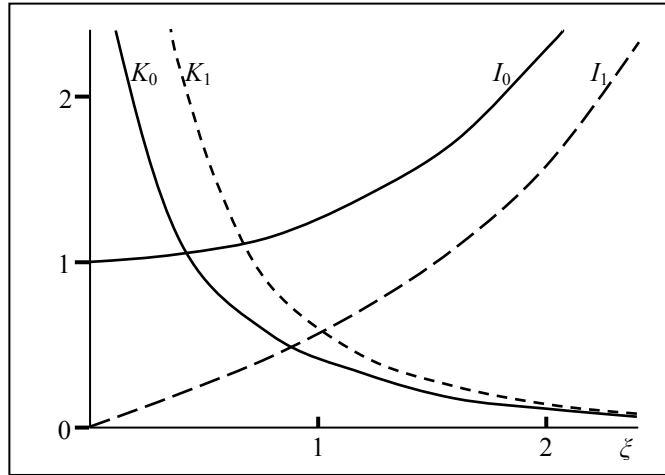
Οι τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*  $I_m(\xi)$  και  $K_m(\xi)$  είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης:

$$\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} R_T + \xi \frac{d}{d\xi} R_T - (\xi^2 + m^2) R_T = 0. \quad (7.4-16)$$

Η εξίσωση αυτή σχηματίζεται πάλι από την (7.4.5γ), αλλά τώρα με  $K_z = -h^2 < 0$ . Κατά τα λοιπά, πάλι είναι  $K_\varphi = -m^2$  και η αδιάστατη ακτινική απόσταση πάλι ορίζεται ως  $\xi = hr_T$ , αλλά με τον νέο ορισμό για την παράμετρο  $h$ , και η συνάρτηση  $R_T$  εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός  $R_T(r_T) = \{I_m(\xi), K_m(\xi)\}$ . Για μεταβολή της τάξης κατά μία μονάδα, οι συναρτήσεις αυτές συνδέονται με αναδρομικές σχέσεις παρόμοιες με τις (7.4-10), που τώρα είναι:

$$\begin{aligned} \{I_{m+1}(\xi), K_{m+1}(\xi)\} &= -\frac{m}{\xi} \{I_m(\xi), K_m(\xi)\} + \frac{d}{d\xi} \{I_m(\xi), K_m(\xi)\} \\ &= -\frac{2m}{\xi} \{I_m(\xi), K_m(\xi)\} + \{I_{m-1}(\xi), K_{m-1}(\xi)\}. \end{aligned} \quad (7.4-17)$$

Οι τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*,  $I_m(\zeta)$  και  $K_m(\zeta)$ , παρουσιάζονται στο **Σχήμα 7.4-3** για τις τάξεις  $m=0$  και  $m=1$ . Ακόμα και σε τέτοιες χαμηλές τάξεις προβάλλεται η βασική συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτών, όπως περιγράφεται από τις ακόλουθες προσεγγιστικές εκφράσεις (που, βέβαια, αναφέρονται σε κάθε τιμή της τάξης  $m$ ):



Σχήμα 7.4-3

- Για μικρά ορίσματα:

$$I_m(\zeta \ll m+1) \sim \frac{1}{2^m \Gamma(m+1)} \zeta^m, \quad (7.4-18)$$

$$K_{m>0}(\zeta \ll m+1) \sim 2^{m-1} \Gamma(m) \frac{1}{\zeta^m}, \quad K_{m=0}(\zeta \ll 1) \sim -\ln \zeta,$$

με συμπεριφορά ισοδύναμη με των εκφράσεων (7.4-11).

- Για μεγάλα ορίσματα:

$$I_m(\zeta \gg m+1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\zeta}} \exp(+\zeta), \quad (7.4-19)$$

$$K_m(\zeta \gg m+1) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} \exp(-\zeta).$$

Η αύξουσα ή φθίνουσα εκθετική συμπεριφορά, με δευτερεύον στοιχείο την εξάρτηση από την τετραγωνική ρίζα του  $\zeta$ , ταιριάζει με το γεγονός, ότι οι συναρτήσεις  $R_T(r_T) = \{I_m(\zeta), K_m(\zeta)\}$  συνδυάζονται με τις ημιτονοειδείς  $Z(z) = \{\cos(hz), \sin(hz)\}$ , τώρα που είναι  $K_z = -h^2 < 0$ .

Τα **γενικά σχόλια** που ακολουθούν είναι χρήσιμα κατά τη χρήση των συναρτήσεων *Bessel*, όπως και των τροποποιημένων, για το σχηματισμό των συναρτήσεων  $R_T(r_T)$  και γενικότερα των συμπλεγμάτων  $\Phi = R_T(r_T)F(\varphi)Z(z)$  που περιγράφουν το δυναμικό:

- Μετά από ένα διάστημα προσαρμογής κοντά στον άξονα, οι συναρτήσεις  $J_m(hr_T)$  και  $Y_m(hr_T)$  έχουν εναλλασσόμενη συμπεριφορά, ως απόρροια του ότι  $K_z = +h^2 > 0$ , και για το σχηματισμό του δυναμικού  $\Phi$  ο γραμμικός συνδυασμός  $R_T(r_T) = \{J_m(hr_T), Y_m(hr_T)\}$  πολλαπλασιάζεται με  $Z(z) = \{\cosh(hz), \sinh(hz)\}$ , ή με εκθετικές συναρτήσεις.

- Αντίθετα, οι συναρτήσεις  $I_m(hr_T)$  και  $K_m(hr_T)$ , με  $K_z = -h^2 > 0$ , έχουν μονότονη μεταβολή και εμπλέκονται σε γινόμενα  $R_T(r_T)Z(z) = \{I_m(hr_T), K_m(hr_T)\} \times \{\cos(hz), \sin(hz)\}$ .
- Και οι δύο παραπάνω περιπτώσεις προϋποθέτουν  $K_\varphi = -m^2 \leq 0$ , και είναι είτε  $m > 0$ , με την τρίτη συνάρτηση να έχει τη μορφή  $F(\varphi) = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$ , ή είναι  $m = 0$ , οπότε η τρίτη συνάρτηση είναι  $F(\varphi) = \{1, \varphi\}$ . Σε διατάξεις με περιοδικότητα πρέπει η σταθερά  $m$  να είναι ακέραιος αριθμός, και τότε είναι  $F_{m=0} = 1$  υποχρεωτικά.
- Οι συναρτήσεις  $J_m$  και  $I_m$  έχουν πεπερασμένη τιμή στον άξονα  $z$ , και ειδικότερα είναι  $J_0(0) = I_0(0) = 1$  και  $J_{m \neq 0}(0) = I_{m \neq 0}(0) = 0$ , ενώ οι συναρτήσεις  $Y_m$  και  $K_m$  απειρίζονται όταν  $r_T = 0$ .
- Σε μεγάλες τιμές του  $\zeta = hr_T$ , οι συναρτήσεις  $I_m$  απειρίζονται εκθετικά, ενώ οι συναρτήσεις  $K_m$  τείνουν παρόμοια στο μηδέν.
- Σε αντίθεση με τις τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις, η μετατόπιση της αρχής δεν εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων *Bessel*. Αν είναι επιθυμητό, σε κάποια ακτινική θέση να  $r_{T0}$  μηδενίζεται η συνάρτηση  $R_T(r_T)$ , ή η παράγωγός της, οι κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί είναι:

$$\begin{aligned} R_T(r_T) = Y_m(hr_{T0})J_m(hr_T) - J_m(hr_{T0})Y_m(hr_T) &\Rightarrow R_T(r_T = r_{T0}) = 0, \\ R_T(r_T) = Y'_m(hr_{T0})J_m(hr_T) - J'_m(hr_{T0})Y_m(hr_T) &\Rightarrow R'_T(r_T = r_{T0}) = 0, \end{aligned} \quad (7.4-20)$$

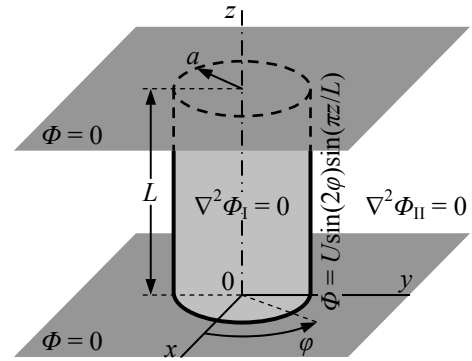
και αντίστοιχα για τους συνδυασμούς  $R_T(r_T) = \{I_m(hr_T), K_m(hr_T)\}$ .

- Οι συναρτήσεις *Bessel*, όπως και οι τροποποιημένες, είναι υπερβατικές συναρτήσεις και σε κάθε τιμή του ορίσματος  $\zeta$  επιστρέφουν συγκεκριμένη τιμή. Οι προσεγγιστικές εκφράσεις έχουν δοθεί μόνο για να αποκτηθεί οικειότητα με τη συμπεριφορά τους. Εννοιολογικά, η μόνη διαφορά που έχουν από τις πιο συνηθισμένες συναρτήσεις, όπως τις τριγωνομετρικές, είναι η οικειότητα με αυτές, διαφορά τελείως υποκειμενική.
- Τέλος, το ενδεχόμενο  $K_z = 0$  περιγράφεται επαρκώς από τις πολικές συντεταγμένες (βλ. παράγραφο 7.3), με την απλή γενίκευση  $Z(z) = \{1, z\}$ , και όχι μόνο  $Z = 1$ .

Τα *παράδ.* 7.4-1 έως 7.4-5 αναφέρονται σε διατάξεις, των οποίων η λύση είναι ένα απλό γινόμενο  $\Phi = R_T(r_T)F(\varphi)Z(z)$ , όπως υποδεικνύεται από τις οριακές συνθήκες (με αποδεκτές συναρτήσεις και χωρίς ασυνέχειες). Με αυτά αποσκοπείται μία πρώτη εξοικείωση με τις συναρτήσεις *Bessel*, ενώ η επίλυση πιο ρεαλιστικών διατάξεων μετατίθεται για την παράγρ. 7.4.2, όπου παρουσιάζεται και αξιοποιείται η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων *Bessel*.



**Παράδειγμα 7.4-1:** Στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a$ ,  $0 < z < h$  το δυναμικό είναι κατανομημένο ως  $\Phi(r_T = a) = U \sin(2\varphi) \sin(\pi z/L)$ , τα επίπεδα  $z = 0$  και  $z = L$  είναι γειωμένα και στο άπειρο είναι  $\Phi = 0$ . Παντού είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi, z)$  στις δύο περιοχές του ενδιάμεσου χώρου  $0 < z < L$ .



**Επίλυση:** Οι οριακές συνθήκες εμπλέκουν συνεχείς

συναρτήσεις, ενώ στις δύο γραμμές τομής μεταξύ οριακών επιφανειών, στους κύκλους  $r_T = a$  στα  $z = 0$  και  $z = L$ , οι οριακές συνθήκες και των δύο επιφανειών δίνουν  $\Phi = 0$ , οπότε δεν υπάρχει καμία ασυνέχεια. Επίσης, οι συναρτήσεις  $\sin(2\varphi)$  και  $\sin(\pi z/L)$  που εμφανίζονται στις οριακές συνθήκες είναι αποδεκτές ως συναρτήσεις  $F(\varphi)$ , με  $m = 2$ , και  $Z(z)$ , με  $h = \pi/L$ , και η πρώτη από αυτές είναι περιοδική, όπως απαιτείται, επειδή ως προς τη γωνία  $\varphi$  δεν υπάρχουν ενδιάμεσα όρια και πρέπει να είναι  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ , δηλαδή  $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$ .

Θα επιχειρηθεί, συνεπώς, η επίλυση με την υπόθεση ότι το δυναμικό εκφράζεται από έναν μόνο όρο,  $\Phi = R_T(r_T)F(\varphi)Z(z)$ , με προσδιοριστέα τη συνάρτηση  $R_T(r_T)$ . Η συνάρτηση  $Z(z) = \sin(\pi z/L)$  είναι ημιτονοειδής και αντιστοιχεί σε  $K_z = -h^2 < 0$ . Συνεπώς, η συνάρτηση  $R_T(r_T)$  είναι γραμμικός συνδυασμός τροποποιημένων συναρτήσεων *Bessel*, συγκεκριμένα έχει τη μορφή  $R_T(r_T) = A I_2(\pi r_T/L) + B K_2(\pi r_T/L)$ , έχοντας εισαγάγει τις τιμές  $m = 2$ , και  $h = \pi/L$  που έχουν προσδιορισθεί, έστω, ως υποθέσεις εργασίας. Οι συντελεστές  $A$  και  $B$  έχουν εν γένει διαφορετικές τιμές στις δύο περιοχές  $r_T < a$  και  $r_T > a$  του ενδιάμεσου χώρου, αυτές που θα ικανοποιούν τις οριακές συνθήκες στο όριο της αντίστοιχης περιοχής.

Περιοχή I ( $r_T < a$ ): Η περιοχή αυτή περιλαμβάνει τον άξονα  $r_T = 0$ . Όμως, εκεί απειρίζεται η συνάρτηση β' είδους,  $K_2(\xi = 0) = \infty$ , και για να μην απειρισθεί το δυναμικό πρέπει ο αντίστοιχος συντελεστής να είναι  $B_I = 0$ , συνεπώς είναι  $R_{PI}(r_T) = A_I I_2(\pi r_T/L)$ . Εξισώνοντας με την οριακή συνθήκη,  $\Phi_I(r_T = a) = A_I I_2(\pi a/L) F(\varphi) Z(z) = U \sin(2\varphi) \sin(\pi z/L)$ , προκύπτει η τιμή του  $A_I$ .

Περιοχή II ( $r_T > a$ ): Τώρα, η περιοχή φθάνει ακτινικά ως το άπειρο, και για να αποφευχθεί ο απειρισμός του δυναμικού πρέπει να είναι  $A_{II} = 0$ , επειδή  $I_2(\xi = \infty) = \infty$ . Συνεπώς,  $R_{PII}(r_T) = B_{II} K_2(\pi r_T/L)$ , και ο συντελεστής  $B_{II}$  προσδιορίζεται από την ίδια οριακή συνθήκη στο  $r_T = a$ .

Με βάση τα παραπάνω (με  $h = \pi/L$ ), το δυναμικό είναι:

$$\Phi_I = U \frac{I_2(hr_T)}{I_2(ha)} \sin(2\varphi) \sin(hz), \quad \Phi_{II} = U \frac{K_2(hr_T)}{K_2(ha)} \sin(2\varphi) \sin(hz).$$

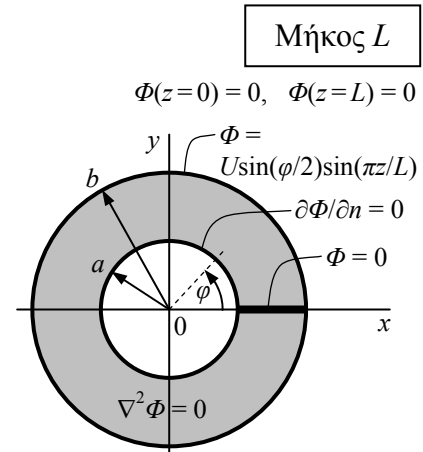
**Παράδειγμα 7.4-2:** Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi)$  στην περιοχή  $a < r_T < b$ ,  $0 < z < L$ , στην οποία είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι οριακές συνθήκες αναγράφονται στο σχήμα και είναι:

$$\text{Στην επιφάνεια } r_T = a: (\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=a} = 0,$$

$$\text{Στην επιφάνεια } r_T = b: \Phi(r_T=b) = U \sin(\varphi/2) \sin(\pi z/L),$$

$$\text{Στις επιφάνειες } z = 0 \text{ και } z = L: \Phi = 0,$$

$$\text{Στη διπλή επιφάνεια } \varphi = 0 \text{ και } \varphi = 2\pi: \text{ Επίσης } \Phi = 0.$$



**Επίλυση:** Διαπιστώνεται ότι οι οριακές συνθήκες είναι συνεχείς σε κάθε εξωτερική επιφάνεια, καθώς και στις γραμμές  $r_T = b$  (με  $z = 0$ , με  $z = L$ , αλλά και με  $\varphi = 0$  και  $\varphi = 2\pi$ ), ενώ στις γραμμές  $r_T = a$  (με  $z = 0$ , με  $z = L$ , και με  $\varphi = 0$  και  $\varphi = 2\pi$ ) η συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n$  ( $= -\partial\Phi/\partial r_T$ ) είναι συμβατή με τη συνθήκη  $\Phi = \text{σταθ.}$  ( $= 0$ ). Επίσης, η συνάρτηση  $Z(z) = \sin(\pi z/L)$  είναι αποδεκτή και υποδεικνύει ότι  $h = \pi/L$ , όπως είναι αποδεκτή και η  $F(\varphi) = \sin(\varphi/2)$ , με  $m = 1/2$ . Το ότι η σταθερά  $m$  δεν είναι ακέραιος αριθμός δεν αποτελεί λόγο για να αποκλεισθεί η συνάρτηση  $\sin(\varphi/2)$  από τις αποδεκτές συναρτήσεις  $F(\varphi)$ . Εκ των προτέρων απαίτηση για ακέραιες τιμές υφίσταται, όταν η διάταξη είναι περιοδική στη γωνία  $\varphi$ , πράγμα που εδώ δεν συμβαίνει, επειδή παρεμβάλλεται το όριο στο  $\varphi = 0$  (και  $\varphi = 2\pi$ ).

Η ημιτονοειδής συνάρτηση  $Z(z) = \sin(\pi z/L)$  συνοδεύεται από συνάρτηση  $R_T(r_T)$  με μορφή  $R_T(r_T) = A I_{1/2}(\pi r_T/L) + B K_{1/2}(\pi r_T/L)$ . Εξισώνοντας το δυναμικό  $\Phi = R_T(r_T)F(\varphi)Z(z)$ , ή την παράγωγό του, στα όρια  $r_T = a$  και  $r_T = b$  με τα δεδομένα από τις οριακές συνθήκες προκύπτει ένα σύστημα  $2 \times 2$  για τους συντελεστές  $A$  και  $B$ . Αισθητά ταχύτερο είναι, όμως, να αξιοποιηθεί το γεγονός ότι στο όριο  $r_T = a$  η οριακή συνθήκη για την κάθετη παράγωγο είναι ομογενής, και να γραφεί η συνάρτηση αυτή ως  $R_T(r_T) = C[K'_{1/2}(\pi a/L)I_{1/2}(\pi r_T/L) - I'_{1/2}(\pi a/L)K_{1/2}(\pi r_T/L)]$ , με ένα συντελεστή  $C$ , που θα προσδιορισθεί εξισώνοντας  $R_T(b)F(\varphi)Z(z) = U \sin(\varphi/2) \sin(\pi z/L)$ .

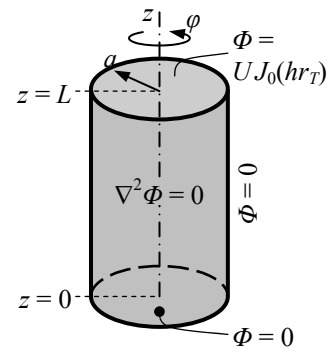
Το τελικό αποτέλεσμα είναι (με  $h = \pi/L$ ):

$$\Phi(a < r_T < b, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < L) = U \frac{K'_{1/2}(ha)I_{1/2}(hr_T) - I'_{1/2}(ha)K_{1/2}(hr_T)}{K'_{1/2}(ha)I_{1/2}(hb) - I'_{1/2}(ha)K_{1/2}(hb)} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(hz).$$

**Σχόλιο:** Ας αναφερθεί, μόνο ως αξιοπερίεργο, πως οι συναρτήσεις *Bessel* (και οι τροποποιημένες), με τάξη  $m$  περιττό πολλαπλάσιο του  $1/2$ , εκφράζονται με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων. Οι εκφράσεις τους προκύπτουν από τις σχέσεις (7.4-10 και 17), με αφετηρία:

$$J_{1/2}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\sqrt{\xi}}, \quad Y_{1/2}(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \xi}{\sqrt{\xi}}, \quad I_{1/2}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sinh \xi}{\sqrt{\xi}}, \quad K_{1/2}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-\xi)}{\sqrt{\xi}}.$$

**Παράδειγμα 7.4-3:** Σε έναν κύλινδρο με ακτίνα  $a$  και ύψος  $L$ , η παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια και η κάτω βάση είναι γειωμένες, ενώ στην πάνω βάση το δυναμικό περιγράφεται από τη σχέση  $\Phi = UJ_0(hr_T)$ , όπου η σταθερά  $h$  έχει την τιμή  $h = j_{0,3}/a$ , με  $j_{0,3}$  την τρίτη κατά σειρά ρίζα της συνάρτησης *Bessel* α' είδους και μηδενικής τάξης. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi, z)$  στο εσωτερικό του κυλίνδρου.



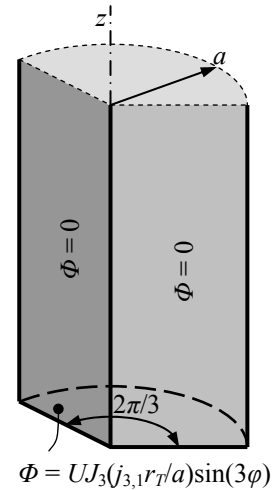
**Επίλυση:** Οι οριακές συνθήκες περιγράφονται από συνεχείς συναρτήσεις. Επίσης, συνέχεια διαπιστώνεται και στις δύο κυκλικές ακμές με ακτίνα  $a$ , στα  $z = 0$  και  $z = h$ . Ειδικά στην πάνω βάση είναι  $\Phi = 0$  από την πλευρά της παράπλευρης επιφάνειας και από την πλευρά του δίσκου είναι  $\Phi = UJ_0(ha) = UJ_0(j_{0,3})$ , που είναι ίσο με μηδέν στη θέση της ρίζας της συνάρτησης *Bessel*. Συνεπώς, οι οριακές συνθήκες δεν εμφανίζουν ασυνέχεια.

Η μόνη μη μηδενική πληροφορία στις οριακές συνθήκες προέρχεται από την πάνω βάση, όπου  $\Phi = UJ_0(hr_T)$ . Η συνάρτηση *Bessel* είναι αποδεκτή ως ακτινική συνάρτηση στο χωρισμό μεταβλητών, οπότε ως επιλεγεί  $R_T(r_T) = J_0(hr_T)$ . Η επιλογή αυτή συνοδεύεται από τις υποχρεωτικές επιλογές  $h = j_{0,3}/a$ , από το συντελεστή της ακτίνας  $r_T$  στο όρισμα της συνάρτησης *Bessel*, και  $m = 0$ , από το δείκτη που υποδηλώνει την τάξη της συνάρτησης *Bessel*. Το ότι είναι  $m = 0$  συνεπάγεται  $F(\varphi) = \{1, \varphi\}$ , που στην παρούσα διάταξη εξειδικεύεται σε  $F = 1$ , ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη περιοδικότητας σε διάταξη χωρίς όρια στο  $\varphi$ . Και η επιλογή  $F = 1$  είναι συμβατή με τη δεδομένη συνθήκη,  $\Phi = UJ_0(hr_T)$ , δηλαδή  $\Phi = UJ_0(hr_T)F(\varphi)$ . Αντίθετα, οριακή συνθήκη με μορφή όπως  $\Phi = UJ_0(hr_T) \sin 2\varphi$  θα οδηγούσε σε αδιέξοδο, αφού θα υπεδεικνύε ταυτόχρονα  $m = 0$ , από την τάξη της *Bessel*, και  $m = 2$ , από το ημίτονο, και θα απαιτούσε αντιμετώπιση με ανάπτυγμα σε σειρά, βλ. παράγρ. 7.4.2.]

Από τις μέχρι τώρα επιλογές, η γενική έκφραση  $\Phi = R_T(r_T)F(\varphi)Z(z)$  έχει εξειδικευθεί σε  $\Phi = J_0(hr_T) \cdot 1 \cdot Z(z)$ , με προσδιοριστέα τη συνάρτηση  $Z(z)$ . Η ακτινική συνάρτηση είναι *Bessel*, και όχι τροποποιημένη, και αυτό σημαίνει πως είναι  $K_z = h^2 > 0$  και πως η συνάρτηση  $Z(z)$  είναι γραμμικός συνδυασμός υπερβολικών ή εκθετικών συναρτήσεων, με όρισμα το γινόμενο  $hz$ . Η παρουσία της ομογενούς οριακής συνθήκης στην κάτω βάση κατευθύνει στην επιλογή  $Z(z) = A \sinh(hz)$ . Τέλος, ο συντελεστής  $A$  προσδιορίζεται από την οριακή συνθήκη στο  $z = L$ , ότι είναι  $J_0(hr_T) A \sinh(hL) = UJ_0(hr_T)$ . Έτσι, τελικά, προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$\Phi = \frac{U}{\sinh(hL)} J_0(hr_T) \sinh(hz), \quad \text{με} \quad h = \frac{j_{0,3}}{a}.$$

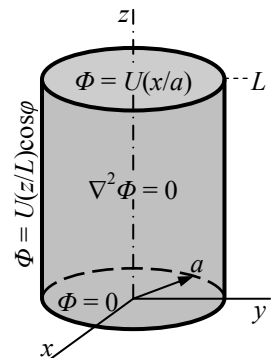
**Παράδειγμα 7.4-4:** Η διάταξη του σχήματος είναι το ένα τρίτο ενός ημιάπειρου κυλίνδρου με ακτίνα  $a$ . Οι παράπλευρες οριακές επιφάνειες στα  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 2\pi/3$  και  $r_T = a$  είναι σε δυναμικό  $\Phi = 0$ , ενώ στη βάση  $z = 0$  είναι  $\Phi = UJ_3(j_{3,1}r_T/a)\sin(3\varphi)$ . Στο εσωτερικό της διάταξης, στο οποίο είναι  $\nabla^2\Phi = 0$ , ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi, z)$ .



**Επίλυση:** Όπως στο προηγούμενο παράδ. 7.4-3 διαπιστώνεται ότι οι οριακές συνθήκες δεν περιέχουν καμία ασυνέχεια, ούτε στις ακμές, επειδή  $\sin(3 \cdot 0) = 0$ ,  $\sin(3 \cdot 2\pi/3) = \sin(2\pi) = 0$ , αλλά και  $J_3(j_{3,n}) = 0$  για οποιαδήποτε ρίζα  $j_{3,n}$  της συνάρτησης  $J_3(\xi)$ . Η οριακή συνθήκη στη βάση  $z = 0$  υποδεικνύει να επιλεγεί  $R_T(r_T) = J_3(hr_T)$  και  $F(\varphi) = \sin(m\varphi)$ , με  $h = j_{3,1}/a$ , τον συντελεστή του  $r_T$ , και  $m = 3$ , τον συντελεστή του  $\varphi$  και την τάξη της συνάρτησης Bessel. Η συνάρτηση Bessel θα συνδυασθεί πάλι με υπερβολικές ή εκθετικές συναρτήσεις. Τώρα, η επιλογή είναι  $Z(z) = A\exp(-hz)$ , ώστε το δυναμικό στο άπειρο να παραμείνει πεπερασμένο, αφού δεν παρέχεται κάποια αντίθετη πληροφορία. Τελικά, από τη συνθήκη στο  $z = 0$  προσδιορίζεται ότι  $A = U$ , επομένως το δυναμικό στο εσωτερικό της διάταξης είναι ίσο με:

$$\Phi = UJ_3(hr_T)\exp(-hz)\sin(3\varphi), \quad \text{με} \quad h = \frac{j_{3,1}}{a}.$$

**Παράδειγμα 7.4-5:** Σε κύλινδρο με ακτίνα  $a$  και μήκος  $L$ , στην παράπλευρη επιφάνεια το δυναμικό είναι ίσο με  $\Phi = U(z/L)\cos\varphi$ , η κάτω βάση του είναι γειωμένη και η πάνω βάση του είναι σε δυναμικό  $\Phi = U(x/a)$ . Ζητείται η κατανομή του δυναμικού μέσα στον κύλινδρο.



**Επίλυση:** Είναι  $x = r_T\cos\varphi$ , επομένως στην πάνω βάση είναι  $\Phi = U(r_T/a)\cos\varphi$ . Με αυτή τη γραφή φαίνεται αμέσως ότι οι οριακές συνθήκες δεν έχουν ασυνέχειες, ούτε στα χείλη των δύο βάσεων. Η παρουσία της αποδεκτής συνάρτησης  $F(\varphi) = \cos\varphi$  υποδεικνύει ότι  $m = 1$ , ενώ της συνάρτησης  $Z(z) = z$  ότι  $K_z = 0$ . Με  $K_z = 0$ , οι αντίστοιχες ακτινικές συναρτήσεις δεν είναι οι Bessel, αλλά οι  $\{r_T^m, r_T^{-m}\}$ . Τόσο από την παρουσία του άξονα  $r_T = 0$  στο εσωτερικό της διάταξης, όσο και από την οριακή συνθήκη στο  $z = L$ , η συνάρτηση  $r_T^{-1}$  απορρίπτεται και επιλέγεται  $R_T(r_T) = A(r_T/a)$ . Από όλες τις συνθήκες προκύπτει  $A = U$ , ώστε τελικά:

$$\Phi(r_T < a, 0 < z < L) = U \frac{z}{L} \frac{r_T}{a} \cos\varphi = U \frac{z}{L} \frac{x}{a}.$$

## 7.4.2 Επίλυση κυλινδρικών διατάξεων

Αντικείμενο της παρούσας παραγράφου είναι κυρίως οι διατάξεις, οι οποίες:

- Έχουν σχήμα πλήρους κυλίνδρου. Δεν έχουν όρια σε καμία τιμή της γωνίας  $\varphi$ , αλλά καλύπτουν ολόκληρο τον κύκλο,  $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$ , και η οποιαδήποτε αφετηρία  $\varphi_0$  δεν σχετίζεται καθόλου με κάποια γεωμετρικά χαρακτηριστικά της διάταξης. Σε τέτοιες διατάξεις, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη περιοδικότητας,  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ , οπότε στις συναρτήσεις  $F(\varphi)$  η σταθερά  $m$  πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός, δηλαδή  $F_m(\varphi) = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$ , με  $m = 1, 2, 3, \dots$ , αλλά και  $m = 0$ , με  $F_{m=0} = 1$ .
- Έχουν απλό σχήμα. Ακτινικά εκτείνονται σε διαστήματα όπως  $r_T < r_{T0}$ , ή  $r_{T0} < r_T < r_{T1}$ , ή  $r_T > r_{T1}$  και μόνο, με τις οριακές θέσεις  $r_{T0}$  και  $r_{T1}$  να είναι σταθερές ποσότητες, και κατά μήκος του άξονα εκτείνονται σε διαστήματα όπως  $z_0 < z < z_1$ , πάλι με σταθερά τα  $z_0$  και  $z_1$ , το πολύ ένα από τα οποία μπορεί να βρίσκεται στο θετικό ή αρνητικό άπειρο. Το απλό σχήμα, επίσης, πρέπει να συνοδεύεται και από απουσία των άλλων στοιχείων που χαρακτηρίζουν μία διάταξη ως σύνθετη, όπως αυτά που περιγράφονται στην παράγρ. 7.2.4. Το εσωτερικό της διάταξης πρέπει να μην περιέχει αίτια, ώστε να είναι παντού  $\nabla^2 \Phi = 0$ , και κάθε τμήμα  $r_T = \text{σταθ.}$  ή  $z = \text{σταθ.}$  της εξωτερικής επιφάνειας πρέπει να έχει ίδιου τύπου οριακή συνθήκη σε όλη την έκτασή του.

Η γενική πορεία επίλυσης μιας τέτοιας διάταξης για τον προσδιορισμό του δυναμικού  $\Phi$  ακολουθεί παρόμοια βήματα με των προηγούμενων διατάξεων.

- Αρχικά, σχηματίζονται από την αρχική διάταξη μέχρι τέσσερα επιμέρους προβλήματα, με το καθένα από αυτά να έχει μία μόνο έδρα με μη ομογενή οριακή συνθήκη. Η μη ομογενής οριακή συνθήκη θα έχει μορφή  $\mathcal{L}\Phi = f(\varphi, z)$ , αν αφορά παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = \text{σταθ.}$ , ή  $\mathcal{L}\Phi = f(\varphi, r_T)$  αν αφορά μία βάση  $z = \text{σταθ.}$
- Με δεδομένες, λόγω της περιοδικότητας, τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi) = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$ , προσδιορίζεται η δεύτερη οικογένεια συναρτήσεων με εναλλασσόμενη συμπεριφορά, οι ημιτονοειδείς  $Z_n(z) = \{\cos(h_n z), \sin(h_n z)\}$  ή οι Bessel  $R_{Tmn}(r_T) = \{J_m(h_{mn} r_T), Y_m(h_{mn} r_T)\}$ , ανάλογα με την περίπτωση, με κριτήριο να ικανοποιούνται ομογενείς οριακές συνθήκες στις αντιμέτωπες έδρες ή να αποφευχθεί απειρισμός του δυναμικού. Η διαδικασία αυτή προσδιορίζει ταυτόχρονα και τις αποδεκτές τιμές των  $h_n$  ή  $h_{mn}$ .
- Σχηματίζονται οι γραμμικοί συνδυασμοί για την τρίτη οικογένεια συνάρτησεων, εκείνων με τη μονότονη συμπεριφορά, των  $R_{Tmn}(r_T) = \{I_m(h_n r_T), K_m(h_n r_T)\}$ , ή των  $Z_{mn}(z) =$

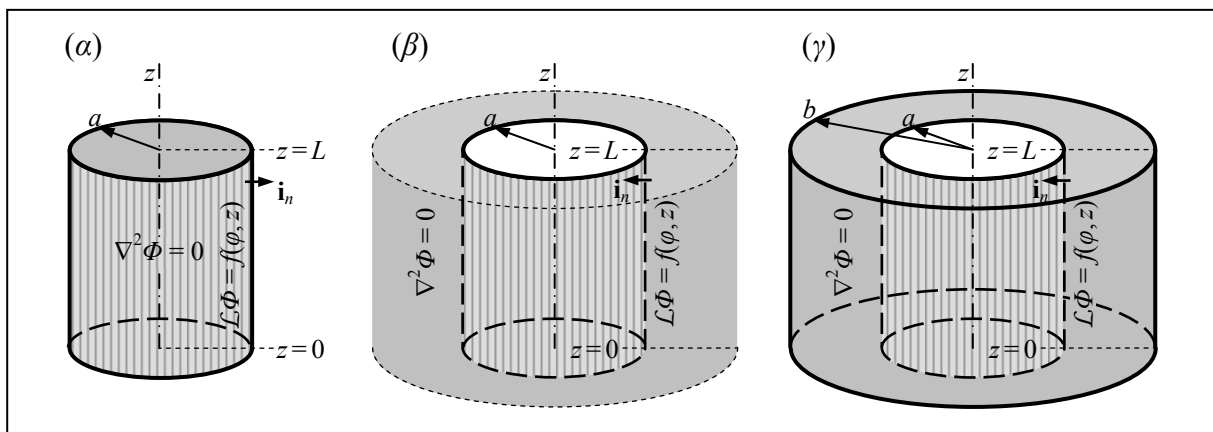
$\{\cosh(h_{mn}z), \sinh(h_{mn}z)\}$ , αντίστοιχα, ώστε να ικανοποιείται η ομογενής συνθήκη στην τρίτη έδρα, ή η απαίτηση να μην απειρίζεται το δυναμικό.

- Το δυναμικό γράφεται ως σειρά, για παράδειγμα ως  $\Phi = \sum_{mn} F_m(\varphi) Z_n(z) R_{Tmn}(r_T)$ , και εισάγεται στη μη ομογενή οριακή συνθήκη  $\mathcal{L}\Phi = f$  της τελευταίας έδρας.
- Εφαρμόζεται σε δύο διαστάσεις η ορθογωνιότητα των δύο οικογενειών συναρτήσεων με εναλλασσόμενη συμπεριφορά, ώστε να προσδιορισθούν οι συντελεστές της σειράς.

Όπως φαίνεται από την παρουσίαση εναλλακτικών ενδεχομένων, η πορεία διαφοροποιείται ελαφρώς, ανάλογα με το αν η μη ομογενής οριακή συνθήκη αναφέρεται σε επιφάνεια  $r_T = \text{σταθ.}$  ή σε έδρα  $z = \text{σταθ.}$  Επίσης, διαφοροποίηση συναντάται και στην ορθογωνιότητα των συναρτήσεων *Bessel* σε σχέση με των ημιτονοειδών. Για τους λόγους αυτούς, η λεπτομερέστερη περιγραφή της πορείας παρουσιάζεται χωριστά για καθένα από τα δύο αυτά ενδεχόμενα.

**Διατάξεις με τη μη ομογενή οριακή συνθήκη σε κυλινδρικό όριο**, ας υποτεθεί στο όριο  $r_T = a$ , όπου είναι  $\mathcal{L}\Phi = f(\varphi, z)$ . Θεωρώντας ότι η διάταξη εκτείνεται στο διάστημα  $0 < z < L$ , με τις παραλλαγές του **Σχήματος 7.4-4**, η επίλυση ακολουθεί την εξής πορεία:

- Οι συναρτήσεις με εναλλασσόμενη συμπεριφορά εξαρτώνται από τις μεταβλητές  $\varphi$  και  $z$ , τις μεταβλητές της συνάρτησης  $f(\varphi, z)$ . Η περιοδικότητα καθορίζει τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi) = A_m \sin(m\varphi)$  και  $B_m \cos(m\varphi)$ , με  $m = 1, 2, 3, \dots$ , καθώς και την  $F_{m=0} = B_0$ , ενώ οι ομογενείς οριακές συνθήκες στις έδρες  $z = 0$  και  $z = L$  ορίζουν τις συναρτήσεις  $Z_n(z) = \{\cos(h_n z), \sin(h_n z)\}$  και τις τιμές των σταθερών χωρισμού  $h_n$ . Οι προδιαγραφές για τις συναρτήσεις  $Z_n(z)$  είναι ταυτόσημες με εκείνες για τις συναρτήσεις σε καρτεσιανές συντεταγμένες, όπως έχει παρουσιασθεί στην παράγραφο 7.2.2 για τη συνάρτηση  $X_n(x)$ , βλ. και **Πίνακα 7.2-1** για τα πιο συνηθισμένα ενδεχόμενα. Για παράδειγμα, αν μία συνθήκη είναι  $\Phi(z=0)$



Σχήμα 7.4-4

= 0, τότε η κατάλληλη συνάρτηση είναι  $Z_n(z) = C_n \sin(h_n z)$ , και αν η δεύτερη συνθήκη είναι  $(\partial\Phi/\partial n)|_{z=L} = 0$ , τότε οι αποδεκτές τιμές είναι με  $h_n L = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots = (n - 1/2)\pi$ .

- Επιλογή συναρτήσεων  $R_T$ : Οι συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  και  $Z_n(z)$ , και οι δύο ημιτονοειδείς, συνοδεύονται από ακτινική συνάρτηση με μονότονη συμπεριφορά, συγκεκριμένα (όταν είναι  $h_n \neq 0$ , ενώ το ενδεχόμενο να είναι  $h_n = 0$  περιγράφεται πιο κάτω) από γραμμικό συνδυασμό με τις τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*,  $R_{Tmn}(r_T) = \{I_m(h_n r_T), K_m(h_n r_T)\}$ . Από τον διπλό δείκτη, ο πρώτος προέρχεται από τις συναρτήσεις  $F_m$  και ορίζει την τάξη των  $I_m$  και  $K_m$ , ενώ ο δεύτερος μεταφέρεται με την παράμετρο  $h_n$ , που υπεισέρχεται στις συναρτήσεις  $Z_n$ . Ο γραμμικός συνδυασμός καθορίζεται με βάση και τις ιδιότητες των τροποποιημένων συναρτήσεων *Bessel*, ανάλογα και με το σχήμα της διάταξης:
  - Αν η διάταξη εκτείνεται στην περιοχή  $r_T < a$ , αν περιέχει δηλαδή τον άξονα, και εκεί δεν υπάρχει ειδικός λόγος που να επιτρέπει ή να επιβάλλει απειρισμό του δυναμικού, τότε η κατάλληλη επιλογή είναι:

$$\Phi|_{r_T=0} \neq \infty: R_{Tmn}(r_T) = I_m(h_n r_T). \quad (7.4-21\alpha)$$

- Αν η διάταξη εκτείνεται μέχρι το άπειρο ( $r_T > a$ ) και δεν υπάρχει λόγος για απειρισμό του δυναμικού, κατάλληλη είναι η επιλογή:

$$\Phi|_{r_T=\infty} \neq \infty: R_{Tmn}(r_T) = K_m(h_n r_T). \quad (7.4-21\beta)$$

- Αν, τέλος, η διάταξη έχει δύο κυλινδρικά όρια στις ακτινικές θέσεις  $r_T = a$  και  $r_T = b$ , με την ομογενή οριακή συνθήκη στο όριο  $r_T = b$ , τότε, για τους δύο πιο συνήθεις τύπους οριακής συνθήκης, *Dirichlet* και *Neumann*, η κατάλληλη επιλογή είναι:

$$\begin{aligned} \Phi|_{r_T=b} = 0: R_{Tmn}(r_T) &= K_m(h_n b)I_m(h_n r_T) - I_m(h_n b)K_m(h_n r_T), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{r_T=b} = 0: R_{Tmn}(r_T) &= K'_m(h_n b)I_m(h_n r_T) - I'_m(h_n b)K_m(h_n r_T). \end{aligned} \quad (7.4-21\gamma\delta)$$

Στο αμέσως επόμενο βήμα οι συναρτήσεις  $R_{Tmn}(r_T)$ , ή οι παράγωγοί τους, πρόκειται να χρησιμοποιηθούν στην ακτινική θέση  $r_T = a$ , όπου ισχύει η μη ομογενής οριακή συνθήκη  $\mathcal{L}\Phi = f(\varphi, z)$ . Έχοντας αυτό κατά νου, είναι συνήθως προτιμότερο οι συναρτήσεις  $R_{Tmn}(r_T)$  να γραφούν έτσι, ώστε εκεί που θα χρησιμοποιηθούν να έχουν την απλούστερη δυνατή τιμή, συγκεκριμένα τη μονάδα. Αυτό επιτυγχάνεται διαιρώντας την κατάλληλη σχέση από τις (7.4-21) με τον εαυτό της ή με την παράγωγό της, υπολογισμένες στο  $r_T = a$ . Έτσι, οι συναρτήσεις  $R_T$  μπορούν εναλλακτικά να γραφούν ως τα πηλικά:

$$\Phi|_{r_T=0} \neq \infty: R_{Tmn}(r_T) = \frac{I_m(h_n r_T)}{I_m(h_n a)}, \quad \text{ή} \quad R_{Tm}(r_T) = \frac{I_m(h_n r_T)}{h_n I'_m(h_n a)}, \quad (7.4-22\alpha)$$

$$\Phi|_{r_T=\infty} \neq \infty: R_{Tmn}(r_T) = \frac{K_m(h_n r_T)}{K_m(h_n a)}, \quad \text{ή} \quad R_{Tm}(r_T) = \frac{K_m(h_n r_T)}{h_n K'_m(h_n a)}, \quad (7.4-22\beta)$$

$$\Phi|_{r_T=b} = 0: R_{Tmn}(r_T) = \frac{K_m(h_n b)I_m(h_n r_T) - I_m(h_n b)K_m(h_n r_T)}{K_m(h_n b)I_m(h_n a) - I_m(h_n b)K_m(h_n a)}, \quad (7.4-22\gamma)$$

$$\text{ή} \quad R_{Tmn}(r_T) = \frac{1}{h_n} \frac{K_m(h_n b)I_m(h_n r_T) - I_m(h_n b)K_m(h_n r_T)}{K_m(h_n b)I'_m(h_n a) - I_m(h_n b)K'_m(h_n a)},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{r_T=b} = 0: R_{Tmn}(r_T) = \frac{K'_m(h_n b)I_m(h_n r_T) - I'_m(h_n b)K_m(h_n r_T)}{K'_m(h_n b)I_m(h_n a) - I'_m(h_n b)K_m(h_n a)}, \quad (7.4-22\delta)$$

$$\text{ή} \quad R_{Tmn}(r_T) = \frac{1}{h_n} \frac{K'_m(h_n b)I_m(h_n r_T) - I'_m(h_n b)K_m(h_n r_T)}{K'_m(h_n b)I'_m(h_n a) - I'_m(h_n b)K'_m(h_n a)}.$$

Όλα τα προηγούμενα για τις συναρτήσεις  $R_{Tmn}$  ισχύουν όταν είναι  $h_n \neq 0$ . Υπάρχει ένα ενδεχόμενο να είναι μία από τις σταθερές  $h_n$ , συγκεκριμένα η πρώτη, ίση με μηδέν. Αυτό συμβαίνει, όταν και στις δύο βάσεις  $z = 0$  και  $z = L$ , η οριακή συνθήκη είναι τύπου *Neumann*,  $\partial\Phi/\partial n = \mp\partial\Phi/\partial z = 0$ , όταν δηλαδή συναντάται το τελευταίο από τα ενδεχόμενα του **Πίνακα 7.2-1**. Τότε, διαφοροποιώντας ελαφρώς την αρίθμηση των  $n$  σε σχέση με του **Πίνακα**, η πρώτη από τις συναρτήσεις  $Z_n(z)$  είναι η  $Z_0(z) = 1$ , που αντιστοιχεί σε  $h_0 = 0$ , δηλαδή  $K_z = 0$ , με συνέπεια οι ακτινικές συναρτήσεις να μην εκφράζονται με τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*, αλλά να είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί:

$$h_0 = 0, \quad m = 0 \Rightarrow R_{T00}(r_T) = \{1, \ln(r_T/r_{T0})\},$$

$$h_0 = 0, \quad m \neq 0 \Rightarrow R_{Tm0}(r_T) = \{r_T^m, r_T^{-m}\}. \quad (7.4-23)$$

Οι εκφράσεις με την επιθυμητή συμπεριφορά στο μηδέν ή στο άπειρο, ή αυτές των οποίων μηδενίζεται η τιμή ή η παράγωγός στην ακτινική θέση  $r_T = b$ , έχουν παρουσιασθεί εκτενώς στην παράγραφο 7.3. Επίσης, διαιρώντας με την κατάλληλη σταθερή ποσότητα, εύκολα σχηματίζονται οι γραμμικοί συνδυασμοί με τιμή ή παράγωγο ίση με τη μονάδα στο  $r_T = a$ , εκεί όπου θα χρησιμοποιηθούν στο επόμενο βήμα, όπως έχει γίνει και στις σχέσεις (7.4-22). Είναι υπερβολικό να παρουσιασθούν με λεπτομέρεια όλα τα ενδεχόμενα. Ως ενδεικτικό παράδειγμα ας αναφερθεί, μόνο, ότι η συνάρτηση (με  $h_0 = 0$  και  $m \neq 0$ ), η οποία έχει μηδενική παράγωγο στο  $r_T = b$  και μοναδιαία τιμή στο  $r_T = a$  είναι ο γραμμικός συνδυασμός  $R_{Tm0}(r_T) = [(r_T/b)^m + (b/r_T)^m]/[(a/b)^m + (b/a)^m]$ .



- Εφαρμογή μη ομογενούς οριακής συνθήκης: Με τις μέχρι στιγμής επιλογές για τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$ ,  $Z_n(z)$  και  $R_{Tmn}(r_T)$ , το δυναμικό γράφεται ως:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{m,n} R_{Tmn}(r_T) F_m(\varphi) Z_n(z), \quad (7.4-24)$$

και οι μοναδικές ποσότητες που δεν έχουν συγκεκριμένες τιμές είναι αφενός οι συντελεστές  $A_m$  και  $B_m$  των συναρτήσεων  $F_m(\varphi) = A_m \sin(m\varphi)$  και  $B_m \cos(m\varphi)$ , με  $m = 1, 2, 3, \dots$ , καθώς και της  $F_{m=0} = B_0$ , αφετέρου οι συντελεστές  $C_n$  των συναρτήσεων  $Z_n(z)$ . Αυτές οι ποσότητες θα προσδιορισθούν από τη μη ομογενή οριακή συνθήκη:

$$\mathcal{L}\Phi = f(\varphi, z), \quad (7.4-25)$$

η οποία υποτίθεται ότι αναφέρεται στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a$ . Ο τελεστής  $\mathcal{L}\Phi$  που δρα στο δυναμικό είναι ίσος με  $\Phi$  σε συνθήκη *Dirichlet*, με  $\partial\Phi/\partial n$  σε συνθήκη *Neumann*, και με  $\Phi + \ell\partial\Phi/\partial n$  στη σπάνια γενική συνθήκη. Από τους τρεις όρους κάθε γινομένου στην έκφραση (7.4-24) για το δυναμικό, ο τελεστής αυτός δρα μόνο στον όρο  $R_{Tmn}$ . Συγκεκριμένα, τον θέτει ίσο με  $R_{Tmn}(a)$ , όταν  $\mathcal{L}\Phi = \Phi$ , και με  $\mp R'_{Tmn}(a)$ , όταν  $\mathcal{L}\Phi = \partial\Phi/\partial n$ , με το πρόσημο να εξαρτάται από το κατά πόσο η περιοχή που ενδιαφέρει εκτείνεται σε ακτίνες μεγαλύτερες ή μικρότερες του  $a$ , αν δηλαδή είναι  $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_T$  ή  $\mathbf{i}_n = +\mathbf{i}_T$ , βλ. και **Σχήμα 7.4-4**. Έτσι, η συνθήκη (7.4-25) γράφεται:

$$\sum_{m,n} [\mathcal{L}R_{Tmn}]|_{r_T=a} F_m(\varphi) Z_n(z) = f(\varphi, z). \quad (7.4-26)$$

- Αξιοποίηση ορθογωνιότητας: Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές με κάποιο  $\sin(m\varphi)$  ή κάποιο  $\cos(m\varphi)$ , καθώς και με κάποιο  $Z_n(z)$ , και ολοκληρώνοντας αντίστοιχα στα διαστήματα  $0 < \varphi < 2\pi$  και  $0 < z < L$ , στα οποία οι συναρτήσεις αυτές είναι ορθογώνιες, προσδιορίζονται οι συντελεστές (ακριβέστερα, τα γινόμενά τους, που αυτά μόνο ενδιαφέρουν, αφού το δυναμικό εκφράζεται με το γινόμενο  $F_m Z_n$ ):

$$A_m C_n \frac{\pi L}{2} (1 + \delta_{n,0}) [\mathcal{L}R_{Tmn}]|_{r_T=a} = \int_0^L dz Z_n(z) \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) f(\varphi, z), \quad (7.4-27\alpha)$$

$$B_m C_n \frac{\pi L}{2} (1 + \delta_{m,0})(1 + \delta_{n,0}) [\mathcal{L}R_{Tmn}]|_{r_T=a} = \int_0^L dz Z_n(z) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) f(\varphi, z). \quad (7.4-27\beta)$$

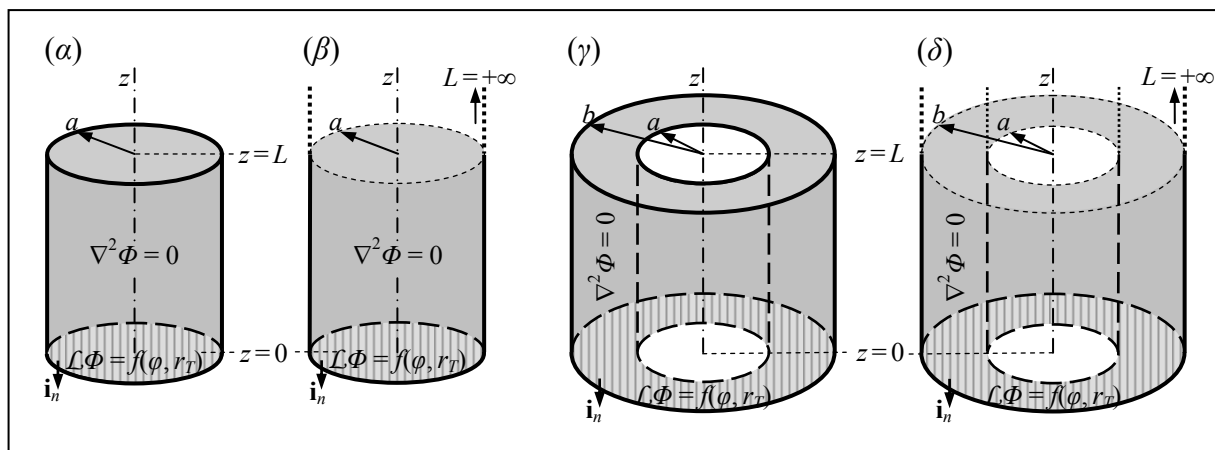
Στις σχέσεις αυτές, ο συντελεστής  $(1 + \delta_{n,0})$  αφορά το ενδεχόμενο να περιλαμβάνεται μεταξύ των συναρτήσεων  $Z_n(z)$  και η  $Z_0 = C_0 \cos(h_0 z) = C_0$ , με  $h_0 = 0$ , που εμφανίζεται όταν συνθήκη τύπου *Neumann* χαρακτηρίζει και τις δύο έδρες  $z = 0$  και  $z = L$ .

**Διατάξεις με τη μη ομογενή οριακή συνθήκη σε επίπεδο όριο.** Θεωρώντας ότι στο δίσκο  $z = 0$  είναι  $\mathcal{L}\Phi = f(\varphi, r_T)$ , βλ. **Σχήμα 7.4-5**, η πορεία επίλυσης είναι η ακόλουθη:

- Οι συναρτήσεις με εναλλασσόμενη συμπεριφορά, όπως υποδεικνύεται από τις δύο μεταβλητές της συνάρτησης  $f(\varphi, r_T)$ , θα είναι οι συναρτήσεις  $F(\varphi)$  και  $R(r_T)$ . Η πρώτη μεταβλητή στη συνάρτηση  $f$  καλύπτεται από συναρτήσεις  $F_m$  που πάλι είναι τα ημίτονα και συνημίτονα,  $F_m(\varphi) = A_m \sin(m\varphi)$  και  $B_m \cos(m\varphi)$ , με  $m = 1, 2, 3, \dots$ , καθώς και η συνάρτηση  $F_{m=0} = B_0$ , το συνημίτονο με  $m = 0$ .

Οι συναρτήσεις της δεύτερης οικογένειας πρέπει να εξαρτώνται από την ακτίνα  $r_T$ , την άλλη μεταβλητή στη συνάρτηση  $f$ , και να έχουν εναλλασσόμενη συμπεριφορά, όπως οι συναρτήσεις  $\sin(m\varphi)$  και  $\cos(m\varphi)$  έχουν εναλλασσόμενη εξάρτηση από τη γωνία  $\varphi$ . Συνεπώς, κατάλληλοι είναι οι γραμμικοί συνδυασμοί συναρτήσεων *Bessel*,  $R_T(r_T) = \{J_m(hr_T), Y_m(hr_T)\}$ , με τάξη  $m$  που είναι ακέραιη, επειδή συνδέονται με τις συναρτήσεις  $F_m$ , που είναι περιοδικές, και με κατάλληλες τιμές των  $h$ . Η συγκεκριμένη επιλογή εξαρτάται από το σχήμα της διάταξης, από το αν είναι γνήσια κυλινδρική ή ομοαξονική.

- Αν η διάταξη εκτείνεται στο  $r_T < a$ , όπως στο **Σχήμα 7.4-5αβ**, τότε περιλαμβάνει τον άξονα  $r_T = 0$  και για να αποφευχθεί ο απειρισμός  $Y_m(\xi=0) = \infty$  η αναγκαστική επιλογή είναι  $R_T(r_T) = CJ_m(hr_T)$ . Ακολουθώντας, από την ομογενή συνθήκη στο όριο  $r_T = a$  προσδιορίζονται οι αποδεκτές τιμές για τη σταθερά  $h$ . Αν η συνθήκη είναι  $\Phi|_{r_T=a} = 0$ , τότε είναι  $ha = j_{m,n}$ , ενώ αν η συνθήκη είναι  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=a} = 0$ , τότε είναι  $ha = j'_{m,n}$  όπου  $j_{m,n}$  και  $j'_{m,n}$  είναι οι  $n$ -στές ρίζες της συνάρτησης  $J_m$  και της παραγώγου της. Δηλαδή, η σταθερά  $h$  ανήκει σε διπαραμετρική οικογένεια, με στοιχεία  $h_{mn}$ , όπου  $m$  είναι η τάξη της συνάρτησης *Bessel* και  $n$  η τάξη του μηδενισμού της συνάρτησης ή της παραγώγου στο άκρο  $r_T = a$ . Η διπαραμετρική αυτή φυσιογνωμία μεταφέρεται και στις



Σχήμα 7.4-5

συναρτήσεις  $R_T \rightarrow R_{Tmn}$ , και στους συντελεστές  $C \rightarrow C_{mn}$  που υπεισέρχονται. Συγκεκριμένα, όταν ο άξονας  $r_T = 0$  ανήκει στο εσωτερικό της διάταξης, τότε:

$$\Phi|_{r_T=0} \neq \infty \Rightarrow R_{Tmn}(r_T) = C_{mn} J_m(h_{mn} r_T), \quad (7.4-28)$$

όπου οι σταθερές  $h_{mn}$  προσδιορίζονται από την οριακή συνθήκη στο άκρο  $r_T = a$ :

$$\begin{aligned} \Phi|_{r_T=a} = 0 &\Rightarrow R_{Tmn}|_{r_T=a} = 0 \Rightarrow h_{mn} = \frac{j_{m,n}}{a}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{r_T=a} = 0 &\Rightarrow \frac{dR_{Tmn}}{dr_T}|_{r_T=a} = 0 \Rightarrow h_{mn} = \frac{j'_{m,n}}{a}. \end{aligned} \quad (7.4-29)$$

Οι σταθερές  $h_{mn}$  είναι θετικές ποσότητες. Η μόνη εξαίρεση είναι όταν  $m = 0$  και η οριακή συνθήκη στο  $r_T = a$  είναι τύπου *Neumann*. Τότε, ο πρώτος μηδενισμός της παραγώγου  $(d/d\xi)J_0(\xi)$  εμφανίζεται στο  $\xi = j'_{0,1} = 0$ , με αντίστοιχη την τιμή  $h_{0,1} = 0$ , και η συνάρτηση  $R_{T0,1} = C_{0,1}J_0(0) = C_{0,1}$  είναι ανεξάρτητη από το  $r_T$ . Αυτή η σταθερή συνάρτηση  $R_{T0,1}$  αντιστοιχεί με τη συνάρτηση  $F_{m=0} = B_0 = \text{σταθ.}$

- ο Αν η διάταξη έχει σχήμα κυλινδρικού κελύφους, όπως όταν εκτείνεται στο διάστημα  $a < r_T < b$  (βλ. **Σχήμα 7.4-5γδ**), τότε δεν υπάρχει λόγος να αποκλεισθεί η συνάρτηση  $Y_m$  από το γραμμικό συνδυασμό. Με αφετηρία την οριακή συνθήκη στην ακτινική θέση  $r_T = a$ , μπορεί να σχηματισθεί ο κατάλληλος γραμμικός συνδυασμός, με μόνο έναν προσδιοριστέο συντελεστή  $C$ :

$$\begin{aligned} \Phi|_{r_T=a} = 0 &\Rightarrow R_T(r_T) = C[Y_m(ha)J_m(hr_T) - J_m(ha)Y_m(hr_T)], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{r_T=a} = 0 &\Rightarrow R_T(r_T) = C[Y'_m(ha)J_m(hr_T) - J'_m(ha)Y_m(hr_T)], \end{aligned} \quad (7.4-30)$$

Οι εκφράσεις (7.4-30) είναι αποδεκτές ως συναρτήσεις  $R_T(r_T)$ , επειδή είναι γραμμικοί συνδυασμοί συναρτήσεων *Bessel* και η τιμή και αντίστοιχα η παράγωγός τους μηδενίζεται στην ακτινική θέση  $r_T = a$ , οποιαδήποτε και αν είναι η τιμή της παραμέτρου  $h$ . Επιπλέον, οι εκφράσεις αυτές, ως συναρτήσεις του γινομένου  $\xi = hr_T$ , έχουν την εναλλασσόμενη συμπεριφορά των συναρτήσεων *Bessel*, με διαδοχικούς μηδενισμούς της τιμής και της παραγώγου τους, σε τιμές του  $\xi$  διαταγμένες όπως στη σχέση (7.4-14). Ανάλογα με τη μορφή της οριακής συνθήκης στο άλλο άκρο  $r_T = b$ , κάθε τέτοιος μηδενισμός αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή του γινομένου  $hb$ , συνεπώς και της σταθεράς  $h$ . Σε αναλογία με το συμβολισμό  $j_{m,n}$  για την  $n$ -στή ρίζα της συνάρτησης  $J_m$ , οι

τιμές του  $h$  θα γραφούν ως  $h_{mn}$ , εννοώντας την  $n$ -στή τιμή του  $h$ , που μηδενίζει την τιμή ή την παράγωγο της συνάρτησης  $R_T$  μεταξύ των (7.4-30α) ή (7.4-30β), ανάλογα με το είδος της οριακής συνθήκης που πρέπει να ικανοποιείται σε καθένα από τα δύο άκρα. Για να προβληθεί ότι οι συναρτήσεις  $R_T(r_T)$  είναι διπαραμετρικές, με  $m$  την τάξη των συναρτήσεων *Bessel* και  $n$  την τάξη του μηδενισμού στο άλλο άκρο, θα γραφούν ως  $R_{Tmn}$ , και ο συντελεστής ως  $C_{mn}$ , δηλαδή:

$$\begin{aligned} \Phi|_{r_T=a} = 0 &\Rightarrow R_{Tmn}(r_T) = C_{mn} [Y_m(h_{mn}a)J_m(h_{mn}r_T) - J_m(h_{mn}a)Y_m(h_{mn}r_T)], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{r_T=a} = 0 &\Rightarrow R_{Tmn}(r_T) = C_{mn} [Y'_m(h_{mn}a)J_m(h_{mn}r_T) - J'_m(h_{mn}a)Y_m(h_{mn}r_T)], \end{aligned} \quad (7.4-31)$$

με τις σταθερές  $h_{mn}$  να προσδιορίζονται, όπως έχει ήδη αναφερθεί, από την οριακή συνθήκη στο άλλο άκρο:

$$\begin{aligned} \Phi|_{r_T=b} = 0 &\Rightarrow R_{Tmn}|_{r_T=b} = 0 \Rightarrow h_{mn} = \dots, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{r_T=b} = 0 &\Rightarrow \frac{dR_{Tmn}}{dr_T} \Big|_{r_T=b} = 0 \Rightarrow h_{mn} = \dots \end{aligned} \quad (7.4-32)$$

Οι σταθερές  $h_{mn}$  που εμφανίζονται σε αυτή την περίπτωση είναι πάντοτε μη μηδενικές.

- Συναρτήσεις με μονότονη συμπεριφορά: Με δεδομένο ότι οι συναρτήσεις  $R_T$  είναι *Bessel*, οι συναρτήσεις  $Z(z)$  πρέπει να έχουν υπερβολική ή εκθετική εξάρτηση από το γινόμενο  $hz$ , με τις δεδομένες αποδεκτές τιμές  $h_{mn}$ , οπότε και αυτές οι συναρτήσεις είναι διπαραμετρικές,  $Z_{mn}(z)$ . Η συγκεκριμένη μορφή των συναρτήσεων  $Z_{mn}(z)$  καθορίζεται από την τρίτη ομογενή οριακή συνθήκη, εκείνη στο δίσκο  $z = L$ . Ανάλογα με την περίπτωση, συμπεριλαμβάνοντας και τα ενδεχόμενα να είναι  $L = \pm\infty$ , είναι:

$$\begin{aligned} \Phi|_{z=L} = 0 &\Rightarrow Z_{mn}(z) = \sinh[h_{mn}(z-L)], \quad \text{ή } Z_{mn}(z) = \frac{\sinh[h_{mn}(L-z)]}{\sinh(h_{mn}L)}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{z=L} = 0 &\Rightarrow Z_{mn}(z) = \cosh[h_{mn}(z-L)], \quad \text{ή } Z_{mn}(z) = \frac{\cosh[h_{mn}(L-z)]}{\cosh(h_{mn}L)}, \\ \Phi(z = +\infty) \neq 0 &\Rightarrow Z_{mn}(z) = \exp(-h_{mn}z), \\ \Phi(z = -\infty) \neq 0 &\Rightarrow Z_{mn}(z) = \exp(+h_{mn}z). \end{aligned} \quad (7.4-33)$$

Ηεναλλακτική έκφραση για τις συναρτήσεις  $Z_{mn}(z)$  στα δύο πρώτα ενδεχόμενα έχει το χαρακτηριστικό, ότι εκεί όπου θα χρησιμοποιηθούν στο επόμενο βήμα, στο  $z = 0$ , οι

συναρτήσεις έχουν την τιμή  $Z_{mn}(z=0) = 1$ , τιμή που είναι εύχρηστη, αν η οριακή συνθήκη στο  $z = 0$  αφορά την τιμή του δυναμικού. Αν η οριακή συνθήκη στο  $z = 0$  αναφέρεται στην κάθετη παράγωγο του δυναμικού, τότε οι εκφράσεις που εξυπηρετούν διαφοροποιούνται με προφανή τρόπο ως προς την ποσότητα στον παρονομαστή.

Στην ειδική περίπτωση, όταν η επίλυση της εξίσωσης του *Laplace* αφορά ολόκληρη την περιοχή  $r_T < a$ , συμπεριλαμβανόμενου και του άξονα, και η συνθήκη στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a$  είναι  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , τότε στις αποδεκτές τιμές για τα  $h_{mn}$  συμπεριλαμβάνεται και η τιμή  $h_{0,1} = 0$ , στην οποία αντιστοιχούν γραμμικοί συνδυασμοί  $Z_{0,1}(z) = \{1, z\}$ , και όχι υπερβολικές συναρτήσεις. Τότε, αντί των εκφράσεων (7.4-33) κατάλληλες ως συναρτήσεις  $Z_{0,1}(z)$  είναι οι  $Z_{0,1}(z) = (z-L)$ , ή  $Z_{0,1}(z) = (1-z/L)$ , όταν απαιτείται  $\Phi|_{z=L} = 0$ , και  $Z_{0,1}(z) = 1$  στις άλλες τρεις περιπτώσεις.

- Εφαρμογή μη ομογενούς οριακής συνθήκης: Με τις μέχρι τώρα επιλογές για τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$ ,  $R_{Tmn}(r_T)$  και  $Z_{mn}(z)$ , αν το δυναμικό εκφραστεί ως:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{m,n} R_{Tmn}(r_T) F_m(\varphi) Z_{mn}(z), \quad (7.4-34)$$

τότε από το πρόβλημα οριακών τιμών ικανοποιείται η διαφορική εξίσωση του *Laplace* και όλες οι ομογενείς οριακές συνθήκες. Απομένει να προσδιορισθούν οι συντελεστές, τόσο οι  $A_m$  και  $B_m$  των συναρτήσεων  $F_{m \neq 0}(\varphi) = A_m \sin(m\varphi)$  και  $B_m \cos(m\varphi)$  και  $F_{m=0} = B_0$ , όσο και οι  $C_{mn}$  των συναρτήσεων  $R_{Tmn}(r_T)$ . Αυτό θα γίνει αξιοποιώντας τη μη ομογενή οριακή συνθήκη, που έχει υποτεθεί ότι αναφέρεται στη βάση  $z = 0$ , με γενική μορφή:

$$\mathcal{L}\Phi = f(\varphi, r_T). \quad (7.4-35)$$

Ο τελεστής  $\mathcal{L}\Phi$  δρα μόνο στον όρο  $Z_{mn}$ . Τον θέτει ίσο με  $Z_{mn}(0)$ , όταν είναι  $\mathcal{L}\Phi = \Phi$ , και ίσο με  $-Z'_{mn}(0)$ , όταν  $\mathcal{L}\Phi = \partial\Phi/\partial n$  και στο  $z = 0$  βρίσκεται η κάτω βάση, με  $\mathbf{i}_n = -\mathbf{i}_z$ , όπως στο **Σχήμα 7.4-5**. Συνεπώς, η οριακή συνθήκη γράφεται:

$$\sum_{m,n} [\mathcal{L}Z_{mn}]|_{z=0} F_m(\varphi) R_{Tmn}(r_T) = f(\varphi, r_T). \quad (7.4-36)$$

- Ορθογωνιότητα συναρτήσεων  $F_m(\varphi)$ : Η σχέση (7.4-36) δηλώνει την ισότητα μεταξύ δύο συναρτήσεων δύο μεταβλητών, από τις οποίες η μία εκφράζεται ως διπλό άθροισμα. Η άθροιση ως προς  $m$  μπορεί να απομακρυνθεί, αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα των ημιτόνων και συνημιτόνων στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ . Η ορθογωνιότητα αυτή είναι, ήδη, οικεία

στον αναγνώστη. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο πλευρές με κάποιο  $\sin(m\varphi)$ , ή με κάποιο  $\cos(m\varphi)$ , και ολοκληρώνοντας σε οποιοδήποτε διάστημα με πλάτος  $2\pi$ , όπου αυτές οι συναρτήσεις είναι ορθογώνιες, όπως στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ , προκύπτουν οι ισότητες:

$$\sum_n [\mathcal{L}Z_{mn}]|_{z=0} \pi A_m R_{Tmn}(r_T) = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) f(\varphi, r_T), \quad (7.4-37\alpha)$$

$$\sum_n [\mathcal{L}Z_{mn}]|_{z=0} \pi (1 + \delta_{m,0}) B_m R_{Tmn}(r_T) = \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) f(\varphi, r_T). \quad (7.4-37\beta)$$

- Ορθογωνιότητα συναρτήσεων  $R_{Tmn}(r_T)$ : Για κάθε τιμή του  $m$  οι σχέσεις (7.4-37) περιγράφουν την ισότητα δύο συναρτήσεων της ακτίνας  $r_T$ , από τις οποίες η μία εκφράζεται ως άθροισμα ως προς  $n$ . Και αυτή η άθροιση μπορεί να απομακρυνθεί, αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα που χαρακτηρίζει τις συναρτήσεις *Bessel* και τους γραμμικούς συνδυασμούς  $R_{Tmn}$ . Συγκεκριμένα, είτε οι συναρτήσεις  $R_{Tmn}$  είναι ανάλογες των  $J_m(h_{mn}r_T)$ , όπως στη σχέση (7.4-28), είτε είναι γραμμικοί συνδυασμοί, όπως στις σχέσεις (7.4-31), ισχύει:

$$\int_a^b dr_T r_T R_{Tmn}(r_T) R_{Tm'n'}(r_T) = 0 \quad (n' \neq n),$$

$$\int_a^b dr_T r_T R_{Tmn}^2(r_T) = \left\{ \frac{1}{2h_{mn}^2} \left[ r_T^2 \left( \frac{dR_{Tmn}}{dr_T} \right)^2 + (h_{mn}^2 r_T^2 - m^2) R_{Tmn}^2 \right] \right\}_{r_T=a}^{r_T=b} = C_{mn}^2 P_{mn}. \quad (7.4-38)$$

Οι σχέσεις αυτές αφορούν συναρτήσεις  $R_{Tmn}$  που περιγράφουν την εξάρτηση του δυναμικού από τη ακτίνα  $r_T$  στο διάστημα  $a < r_T < b$ , με την εξειδίκευση  $a = 0$ , όταν στην περιοχή που εξετάζεται περιλαμβάνεται και ο άξονας.

- ο Η πρώτη σχέση παρουσιάζει την ορθογωνιότητα συναρτήσεων με διαφορετικά  $n$ , (αλλά το ίδιο  $m$ , με συνάρτηση βάρους την ακτίνα  $r_T$ . Στην πιο οικεία περίπτωση με τις ημιτονοειδείς συναρτήσεις, η συνάρτηση βάρους είναι ίση με τη μονάδα. Μη μοναδιαία συνάρτηση βάρους, ίση με  $1/r_T$ , έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 7.3.3 για συναρτήσεις με μορφή  $\sin\{m \ln(r_T/a) + \zeta_m\}$ . Επισημαίνεται ότι η ορθογωνιότητα (7.4-38) αναφέρεται στην τάξη  $n$  της ρίζας  $h_{mn}$ , και όχι στην τάξη  $m$  των συναρτήσεων *Bessel*. Η τάξη  $m$  καλύπτεται από την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $F_m$ .
- ο Η δεύτερη σχέση δίνει το μη μηδενικό αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης, όταν  $n' = n$ . Στη δεξιά πλευρά εμφανίζονται τέσσερις όροι, δύο στο  $r_T = a$  και δύο στο  $r_T = b$ . Όμως, λόγω των ομογενών οριακών συνθηκών (του μηδενισμού της τιμής ή της παρα-

γώγου), σε κάθε άκρο μόνο ένας όρος είναι μη μηδενικός. Αν η διάταξη περιλαμβάνει τον άξονα (αν είναι  $a = 0$ ), η συνεισφορά του κάτω άκρου είναι συνολικά μηδενική. Αυτό συμβαίνει, επειδή αφενός  $r_T = a = 0$ , αφετέρου είτε  $J_{m \neq 0}(\zeta = 0) = 0$ , είτε  $m = 0$ .

- ο Οι συναρτήσεις  $R_{Tmn}$ , όπως έχουν ορισθεί είτε στη σχέση (7.4-28), είτε στις σχέσεις (7.4-31), αποτελούνται από ένα σύμπλεγμα συναρτήσεων *Bessel* που πολλαπλασιάζεται με ένα συντελεστή  $C_{mn}$ . Συνεπώς, το ολοκλήρωμα (7.4-38β) μπορεί να γραφεί ως γινόμενο του τετραγώνου  $C_{mn}^2$  του συντελεστή και μιας ποσότητας  $P_{mn}(a, b, h_{mn})$ , που εξαρτάται μόνο από τις τιμές των συναρτήσεων *Bessel* στα άκρα  $a$  και  $b$  του διαστήματος, καθώς και την τιμή της σταθεράς  $h_{mn}$ .

Οι ιδιότητες ορθογωνιότητας των συναρτήσεων *Bessel* αξιοποιούνται, πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (7.4-37) με  $r_T R_{Tmn'}(r_T)/C_{mn'}$ , όπου  $r_T$  είναι η συνάρτηση βάρους και  $R_{Tmn'}$  το τυχαίο μέλος των ακτινικών συναρτήσεων, και ολοκληρώνοντας στο διάστημα ορθογωνιότητας,  $a < r_T < b$ , αυτών των συναρτήσεων. Κατά την ολοκλήρωση, από το άθροισμα ως προς  $n$  επιβιώνει μόνο ο όρος με  $n = n'$ , οπότε, αντικαθιστώντας  $n' \rightarrow n$  για να απλουστευθεί η παράσταση, προκύπτει:

$$[\mathcal{L} Z_{mn}]|_{z=0} \pi A_m C_{mn} P_{mn} = \frac{1}{C_{mn}} \int_a^b dr_T r_T R_{Tmn}(r_T) \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) f(\varphi, r_T), \quad (7.4-39\alpha)$$

$$[\mathcal{L} Z_{mn}]|_{z=0} \pi (1 + \delta_{m,0}) B_m C_{mn} P_{mn} = \frac{1}{C_{mn}} \int_a^b dr_T r_T R_{Tmn}(r_T) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) f(\varphi, r_T). \quad (7.4-39\beta)$$

Στη δεξιά πλευρά αυτών των σχέσεων, με την παρουσία του παρονομαστή  $C_{mn}$  απαλείφεται η ίδια ποσότητα από την έκφραση του  $R_{Tmn}$ . Στην πραγματικότητα, ο συντελεστής  $C_{mn}$  υπάρχει μόνο στην αριστερή πλευρά, ως συστατικό των γινομένων  $A_m C_{mn}$  και  $B_m C_{mn}$ . Από τις σχέσεις αυτές προσδιορίζονται οι τιμές αυτών των γινομένων για κάθε  $m$  και  $n$ . Άλλωστε, το άθροισμα (7.4-34) περιέχει όρους όπως ο  $A_m \sin(m\varphi) C_{mn} J_m(h_{mn} r_T)$ , οπότε ενδιαφέρει μόνο η τιμή του γινομένου  $A_m C_{mn}$  και όχι οι επιμέρους τιμές των  $A_m$  και  $C_{mn}$ .

Επομένως, σε διατάξεις με την μη ομογενή συνθήκη σε επίπεδο όριο το δυναμικό  $\Phi$  έχει προσδιορισθεί πλήρως ως το άθροισμα (7.4-34), με τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$ ,  $R_{Tmn}(r_T)$  και  $Z_{mn}(z)$  που έχουν σημειωθεί στις προηγούμενες σχέσεις.

Οι παραπάνω ενέργειες εφαρμόζονται στα *παραδ.* 7.4-6 έως 7.4-11, και γενικεύονται ελαφρώς στα *παραδ.* 7.4-12 και 7.4-13.

**Διατάξεις που εκτείνονται μέχρι το άπειρο:** Στις δύο βασικές διατάξεις, που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα, περιλαμβάνονται τα ενδεχόμενα:

- (α) Η διάταξη να εκτείνεται μέχρι το ακτινικό άπειρο ( $r_T = \infty$ ) και η μη ομογενής οριακή συνθήκη να εφαρμόζεται στο καμπύλο όριο  $r_T = a$ , όπως είναι η διάταξη (β) του **Σχήματος 7.4-4**. Αυτό το ενδεχόμενο καλύπτεται χρησιμοποιώντας στις ακτινικές συναρτήσεις  $R_{Tmn}$  τις τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel* β' είδους  $K_m(h_n r_T)$ , όπως στις σχέσεις (7.4-21β) και (7.4-22β).
- (β) Η διάταξη να εκτείνεται μέχρι το άπειρο κατά μήκος του άξονα ( $z = +\infty$  ή  $z = -\infty$ ) και η μη ομογενής οριακή συνθήκη να αφορά το επίπεδο όριο  $z = 0$ , ή γενικότερα,  $z = \text{σταθ.}$ , όπως στις διατάξεις (β) και (δ) του **Σχήματος 7.4-5**. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η επιθυμητή συμπεριφορά στο άπειρο αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας τις εκθετικές συναρτήσεις  $Z_{mn} = \exp(\mp h_{mn} z)$  με το κατάλληλο πρόσημο στον εκθέτη, βλ. σχέσεις (7.4-33γδ).

Δύο επιπρόσθετα ενδεχόμενα, αυτά που αναφέρονται στη συνέχεια, αντιμετωπίζονται με ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς. Η μελέτη τέτοιων διατάξεων αποκλίνει από τον προσανατολισμό του παρόντος κειμένου, γι' αυτό η σχετική παρουσίαση γίνεται με γενικούς όρους.

- (γ) Όταν η διάταξη εκτείνεται μέχρι το αξονικό άπειρο, αλλά η μη ομογενής οριακή συνθήκη αφορά ένα καμπύλο όριο  $r_T = a$ , τότε η ομογενής οριακή συνθήκη στο πεπερασμένο όριο (π.χ. στο  $z = 0$ ) καθορίζει τους γραμμικούς συνδυασμούς  $Z(z) = \{\cos(hz), \sin(hz)\}$ , όμως η σταθερά χωρισμού  $h$  δεν παίρνει διακριτές τιμές  $h_n$ , καθώς είναι  $L \rightarrow \infty$  για το μήκος, αλλά ανήκει σε συνεχές φάσμα. Το κατάλληλο εργαλείο δεν είναι η γενικευμένη σειρά *Fourier*, αλλά ο μετασχηματισμός *Fourier*, ημιτόνου ή συνημιτόνου, όπως έχει αναφερθεί στην αντίστοιχη περίπτωση της παραγρ. 7.2.2 (βλ. σελ. 443).
- (δ) Παρόμοια, σε διατάξεις που εκτείνονται ακτινικά μέχρι το άπειρο, αλλά η μη ομογενής συνθήκη αφορά επιφάνεια με  $z = \text{σταθ.}$ , οι απαιτήσεις στον άξονα  $r_T = 0$  ή σε κάποιο κοίλο κυλινδρικό όριο  $r_T = a$  προσδιορίζουν την ακτινική συναρτήση πάλι όπως στη σχέση (7.4-28) ή την (7.4-30), ανάλογα με την περίπτωση. Όμως, τώρα η σταθερά  $h$  ανήκει σε συνεχές φάσμα τιμών και το ολοκλήρωμα της ορθογωνιότητας υποκαθίσταται από έναν ολοκληρωτικό μετασχηματισμό. Όταν είναι  $a = 0$ , κατάλληλος είναι ο μετασχηματισμός *Hankel*, που ορίζεται ως  $f_m(r_T) \Rightarrow F_m(h) = \int_0^\infty r_T f_m(r_T) J_m(hr_T) dr_T$  και αντιστρέφεται σε  $f_m(r_T) = \int_0^\infty h F_m(h) J_m(hr_T) dh$ . Εδώ, με τη συνάρτηση  $f_m(r_T)$  εννοείται οποιοδήποτε από τα ολοκληρώματα των σχέσεων (7.4-37).



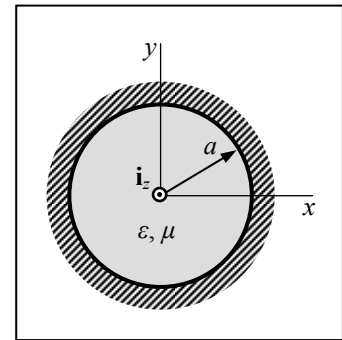
**Κυματοδότηση σε κυλινδρικό κυματοδηγό:** Όπως έχει περιγραφεί στην παράγραφο 7.2.4, σε απλό ιδανικό κυματοδηγό, τα κυματικά πλάτη  $E_0 e_z(\mathbf{r}_\perp)$  και  $H_0 h_z(\mathbf{r}_\perp)$  των διαμηκών συνιστωσών  $E_z = E_0 e_z(\mathbf{r}_\perp) \exp(-j\beta z)$  και  $H_z = H_0 h_z(\mathbf{r}_\perp) \exp(-j\beta z)$  υπακούουν στη διδιάστατη εξίσωση (7.2-35) του *Helmholtz*. Αντιθέτως, η βοηθητική συνάρτηση για ρυθμούς *TM/TE*:

$$F(\mathbf{r}) = \begin{cases} E_0 e_z(\mathbf{r}_\perp) \\ H_0 h_z(\mathbf{r}_\perp) \end{cases} \exp(-hz), \quad \begin{cases} TM \\ TE \end{cases} \quad (7.4-40)$$

όπου  $h^2 = \epsilon\mu\omega^2 - \beta^2$ , περιγράφεται από καλά διατυπωμένο πρόβλημα οριακών τιμών για την εξίσωση του *Laplace*. Στην ημιάπειρη περιοχή  $0 < z < \infty$ , στο εσωτερικό του κυματοδηγού, είναι  $\nabla^2 F = 0$ , και από το κλειστό όριο, στο  $z = \infty$  είναι  $F = 0$ , στην είσοδο  $z = 0$ , όπου  $\exp(-hz)|_{z=0} = 1$ , θεωρείται γνωστή η κατανομή  $f(\mathbf{r}_\perp)$  του πεδίου  $E_0 e_z$  ή  $H_0 h_z$ , οπότε εκεί είναι  $F = f(\mathbf{r}_\perp)$ , ενώ τέλος στο ιδανικά αγώγιμο εγκάρσιο όριο η οριακή συνθήκη είναι τύπου *Dirichlet* ή *Neumann*, ανάλογα με την περίπτωση, έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} TM: \quad e_z|_{r=r_s} = 0 &\Rightarrow F|_{r=r_s} = 0, \\ TE: \quad \frac{\partial h_z}{\partial n}|_{r=r_s} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial n}|_{r=r_s} = 0. \end{aligned} \quad (7.4-41)$$

Τα παραπάνω αφορούν και κυματοδηγούς με κυκλική διατομή, με ακτίνα  $a$ , όπως στο **Σχήμα 7.4-6**. Με τη διαδικασία που έχει εκτεθεί στα προηγούμενα συνάγονται οι εξής πληροφορίες για τα πλάτη  $\{E_0 e_z, H_0 h_z\} = F(\mathbf{r}) \exp(hz)$ :



Σχήμα 7.4-6

- Συνδυάζοντας τις απαιτήσεις για περιοδικότητα και για πεπερασμένη τιμή στον άξονα σημαίνει ότι για κάθε ιδιορυθμό  $(m, n)$  τα κυματικά πλάτη  $E_0 e_z(\mathbf{r}_\perp)$  και  $H_0 h_z(\mathbf{r}_\perp)$  έχουν εγκάρσια κατανομή με μορφή:

$$\begin{aligned} E_0 e_z(r_T, \varphi) &= [E_{S, mn} \sin(m\varphi) + E_{C, mn} \cos(m\varphi)] J_m(h_{mn}^{(TM)} r_T), \\ H_0 h_z(r_T, \varphi) &= [H_{S, mn} \sin(m\varphi) + H_{C, mn} \cos(m\varphi)] J_m(h_{mn}^{(TE)} r_T). \end{aligned} \quad (7.4-42)$$

Στις σχέσεις αυτές είναι  $m = 1, 2, 3, \dots$  και επιπλέον  $m = 0$  για το συνημίτονο. Μολονότι οι δύο εκφράσεις έχουν την ίδια εμφάνιση, διαφέρουν οι τιμές των  $h_{mn}$  λόγω των διαφορετικών οριακών συνθηκών στις σχέσεις (7.4-41) για ρυθμούς *TM* και *TE*. Είναι:

$$h_{mn}^{(TM)} = \frac{j_{m,n}}{a}, \quad h_{mn}^{(TE)} = \frac{j'_{m,n}}{a}. \quad (7.4-43)$$

- Για δοσμένη κυκλική συχνότητα  $\omega$ , ο διαμήκης κυματαριθμός έχει, συνεπώς, διακριτές τιμές, ίσες με  $\beta_{mn} = (\epsilon\mu\omega^2 - h_{mn}^2)^{1/2}$ .
- Στη θέση  $z = 0$ , η διέγερση  $f(r_T, \varphi)$  αφορά τα κυματοδηγούμενα πεδία (είτε  $TM$ , είτε  $TE$ ), οπότε εξισώνοντας με το άθροισμα των ιδιορρυθμών, είναι:

$$\begin{aligned} f_{TM}(r_T, \varphi) &= \sum_{m,n} [E_{S,mn} \sin(m\varphi) + E_{C,mn} \cos(m\varphi)] J_m(h_{mn}^{(TM)} r_T), \\ f_{TE}(r_T, \varphi) &= \sum_{m,n} [H_{S,mn} \sin(m\varphi) + H_{C,mn} \cos(m\varphi)] J_m(h_{mn}^{(TE)} r_T). \end{aligned} \quad (7.4-44)$$

Χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$  και των συναρτήσεων *Bessel* στο διάστημα  $0 < r_T < a$  προσδιορίζονται τα πλάτη κάθε συστατικού ρυθμού. Εξειδικεύοντας τη σχέση (7.4-38β) για το ολοκλήρωμα  $\int_0^a r_T J_m^2 dr_T$ , για τους ρυθμούς  $TM$  είναι:

$$\begin{aligned} \pi \frac{a^2}{2} J_m^2(h_{mn}^{(TM)} a) \begin{Bmatrix} E_{S,mn} \\ E_{C,mn} \end{Bmatrix} \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{Bmatrix} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{Bmatrix} \int_0^a dr_T J_m(h_{mn}^{(TM)} r_T) r_T f_{TM}(r_T, \varphi), \end{aligned} \quad (7.4-45\alpha)$$

και για τους ρυθμούς  $TE$ :

$$\begin{aligned} \pi \frac{h_{mn}^2 a^2 - m^2}{2} J_m^2(h_{mn}^{(TE)} a) \begin{Bmatrix} H_{S,mn} \\ H_{C,mn} \end{Bmatrix} \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{Bmatrix} \sin(m\varphi) \\ \cos(m\varphi) \end{Bmatrix} \int_0^a dr_T J_m(h_{mn}^{(TE)} r_T) r_T f_{TE}(r_T, \varphi). \end{aligned} \quad (7.4-45\beta)$$

Στις σχέσεις αυτές, στην αριστερή πλευρά ο συντελεστής  $\pi$  προέρχεται από το ολοκλήρωμα των  $\sin^2(m\varphi)$  και  $\cos^2(m\varphi)$  και πρέπει να αντικατασταθεί με το  $2\pi$  όταν  $m = 0$  και αφορά το συνημίτονο, ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές προέρχονται από την εφαρμογή της σχέσης (7.4-38β), λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι στο όριο  $r_T = a$  σε ρυθμούς  $TM$  μηδενίζεται η συνάρτηση *Bessel* και σε ρυθμούς  $TE$  η παραγωγός της.

Η επέκταση σε ομοαξονικό κυματοδηγό, στο ακτινικό διάστημα  $a < r_T < b$ , με  $a > 0$ , είναι εννοιολογικά στοιχειώδης: Οι ακτινικές συναρτήσεις, αντί των  $J_m$ , έχουν τη μορφή (7.4-31), των οποίων οι ρίζες καθορίζουν τις τιμές των  $h_{mn}$ , και αντίστοιχα η ορθογωνιότητα αφορά το ολοκλήρωμα  $\int_a^b r_T R_{Tmn}^2 dr_T$ , όπως δίδεται στη σχέση (7.4-38β) για τη γενικότερη περίπτωση. Δεν υπάρχει, όμως, λόγος να παρουσιασθούν εδώ οι εκτενείς εκφράσεις.

**Περιστροφόμενοι ρυθμοί:** Η εξάρτηση του πλάτους από τη γωνία  $\varphi$  μπορεί να περιγραφεί από την εκθετική μορφή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων,  $2\cos(m\varphi) = e^{jm\varphi} + e^{-jm\varphi}$  και  $2j\sin(m\varphi) = e^{jm\varphi} - e^{-jm\varphi}$ . Για παράδειγμα, σε ρυθμούς  $TM$  και με τους συμβολισμούς της σχέσης (7.4-42α), η αξονική συνιστώσα  $E_z$  περιγράφεται από το φασιθέτη:

$$E_{z,\omega}(r_T, \varphi, z) = \left[ E_{mn}^{(+)} e^{-jm\varphi} + E_{mn}^{(-)} \exp^{jm\varphi} \right] J_m \left( h_{mn}^{(TM)} r_T \right) \exp^{-j\beta_{mn} z}, \quad (7.4-46)$$

όπου  $\beta_{mn} = (\varepsilon\omega^2 - h_{mn}^2)^{1/2}$ , όπως έχει προαναφερθεί, και οι νέοι συντελεστές πλάτους ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις (που αναλύονται σε μέτρο και όρισμα):

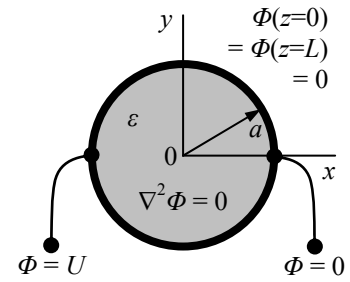
$$\begin{aligned} E_{mn}^{(+)} &= \frac{E_{C,mn} + jE_{S,mn}}{2} = \left| E_{mn}^{(+)} \right| \exp \left( j\psi_{mn}^{(+)} \right), \\ E_{mn}^{(-)} &= \frac{E_{C,mn} - jE_{S,mn}}{2} = \left| E_{mn}^{(-)} \right| \exp \left( j\psi_{mn}^{(-)} \right). \end{aligned} \quad (7.4-47)$$

Μετατρέποντας τη σχέση (7.4-46), ώστε να προβληθεί η χρονική εξάρτηση του πεδίου με τη δεδομένη σύμβαση  $A(t) = \text{Re} \{ A_\omega \exp(j\omega t) \}$ , σχηματίζεται η έκφραση:

$$\begin{aligned} E_z(r_T, \varphi, z, t) &= J_m \left( h_{mn}^{(TM)} r_T \right) \left[ \left| E_{mn}^{(+)} \right| \cos \left( \omega t - \beta_{mn} z - m\varphi + \psi_{mn}^{(+)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left| E_{mn}^{(-)} \right| \cos \left( \omega t - \beta_{mn} z + m\varphi + \psi_{mn}^{(-)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.4-48)$$

Εκτός από την αρχική φάση  $\psi_{mn}^{(\pm)}$ , σε καθέναν από τους δύο όρους η φάση περιέχει την εξάρτηση  $\omega t - \beta_{mn} z \mp m\varphi$ . Σε σταθερή εγκάρσια θέση ( $\varphi = \text{σταθ.}$ ), η φάση παραμένει αμετάβλητη, αντιστοιχίζοντας σε οποιοδήποτε  $\delta t > 0$  μετατόπιση ίση με  $\delta z = (\omega/\beta_{mn})\delta t > 0$ . Δηλαδή, κάθε όρος στη σχέση (7.4-48) περιγράφει κύματα που οδεύουν προς το  $z = +\infty$ , με ταχύτητα φάσης  $v_{p,mn} = \omega/\beta_{mn} = \omega/(\varepsilon\omega^2 - h_{mn}^2)^{1/2} = c/(1 - c^2 h_{mn}^2/\omega^2)^{1/2} [ > c = (\varepsilon\mu)^{-1/2} ]$  εξαρτώμενη από τον ρυθμό  $(m, n)$ . Επιπλέον, στη φάση κάθε όρου υπάρχει ο προσθετός  $\mp m\varphi$ . Δεδομένου ότι είναι  $m > 0$ , στον πρώτο όρο (με το πάνω πρόσημο) και σε σταθερή διαμήκη θέση  $z$  η φάση παραμένει σταθερή, αν σε κάποιο  $\delta t > 0$  αντιστοιχισθεί ένα  $\delta\varphi = (\omega/m)\delta t > 0$ . Ο πρώτος όρος στη σχέση (7.4-48) περιγράφει κύματα που περιστρέφονται, με γωνιακή ταχύτητα φάσης ίση με  $\Omega_{p,m} = \omega/m$ , δεξιόστροφα σε σχέση με τη φορά της διεύθυνσης διάδοσης. [Δηλαδή, αν ο αντίχειρας του δεξιού χεριού δείχνει τη διεύθυνση διάδοσης, τα άλλα τέσσερα δάκτυλα δείχνουν τη φορά περιστροφής.] Αντίστοιχα, ο δεύτερος όρος (με το κάτω πρόσημο) περιγράφει κύματα με αριστερόστροφη περιστροφή. Τα αντίστοιχα πλάτη,  $\left| E_{mn}^{(+)} \right|$  και  $\left| E_{mn}^{(-)} \right|$ , και όμοια για τους ρυθμούς  $TE$ , εξαρτώνται, μέσω των σχέσεων (7.4-47) και (7.4-45), μόνο από την κατανομή της διέγερσης  $f(r_T, \varphi)$  στην είσοδο  $z = 0$  του κυματοδηγού.

**Παράδειγμα 7.4-6:** Το σχήμα παρουσιάζει τη διατομή μιας κυλινδρικής διάταξης που βρίσκεται μεταξύ των δύο γειωμένων επιπέδων  $z = 0$  και  $z = L$ . Ο κύλινδρος με ακτίνα  $a$  και μήκος  $L$  αποτελείται από μονωτικό διηλεκτρικό υλικό με σταθερή επιτρεπτότητα  $\epsilon$ . Η εξωτερική κυλινδρική επιφάνειά του καλύπτεται από λεπτό αγωγίμο στρώμα με σταθερή ειδική αγωγιμότητα  $g_{\alpha\gamma}$ , που στις γωνιακές θέσεις  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pm\pi$  συνδέεται αντίστοιχα με τη γη και σε τάση  $U$ . Τα άκρα του αγωγίμου στρώματος στα  $z = 0$  και  $z = L$  είναι κατάλληλα μονωμένα έναντι των δύο γειωμένων επιπέδων. Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό του κυλίνδρου.



**Επίλυση:** Στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι, προφανώς,  $\nabla^2\Phi = 0$  (από  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$  και  $\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho = 0$ , με  $\epsilon = \text{σταθ.}$ ). Στις δύο βάσεις  $z = 0$  και  $z = L$ , η παρουσία του παρακείμενου γειωμένου αγωγού και η απουσία διπολικού στρώματος σημαίνουν ότι είναι  $\Phi(z=0) = \Phi(z=L) = 0$ . Τέλος, στο αγωγίμο στρώμα που περικλείει τον κύλινδρο, η διαφορά δυναμικού προκαλεί τη ροή ηλεκτρικού ρεύματος  $\mathbf{J}_{\alpha\gamma} = \mathbf{i}_\varphi J_{\alpha\gamma,\varphi}$ , με  $\partial J_{\alpha\gamma,\varphi}/\partial\varphi = 0$  σε κάθε μισό (από  $\nabla\cdot\mathbf{J}_{\alpha\gamma} = 0$ ), συνεπώς είναι και  $E_{\alpha\gamma,\varphi} = J_{\alpha\gamma,\varphi}/g_{\alpha\gamma} = \text{σταθ.}$ , οπότε με  $\nabla\Phi = \mathbf{i}_\varphi(1/a)\partial\Phi_{\alpha\gamma}/\partial\varphi = \mathbf{i}_\varphi E_{\alpha\gamma,\varphi}$  και τις τιμές στα  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pm\pi$  προκύπτει τελικά  $\Phi(r_T=a^-) = \Phi_{\alpha\gamma} = U|\varphi|/\pi$ , με  $-\pi < \varphi < +\pi$ .

Από τη διατύπωση του προβλήματος οριακών τιμών διαπιστώνεται ότι το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου εξαρτάται τόσο από τη γωνία  $\varphi$ , λόγω της συνθήκης στο  $r_T = a$ , όσο και από το υψόμετρο  $z$ , επειδή στα  $z = 0$  και  $z = L$  το δυναμικό έχει διαφορετική τιμή από τις ενδιάμεσες θέσεις, και την ακτίνα  $r_T$ , λόγω της παρουσίας του ορίου στο  $r_T = a$ . Επομένως, αναμένεται μία γενική έκφραση  $\Phi = \Phi(r_T, \varphi, z)$ . Η συνάρτηση  $|\varphi|$ , με την απόλυτη τιμή, στη συνθήκη  $\Phi(r_T=a^-)$  δεν συγκαταλέγεται μεταξύ των αποδεκτών συναρτήσεων  $F_m(\varphi)$ . Επίσης, μεταξύ κάθε επίπεδου ορίου  $z = 0$  και  $z = L$  και του κυλινδρικού ορίου εκδηλώνεται ασυνέχεια, από μηδέν σε  $U|\varphi|/\pi$ . Για τους λόγους αυτούς, η έκφραση  $\Phi(r_T, \varphi, z)$  αναμένεται να έχει μορφή σειράς,  $\Phi = \sum_{mn} F_m(\varphi) Z_n(z) R_{Tmn}(r_T)$ . Για τον προσδιορισμό των κατάλληλων συναρτήσεων και συνολικά της έκφρασης για το δυναμικό, κατά σειρά τα βήματα είναι:

(α) Η περιοχή που ενδιαφέρει (στο  $r_T < a$ , με τον διηλεκτρικό κύλινδρο) εκτείνεται σε ολόκληρο κύκλο, χωρίς ενδιάμεσα όρια, συνεπώς η έκφραση για το δυναμικό πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη περιοδικότητας, οπότε για τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  κατ' αρχάς είναι αποδεκτά τα ημίτονα και συνημίτονα του  $m\varphi$ , με ακέραιες τιμές για το  $m$ . Όμως, η διάταξη είναι συμμετρική ως προς τη θέση  $\varphi = 0$ , με τη γωνία  $\varphi$  να μετράται στο διάστημα

$-\pi < \varphi < +\pi$ , συνεπώς μόνο άρτιες συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  εμπλέκονται στην περιγραφή του δυναμικού, δηλαδή είναι  $F_m = \cos(m\varphi)$ , με  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ , όπου συμπεριλαμβάνεται και η άρτια συνάρτηση  $F_{m=0} = 1$ , βλ. και σχετικό **σχόλιο**.

(β) Τα άκρα  $z = 0$  και  $z = L$  χαρακτηρίζονται από ομογενή οριακή συνθήκη, συνεπώς οι αντίστοιχες συναρτήσεις  $Z_n(z)$  είναι εναλλασσόμενες, και ειδικότερα ημιτονοειδείς. Η συγκεκριμένη οριακή συνθήκη  $\Phi = 0$  και στα δύο αυτά άκρα προσδιορίζει ότι οι συναρτήσεις είναι  $Z_n(z) = \sin(h_n z)$ , ώστε  $Z_n(z=0) = 0$ , με  $h_n = n\pi/L$  και  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ώστε  $Z_n(z=L) = 0$ . Η διάταξη είναι, επίσης, συμμετρική ως προς το επίπεδο  $z = 1/2L$ , με συνέπεια να επιβιώνουν μόνο οι τιμές  $n = 1, 3, 5, \dots$ , ώστε να είναι  $(d/dz)Z_n|_{z=1/2L} = 0$ . Η συνολική προσπάθεια για την επίλυση δεν αλλάζει, αν αυτή η συμμετρία διαπιστωθεί σε αυτό το σημείο ή αργότερα, ενώ το αντίθετο ισχύει για τη συμμετρία των συναρτήσεων  $F_m(\varphi)$ .

(γ) Οι εναλλασσόμενες συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  και  $Z_n(z)$  συνοδεύονται από συναρτήσεις  $R_{Tmn}(r_T)$  με μονότονη συμπεριφορά, συγκεκριμένα από τις τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*,  $R_{Tmn}(r_T) = \{I_m(h_n r_T), K_m(h_n r_T)\}$ , με την τάξη  $m$  να έχει τις τιμές που προσδιορίστηκαν στο πρώτο βήμα και με τη σταθερά  $h_n$ , όπως έχει προκύψει από το δεύτερο βήμα. Η περιοχή που ενδιαφέρει ( $r_T < a$ ) περιλαμβάνει τον άξονα  $r_T = 0$ , οπότε οι συναρτήσεις δεύτερου είδους, οι  $K_m(h_n r_T)$ , που απειρίζονται εκεί, αποκλείονται, οπότε ως συναρτήσεις  $R_{Tmn}(r_T)$  θα ληφθούν οι  $I_m(h_n r_T)$ , με έναν προσδιοριστέο συντελεστή. Δεδομένου ότι ο συντελεστής αυτός θα προσδιορισθεί από την οριακή συνθήκη στο κυλινδρικό όριο  $r_T = a$ , προτιμότερο είναι ο συντελεστής να γραφεί ως  $C_{mn}/I_m(h_n a)$ , δηλαδή να γραφεί  $R_{Tmn}(r_T) = C_{mn} I_m(h_n r_T)/I_m(h_n a)$ , ώστε να είναι  $R_{Tmn}(r_T = a) = C_{mn}$ .

(δ) Με τις επιλογές των τριών συναρτήσεων, το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο εσωτερικό του διηλεκτρικού κυλίνδρου γράφεται ως:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{m,n} C_{mn} \frac{I_m(h_n r_T)}{I_m(h_n a)} \cos(m\varphi) \sin(h_n z),$$

και η απομένουσα συνθήκη, στην επιφάνεια  $r_T = a$ , περιγράφεται από την ισότητα:

$$\sum_{m,n} C_{mn} \cos(m\varphi) \sin(h_n z) = \frac{U}{\pi} |\varphi|.$$

(ε) Οι συναρτήσεις  $F_m = \cos(m\varphi)$ , με  $m = 0, 1, 2, \dots$ , αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση για το διάστημα  $-\pi < \varphi < +\pi$ , και οι συναρτήσεις  $Z_n = \sin(h_n z)$ , με  $h_n = n\pi/L$  και με  $n = 1, 2, 3, \dots$  ομοίως για το διάστημα  $0 < z < L$ , με συνάρτηση βάρους τη μονάδα και στις δύο συναρτήσεις. Η ορθογωνιότητα αξιοποιείται, πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με τις

συναρτήσεις  $\cos(m\varphi)$  και  $\sin(h_n z)$ , με κάποιες συγκεκριμένες τιμές των  $m$  και  $n$ , και ολοκληρώνοντας στα αντίστοιχα διαστήματα:

$$C_{mn} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \cos^2(m\varphi) \int_0^L dz \sin^2(h_n z) = \frac{U}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi |\varphi| \cos(m\varphi) \int_0^L dz \sin(h_n z).$$

Οι ολοκληρώσεις είναι στοιχειώδεις και, έπειτα από αναδιάταξη, προκύπτει:

$$C_{0n} = U \frac{1}{h_n L} [1 - \cos(h_n L)], \quad (m = 0)$$

$$C_{mn} = -U \frac{4}{\pi^2 m^2} [1 - \cos(m\pi)] \frac{1}{h_n L} [1 - \cos(h_n L)]. \quad (m \neq 0)$$

Με δεδομένο, ότι είναι  $h_n = n\pi/L$ , ο όρος  $[1 - \cos(h_n L)]$  είναι ίσος με 0, όταν  $n = 2, 4, 6, \dots$  και με 2, όταν  $n = 1, 3, 5, \dots$  Δηλαδή, αλγεβρικά προσδιορίζονται οι τιμές του  $n$  με μη μηδενική συνεισφορά στο άθροισμα. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγεί η παρατήρηση ότι η διάταξη είναι συμμετρική ως προς το επίπεδο  $z = 1/2L$ , βλ. βήμα ( $\beta$ ). Επίσης, ο όρος  $[1 - \cos(m\pi)]$  είναι μη μηδενικός και ίσος με 2, μόνο όταν  $m = 1, 3, 5, \dots$  Σε τέτοιες τιμές, οι συναρτήσεις  $\cos(m\varphi)$  είναι περιττές ως προς τις τιμές  $\varphi = \pm\pi/2$ , όπως είναι περιττή ως προς τις ίδιες τιμές και η διαφορά  $\Phi(r_T = a, \varphi) - U/2$ .

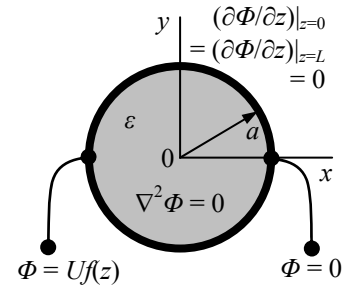
(ζ) Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, εισάγοντας τις μη μηδενικές τιμές των συντελεστών  $C_{mn}$  στην έκφραση για το δυναμικό  $\Phi = \sum_{mn} F_m(\varphi) Z_n(z) R_{Tmn}(r_T)$  προκύπτει το τελικό αποτέλεσμα για την περιοχή  $r_T < a$ ,  $-\pi < \varphi < +\pi$ ,  $0 < z < L$ , με  $h_n = n\pi/L$ :

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = U \sum_{\substack{n= \\ 1,3,5,\dots}} \frac{2}{n\pi} \left[ \frac{I_0(h_n r_T)}{I_0(h_n a)} - \sum_{\substack{m= \\ 1,3,5,\dots}} \frac{8}{\pi^2 m^2} \frac{I_m(h_n r_T)}{I_m(h_n a)} \cos(m\varphi) \right] \sin(h_n z).$$

### Σχόλια:

- Αν δεν είχαν εξαιρεθεί λόγω συμμετρίας τα ημίτονα από την αρχή, στο βήμα ( $\alpha$ ), αν δηλαδή στην έκφραση για το δυναμικό είχαν συμπεριληφθεί όχι μόνο οι όροι  $C_{mn} \cos(m\varphi)$ , αλλά και όροι  $D_{mn} \sin(m\varphi)$ , τότε κατά την εφαρμογή της ορθογωνιότητας οι συντελεστές  $D_{mn}$  θα προέκυπταν ανάλογοι προς το ολοκλήρωμα  $\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi |\varphi| \sin(m\varphi)$ , που είναι, βέβαια, ίσο με μηδέν. Όροι με μηδενική τιμή θα μεταφέρονταν άσκοπα μέχρι το βήμα ( $\delta$ ).
- Στη συμπληρωματική περιοχή  $r_T > a$ ,  $0 < z < L$ , όπου υποτίθεται, επίσης, ότι  $\varepsilon = \text{σταθ.}$ , καθώς και ότι τα γειωμένα επίπεδα εκτείνονται μέχρι το άπειρο, με πανομοιότυπα βήματα το δυναμικό περιγράφεται από την παραπάνω έκφραση, με μόνη διαφορά την αντικατάσταση  $I_m \rightarrow K_m$ , ώστε το δυναμικό να μην αποκλίνει στο ακτινικό άπειρο.

**Παράδειγμα 7.4-7:** Ο κύλινδρος με ακτίνα  $a$  και μήκος  $L$  αποτελείται από μονωτικό διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα  $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ , ενώ ο υπόλοιπος χώρος (τόσο σε  $r_T > a$ , όσο σε  $z < 0$  ή  $z > L$ ) από αέρα, με  $\varepsilon_0$ . Η εξωτερική κυλινδρική επιφάνειά του καλύπτεται από λεπτά αγώγιμα κυκλικά νήματα σε πυκνή διάταξη, που στις γωνιακές θέσεις  $\varphi = 0$  και  $\varphi = \pm\pi$  συνδέονται αντίστοιχα με τη γη και σε τάση  $Uf(z)$ , όπου  $f(z)$  είναι κάποια συνάρτηση, που θεωρείται γνωστή. Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό του κυλίνδρου.



**Επίλυση:** Η διάταξη έχει πολλές ομοιότητες με αυτή του αμέσως προηγούμενου παραδ. 7.4-6, οπότε στην επίλυση θα τονισθούν κυρίως οι διαφορές. Έτσι, στο εσωτερικό του κυλίνδρου πάλι είναι  $\nabla^2\Phi = 0$  και για τους ίδιους λόγους, ενώ στην παράπλευρη επιφάνεια η οριακή συνθήκη διαφοροποιείται ελαφρά, σε  $\Phi(r_T=a^-) = Uf(z)|\varphi|/\pi$ , με  $-\pi < \varphi < +\pi$ , προερχόμενη από  $\partial J_{\alpha\gamma,\varphi}/\partial\varphi = 0$  σε κάθε μισό κυκλικό νήμα. Η σημαντική διαφορά συναντάται στην οριακή συνθήκη στις δύο βάσεις  $z = 0$  και  $z = L$ . Εκεί, στον παρακείμενο χώρο με  $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$  γίνεται η προσέγγιση  $\mathbf{D}_0 = 0$ , οπότε η συνθήκη  $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = 0$  (με  $\sigma = 0$  στη διεπιφάνεια μεταξύ μονωτών) οδηγεί στη διατύπωση της οριακής συνθήκης ως  $\mathbf{i}_n \cdot \nabla\Phi = 0$ , δηλαδή  $\partial\Phi/\partial z = 0$ .

Και σε αυτό το πρόβλημα οριακών τιμών, για το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου αναμένεται μία γενική έκφραση  $\Phi = \Phi(r_T, \varphi, z)$ , όπου τώρα η εξάρτηση από το  $z$  επιβάλλεται από την εμφάνιση της συνάρτησης  $f(z)$  στην οριακή συνθήκη της παράπλευρης επιφάνειας. Αναμένεται πάλι η λύση να εκφράζεται ως σειρά,  $\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{mn} F_m(\varphi) Z_n(z) R_{Tmn}(r_T)$ , επειδή όπως πριν η συνάρτηση  $|\varphi|$ , αλλά τώρα και η συνάρτηση  $f(z)$  στη γενική περίπτωση (βλ. όμως και το σχετικό **σχόλιο**) δεν περιλαμβάνονται μεταξύ των συναρτήσεων βάσης. Τα βήματα της επίλυσης είναι κατά σειρά:

- (α) Πάλι, πρόκειται για διάταξη με περιοδικότητα και με συμμετρία ως προς τη γωνιακή θέση  $\varphi = 0$ , οπότε λαμβάνεται  $F_m = \cos(m\varphi)$ , με  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (β) Η ομογενής οριακή συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$  στα άκρα  $z = 0$  και  $z = L$  προσδιορίζει ότι οι αντίστοιχες συναρτήσεις είναι οι  $Z_n(z) = \cos(h_n z)$ . Πάλι είναι  $h_n = n\pi/L$ , αλλά τώρα για διαφορετικό λόγο, για να είναι  $(d/dz)Z_n|_{z=0,L} = 0$  με  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Συμπεριλαμβάνεται δηλαδή και η τιμή  $n = 0$ , στην οποία αντιστοιχεί η σταθερή συνάρτηση  $Z_0(z) = 1$ .
- (γ) Για τους ίδιους λόγους, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, για την περιοχή  $r_T < a$  που ενδιαφέρει οι ακτινικές συναρτήσεις επιλέγονται ως  $R_{Tmn}(r_T) = C_{mn} I_m(h_n r_T) / I_m(h_n a)$ , αλλά μόνο όταν είναι  $n \neq 0$ . Τώρα, μεταξύ των αποδεκτών τιμών είναι και η τιμή  $n = 0$

(με  $h_0 = 0$ ), στην οποία αντιστοιχούν οι ακτινικές συναρτήσεις των σχέσεων (7.4-23), και όχι οι τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*. Προκειμένου οι συναρτήσεις  $R_{Tm0}(r_T)$  να μην απειρίζονται στον άξονα, αλλά και να έχουν την τιμή  $R_{Tm0}(a) = 1$  (για διευκόλυνση στο επόμενο βήμα), επιλέγονται ως  $R_{Tm0}(r_T) = C_{m0}(r_T/a)^m$ . Η τελευταία έκφραση καλύπτει και το ενδεχόμενο  $m = 0$ , καθώς δίνει  $R_{T00}(r_T) = C_{00}$ .

(δ) Με βάση τις επιλογές αυτές, το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο εσωτερικό του διηλεκτρικού κυλίνδρου γράφεται ως:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{m(n=0)} C_{m0} \left(\frac{r_T}{a}\right)^m \cos(m\varphi) + \sum_{m(n \neq 0)} C_{mn} \frac{I_m(h_n r_T)}{I_m(h_n a)} \cos(m\varphi) \cos(h_n z),$$

και η τελευταία οριακή συνθήκη, στην επιφάνεια  $r_T = a$ , περιγράφεται από την ισότητα:

$$\sum_{m(n=0)} C_{m0} \cos(m\varphi) + \sum_{m(n \neq 0)} C_{mn} \cos(m\varphi) \cos(h_n z) = \frac{U}{\pi} |\varphi| f(z).$$

(ε) Αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $F_m = \cos(m\varphi)$  στο διάστημα  $-\pi < \varphi < +\pi$  και των  $Z_n = \cos(h_n z)$  στο διάστημα  $0 < z < L$ , σχηματίζονται οι εξισώσεις για τον προσδιορισμό των συντελεστών:

$$C_{m,n=0} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \cos^2(m\varphi) \int_0^L dz 1^2 = \frac{U}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi |\varphi| \cos(m\varphi) \int_0^L dz f(z),$$

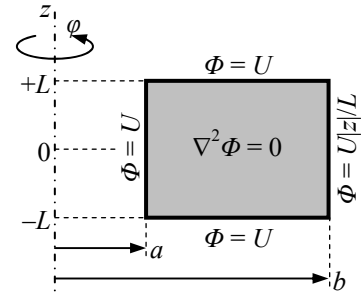
$$C_{m,n \neq 0} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \cos^2(m\varphi) \int_0^L dz \cos^2(h_n z) = \frac{U}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi |\varphi| \cos(m\varphi) \int_0^L dz f(z) \cos(h_n z).$$

Τα ολοκληρώματα, εκτός βέβαια από εκείνα που εμπλέκουν τη συνάρτηση  $f(z)$ , μπορούν να προσδιορισθούν με στοιχειώδεις τεχνικές. Τα αποτελέσματα δεν παρουσιάζουν, όμως, κάποιο ειδικότερο ενδιαφέρον, ώστε να δικαιολογείται η παρουσίασή τους.

**Σχόλιο:** Στην ειδική περίπτωση, όταν είναι  $f(z) = 1$ , οι συντελεστές με  $n \neq 0$  είναι όλοι ίσοι με μηδέν, όπως αμέσως διαπιστώνεται στις παραπάνω εκφράσεις. Πράγματι, σε τέτοια περίπτωση κανένα από τα δεδομένα του προβλήματος οριακών τιμών δεν επιβάλλει εξάρτηση από το  $z$ . Στο εσωτερικό, η Λαπλασιανή έχει σε κάθε  $z$  την ίδια τιμή (το μηδέν), στην κυλινδρική επιφάνεια η οριακή συνθήκη είναι ανεξάρτητη από το  $z$ , και τέλος στις δύο βάσεις η συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$  σημαίνει  $\partial\Phi/\partial z = 0$ . Συνεπώς, αν είναι  $f(z) = 1$ , αυτές οι παρατηρήσεις μπορούν να προταχθούν και να αναζητηθεί η λύση με τη μορφή  $\Phi(r_T, \varphi) = \sum_m F_m(\varphi) R_{Tm}(r_T)$ , με τη διαδικασία της παραγράφου 7.3.2. Αντίστοιχα, αν είναι  $f(z) = \cos(\nu z/L)$ , με  $\nu = \text{ακέραιο}$ , δηλαδή  $f(z) = Z_{n=\nu}(z)$ , αρκεί να αναζητηθούν λύσεις με μορφή  $\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_m F_m(\varphi) R_{Tm}(r_T) Z_{n=\nu}(z)$ .



**Παράδειγμα 7.4-8:** Στο εσωτερικό της ορθογωνικής τοροειδούς διάταξης του σχήματος, στην περιοχή  $a < r_T < b$ ,  $-L < z < +L$ , το ηλεκτροστατικό δυναμικό ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Οι δύο βάσεις και η εσωτερική κυλινδρική επιφάνεια είναι σε δυναμικό  $\Phi = U$ , ενώ στην εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια το δυναμικό κατανέμεται ως  $\Phi = U|z|/L$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό της διάταξης.



**Επίλυση:** Το πρόβλημα οριακών τιμών είναι πλήρως προσδιορισμένο: Στο εσωτερικό είναι γνωστή η διαφορική εξίσωση  $\nabla^2 \Phi = 0$  και σε όλο το όριο δίδεται συνθήκη *Dirichlet*,  $\Phi = \dots$  Πουθενά η οριακή συνθήκη δεν είναι ομογενής, αλλά δεν είναι απαραίτητο για την επίλυση να σχηματισθεί επαλληλία τεσσάρων διατάξεων. Αρκεί να παρατηρηθεί, ότι για την ποσότητα  $V = (\Phi - U)$  το πρόβλημα οριακών τιμών είναι εξ ίσου καλά προσδιορισμένο και περιγράφεται από ομογενή οριακή συνθήκη σε όλες τις έδρες εκτός από μία, εκείνη στην εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια, στην οποία είναι  $V(r_T=b) = -U(1 - |z|/L)$ . Για τη συνέχεια στην επίλυση αυτού του προβλήματος, τα βήματα είναι:

(α) Τίποτα στη διάταξη (στο σχήμα, στη διαφορική εξίσωση, στις οριακές συνθήκες) δεν εξαρτάται από τη γωνία  $\varphi$ , συνεπώς αναμένεται να είναι  $V = V(r_T, z)$ . Αυτό σημαίνει ότι στο ανάπτυγμα  $V(r_T, \varphi, z) = \sum_{mn} F_m(\varphi) Z_n(z) R_{Tmn}(r_T)$  μόνο ο όρος με  $m = 0$  είναι μη μηδενικός, με  $F_{m=0} = 1$ , δηλαδή είναι απλά  $V = \sum_n Z_n(z) R_{Tn}(r_T)$ .

(β) Οι συναρτήσεις με εξάρτηση από το  $z$  μπορούν να σχηματισθούν ξεκινώντας από τη συμμετρία της διάταξης ως προς τη θέση  $z = 0$ , συνεπώς είναι  $Z_n(z) = \cos(h_n z)$ . Ακολουθώντας, η απαίτηση  $Z_n(z = \pm L)$  προσδιορίζει, ότι  $h_n L = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$

Εναλλακτικά, γράφοντας  $Z_n(z) = \sin[h_n(z+L)]$ , ώστε να είναι  $Z_n(z = -L) = 0$ , η απαίτηση  $Z_n(z = L) = 0$  προσδιορίζει αρχικά ότι  $2h_n L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ . Λόγω της συμμετρίας της διάταξης πρέπει να είναι  $(d/dz)Z_n(z=0) = 0$ , που περιορίζει στις τιμές  $h_n L = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$ , τις ίδιες όπως προηγουμένως. Με τις τιμές αυτές είναι  $\sin[h_n(z+L)] = \sin(h_n z) \cos(h_n L) + \cos(h_n z) \sin(h_n L) = \pm \cos(h_n z)$ , που πρακτικά είναι η ίδια συνάρτηση  $Z_n(z) = \cos(h_n z)$ .

(γ) Οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις, τόσο η  $F_{m=0} (= 1)$ , όσο και οι  $Z_n$ , συνεργάζονται με τροποποιημένες συναρτήσεις *Bessel*, με τάξη  $m = 0$  (όσο στη συνάρτηση  $F_{m=0}$ ) και με όρισμα  $h_n r_T$ , με  $(2/\pi)h_n L = 1, 3, 5, \dots$  (όπως στις συναρτήσεις  $Z_n$ ). Η ομογενής οριακή συνθήκη συναντάται στην ακτινική θέση  $r_T = a$ , οπότε πρόσφορη γραφή για τις συναρτήσεις  $R_{Tn}(r_T)$  είναι:

$$R_{Tn}(r_T) = C_n \frac{K_0(h_n a) I_0(h_n r_T) - I_0(h_n a) K_0(h_n r_T)}{K_0(h_n a) I_0(h_n b) - I_0(h_n a) K_0(h_n b)}.$$

Η έκφραση αυτή πράγματι μηδενίζει την ποσότητα  $V$  στο  $r_T = a$ , και επιπλέον έχει την τιμή  $R_{Tn}(r_T = b) = C_n$  στο εξωτερικό καμπύλο όριο, τιμή που απλοποιεί την εφαρμογή στο επόμενο βήμα της οριακής συνθήκης για το όριο αυτό.

- (δ) Με  $F_{m=0} = 1$  και με τις συναρτήσεις  $Z_n(z) = \cos(h_n z)$  και  $R_{Tn}(r_T)$ , όπως παραπάνω, η συνάρτηση  $V = \Phi - U$  γράφεται ως:

$$V(r_T, z) = \sum_n C_n \frac{K_0(h_n a) I_0(h_n r_T) - I_0(h_n a) K_0(h_n r_T)}{K_0(h_n a) I_0(h_n b) - I_0(h_n a) K_0(h_n b)} \cos(h_n z),$$

με  $(2/\pi)h_n L = 1, 3, 5, \dots$ . Απομένει να χρησιμοποιηθεί η τελευταία οριακή συνθήκη, της επιφάνειας  $r_T = b$ . Αυτό αποδίδεται από την ισότητα:

$$V(r_T = b, z) = \sum_n C_n \cos(h_n z) = -U \left( 1 - \frac{|z|}{L} \right).$$

- (ε) Η σχέση αυτή αποτελεί μονοδιάστατη σειρά, επειδή από τις συναρτήσεις  $F_m$  μόνο εκείνη με  $m = 0$  έχει μη μηδενική συνεισφορά. Οι συναρτήσεις  $Z_n(z) = \cos(h_n z)$  αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση στο διάστημα  $-L < z < L$  που ενδιαφέρει. Πολλαπλασιάζοντας με κάποια συγκεκριμένη από τις συναρτήσεις  $Z_n(z)$  και ολοκληρώνοντας στο διάστημα ορθογωνιότητας, σχηματίζονται οι εξισώσεις για τον προσδιορισμό των συντελεστών  $C_n$ :

$$C_n \int_{-L}^L dz \cos^2(h_n z) = -U \int_{-L}^L dz \left( 1 - \frac{|z|}{L} \right) \cos(h_n z).$$

Το ολοκλήρωμα στην αριστερή πλευρά είναι, βέβαια, ίσο με  $L$ . Το ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς προσδιορίζεται με στοιχειώδεις τεχνικές, με  $\int \zeta \cos \zeta d\zeta = \zeta \sin \zeta + \cos \zeta$  και  $\cos(h_n L) = 0$ , επειδή  $(2/\pi)h_n L = 1, 3, 5, \dots$ . Τελικά, η έκφραση για τους συντελεστές είναι:

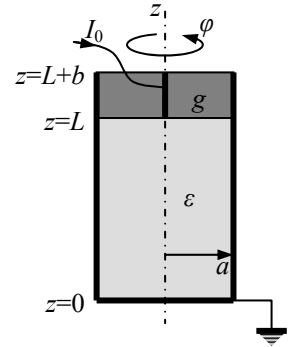
$$C_n = \frac{U}{(h_n L)^2},$$

συνεπώς το δυναμικό  $\Phi = U + V$  στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι ίσο με:

$$\Phi(r_T, z) = U \left[ 1 + \sum_n \frac{1}{(h_n L)^2} \frac{K_0(h_n a) I_0(h_n r_T) - I_0(h_n a) K_0(h_n r_T)}{K_0(h_n a) I_0(h_n b) - I_0(h_n a) K_0(h_n b)} \cos(h_n z) \right],$$

με  $(2/\pi)h_n L = 1, 3, 5, \dots$

**Παράδειγμα 7.4-9:** Ένας κύλινδρος, με ακτίνα  $a$  και ύψος  $L$ , αποτελείται από μονωτικό υλικό με σταθερή επιτρεπτότητα  $\epsilon$ . Η πάνω βάση του είναι σε επαφή με έναν δεύτερο κύλινδρο, με ακτίνα, επίσης,  $a$  και με ύψος  $b$ , από αγώγιμο υλικό, του οποίου η ειδική αγωγιμότητα έχει κάποια μέτρια τιμή  $g$  και στον άξονά του προσάγεται ηλεκτρικό ρεύμα ίσο με  $I_0$ . Η κάτω βάση του διηλεκτρικού κυλίνδρου, καθώς και οι παράπλευρες κυλινδρικές επιφάνειες και των δύο κυλίνδρων, καλύπτονται από αγώγιμο υλικό με υψηλή αγωγιμότητα και σε αγώγιμη σύνδεση με τη γη. Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό του κυλίνδρου.



**Επίλυση:** Στο εσωτερικό του διηλεκτρικού κυλίνδρου προφανώς είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ , ενώ στην κάτω βάση και στην παράπλευρη επιφάνεια προφανώς είναι  $\Phi(z=0) = 0$  και  $\Phi(r_T=a) = 0$ . Για την οριακή συνθήκη στην πάνω βάση πρέπει προηγουμένως να εξετασθεί η συμπεριφορά του παρακείμενου αγωγού σε  $z > L$ . Εκεί, λόγω συμμετρίας είναι  $\mathbf{J} = \mathbf{i}_T J(r_T)$ , από τη διατήρηση του φορτίου προκύπτει  $J(r_T) = I_0/2\pi b r_T$ , άρα  $\mathbf{E} = \mathbf{i}_T I_0/2\pi b g r_T$  και μετά από ολοκλήρωση με αφετηρία στο  $r_T = a$  το δυναμικό προκύπτει  $\Phi(r_T, z > L) = -\Phi_0 \ln(r_T/a)$ , όπου  $\Phi_0 = I_0/2\pi b g$ . Άρα και στην πάνω βάση του διηλεκτρικού κυλίνδρου είναι  $\Phi(r_T, z=L) = -\Phi_0 \ln(r_T/a)$ .

Το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τη γωνία  $\varphi$ , λόγω συμμετρίας. Αυτό σημαίνει ότι από τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi) = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$  η μόνη που επιβιώνει, δηλαδή, που έχει μη μηδενικό συντελεστή, είναι το συνημίτονο με  $m = 0$ , η σταθερή συνάρτηση  $F_{m=0} = 1$ . Κατά τα λοιπά, το δυναμικό αναμένεται να εξαρτάται τόσο από την ακτίνα  $r_T$ , λόγω της οριακής συνθήκης στο  $z = L$ , όσο και από το υψόμετρο  $z$ , επειδή σε δύο διαφορετικές θέσεις  $z = 0$  και  $z = L$  το δυναμικό έχει διαφορετική τιμή. Η συνάρτηση  $\ln(r_T/a)$ , που εμφανίζεται στην οριακή συνθήκη στο  $z = L$ , δεν είναι αποδεκτή ως συνάρτηση βάσης. [Η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνάρτηση βάσης σε διατάξεις με  $\partial/\partial z = 0$ , ενώ εδώ είναι  $\partial/\partial z \neq 0$ .] Το δυναμικό θα εκφρασθεί ως σειρά,  $\Phi = \Phi(r_T, z) = \sum_n R_{T0n}(r_T) Z_{0n}(z)$ , σε μία μόνο διάσταση, στο  $n$ , επειδή είναι  $m = 0$ . Κατά σειρά, τα επόμενα βήματα της επίλυσης είναι:

(α) Η ομογενής οριακή συνθήκη συναντάται σε κυλινδρική επιφάνεια, συνεπώς οι συναρτήσεις με εναλλασσόμενη συμπεριφορά είναι οι ακτινικές, που θα εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί συναρτήσεων *Bessel*,  $R_{Tmn}(r_T) = \{J_m, Y_m\}$ . Όμως, η διάταξη περιλαμβάνει και τον άξονα  $r_T = 0$ , άρα στις  $R_{Tmn}$  δεν συμμετέχουν οι συναρτήσεις δεύτερου είδους  $Y_m$ , ώστε το δυναμικό να μην αποκλίνει στον άξονα, αφού στην περιγραφή της διάταξης δεν

υποδεικνύεται κανένα αίτιο για απειρισμό του δυναμικού. Επίσης, στη διάταξη συνολικά είναι  $\partial/\partial\varphi = 0$ , συνεπώς  $m = 0$  με  $F_{m=0} = 1$ , όπως έχει ήδη αναφερθεί. Επομένως, οι ακτινικές συναρτήσεις θα έχουν τη μορφή  $R_{T0n}(r_T) = J_0(h_{0n}r_T)$ . Τέλος, η οριακή συνθήκη στο  $r_T = a$  είναι τύπου *Dirichlet*,  $\Phi = 0$ , άρα θα είναι  $h_{0n} = j_{0,n}/a$ , όπου  $j_{0,n}$  είναι ο  $n$ -στός μηδενισμός της συνάρτησης  $J_0(\xi)$ .

- (β) Στην τρίτη διάσταση, οι συναρτήσεις πρέπει να έχουν μονότονη συμπεριφορά, συγκεκριμένα, αφού πρόκειται για συναρτήσεις  $Z(z)$ , να είναι εκθετικές ή υπερβολικές με όρισμα εν γένει το γινόμενο  $h_{mn}z$ , εδώ ειδικότερα το  $h_{0n}z$ . Η συνθήκη  $\Phi(z=0) = 0$  υπαγορεύει να επιλεγεί το υπερβολικό ημίτονο, κατά προτίμηση διαιρεμένο με την τιμή του στο  $z = L$  εκεί όπου επικρατεί η μη ομογενής οριακή συνθήκη, που θα χρησιμοποιηθεί στο αμέσως επόμενο βήμα. Επομένως, η πρόσφορη επιλογή είναι  $Z_{0n}(z) = C_{0n}\sinh(h_{0n}z)/\sinh(h_{0n}L)$ , με προσδιοριστέους τους συντελεστές  $C_{0n}$ .
- (γ) Με τις συναρτήσεις  $F_{m=0}(\varphi) = 1$ ,  $R_{T0n}(r_T)$  και  $Z_{0n}(z)$ , που έχουν μέχρι τώρα προσδιορισθεί, το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο εσωτερικό του διηλεκτρικού κυλίνδρου γράφεται ως:

$$\Phi(r_T, z) = \sum_n C_{0n} J_0(h_{0n}r_T) \frac{\sinh(h_{0n}z)}{\sinh(h_{0n}L)}.$$

Με τις επιλογές που έχουν γίνει, κάθε όρος του αθροίσματος, άρα και το άθροισμα ικανοποιεί την εξίσωση του *Laplace*, επειδή κατάλληλες εναλλασσόμενες συναρτήσεις συνδυάζονται με κατάλληλες μονότονες, με τις ίδιες τιμές των  $h_{0n}$ . Επίσης, ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες στο  $z = 0$ , επειδή  $\sinh 0 = 0$ , και στο  $r_T = a$ , επειδή  $J_0(h_{0n}a) = J_0(j_{0n}) = 0$ . Απομένει η μη ομογενής οριακή συνθήκη στην πάνω βάση  $z = L$ . Με το παραπάνω ανάπτυγμα, η συνθήκη αυτή περιγράφεται από την ισότητα:

$$\Phi(r_T, z=L) = \sum_{n'} C_{0n'} J_0(h_{0n'}r_T) = -\Phi_0 \ln \frac{r_T}{a}.$$

Στη σχέση αυτή η τάξη της ρίζας, ως προς την οποία γίνεται και η άθροιση, γράφηκε τονισμένη, ως  $n'$ , ώστε να αποφευχθεί ασάφεια κατά την επικείμενη εφαρμογή της ορθογωνιότητας.

- (δ) Οι συναρτήσεις *Bessel* οποιασδήποτε συγκεκριμένης τάξης, εδώ εκείνες με  $m = 0$ , είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους την ακτίνα  $r_T$ , όταν αφορούν  $h_{mn}$  που αναφέρονται σε διαφορετικές ρίζες  $j_{mn} = h_{mn}a$ . Για να αξιοποιηθεί αυτή η ιδιότητα, στην παραπάνω σχέση, με την οριακή συνθήκη στο  $z = L$ , πολλαπλασιάζονται και οι δύο πλευρές με το γινόμενο  $r_T J_0(h_{0n}r_T)$  κάποιου συγκεκριμένου  $n$  και γίνεται η ολοκλήρωση στο διάστημα

$0 < r_T < a$ , δηλαδή, στο  $0 < h_{0n}r_T < h_{0n}a = j_{0n}$ , που στο άνω άκρο του μηδενίζεται η συνάρτηση *Bessel*. Αυτή η ενέργεια περιγράφεται από την ισότητα:

$$\sum_{n'} C_{0n'} \int_0^a J_0(h_{0n'}r_T) J_0(h_{0n'}r_T) r_T dr_T = -\Phi_0 \int_0^a \ln \frac{r_T}{a} J_0(h_{0n}r_T) r_T dr_T.$$

Λόγω της ορθογωνιότητας, στην αριστερή πλευρά το μόνο μη μηδενικό ολοκλήρωμα είναι εκείνο που αφορά τον όρο με  $n' = n$ . Η τιμή του προκύπτει από τη σχέση (7.4-38β), με το κάτω όριο ίσο με μηδέν και  $b \rightarrow a$  στο πάνω όριο, με αποτέλεσμα:

$$\int_0^a J_0^2(h_{0n}r_T) r_T dr_T = \frac{1}{2} a^2 \left( \frac{d}{d\xi} J_0(\xi) \right)^2 \Big|_{\xi=h_{0n}a} = \frac{1}{2} a^2 J_1^2(\xi) \Big|_{\xi=h_{0n}a},$$

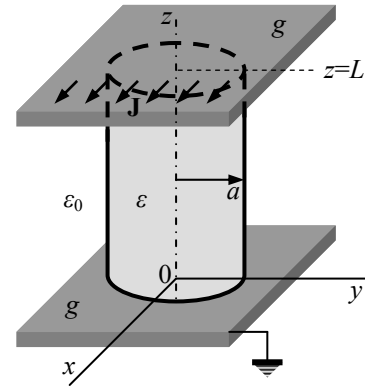
όπου χρησιμοποιήθηκε ότι  $(d/d\xi)J_0 = -J_1$ . Το ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς είναι καλά διατυπωμένο, χωρίς να έχει σημασία αν μπορεί να διατυπωθεί με τη βοήθεια καθιερωμένων συναρτήσεων ή όχι, χωρίς να δημιουργείται πρόβλημα από τον απειρισμό του λογαρίθμου. [Καθώς  $\xi \rightarrow 0$ , είναι  $\ln \xi \rightarrow -\infty$ , αλλά  $\xi \ln \xi \rightarrow 0$ , ενώ  $J_0(\xi) \rightarrow 1$ .] Συνεπώς οι συντελεστές  $C_{0n}$  είναι ίσοι με:

$$C_{0n} = -\Phi_0 \frac{\int_0^a \ln \frac{r_T}{a} J_0(h_{0n}r_T) r_T dr_T}{\frac{1}{2} a^2 J_1^2(h_{0n}a)}.$$

### Σχόλια:

- Οι συναρτήσεις  $Z_{mn}(z)$  είναι υπερβολικές ή εκθετικές, όταν ο συντελεστής  $h_{mn}$  του  $z$  είναι μη μηδενικός. Ο συντελεστής αυτός προέρχεται από το συντελεστή του  $r_T$  στις συναρτήσεις *Bessel* και στο παρόν παράδειγμα, όπως στις περισσότερες περιπτώσεις, πράγματι είναι  $h_{mn} \neq 0$ . Η μοναδική εξαίρεση συναντάται, όταν στην ακτίνα  $r_T = a$  επικρατεί ομογενής συνθήκη τύπου *Neumann*. Τότε η πρώτη ρίζα της παραγώγου  $(d/d\xi)J_0(\xi)$  είναι ίση με μηδέν,  $j_{0,1} = 0$ , και η αντίστοιχη συνάρτηση  $Z_{0,1}$  είναι γραμμικός συνδυασμός  $\{1, z\}$ . Αυτό συμβαίνει στο επόμενο *παράδ. 7.4-10*.
- Η οριακή συνθήκη  $\Phi(r_T, z=L) = -U \ln(r_T/a)$  εκδηλώνει λογαριθμικό απειρισμό, καθώς  $r_T \rightarrow 0$ . Κατά το μέτρο που αφορά την περιοχή  $0 < z < L$  με το μονωτικό υλικό, ο απειρισμός αυτός συναντάται μόνο σε ένα σημείο του άξονα, στο σημείο  $z = L$ , και τίποτε δεν δικαιολογεί απειρισμό σε άλλες τιμές του  $z$ . Αν οι συναρτήσεις  $R_{T0n}$  συμπεριλάμβαναν, κακώς, τη συνάρτηση *Bessel* β' είδους, την  $Y_0(h_{0n}r_T)$ , λόγω της ιδιότητας  $Y_0(\xi \approx 0) \approx (2/\pi) \ln \xi$ , τότε ο απειρισμός θα εμφανιζόταν αδικαιολόγητα σ' όλο το μήκος  $0 < z < L$  του άξονα.

**Παράδειγμα 7.4-10:** Ένας κύλινδρος, με ακτίνα  $a$  και μήκος  $L$ , αποτελείται από μονωτικό διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα  $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ . Η παράπλευρη κυλινδρική επιφάνειά του είναι σε επαφή με αέρα (με  $\varepsilon_0$ ), ενώ οι δύο επίπεδες βάσεις του είναι σε επαφή με δύο αγώγιμες πλάκες με ειδική αγωγιμότητα  $g$ . Η κάτω πλάκα είναι συνολικά γειωμένη, ενώ στην πάνω πλάκα με εφαρμογή κατάλληλης τάσης προκαλείται ροή ρεύματος με χωρική πυκνότητα  $\mathbf{J} = \mathbf{i}_x g E_0$ . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό του κυλίνδρου. [Η απάντηση θα περιλαμβάνει και μία ελεύθερη παράμετρο, της οποίας η τιμή δεν μπορεί να προσδιορισθεί από τα δεδομένα.]



**Επίλυση:** Το πρόβλημα οριακών συνθηκών περιλαμβάνει τη διαφορική εξίσωση  $\nabla^2 \Phi = 0$  και τις οριακές συνθήκες  $\Phi(z=0) = 0$  και  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=a} = 0$ , με προφανή την αιτιολόγηση. Στην αγώγιμη πλάκα της περιοχής  $z > L$  είναι  $\mathbf{E} = g^{-1} \mathbf{J} = \mathbf{i}_x E_0$ , και με απλή ολοκλήρωση προσδιορίζεται το δυναμικό  $\Phi_{\pi\lambda} = U - E_0 x = U - E_0 r_T \cos \varphi$ , εκφρασμένο σε κυλινδρικές συντεταγμένες λόγω της δομής του χώρου που ενδιαφέρει. Στη διεπιφάνεια μεταξύ του κυλίνδρου και της πλάκας δεν υπάρχει λόγος για ανάπτυξη διπολικού στρώματος, συνεπώς το πρόβλημα οριακών συνθηκών συμπληρώνεται με την οριακή συνθήκη  $\Phi(z=L) = U - E_0 r_T \cos \varphi$ .

Η ποσότητα  $U$  εμφανίζεται ως σταθερά ολοκλήρωσης. Αποτελεί ελεύθερη παράμετρο που περιγράφει την τιμή του δυναμικού στις θέσεις της πάνω πλάκας με  $x = 0$ , συνεπώς και στην αντίστοιχη διαμετρο της πάνω βάσης του διηλεκτρικού κυλίνδρου.

Στο εσωτερικό του κυλίνδρου, το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi, z)$  αναμένεται να εξαρτάται και από τις τρεις συντεταγμένες: από τις δύο πρώτες λόγω της οριακής συνθήκης στο  $z = L$ , από την τρίτη επειδή σε δύο διαφορετικές θέσεις  $z = 0$  και  $z = L$  το δυναμικό έχει διαφορετική τιμή. Η συνάρτηση  $r_T$ , που εμφανίζεται στην οριακή συνθήκη στο  $z = L$ , δεν είναι αποδεκτή ως συνάρτηση βάσης, όταν είναι  $\partial/\partial z \neq 0$ , όπως εδώ. Επίσης, στο χείλος της πάνω βάσης εκδηλώνεται ασυνέχεια, από  $\partial\Phi/\partial n = 0$  σε  $\partial\Phi/\partial r_T = -E_0 \cos \varphi \neq 0$ . Για τους λόγους αυτούς, το δυναμικό θα εκφραστεί ως σειρά. Κατά σειρά τα βήματα της επίλυσης είναι:

- (α) Η διάταξη χαρακτηρίζεται από περιοδικότητα και συμμετρία ως προς τη γωνιακή θέση  $\varphi = 0$ , οπότε κατ' αρχήν κατάλληλες είναι οι συναρτήσεις  $F_m = \cos(m\varphi)$ , με  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Η μόνη οριακή συνθήκη που επιβάλλει εξάρτηση από τη γωνία  $\varphi$  είναι εκείνη στο  $z = L$ . Οι δύο όροι της είναι ανάλογοι προς τη μονάδα και το  $\cos \varphi$ , δηλαδή τις συναρτήσεις  $F_{m=0}$  και  $F_{m=1}$ . Συνεπώς, εκτιμάται ότι συνεισφέρουν μόνο οι όροι με  $m = 0$  και  $m = 1$ .

(β) Στην περιγραφή της διάταξης δεν υποδεικνύεται κανένα αίτιο για απειρισμό του δυναμικού, συνεπώς από τις συναρτήσεις  $R_T$  εξαιρούνται οι  $Y_m$ . Η ομογενής οριακή συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$  στην κυλινδρική επιφάνεια  $r_T = a$  απαιτεί να μηδενίζεται εκεί η παράγωγος. Αυτά τα δεδομένα οδηγούν στην επιλογή των ακτινικών συναρτήσεων ως  $R_{Tmn}(r_T) = J_m(h_{mn}r_T)$ , με  $h_{mn} = j'_{m,n}/a$ .

Η  $n$ -στή ρίζα  $j'_{m,n}$  της παραγώγου  $(d/d\xi)J_m(\xi)$  έχει, κατά κανόνα, μη μηδενικές τιμές. Η μοναδική εξαίρεση είναι όταν  $m = 0$  και  $n = 1$ . Τότε, είναι  $j'_{0,1} = 0$ , δηλαδή  $h_{0,1} = 0$ , και η συνάρτηση που αντιστοιχεί σε αυτή την τιμή είναι η  $R_{T0,1}(r_T) = J_0(h_{0,1}r_T) = J_0(0) = 1$ .

(γ) Στις συναρτήσεις με εναλλασσόμενη συμπεριφορά, τις  $F_m(\varphi)$  και  $R_{Tmn}(r_T)$ , προσαρτάται η κατάλληλη τρίτη συνάρτηση με μονότονη συμπεριφορά. Όταν είναι  $h_{mn} \neq 0$ , οι συναρτήσεις αυτές είναι εκθετικές ή υπερβολικές με όρισμα το γινόμενο  $h_{mn}z$ . Για να ικανοποιείται η συνθήκη  $\Phi(z=0) = 0$  επιλέγεται το υπερβολικό ημίτονο, κατά προτίμηση διαιρεμένο με την τιμή του στο  $z = L$ , εκεί όπου επικρατεί η μη ομογενής οριακή συνθήκη. Επομένως, η πρόσφορη επιλογή είναι  $Z_{mn} = C_{mn}\sinh(h_{mn}z)/\sinh(h_{mn}L)$ .

Στις τιμές του  $h_{mn}$  περιλαμβάνεται όμως και η τιμή  $h_{0,1} = 0$ , με τις αντίστοιχες συναρτήσεις  $Z_{0,1}$  να σχηματίζονται ως κατάλληλοι γραμμικοί συνδυασμοί των  $\{1, z\}$ . Για να έχει η συνάρτηση αυτή την απαιτούμενη μηδενική τιμή στο  $z = 0$  και κατά το δυνατόν απλή τιμή στο  $z = L$ , ο προφανής γραμμικός συνδυασμός είναι  $Z_{0,1} = C_{0,1}(z/L)$ .

(δ) Οι συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$ ,  $R_{Tmn}(r_T)$  και  $Z_{mn}(z)$ , που προσδιορίστηκαν στα τρία πρώτα βήματα, συνεργάζονται για να γραφεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό στο εσωτερικό του διηλεκτρικού κυλίνδρου ως:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = C_{0,1} \frac{z}{L} + \sum_{\substack{m,n \\ \neq (0,1)}} C_{mn} J_m(h_{mn}r_T) \cos(m\varphi) \frac{\sinh(h_{mn}z)}{\sinh(h_{mn}L)}.$$

Από την άθροιση εξαιρείται μόνο το ζευγάρι  $m = 0, n = 1$ . Αυτό σημαίνει, βέβαια, ότι στην άθροιση συμπεριλαμβάνονται και τιμές με  $m = 0$  αλλά με  $n \neq 1$ , όπως και τιμές με  $n = 1$ , αλλά  $m \neq 0$ . Με την παραπάνω έκφραση για το δυναμικό, η μη ομογενής οριακή συνθήκη στην πάνω βάση  $z = L$  περιγράφεται από την ισότητα:

$$\Phi(r_T, \varphi, z = L) = C_{0,1} + \sum_{\substack{m,n \\ \neq (0,1)}} C_{mn} J_m(h_{mn}r_T) \cos(m\varphi) = U - E_0 r_T \cos \varphi.$$

Στις σχέσεις αυτές έγιναν οι αντικαταστάσεις  $m \rightarrow m'$  και  $n \rightarrow n'$ , για να αποφευχθούν ασάφειες στην εφαρμογή της ορθογωνιότητας.

(ε<sub>1</sub>) Η εφαρμογή της ορθογωνιότητας είναι προτιμότερο να γίνει σε δύο βήματα, ξεκινώντας με τις συναρτήσεις  $F_m = \cos(m\varphi)$ , με  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Πολλαπλασιάζοντας διαδοχικά με τη μονάδα (τον όρο με  $m = 0$ ) και με κάθε άλλο  $\cos(m\varphi)$  και ολοκληρώνοντας στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ , ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα με πλάτος  $2\pi$ , σχηματίζονται οι ισότητες, που αντιστοιχούν σε  $m = 0, m = 1$  και  $m = 2, 3, 4, \dots$ :

$$C_{0,1} \int_0^{2\pi} d\varphi + \sum_{\substack{m',n' \\ (\neq 0,1)}} C_{m'n'} J_{m'}(h_{m'n'} r_T) \int_0^{2\pi} \cos(m'\varphi) d\varphi = U \int_0^{2\pi} d\varphi - E_0 r_T \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi,$$

$$C_{0,1} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \sum_{\substack{m',n' \\ (\neq 0,1)}} C_{m'n'} J_{m'}(h_{m'n'} r_T) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cos(m'\varphi) d\varphi = U \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi - E_0 r_T \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$C_{0,1} \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi + \sum_{\substack{m',n' \\ (\neq 0,1)}} C_{m'n'} J_{m'}(h_{m'n'} r_T) \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos(m'\varphi) d\varphi$$

$$= U \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi - E_0 r_T \int_0^{2\pi} \cos(m\varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

Η ορθογωνιότητα των συνημιτόνων απλοποιεί σημαντικά τις εκφράσεις αυτές. Εισάγοντας και τις τιμές των ολοκληρωμάτων (όπως,  $\int_0^{2\pi} \cos^2(m\varphi) d\varphi = \pi$ , κλπ.) οι αντίστοιχες σχέσεις είναι:

$$\pi \sum_{n'=1,2,\dots} (1 + \delta_{n'1}) C_{0n'} J_0(h_{0n'} r_T) = 2\pi U \quad (m=0),$$

$$\pi \sum_{n'=1,2,\dots} C_{1n'} J_1(h_{1n'} r_T) = -\pi E_0 r_T \quad (m=1),$$

$$\pi \sum_{n'=1,2,\dots} C_{mn'} J_m(h_{mn'} r_T) = 0 \quad (m=2,3,4,\dots).$$

Η πρώτη άθροιση περιλαμβάνει και τον όρο  $n' = 1$ , για τον οποίο  $h_{0,1} = 0$  και  $J_0 = 1$ .

(ε<sub>2</sub>) Για να αξιοποιηθεί και η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $J_m(h_{mn} r_T)$ :

- (i) κάθε ισότητα πολλαπλασιάζεται με τη συνάρτηση βάρους  $r_T$  και τη συνάρτηση *Bessel* της αντίστοιχης τάξης ( $m = 0$  στην πρώτη ισότητα,  $m = 1$  στη δεύτερη και  $m = 2, 3, 4, \dots$  στις επόμενες) και με όρισμα το γινόμενο  $h_{mn} r_T$  για το αντίστοιχο  $m$  και κάποιο συγκεκριμένο  $n$ , τον δείκτη, που δίνει την τάξη της αντίστοιχης ρίζας  $j_{m,n}'$  της παραγώγου  $(d/d\xi)J_m(\xi)$ ,
- (ii) οι εκφράσεις που σχηματίζονται, ολοκληρώνονται στο διάστημα ορθογωνιότητας  $0 < r_T < a$ .



Οι ενέργειες αυτές παρουσιάζονται στις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{n'=1,2,\dots} (1+\delta_{n'}) C_{0n'} \int_0^a J_0(h_{0n'} r_T) J_0(h_{0n'} r_T) r_T dr_T &= U \int_0^a J_0(h_{0n'} r_T) r_T dr_T \\ \Rightarrow \frac{1+\delta_{n1}}{2} C_{0n} \frac{a^2}{2} &= U \int_0^a J_0(h_{0n} r_T) r_T dr_T \quad (m=0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n'=1,2,\dots} C_{1n'} \int_0^a J_1(h_{1n'} r_T) J_1(h_{1n'} r_T) r_T dr_T &= -E_0 \int_0^a J_1(h_{1n} r_T) r_T^2 dr_T \\ \Rightarrow C_{1n} \frac{a^2}{2} J_1'^2(\xi) \Big|_{\xi=h_{1n}a} &= -E_0 \int_0^a J_1(h_{1n} r_T) r_T^2 dr_T \quad (m=1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n'=1,2,\dots} C_{mn'} \int_0^a J_m(h_{mn'} r_T) J_m(h_{mn'} r_T) r_T dr_T &= 0 \\ \Rightarrow C_{mn} \frac{a^2}{2} J_m'^2(\xi) \Big|_{\xi=h_{mn}a} &= 0 \quad (m=2,3,4,\dots). \end{aligned}$$

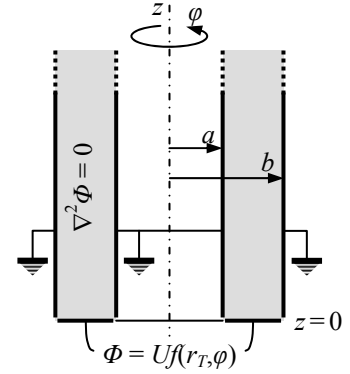
Από τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στη δεξιά πλευρά, το πρώτο είναι ίσο με  $a^2/2$  όταν  $n=1$ , που τότε  $h_{0,1}=0$  και  $J_0=1$ , και με μηδέν όταν  $n=2, 3, 4, \dots$ , επειδή στην ολοκληρωτέα παράσταση υποκρύπτεται ένας συντελεστής  $1=J_0(h_{0,1}r_T)$ , δηλαδή, συνάρτηση ορθογώνια προς την  $J_0(h_{0n}r_T)$ . Έτσι, είναι  $C_{0,1}=U$  και  $C_{0,n \neq 1}=0$ . Μη μηδενική τιμή έχει, για όλα τα  $n$ , και το ολοκλήρωμα που αντιστοιχεί σε  $m=1$ , συνεπώς όλοι οι συντελεστές  $C_{1n}$  είναι μη μηδενικοί, ενώ, αντίθετα, για όλους τους υπόλοιπους συντελεστές (με  $m=2, 3, 4, \dots$ ) είναι  $C_{mn}=0$ . Γράφοντας μόνο τους μη μηδενικούς όρους, το δυναμικό στο εσωτερικό του κυλίνδρου είναι ίσο με:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = U \frac{z}{L} - 2E_0 \sum_{n=1,2,\dots} \frac{\int_0^a J_1(h_{1n} r_T') r_T'^2 dr_T'}{a^2 J_1'^2(\xi) \Big|_{\xi=j_{1n}}} \frac{\sinh(h_{1n} z)}{\sinh(h_{1n} L)} J_1(h_{1n} r_T) \cos \varphi, \quad \text{με } h_{1n} = \frac{j_{1n}}{a}.$$

### Σχόλια:

- Το αποτέλεσμα επιβεβαιώνει την εκτίμηση στο τέλος του βήματος ( $\alpha$ ), ότι μόνο οι όροι με  $m=0$  και  $m=1$  συνεισφέρουν.
- Με επαλληλία στο αρχικό πρόβλημα,  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , με  $\Phi_1(z=L) = U$  και  $\Phi_2(z=L) = -E_0 r_T \cos \varphi$ , και κατά τα λοιπά  $\nabla^2 \Phi_{1,2} = 0$ ,  $\Phi_{1,2}(z=0) = 0$  και  $(\partial \Phi_{1,2} / \partial n) \Big|_{r_T=a} = 0$ , στο επιμέρους πρόβλημα για το  $\Phi_1$  αναγνωρίζεται μονοδιάστατη εξάρτηση,  $\Phi_1 = \Phi_1(z)$ . Ολοκληρώνοντας την  $\nabla^2 \Phi_1 = d^2 \Phi_1 / dz^2 = 0$  με τις οριακές συνθήκες στα  $z=0, L$ , προκύπτει  $\Phi_1 = Uz/L$ , ο όρος με  $m=0$ . Πάντως, το  $\Phi_2$  θα προσδιορισθεί με χωρισμό μεταβλητών.

**Παράδειγμα 7.4-11:** Δύο αγώγιμα ομοαξονικά κυλινδρικά κελύφη, με ακτίνες  $a$  και  $b$  ( $> a$ ) και ημιάπειρο μήκος, είναι σε δυναμικό  $\Phi = 0$ . Στο επίπεδο  $z = 0$ , το ηλεκτροστατικό δυναμικό κατανέμεται ως  $\Phi(a < r_T < b) = Uf(r_T, \varphi)$ , όπου η συνάρτηση  $f$  θεωρείται γνωστή και η γωνία  $\varphi$  ορίζεται στο διάστημα  $-\pi < \varphi < +\pi$ . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό στον ενδιάμεσο χώρο, στον οποίο ικανοποιείται η εξίσωση του Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ .



**Επίλυση:** Η συνάρτηση  $f(r_T, \varphi)$  έχει γενική μορφή, επομένως, το δυναμικό θα αναπτυχθεί σε σειρά,  $\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{mn} R_{Tmn}(r_T) F_m(\varphi) Z_n(z)$ . Η διάταξη καλύπτει όλες τις γωνίες  $\varphi$ , χωρίς ενδιάμεσα όρια, συνεπώς είναι  $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ . Η γενικότητα της συνάρτησης  $f$  δεν δίνει καμία πληροφορία για το αν η διάταξη χαρακτηρίζεται από συμμετρία ή αντισυμμετρία ως προς κάποια γωνία  $\varphi_0$ , οπότε στις συναρτήσεις  $F_m$  περιλαμβάνονται αυθυπόστατα τόσο τα συνημίτονα, όσο και τα ημίτονα,  $F_m(\varphi) = A_m \sin(m\varphi) + B_m \cos(m\varphi)$ , με  $m = 1, 2, 3, \dots$ , καθώς και  $F_{m=0} = B_0$ , χωρίς να υπάρχει καμία δυνατότητα να προσδιορισθεί εκ των προτέρων σχέση που να συνδέει τους συντελεστές  $A_m$  και  $B_m$ .

Σε δύο τιμές της ακτίνας  $r_T$ , στις κυλινδρικές επιφάνειες  $r_T = a$  και  $r_T = b$ , το δυναμικό ικανοποιεί ομογενή οριακή συνθήκη, συνεπώς οι ακτινικές συναρτήσεις  $R_{Tmn}(r_T)$  έχουν εναλλασσόμενη συμπεριφορά, συγκεκριμένα, είναι γραμμικοί συνδυασμοί από συναρτήσεις Bessel,  $R_{Tmn} = \{J_m(h_{mn}r_T), Y_m(h_{mn}r_T)\}$ . Εδώ ενδιαφέρει η περιοχή  $a < r_T < b$ , στην οποία δεν περιλαμβάνεται ο άξονας, η θέση απειρισμού των συναρτήσεων β' είδους. Δεν υπάρχει κανείς λόγος, εδώ, να εξαιρεθούν αυτές οι συναρτήσεις, οπότε θα κρατηθούν και οι δύο όροι,  $R_{Tmn} = \{J_m(h_{mn}r_T), Y_m(h_{mn}r_T)\}$ . Προκειμένου, όμως, να είναι  $\Phi(r_T = a) = 0$ , οι ακτινικές συναρτήσεις επιλέγονται με μορφή  $R_{Tmn}(r_T) = C_{mn} D_m(h_{mn}r_T; h_{mn}a)$ , όπου η συνάρτηση  $D_m(\xi; \xi_0)$  ορίζεται ως σταθμισμένη διαφορά των δύο συναρτήσεων Bessel τάξης  $m$ , με την ιδιότητα  $D_m(\xi = \xi_0; \xi_0) = 0$ :

$$D_m(\xi; \xi_0) = Y_m(\xi_0) J_m(\xi) - J_m(\xi_0) Y_m(\xi),$$

και οι τιμές των  $h_{mn}$  προσδιορίζονται, ώστε να ικανοποιείται και η άλλη ομογενής οριακή συνθήκη,  $\Phi(r_T = b) = 0$ , από τη σχέση  $D_m(h_{mn}r_T; h_{mn}a)|_{r_T=b} = 0$ , ή:

$$Y_m(h_{mn}a) J_m(h_{mn}b) - J_m(h_{mn}a) Y_m(h_{mn}b) = 0.$$

Οι συναρτήσεις της τρίτης οικογένειας πρέπει να έχουν μονότονη συμπεριφορά, και επειδή αφορούν τον άξονα  $z$ , οι συναρτήσεις  $Z_{mn}(z)$  πρέπει να είναι εκθετικές ή υπερβολικές. Η περιοχή που ενδιαφέρει εκτείνεται μέχρι το θετικό άπειρο, και προκειμένου το δυναμικό να μην αποκλίνει, η κατάλληλη επιλογή είναι  $Z_{mn}(z) = \exp(-h_{mn}z)$ .

Με τις επιλογές που έχουν γίνει, το δυναμικό γράφεται ως:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{m,n} [A_{mn} \sin(m\varphi) + B_{mn} \cos(m\varphi)] D_m(h_{mn}r_T; h_{mn}a) \exp(-h_{mn}z).$$

Στη σχέση αυτή, αντί για τους συντελεστές  $A_m$ ,  $B_m$  και  $C_{mn}$  έχουν εισαχθεί τα γινόμενά τους,  $A_{mn} = A_m C_{mn}$  και  $B_{mn} = B_m C_{mn}$ , από τα οποία και μόνο εξαρτάται το δυναμικό. Ο προσδιορισμός τους θα γίνει αξιοποιώντας την τελευταία, τη μη ομογενή οριακή συνθήκη στο  $z = 0$ :

$$\Phi(r_T, \varphi, z = 0) = \sum_{m',n'} [A_{m'n'} \sin(m'\varphi) + B_{m'n'} \cos(m'\varphi)] D_{m'}(h_{m'n'}r_T, h_{m'n'}a) = Uf(r_T, \varphi),$$

με  $m \rightarrow m'$  και  $n \rightarrow n'$ , για να είναι πιο σαφής η εφαρμογή της ορθογωνιότητας.

Πλήρη σύνολα ορθογώνιων συναρτήσεων αποτελούν τόσο οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, με  $m = 0, 1, 2, \dots$  και σε οποιοδήποτε διάστημα με πλάτος  $2\pi$ , όσο και οι γραμμικοί συνδυασμοί  $D_m$  από συναρτήσεις *Bessel*, χωριστά για κάθε  $m$ , με  $n = 1, 2, 3, \dots$  και στο διάστημα  $a < r_T < b$ , με συνάρτηση βάρους την ακτίνα  $r_T$ . Για να προσδιορισθούν οι συντελεστές  $A_{mn}$  γίνονται οι ενεργειες που αποτυπώνονται στις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} & \sum_{m',n'} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) [A_{m'n'} \sin(m'\varphi) + B_{m'n'} \cos(m'\varphi)] \right\} \\ & \quad \times \left\{ \int_a^b dr_T r_T D_m(h_{mn}r_T, h_{mn}a) D_{m'}(h_{m'n'}r_T, h_{m'n'}a) \right\} \\ & = U \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \left[ \sin(m\varphi) \int_a^b dr_T r_T D_m(h_{mn}r_T, h_{mn}a) f(r_T, \varphi) \right] \\ & \Rightarrow A_{mn} \pi \frac{1}{2} \left[ \left( b \frac{dD_m(\xi; \xi_0)}{d\xi} \Big|_{\substack{\xi=h_{mn}b \\ \xi_0=h_{mn}a}} \right)^2 - \left( a \frac{dD_m(\xi; \xi_0)}{d\xi} \Big|_{\substack{\xi=h_{mn}a \\ \xi_0=h_{mn}a}} \right)^2 \right] \\ & = U \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \left[ \sin(m\varphi) \int_a^b dr_T r_T D_m(h_{mn}r_T, h_{mn}a) f(r_T, \varphi) \right]. \end{aligned}$$

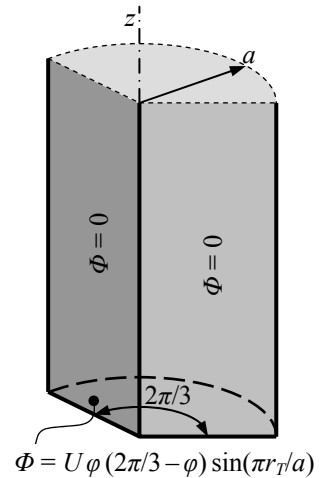
Στην αριστερή πλευρά, η ολοκλήρωση ως προς  $\varphi$  μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε διάστημα με πλάτος  $2\pi$ , όπως στο  $0 < \varphi < 2\pi$ . Κατά την ολοκλήρωση αυτή, μόνο ο όρος  $\sin(m'\varphi)$  με  $m' = m$  δίνει μη μηδενικό αποτέλεσμα, ίσο με  $\pi$ . Όμοια, κατά την ολοκλήρωση ως προς  $r_T$ , επιβιώνει μόνο ο όρος με  $n' = n$ . Το αποτέλεσμα αυτής της ολοκλήρωσης βασίζεται στη σχέση (7.4-38β), με δεδομένο ότι στα δύο άκρα η συνάρτηση  $D_m(\xi; \xi_0)$  είναι ίση με μηδέν: στο άκρο  $r_T = a$ , με βάση τον ορισμό  $\xi_0 = h_{mn}a$ , στο άκρο  $r_T = b$ , επειδή έτσι έχουν επιλεγεί οι τιμές των  $h_{mn}$ . Στη δεξιά πλευρά, η ολοκλήρωση ως προς  $\varphi$  πρέπει να γίνει στο διάστημα  $-\pi < \varphi < +\pi$ , στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση  $f$ , σύμφωνα με τα δεδομένα.

Όπως μόλις προσδιορίστηκαν οι συντελεστές  $A_{mn}$ , με ταυτόσημη διαδικασία προσδιορίζονται και οι συντελεστές  $B_{mn}$  των συνημιτόνων:

$$\begin{aligned} & \sum_{m',n'} \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) [A_{m'n'} \sin(m'\varphi) + B_{m'n'} \cos(m'\varphi)] \right\} \\ & \quad \times \left\{ \int_a^b dr_T r_T D_m(h_{mn} r_T, h_{mn} a) D_{m'}(h_{m'n'} r_T, h_{m'n'} a) \right\} \\ & = U \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \left[ \cos(m\varphi) \int_a^b dr_T r_T D_m(h_{mn} r_T, h_{mn} a) f(r_T, \varphi) \right] \\ & \Rightarrow B_{mn} \pi (1 + \delta_{m,0}) \frac{1}{2} \left[ \left( b \frac{dD_m(\xi; \xi_0)}{d\xi} \Big|_{\substack{\xi=h_{mn}b \\ \xi_0=h_{mn}a}} \right)^2 - \left( a \frac{dD_m(\xi; \xi_0)}{d\xi} \Big|_{\substack{\xi=h_{mn}a \\ \xi_0=h_{mn}a}} \right)^2 \right] \\ & = U \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \left[ \cos(m\varphi) \int_a^b dr_T r_T D_m(h_{mn} r_T, h_{mn} a) f(r_T, \varphi) \right]. \end{aligned}$$

Απλά, οι σχέσεις που δίνουν τους συντελεστές  $A_{mn}$  αφορούν τιμές  $m = 1, 2, 3, \dots$ , ενώ στις σχέσεις για τους συντελεστές  $B_{mn}$  περιλαμβάνεται και το ενδεχόμενο  $m = 0$ , όπου  $\delta_{m=0,0} = 1$ .

**Παράδειγμα 7.4-12:** Η διάταξη του σχήματος αποτελείται από το ένα τρίτο ενός ημιάπειρου κυλίνδρου με ακτίνα  $a$ . Στη βάση  $z = 0$  είναι  $\Phi = U \varphi (2\pi/3 - \varphi) \sin(\pi r_T/a)$ , ενώ οι παράπλευρες οριακές επιφάνειες στα  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 2\pi/3$  και  $r_T = a$  είναι σε δυναμικό  $\Phi = 0$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r_T, \varphi, z)$  στο εσωτερικό της διάταξης, στο οποίο είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ .



**Επόλωση:** Οι συναρτήσεις που συναντώνται στην έκφραση για το δυναμικό της κάτω βάσης δεν είναι αποδεκτές σε κυλινδρικές συντεταγμένες για την περιγραφή του δυναμικού, συνεπώς η περιγραφή θα γίνει με ανάπτυγμα σε σειρά,  $\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{mn} R_{Tmn}(r_T) F_m(\varphi) Z_n(z)$ .

Η εξάρτηση από τη γωνία  $\varphi$  περιγράφεται με συναρτήσεις  $F_m(\varphi) = \{\sin(m\varphi), \cos(m\varphi)\}$ . Η διάταξη δεν εκτείνεται σε όλες τις τιμές της γωνίας  $\varphi$ , συνεπώς δεν υπάρχει κανένας λόγος, όπως η περιοδικότητα, που να επιβάλλει ακέραιες τιμές για τη σταθερά  $m$ . Οι αποδεκτές συναρτήσεις  $F_m(\varphi)$  καθορίζονται από τις ομογενείς συνθήκες στα όρια  $\varphi = 0$  και  $\varphi = 2\pi/3$ . Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις αυτές έχουν τη μορφή  $F_m(\varphi) = \sin(m\varphi)$ , ώστε να είναι  $\Phi(\varphi = 0) = 0$ . Οι τιμές της σταθεράς  $m$  είναι  $m2\pi/3 = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ , ώστε να είναι, επίσης,  $\Phi(\varphi = 2\pi/3) = 0$ , επομένως είναι  $m = 3/2, 6/2, 9/2, \dots$ , ίσο με τα ακέραια πολλαπλάσια του ενάμισι.

Διατάξεις, στις οποίες η σταθερά  $m$  έχει μη ακέραιες τιμές, έχουν ήδη παρουσιασθεί στην παράγραφο 7.3, αλλά και στην 7.4.1, στην οποία και έχει σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις *Bessel* ορίζονται χωρίς να γίνεται καμία διάκριση για το αν η τάξη  $m$  είναι ακέραιη ή όχι. Έτσι και στην παρούσα διάταξη, στις ακτινικές συναρτήσεις  $R_{Tmn}(r_T) = \{J_m(h_{mn}r_T), Y_m(h_{mn}r_T)\}$  η τάξη είναι κλασματική,  $m = 3/2, 6/2, 9/2, \dots$  Για να μην απειρίζεται το δυναμικό στον άξονα, πρέπει να ληφθεί  $R_{Tmn}(r_T) = J_m(h_{mn}r_T)$ , χωρίς τη συνάρτηση β' είδους, και με  $h_{mn}a = j_{mn}$ , τη  $n$ -στή ρίζα της  $J_m(\xi)$ , όπως επιβάλλει η συνθήκη  $\Phi(r_T = a) = 0$ . Τέλος, η εξάρτηση από το  $z$  καλύπτεται από συναρτήσεις  $Z_{mn}(z) = \exp(-h_{mn}z)$ , ώστε να είναι  $\Phi(z = \infty) \neq \infty$ .

Με βάση τα προηγούμενα, το δυναμικό περιγράφεται από τη σειρά:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \sum_{m,n} C_{mn} J_m(h_{mn}r_T) \sin(m\varphi) \exp(-h_{mn}z),$$

με την προσάρτηση και ενός συντελεστή  $C_{mn}$  σε κάθε όρο του διπλού αθροίσματος. Η τιμή των  $C_{mn}$  θα υπολογισθεί από την απομένουσα οριακή συνθήκη, αυτή στο  $z = 0$ , που αποδίδεται από την ισότητα:

$$\Phi(r_T, \varphi, z = 0) = \sum_{m,n} C_{mn} J_m(h_{mn}r_T) \sin(m\varphi) = U\varphi \left( \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \sin\left(\frac{\pi r_T}{a}\right).$$

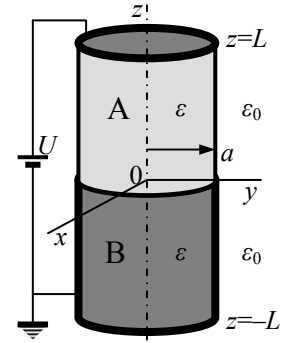
Η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $F_m(\varphi)$  στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi/3$  και των  $J_m(h_{mn}r_T)$  στο διάστημα  $0 < r_T < a$ , με συνάρτηση βάρους ίση με  $r_T$ , αξιοποιείται πολλαπλασιάζοντας κάθε πλευρά με  $r_T J_m(h_{mn}r_T) \sin(m\varphi)$  και ολοκληρώνοντας στις δύο διαστάσεις της περιοχής ορθογωνιότητας:

$$\begin{aligned} & \sum_{m',n'} C_{m'n'} \left[ \int_0^a dr_T r_T J_{m'}(h_{m'n'}r_T) J_m(h_{mn}r_T) \right] \left[ \int_0^{2\pi/3} d\varphi \sin(m\varphi) \sin(m'\varphi) \right] \\ & = U \left[ \int_0^{2\pi/3} d\varphi \varphi \left( \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \sin(m\varphi) \right] \left[ \int_0^a dr_T r_T J_m(h_{mn}r_T) \sin\left(\frac{\pi r_T}{a}\right) \right]. \end{aligned}$$

Τα ολοκληρώματα στην αριστερή πλευρά είναι ίσα με μηδέν, εκτός αν είναι  $n' = n$  και αντίστοιχα  $m' = m$ . Εισάγοντας τις τιμές των μη μηδενικών ολοκληρωμάτων, ολοκληρώνεται η επίλυση, με τις σχέσεις για τις σταθερές  $C_{mn}$ :

$$\begin{aligned} & C_{mn} \frac{\pi}{3} \frac{a^2}{2} \left( \frac{dJ_m(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=h_{mn}a} \right)^2 \\ & = U \left[ \int_0^{2\pi/3} d\varphi \varphi \left( \frac{2\pi}{3} - \varphi \right) \sin(m\varphi) \right] \left[ \int_0^a dr_T r_T J_m(h_{mn}r_T) \sin\left(\frac{\pi r_T}{a}\right) \right]. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 7.4-13:** Σε έναν κύλινδρο, με ακτίνα  $a$  και μήκος  $2L$ , που αποτελείται από διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα  $\varepsilon \gg \varepsilon_0$ , το κάτω μισό της παράπλευρης επιφάνειάς του και η πάνω βάση του καλύπτονται από πολύ καλό αγωγό, σε δυναμικό  $\Phi = 0$  και  $\Phi = U$ , αντίστοιχα, ενώ η υπόλοιπη εξωτερική επιφάνειά του (η κάτω βάση και το πάνω μισό της παράπλευρης επιφάνειας) είναι σε επαφή με αέρα (με  $\varepsilon_0$ ). Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό  $\Phi$  στο εσωτερικό του κυλίνδρου.



**Επίλυση:** Το πρόβλημα οριακών τιμών αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση  $\nabla^2 \Phi = 0$  στο εσωτερικό,  $\Phi = 0$  και  $\Phi = U$  στα τμήματα της εξωτερικής επιφάνειας με την αγωγίμη επικάλυψη, και  $\partial\Phi/\partial n = 0$  στο υπόλοιπο του εξωτερικού ορίου, επειδή η ιδιότητα  $\varepsilon_0 \ll \varepsilon$  του παρακείμενου χώρου προσεγγίζεται από  $\varepsilon_0 \approx 0$ , συνεπώς  $\mathbf{D}_0 \approx 0$  κλπ. Στο πρόβλημα αυτό, τα δύο μισά της παράπλευρης επιφάνειας υπακούουν σε οριακή συνθήκη με διαφορετικό τύπο, στο κάτω μισό *Dirichlet*, στο πάνω μισό *Neumann*. Η διάταξη έχει χαρακτηριστικά, όπως στις παραγρ. 7.2.3 και 7.3.3. Πρόκειται για σύνθετη διάταξη, που σχηματίζεται από τη συνένωση δύο απλών. Όπως και στις σύνθετες διατάξεις των προηγούμενων παραγράφων, θα σχηματισθεί η γενική λύση, που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες στο εξωτερικό όριο κάθε επιμέρους απλής διάταξης, και ακολούθως θα εξισωθούν οι τιμές του δυναμικού και της κάθετης παραγώγου του στη διεπιφάνεια μεταξύ των δύο απλών διατάξεων.

Ας τοποθετηθεί η αρχή των συντεταγμένων στο κέντρο του κυλίνδρου, και ας ονομασθεί «A» η απλή διάταξη με  $0 < z < L$ , στην οποία είναι  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r_T=a} = 0$  και  $\Phi(z=L) = U$ , και «B» εκείνη με  $-L < z < 0$ , με οριακές συνθήκες  $\Phi(r_T=a) = 0$  και  $(\partial\Phi/\partial n)|_{z=-L} = 0$ . Με την εμπειρία που έχει ήδη αποκτηθεί, οι γενικές εκφράσεις για το δυναμικό κάθε επί μέρους διάταξης μπορούν να σχηματισθούν αμέσως (βλ. και το πρώτο **σχόλιο**):

$$\Phi_A(r_T, z) = U \frac{z}{L} + A_1 \left(1 - \frac{z}{L}\right) + \sum_{n=2,3,\dots} A_n J_0(h_{An} r_T) \sinh[h_{An}(L-z)], \quad \text{με } h_{An} a = j'_{0n},$$

$$\Phi_B(r_T, z) = \sum_{n=1,2,\dots} B_n J_0(h_{Bn} r_T) \cosh[h_{Bn}(L+z)], \quad \text{με } h_{Bn} a = j_{0n}.$$

Και στις δύο εκφράσεις έχει ληφθεί υπ' όψιν, ότι σε όλα τα στοιχεία της η διάταξη χαρακτηρίζεται από  $\partial/\partial\varphi = 0$ , που σημαίνει ότι  $m = 0$  και  $F_{m=0} = 1$ . Για να αποφευχθεί ο απειρισμός στον άξονα, μόνο οι συναρτήσεις  $J_0$  συμμετέχουν στην περιγραφή του δυναμικού. Και για λόγους απλούστευσης, στους συντελεστές  $A_n$  και  $B_n$ , καθώς και στις αντίστοιχες σταθερές  $h_{An}$

και  $h_{Bn}$ , έχει παραλειφθεί ο δείκτης  $m = 0$ . Τέλος, στην έκφραση για το  $\Phi_A$  ο όρος εκτός άθροισης αντιστοιχεί σε  $n = 1$ , για το οποίο είναι  $j'_{0,1} = 0$ , συνεπώς και  $h_{A1} = 0$ , οπότε  $J_0(h_{A1}r_T) = 1$ . Αλλά, ο γραμμικός συνδυασμός  $Z_{n=1}(z) = \{1, z\}$  έχει γραφεί με τρόπο που να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη στο  $z = L$ .

Στο τμήμα  $r_T < a$  του επιπέδου  $z = 0$  πρέπει να είναι  $\Phi_A = \Phi_B$ , επειδή δεν υπάρχει αίτιο για ασυνέχεια, ειδικότερα, διπολικό στρώμα. Αυτό περιγράφεται από την ισότητα:

$$A_1 + \sum_{n=2,3,\dots} A_n J_0(h_{An}r_T) \sinh(h_{An}L) = \sum_{n=1,2,\dots} B_n J_0(h_{Bn}r_T) \cosh(h_{Bn}L).$$

Επίσης, στον ίδιο δίσκο πρέπει να είναι  $\partial\Phi_A/\partial z = \partial\Phi_B/\partial z$ , πάλι επειδή δεν υπάρχει αίτιο ασυνέχειας, ειδικότερα, βηματική μεταβολή στην επιτρεπτότητα, ή επιφανειακό φορτίο). Επομένως, πρέπει να ικανοποιείται και η ισότητα:

$$\frac{U}{L} - \frac{A_1}{L} - \sum_{n=2,3,\dots} A_n h_{An} J_0(h_{An}r_T) \cosh(h_{An}L) = \sum_{n=1,2,\dots} B_n h_{Bn} J_0(h_{Bn}r_T) \sinh(h_{Bn}L).$$

Πρόκειται για δύο ισότητες μεταξύ συναρτήσεων της ακτίνας  $r_T$  στο διάστημα  $0 < r_T < a$ . Στο διάστημα αυτό είναι διαθέσιμες δύο οικογένειες ορθογώνιων συναρτήσεων, οι  $J_0(h_{An}r_T)$  και οι  $J_0(h_{Bn}r_T)$ , και οι δύο με συνάρτηση βάρους την ακτίνα  $r_T$ . Κατά την εφαρμογή της ορθογωνιότητας, τα ολοκληρώματα με μη μηδενική τιμή προσδιορίζονται από τη σχέση (7.4-38β), που για  $m = 0$  και κάτω όριο στο μηδέν εξειδικεύονται (με  $dJ_0/d\xi = -J_1$ ) σε:

$$\int_0^a dr_T r_T J_0^2(h_n r_T) = \frac{a^2}{2} \left[ J_1^2(\xi) + J_0^2(\xi) \right] \Big|_{\xi=h_n a} = \frac{a^2}{2} \begin{cases} J_0^2(\xi = h_{An} a = j'_{0n}), & (h_n = h_{An}) \\ J_1^2(\xi = h_{Bn} a = j_{0n}). & (h_n = h_{Bn}) \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας στην πρώτη ισότητα την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $J_0(h_{Bn}r_T)$ , βλ. όμως και το δεύτερο **σχόλιο**, σχηματίζονται αυτοτελείς εξισώσεις, από μία για κάθε  $B_n$ :

$$B_n \cosh(h_{Bn}L) \frac{a^2}{2} J_1^2(j_{0n}) = A_1 \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{Bn}r_T) + \sum_{n'=2,3,\dots} A_{n'} \sinh(h_{An'}L) \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{Bn'}r_T) J_0(h_{An'}r_T).$$

Παρόμοια, με την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $J_0(h_{An}r_T)$ , η δεύτερη ισότητα δίνει τις εξισώσεις για τους συντελεστές  $A_n$ :

$$\frac{A_1}{L} \frac{a^2}{2} = - \sum_{n'=1,2,\dots} B_{n'} h_{Bn'} \sinh(h_{Bn'}L) \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{Bn'}r_T) + \frac{U}{L} \frac{a^2}{2},$$

$$A_{n \neq 1} h_{An} \cosh(h_{An}L) \frac{a^2}{2} J_0^2(j'_{0n}) = - \sum_{n'=1,2,\dots} B_{n'} h_{Bn'} \sinh(h_{Bn'}L) \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{An'}r_T) J_0(h_{Bn'}r_T).$$

Οργανώνοντας τους προσδιοριστέους συντελεστές  $A_n$  και  $B_n$  σε πίνακες-στήλες  $[\vec{\mathbf{A}}]$  και  $[\vec{\mathbf{B}}]$  αντίστοιχα, οι εξισώσεις αυτές αντιπροσωπεύουν δύο γραμμικά συστήματα, αντίστοιχα με μορφή  $[\vec{\mathbf{B}}]-[\vec{\mathbf{P}}]\cdot[\vec{\mathbf{A}}]=0$  και  $[\vec{\mathbf{A}}]-[\vec{\mathbf{Q}}]\cdot[\vec{\mathbf{B}}]=[\vec{\mathbf{U}}]$ , όπου  $[\vec{\mathbf{P}}]$  και  $[\vec{\mathbf{Q}}]$  είναι απειροδιάστατοι τετραγωνικοί πίνακες και  $[\vec{\mathbf{U}}]$  είναι ο πίνακας-στήλη με τους σταθερούς όρους. Στον πίνακα  $[\vec{\mathbf{U}}]$  μόνο το πρώτο στοιχείο είναι μη μηδενικό. Από την επίλυση από κοινού των δύο γραμμικών συστημάτων, ή απλώς ενός συστήματος που σχηματίζεται με απαλοιφή, όπως το  $([\vec{\mathbf{I}}]-[\vec{\mathbf{Q}}]\cdot[\vec{\mathbf{P}}])\cdot[\vec{\mathbf{A}}]=[\vec{\mathbf{U}}]$  ή  $([\vec{\mathbf{I}}]-[\vec{\mathbf{P}}]\cdot[\vec{\mathbf{Q}}])\cdot[\vec{\mathbf{B}}]=[\vec{\mathbf{P}}]\cdot[\vec{\mathbf{U}}]$  και ακολούθως αντικατάσταση, προσδιορίζονται οι συντελεστές και ολοκληρώνεται η επίλυση.

### Σχόλια:

- Ακολουθώντας ίδιες σκέψεις με τα προηγούμενα παραδείγματα, η σχέση για το δυναμικό  $\Phi_B$  θα εξυπηρετούσε να γραφεί διαιρώντας κάθε όρο με  $\cosh(h_{Bn}L)$ , για να είναι απλούστερη η έκφραση  $\Phi_B|_{z=0}$ , ή διαιρώντας με  $\sinh(h_{Bn}L)$ , για να απλουστευθεί η έκφραση της παραγώγου  $(\partial\Phi_B/\partial z)|_{z=0}$ . Εδώ, όμως, χρειάζονται και οι δύο ποσότητες, ενώ μπορεί να γίνει, φυσικά, το πολύ μία από τις δύο αναγωγές, οπότε απλώς προτιμήθηκε να μη γίνει καμία αναγωγή. Τα ίδια ισχύουν, βέβαια, και για το  $\Phi_A$ .
- Εναλλακτικά προς την επίλυση που παρουσιάστηκε, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί στην πρώτη ισότητα η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων  $J_0(h_{An}r_T)$ , και των  $J_0(h_{Bn}r_T)$  στη δεύτερη. Έτσι οι εξισώσεις που σχηματίζονται για τα  $A_n$  έχουν τη μορφή:

$$A_1 \frac{a^2}{2} = \sum_{n'=1,2,\dots} B_{n'} \cosh(h_{Bn'}L) \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{A1}r_T) J_0(h_{Bn'}r_T),$$

$$A_{n \neq 1} \sinh(h_{An}L) \frac{a^2}{2} J_0^2(j'_{0n}) = \sum_{n'=1,2,\dots} B_{n'} \cosh(h_{Bn'}L) \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{An}r_T) J_0(h_{Bn'}r_T),$$

και παρόμοια από τη δεύτερη ισότητα σχηματίζονται οι εξισώσεις για τα  $B_n$ :

$$B_n h_{Bn} \sinh(h_{Bn}L) \frac{a^2}{2} J_1^2(j_{0n})$$

$$= -\frac{A_1}{L} \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{Bn}r_T) - \sum_{n'=2,3,\dots} A_{n'} h_{An'} \cosh(h_{An'}L) \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{Bn}r_T) J_0(h_{An'}r_T)$$

$$+ \frac{U}{L} \int_0^a dr_T r_T J_0(h_{Bn}r_T).$$

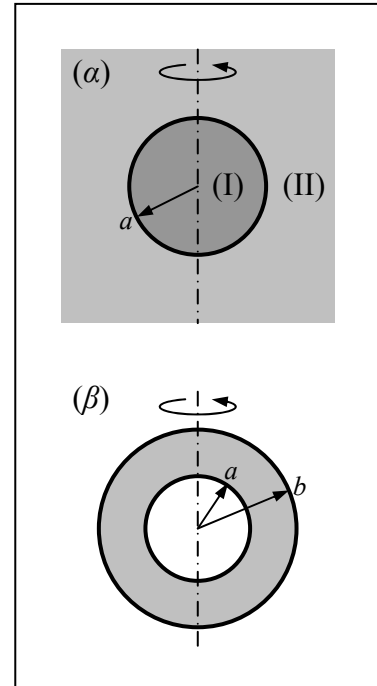
Το σύστημα εξισώσεων που σχηματίζεται τώρα είναι μαθηματικά τελείως ισοδύναμο με το προηγούμενο, αλλά η αριθμητική επίλυσή του πιο χρονοβόρα, επειδή τώρα η στήλη με τους σταθερούς όρους έχει μη μηδενικά στοιχεία σε όλες τις εξισώσεις για τα  $B_n$ , ενώ στην αρχική επίλυση μη μηδενικό ήταν μόνο το στοιχείο στην εξίσωση για το  $A_1$ .



## 7.5 Σφαιρικές συντεταγμένες

### 7.5.1 Συναρτήσεις βάσης και επίλυση απλών διατάξεων

**Εξισώσεις για τις συναρτήσεις βάσης:** Οι σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$  ταιριάζουν σε διατάξεις, των οποίων οι χαρακτηριστικές επιφάνειες (κυρίως, αυτές στο όριο) αντιστοιχούν σε  $r = \text{σταθ.}$ ,  $\theta = \text{σταθ.}$  και  $\varphi = \text{σταθ.}$  Στην παρούσα παράγραφο ενδιαφέρουν, κυρίως, διατάξεις, των οποίων το σχήμα χαρακτηρίζεται από σφαιρική συμμετρία και γωνιακές συντεταγμένες εκτείνονται σε όλες τις δυνατές τιμές, στα διαστήματα  $0 \leq \theta \leq \pi$  και  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα με πλάτος  $2\pi$ . Κατά τα λοιπά, η διάταξη μπορεί να εκτείνεται στην περιοχή  $r < a$  και να περιέχει την αρχή των αξόνων, ή στην περιοχή  $r > a$  και να φθάνει ως το άπειρο ή να έχει σχήμα σφαιρικού κελύφους  $a < r < b$ . Τέτοιες είναι οι διατάξεις του **Σχήματος 7.5-1**. Διατάξεις με μικρότερο διάστημα για τη γωνία  $\theta$ , όπως διατάξεις που περιλαμβάνουν μόνο τον ένα ή κανένα από τους δύο ημιάξονες του  $z$ , μόνο σε ειδικές περιπτώσεις καλύπτονται από τις τεχνικές τις παρούσας παραγράφου. Και δεν εξετάζονται καθόλου διατάξεις με ενδιάμεσα όρια σε κάποιες γωνίες  $\varphi = \varphi_j$ .



Σχήμα 7.5-1

Σε σφαιρικές συντεταγμένες, η Λαπλασιανή είναι:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (7.5-1)$$

Οι τρεις μεταβλητές, από τις οποίες εξαρτάται το δυναμικό  $\Phi(r, \theta, \varphi)$ , θα χωρισθούν γράφοντας το δυναμικό ως γινόμενο τριών όρων,  $\Phi = R(r)\Theta(\theta)F(\varphi)$ . Διαιρώντας τη Λαπλασιανή  $\nabla^2 \Phi$  με το δυναμικό  $\Phi$  και πολλαπλασιάζοντας με  $r^2$ , σχηματίζεται η σχέση:

$$r^2 \frac{\nabla^2 \Phi}{\Phi} = \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0. \quad (7.5-2)$$

Εξάρτηση από την ακτίνα  $r$  εμφανίζεται μόνο στον πρώτο όρο. Όμως,  $r^2 \nabla^2 \Phi / \Phi = 0 = \text{σταθ.}$ , άρα ανεξάρτητο από την ακτίνα  $r$ . Συνεπώς, πρέπει να είναι  $(1/R)(d/dr)(r^2 dR/dr) = K_r = \text{σταθ.}$  Επίσης, είναι  $r^2 \sin^2 \theta \nabla^2 \Phi / \Phi = 0 = \text{σταθ.}$ , η παράγωγός του ως προς  $\varphi$  είναι ίση με μηδέν, συνεπώς ο τελευταίος όρος, ο μόνος που εμπλέκει τη γωνία  $\varphi$ , είναι επίσης ανεξάρτητος από

τη γωνία  $\varphi$ , δηλαδή  $(1/F)d^2F/d\varphi^2 = \text{σταθ.} = K_\varphi$ . Εισάγοντας τις σταθερές ποσότητες  $K_r$  και  $K_\varphi$  στη σχέση (7.5-2), οι μεταβλητές  $r$  και  $\varphi$  παύουν να εμφανίζονται και προκύπτει σχέση που αποτελεί διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση  $\Theta(\theta)$ . Η εξίσωση αυτή, καθώς και οι εξισώσεις για τις συναρτήσεις  $R(r)$  και  $F(\varphi)$  που έχουν ήδη αναφερθεί, είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - K_r R &= 0, \\ \frac{d^2 F}{d\varphi^2} - K_\varphi F &= 0, \\ \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( K_r \sin \theta + \frac{K_\varphi}{\sin \theta} \right) \Theta &= 0. \end{aligned} \quad (7.5-3)$$

Οι **συναρτήσεις**  $F(\varphi)$  περιγράφονται από τη διαφορική εξίσωση (7.5-3β), την ίδια όπως στο χωρισμό των κυλινδρικών μεταβλητών, όπως αναμένεται, αφού και στα δύο συστήματα η γωνία  $\varphi$  περιγράφει την ίδια γεωμετρική ποσότητα. Στη γενική περίπτωση, γράφοντας  $F \rightarrow F_m$  και ανάλογα με το πρόσημο της σταθεράς  $K_\varphi$ , τα ζεύγη γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων είναι:

$$\begin{aligned} K_\varphi = -m^2 < 0 &\Rightarrow F_m(\varphi) = \{ \cos(m\varphi), \sin(m\varphi) \}, \\ K_\varphi = 0 &\Rightarrow F_0(\varphi) = \{ 1, \varphi \}, \\ K_\varphi = +m^2 > 0 &\Rightarrow F_m(\varphi) = \{ \cosh(m\varphi), \sinh(m\varphi) \} \quad \text{κλπ.}, \end{aligned} \quad (7.5-4)$$

και, στη γενική περίπτωση, ο μόνος περιορισμός που τίθεται στις τιμές του  $m$  είναι ότι  $m > 0$  για τα ενδεχόμενα (7.5-4α) και (7.5-4γ).

Όπως έχει, όμως, ήδη αναφερθεί, κυρίως ενδιαφέρουν διατάξεις που εκτείνονται σε ολόκληρο τον κύκλο. Τότε, πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη περιοδικότητας,  $F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi)$ . Αυτό είναι εφικτό, μόνο αν  $K_\varphi = -m^2 \leq 0$  και  $m$  είναι μη αρνητικός ακέραιος αριθμός, οπότε είναι  $F_m = \{ \cos(m\varphi), \sin(m\varphi) \}$  και  $F_0 = 1$ .

Οι **συναρτήσεις**  $R(r)$  υπακούουν στην εξίσωση (7.5-3α), εξίσωση ομογενή ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $r$ , οπότε οι συναρτήσεις αυτές έχουν τη μορφή  $R = r^\kappa$ . Η τιμή του εκθέτη  $\kappa$  προσδιορίζεται αντικαθιστώντας  $R = r^\kappa$  στη διαφορική εξίσωση. Έτσι, προκύπτει  $\kappa(\kappa + 1) = K_r$ , με ρίζες  $\kappa_{1,2} = -1/2 \pm (K_r + 1/4)^{1/2}$ . Ανάλογα με το πρόσημο της υπορρίζιας ποσότητας, συναντώνται τα ενδεχόμενα:

- Να είναι  $K_r > -1/4$ , που τότε οι δύο ρίζες είναι πραγματικοί αριθμοί. Συμβατικά, η μεγαλύτερη από τις δύο ρίζες ονομάζεται  $n$ , δηλαδή  $\kappa_1 = -1/2 + (K_r + 1/4)^{1/2} = n > -1/2$ , οπότε η μικρότερη είναι ίση με  $\kappa_2 = -1/2 - (K_r + 1/4)^{1/2} = -(n + 1) < -1/2$  και η σταθερά  $K_r$  ουσιαστικά

υποκαθίσταται από το ισόποσο γινόμενο  $K_r = n(n+1)$ . Αυτό το ενδεχόμενο αντιστοιχεί στις ακόλουθες συναρτήσεις  $R(r) \rightarrow R_n(r)$ :

$$K_r = n(n+1) > -\frac{1}{4} \quad \left( \Leftrightarrow \quad n > -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow R_n(\rho = r/r_0) = \left\{ \rho^n, \rho^{-(n+1)} \right\}, \quad (7.5-5)$$

όπου  $\rho = r/r_0$  είναι η σφαιρική ακτίνα, αδιαστατοποιημένη με βάση οποιαδήποτε τιμή  $r_0$ . Με τον εναλλακτικό, αλλά μη καθιερωμένο, ορισμό  $K_r = -1/4 + n'^2 > -1/4$ , οι δύο συναρτήσεις έχουν συμμετρική, κατά κάποιο τρόπο, μορφή,  $R = \left\{ \rho^{n'}/\rho^{1/2}, \rho^{-n'}/\rho^{1/2} \right\}$ .

Μολονότι για τον εκθέτη  $n$  ο μόνος περιορισμός είναι  $n > -1/2$ , κυρίως ενδιαφέρουν οι ακέραιες τιμές  $n = 0, 1, 2, \dots$ , όπως θα περιγραφεί σε σχέση με τις συναρτήσεις  $\Theta(\theta)$ . Για τέτοιες τιμές του  $n$ , από τις δύο συναρτήσεις, οι οποίες σε κάθε περίπτωση μεταβάλλονται μονότονα, η πρώτη είναι αύξουσα και η δεύτερη φθίνουσα. Τέλος, αξιοσημείωτοι είναι οι ακόλουθοι γραμμικοί συνδυασμοί:

$$\begin{aligned} R_n &= \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \quad (\text{με } n \geq 0) \quad \Rightarrow \quad R_n(r=0) \neq \infty, \\ R_n &= \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad R_n(r=\infty) \neq \infty, \\ R_n &= \left( \frac{r}{a} \right)^n - \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad R_n(r=a) = 0, \\ R_n &= (n+1) \left( \frac{r}{a} \right)^n + n \left( \frac{a}{r} \right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dR_n}{dr} \right|_{r=a} = 0. \end{aligned} \quad (7.5-6)$$

- Αν, αντίθετα, είναι  $K_r < -1/4$ , τότε οι τιμές του εκθέτη  $n$  είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. Σε αυτή την περίπτωση είναι απλούστερο να γραφεί  $K_r = -1/4 - n^2$ , οπότε ο εκθέτης είναι ίσος με  $\kappa_{1,2} = -1/2 \pm jn$  και οι συναρτήσεις  $R$  παίρνουν τη μιγαδική μορφή  $R = r^{-1/2} r^{\pm jn} = r^{-1/2} \exp(\pm jn \ln r) = r^{-1/2} [\cos(n \ln r) \pm j \sin(n \ln r)]$ . Μολονότι οι μιγαδικές συναρτήσεις είναι αποδεκτές ως συναρτήσεις βάσης, αρκεί να συντίθενται σε γραμμικούς συνδυασμούς που είναι πραγματικές συναρτήσεις, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθούν από την αρχή πραγματικές συναρτήσεις. Τέτοιες είναι το ημιάρθροισμα και η ημιδιαφορά (επί  $-j$ ) των δύο παραπάνω μιγαδικών συναρτήσεων. Κανονικοποιώντας σε κάποια ακτίνα  $r_0$ , η διαδικασία αυτή καταλήγει σε συναρτήσεις με εναλλασσόμενη συμπεριφορά:

$$K_r = -\frac{1}{4} - n^2 < -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad R_n(\rho = r/r_0) = \left\{ \frac{\cos(n \ln \rho)}{\sqrt{\rho}}, \frac{\sin(n \ln \rho)}{\sqrt{\rho}} \right\}. \quad (7.5-7)$$

- Αν, τέλος, είναι  $K_r = -1/4$ , ο εκθέτης έχει τη διπλή τιμή  $\kappa = -1/2$ . Στην περίπτωση αυτή, οι γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις είναι:

$$K_r = -\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad R_n(\rho = r/r_0) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\rho}}, \frac{\ln \rho}{\sqrt{\rho}} \right\}, \quad (7.5-8)$$

που μπορούν να θεωρηθούν ότι παράγονται από τις συναρτήσεις (7.5-7) στο όριο  $n \rightarrow 0$ , με  $\sin(n \ln \rho) \approx n \ln \rho$  και τον παράγοντα  $n$  να ενσωματώνεται στον συντελεστή του γραμμικού συνδυασμού.

Οι συναρτήσεις (7.5-7) και (7.5-8) εμπλέκουν οικείες στοιχειώδεις συναρτήσεις, οπότε εύκολα διαπιστώνεται η γενικότερη συμπεριφορά τους και σχηματίζονται γραμμικοί συνδυασμοί με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Οι πληροφορίες αυτές ουσιαστικά ταυτίζονται με τις πληροφορίες για τη συμπεριφορά των συναρτήσεων  $R_T(r_T)$  στην παράγρ. 7.3.1, βλ. σελ 473-474. Άλλωστε, οι συναρτήσεις  $R_T$  εκεί και  $R$  εδώ διαφέρουν μόνο κατά έναν συντελεστή  $\rho^{-1/2}$ , που δεν αλλοιώνει σημαντικά τη γενική συμπεριφορά. Όμως, κυρίως ενδιαφέρει το πρώτο ενδεχόμενο, να είναι  $R = \{\rho^n, \rho^{-(n+1)}\}$ .

Στη **διαφορική εξίσωση για τις συναρτήσεις  $\Theta(\theta)$**  εξυπηρετεί να γίνουν οι αντικαταστάσεις  $K_\varphi = -m^2 \leq 0$ , και  $K_r = n(n+1) > -1/4$ , που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις  $F_m = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$  και  $R = \{\rho^n, \rho^{-(n+1)}\}$ . Έτσι, η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( n(n+1) \sin \theta - \frac{m^2}{\sin \theta} \right) \Theta = 0, \quad (7.5-9)$$

και με την αλλαγή μεταβλητής  $w = \cos \theta$ , οπότε  $\sin \theta = (1-w^2)^{1/2}$  και  $(d/d\theta) = -\sin \theta (d/dw)$ , μετασχηματίζεται στη διαφορική εξίσωση του *Legendre*:

$$(1-w^2) \frac{d^2 \Theta}{dw^2} - 2w \frac{d\Theta}{dw} + \left( n(n+1) - \frac{m^2}{1-w^2} \right) \Theta = 0. \quad (7.5-10)$$

Ενδιαφέρουν ακέριαι τιμές για τις δύο παραμέτρους, τον «βαθμό»  $n$  και την «τάξη»  $m$ . Τότε, οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης ονομάζονται:

- Όταν είναι  $m = 0$ , και τότε η τάξη  $m$  παραλείπεται από τον συμβολισμό:  
«Πολυώνυμα *Legendre*»,  $P_n(w)$ , και «Συναρτήσεις *Legendre* β' είδους»,  $Q_n(w)$ .
- Όταν είναι  $m = 1, 2, 3, \dots$ , και τότε η τάξη  $m$  τίθεται ως άνω δείκτης:  
«Προσαρτημένες συναρτήσεις *Legendre* α' και β' είδους»,  $P_n^{(m)}(w)$  και  $Q_n^{(m)}(w)$ .

Οι γραμμικοί συνδυασμοί  $\Theta_{nm}$  (ή,  $\Theta_{n0}$ ) των συναρτήσεων αυτών είναι κατάλληλοι για τον σχηματισμό λύσεων  $\Phi = \sum_{mn} F_m(\varphi) R_n(r) \Theta_{nm}(w = \cos \theta)$ , είτε με πεπερασμένο, είτε με άπειρο πλήθος όρων, που ικανοποιούν την εξίσωση του *Laplace*. Οι συναρτήσεις αυτές και οι ιδιότητές τους παρουσιάζονται στη συνέχεια.

Τα **πολυώνυμα Legendre** είναι οι λύσεις της εξίσωσης (7.5-10) με  $m = 0$ . Σχηματίζονται αν επιδιωχθεί οι λύσεις της (7.5-10) να εκφραστούν ως δυναμοσειρές, διαπιστώνοντας στην πορεία ότι οι όροι με δύναμη ανώτερη του  $n$  είναι μηδενικοί, οπότε πρόκειται για πολυώνυμα. Πολυώνυμα με διαδοχικούς βαθμούς συνδέονται με την αναδρομική σχέση:

$$nP_n(w) = (2n-1)wP_{n-1}(w) - (n-1)P_{n-2}(w). \quad (7.5-11)$$

Από τη διαφορική εξίσωση προκύπτει ότι τα πρώτα δύο πολυώνυμα έχουν τη μορφή  $P_0 = \text{σταθ.}$  και  $P_1 = \text{σταθ.} \times w$ . Η καθιερωμένη κανονικοποίηση είναι να τεθούν οι δύο σταθερές ίσες με τη μονάδα, οπότε με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης προσδιορίζονται διαδοχικά τα επόμενα πολυώνυμα. Το αποτέλεσμα είναι οι γενικές εκφράσεις:

$$P_n(w) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dw^n} (w^2 - 1)^n, \quad (7.5-12)$$

$$P_n(w) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \frac{(2n-2\ell)!}{(n-2\ell)!(n-\ell)!} w^{n-2\ell},$$

όπου  $\ell_{\max} = n/2$  ή  $\ell_{\max} = (n-1)/2$ , ανάλογα με το αν ο βαθμός  $n$  του πολυωνύμου είναι άρτιος ή περιττός. Ειδικότερα, τα πρώτα πέντε πολυώνυμα είναι:

$$\begin{aligned} P_0 &= 1 && = 1, \\ P_1 &= w && = \cos \theta, \\ P_2 &= \frac{1}{2}(3w^2 - 1) && = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1), \\ P_3 &= \frac{1}{2}w(5w^2 - 3) && = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta), \\ P_4 &= \frac{1}{8}\{35w^4 - 30w^2 + 3\} && = \frac{1}{64}(35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9), \end{aligned} \quad (7.5-13)$$

όπου οι δυνάμεις του  $w = \cos \theta$  έχουν εκφρασθεί μέσω του συνημιτόνου της πολλαπλάσιας γωνίας, όπως,  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$ ,  $\cos^3 \theta = \frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3 \cos \theta)$ , κλπ. Η γραφική παράσταση των πολυωνύμων (7.5-13) παρουσιάζεται στο **Σχήμα 7.5-2**, στο διάστημα  $-1 < w < 1$ , στο οποίο και μόνο έχει φυσική σημασία η μεταβλητή  $w$ , ως συνημίτονο της γωνίας  $\theta$ .

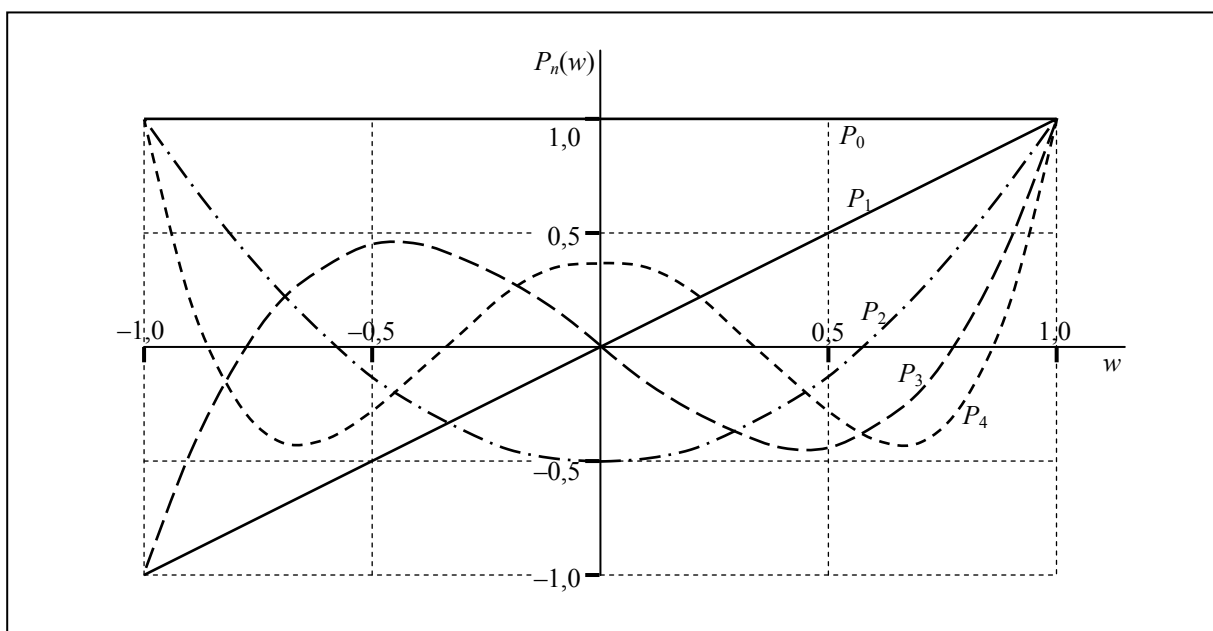
Βασικές ιδιότητες των πολυωνύμων *Legendre*, που προβάλλονται και από τις ειδικές περιπτώσεις του **Σχήματος 7.5-2**, είναι οι ακόλουθες:

- Πολυώνυμα με άρτιο/περιττό βαθμό  $n$  περιέχουν μόνο άρτιες/περιττές δυνάμεις του  $w$ , μέχρι  $w^n$ , συνεπώς είναι συμμετρικά/αντισυμμετρικά ως προς το  $w = 0$ . Επίσης, εκφράζονται με τα συνημίτονα μόνο άρτιων/περιττών πολλαπλάσιων του  $\theta$ , μέχρι το  $n\theta$ .
- Για όλα τα πολυώνυμα είναι  $P_n(w=1) = +1$ , ενώ στο άλλο άκρο είναι  $P_n(w=-1) = (-1)^n = \pm 1$ , ανάλογα με το αν ο βαθμός του πολυωνύμου είναι άρτιος ή περιττός.
- Κάθε πολυώνυμο έχει μόνο διακριτές πραγματικές ρίζες, οι οποίες είναι όλες συγκεντρωμένες στο διάστημα  $-1 < w < +1$ . Συνεπώς, στο διάστημα αυτό κάθε πολυώνυμο έχει εναλλασσόμενη συμπεριφορά, με τόσες εναλλαγές προσήμου, όσος είναι ο βαθμός  $n$ .
- Η εναλλασσόμενη συμπεριφορά συνοδεύεται από το ότι πολυώνυμο *Legendre* με διαφορετικό βαθμό  $n$  είναι ορθογώνια μεταξύ τους στο διάστημα  $-1 < w < +1$ , συγκεκριμένα:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(w) P_{n'}(w) dw = \int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_{n'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0, \quad (n' \neq n),$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(w) dw = \int_0^\pi P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1}.$$
(7.5-14)

Η ορθογωνιότητα των πολυωνύμων *Legendre*, όπως και των προσαρτημένων συναρτήσεων *Legendre* α' είδους που παρουσιάζονται στη συνέχεια, καθιστά αυτές τις συναρτήσεις συστατικό των «σφαιρικών αρμονικών»  $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ , που αποτελούν τη βάση για να αναπτυχθεί κάθε συνάρτηση που ορίζεται σε σφαιρική επιφάνεια.



Σχήμα 7.5-2

Οι **προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre α' είδους**,  $P_n^{(m)}(w)$ , αποτελούν τη γενίκευση των πολυωνύμων Legendre, όταν στη διαφορική εξίσωση (7.5-10) η τάξη είναι μη μηδενική,  $m \neq 0$ . Παράγονται από τα πολυώνυμα Legendre με τη σχέση:

$$P_n^{(m)}(w) = (-1)^m (1-w^2)^{m/2} \frac{d^m}{dw^m} P_n(w). \quad (7.5-15)$$

Στη βιβλιογραφία συναντώνται και ορισμοί με τον συντελεστή  $(-1)^m$  είτε να παραλείπεται, είτε να αντικαθίσταται από  $(-1)^{m+n}$ , με προφανή την τροποποίηση ορισμένων από τις σχέσεις που ακολουθούν.

Δύο βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών μπορούν να συναχθούν απευθείας από τον ορισμό (7.5-15):

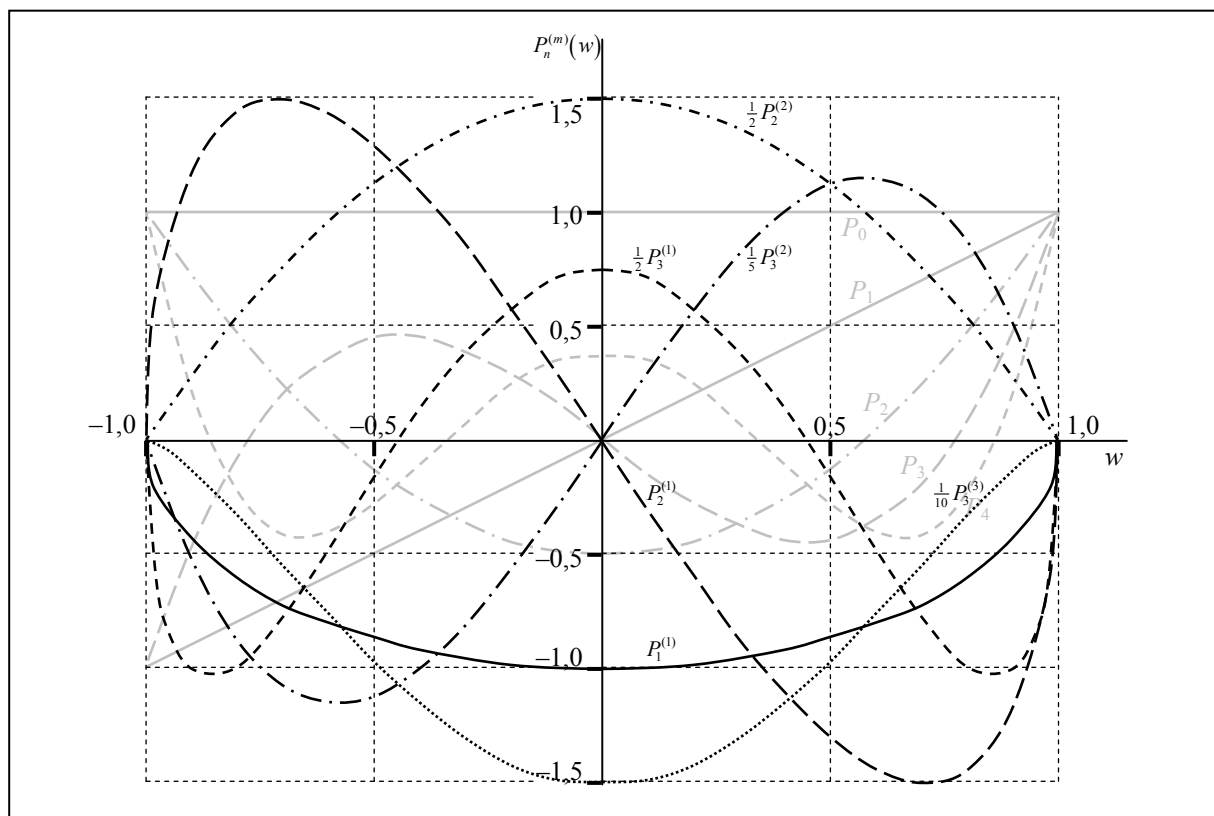
- Επειδή η παράγωγος τάξης  $n$  ενός πολυωνύμου με βαθμό επίσης  $n$  είναι σταθερή ποσότητα, οι παράγωγοι  $(d^m/dw^m)P_n(w)$  με  $m > n$  είναι ίσες με μηδέν. Συνεπώς, οι συναρτήσεις  $P_n^{(m)}(w)$  έχουν νόημα (δεν είναι ταυτοτικά μηδενικές) μόνο για  $m = 1, 2, 3, \dots, n$ .
- Η παράγωγος  $(d^m/dw^m)P_n(w)$ , που είναι πολυώνυμο βαθμού  $n-m$ , πολλαπλασιάζεται με μία συνάρτηση που είναι πολυώνυμο βαθμού  $m$ , αν η τάξη είναι άρτιος αριθμός, ή είναι πολυώνυμο βαθμού  $m-1$  πολλαπλασιασμένο με τη ρίζα  $(1-w^2)^{1/2}$ . Επομένως, οι συναρτήσεις  $P_n^{(m)}(w)$  είναι είτε πολυώνυμο βαθμού  $n$ , είτε πολυώνυμο βαθμού  $n-1$  πολλαπλασιασμένα με  $(1-w^2)^{1/2}$ , ανάλογα με την περίπτωση. Λόγω αυτής τις ιδιότητας, συχνά χρησιμοποιείται η ονομασία «πολυώνυμο» Legendre (τάξης  $m$  και βαθμού  $n$ ), ονομασία εν μέρει καταχρηστική, αφού μόνο οι μισές από τις συναρτήσεις  $P_n^{(m)}(w)$ , εκείνες με  $m = 2, 4, 6, \dots$ , είναι πραγματικά πολυώνυμα.

Οι πρώτες συναρτήσεις αυτής της οικογένειας έχουν τις αναλυτικές εκφράσεις:

$$\begin{aligned} P_1^{(1)} &= -\sqrt{1-w^2} &&= -\sin \theta, \\ P_2^{(1)} &= -3w\sqrt{1-w^2} &&= -\frac{3}{2}\sin 2\theta, \\ P_2^{(2)} &= 3(1-w^2) &&= -\frac{3}{2}(\cos 2\theta - 1), \\ P_3^{(1)} &= -\frac{3}{2}(5w^2-1)\sqrt{1-w^2} &&= -\frac{3}{8}(5\sin 3\theta + \sin \theta), \\ P_3^{(2)} &= 15w(1-w^2) &&= -\frac{15}{4}(\cos 3\theta - \cos \theta), \\ P_3^{(3)} &= -15(1-w^2)\sqrt{1-w^2} &&= \frac{15}{4}(\sin 3\theta - 3\sin \theta), \end{aligned} \quad (7.5-16)$$

και παρουσιάζονται στο **Σχήμα 7.5-3**. Εκτός από τις ιδιότητες που προαναφέρθηκαν, στις καμπύλες του σχήματος αναγνωρίζονται εύκολα και οι ακόλουθες αξιοσημείωτες ιδιότητες:

- Επειδή είναι  $w = \cos \theta$  και  $(1-w^2)^{1/2} = \sin \theta$ , οι συναρτήσεις  $P_n^{(m)}$  είναι γινόμενα του  $\sin^m \theta$  με πολυώνυμο του  $\cos \theta$ , βαθμού  $n-m$ . Επομένως, κάθε συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί με τα συνημίτονα ή τα ημίτονα (αν  $m = \text{άρτιος}$  ή  $\text{περιττός}$ ) μόνο άρτιων ή περιττών πολλαπλασίων του  $\theta$  (αν  $n = \text{άρτιος}$  ή  $\text{περιττός}$ ), μέχρι το  $n\theta$ .
- Συνέπεια του προηγούμενου σημείου είναι ότι οι συναρτήσεις  $P_n^{(m)}$  με άρτια/περιττή τη διαφορά  $n-m$  είναι συμμετρικές/αντισυμμετρικές ως προς  $w=0$  (ως προς  $\theta = \pi/2$ ).
- Όλες οι συναρτήσεις  $P_n^{(m)}$  μηδενίζονται στα άκρα,  $P_n^{(m)}(w=\pm 1) = 0$ , επειδή έχουν ως συντελεστή κάποια δύναμη του  $(1-w^2)^{1/2}$ . Αυτή η ιδιότητα προφανώς δεν αφορά τα πολυώνυμα Legendre  $P_n$ , για τα οποία έχει ήδη αναφερθεί ότι είναι  $P_n(w=\pm 1) = (\pm 1)^n$ .
- Επί πλέον των μηδενισμών στα άκρα  $w = \pm 1$ , η συνάρτηση  $P_n^{(m)}$  έχει διακριτές πραγματικές ρίζες στο εσωτερικό του διαστήματος  $-1 < w < +1$ , και το πλήθος των ριζών είναι ίσο με τη διαφορά  $n-m$ .
- Ειδική περίπτωση του προηγούμενου σημείου είναι οι συναρτήσεις  $P_n^{(n)}$ , με  $m = n$ , οι οποίες δεν μηδενίζονται πουθενά στο εσωτερικό του διαστήματος  $-1 < w < +1$ , παρά μόνο στα άκρα του διαστήματος (εκτός αν είναι  $m = 0$ ).



Σχήμα 7.5-3



- Οι προσαρτημένες συναρτήσεις *Legendre α'* είδους με συγκεκριμένη τάξη  $m$  και με διαφορετικό βαθμό  $n$  είναι ορθογώνιες στο διάστημα  $-1 < w < +1$ . Αυτό περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(w) P_{n'}^{(m)}(w) dw = \int_0^\pi P_n^{(m)}(\cos \theta) P_{n'}^{(m)}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0 \quad (n' \neq n),$$

$$\int_{-1}^{+1} (P_n^{(m)}(w))^2 dw = \int_0^\pi (P_n^{(m)}(\cos \theta))^2 \sin \theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (7.5-17)$$

Με  $m = 0$ , οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν, με τις εξαιρέσεις που έχουν σημειωθεί, και για τα πολυώνυμα *Legendre*, αφού άλλωστε πρόκειται για τις συναρτήσεις  $P_n^{(m=0)}(w) = P_n(w)$ . Για άμεση σύγκριση, το **Σχήμα 7.5-3** παρουσιάζει και τα πολυώνυμα  $P_n(w)$ , βλ. τις γκριζες καμπύλες.

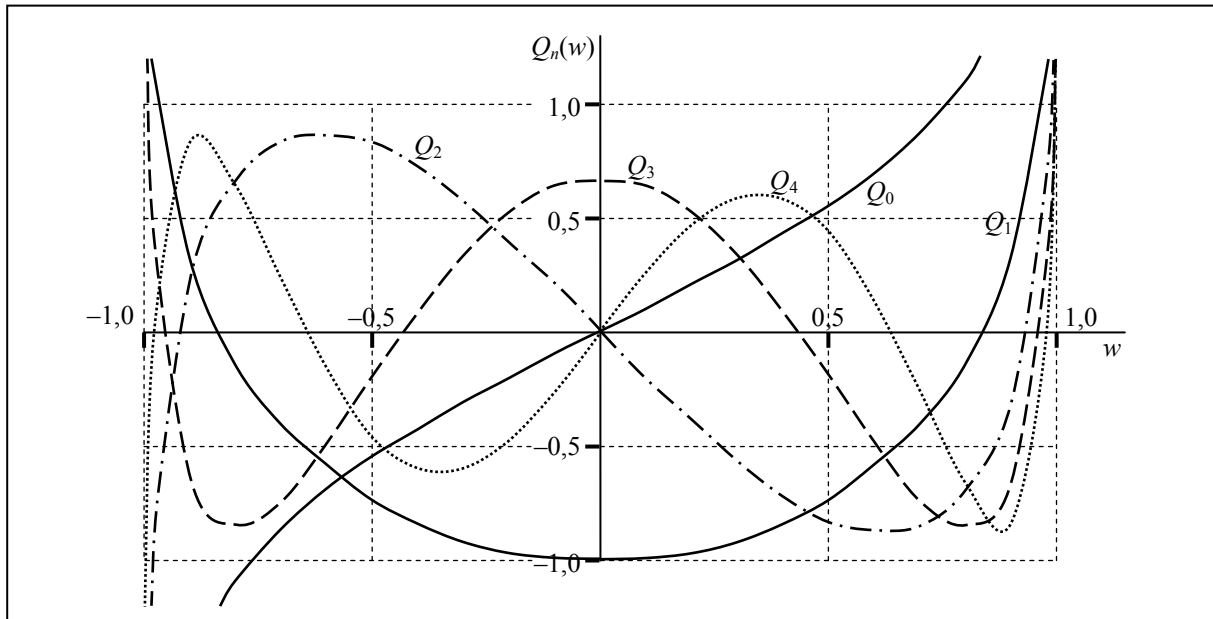
Οι **συναρτήσεις *Legendre β'* είδους**,  $Q_n(w)$ , και οι ομώνυμες προσαρτημένες συναρτήσεις  $Q_n^{(m)}(w)$ , για κάθε  $m$ , αντίστοιχα με  $m = 0$  και  $m \neq 0$ , είναι η δεύτερη οικογένεια λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (7.5-10), λύσεων που είναι γραμμικά ανεξάρτητες από τα πολυώνυμα *Legendre*  $P_n(w)$  και τις συναρτήσεις  $P_n^{(m)}(w)$ , αντίστοιχα.

Οι συναρτήσεις  $Q_n(w)$  ορίζονται από τη σχέση:

$$Q_n(w) = \frac{1}{2} P_n(w) \ln \frac{1+w}{1-w} - \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} P_{n-\ell}(w) P_{\ell-1}(w). \quad (7.5-18)$$

Το βασικό χαρακτηριστικό των συναρτήσεων αυτών είναι ότι συνδυάζουν εναλλασσόμενη συμπεριφορά με τους απειρισμούς στα δύο άκρα, λόγω της λογαριθμικής συνάρτησης. Αυτές οι ιδιότητες προβάλλονται και στις γραφικές παραστάσεις των πρώτων πέντε μελών της οικογένειας των συναρτήσεων *Legendre β'* είδους (**Σχήμα 7.5-4**), που με τη συντομογραφία  $q(w) = (1+w)/(1-w)$ , οπότε  $\frac{1}{2} \ln[(1+w)/(1-w)] = \frac{1}{2} \ln q = \ln \cot(\frac{1}{2}\theta)$ , οι αναλυτικές εκφράσεις τους είναι:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{2} \ln q &&= \frac{1}{2} \ln q, \\ Q_1 &= \frac{1}{2} P_1 \ln q - 1 &&= \frac{1}{2} P_1 \ln q - 1, \\ Q_2 &= \frac{1}{2} P_2 \ln q - \frac{3}{2} w &&= \frac{1}{2} P_2 \ln q - \frac{3}{2} \cos \theta, \\ Q_3 &= \frac{1}{2} P_3 \ln q - \frac{1}{6} (15w^2 - 4) &&= \frac{1}{2} P_3 \ln q - \frac{1}{12} (15 \cos 2\theta + 11), \\ Q_4 &= \frac{1}{2} P_4 \ln q - \frac{5}{24} w (21w^2 - 11) &&= \frac{1}{2} P_4 \ln q - \frac{5}{96} (21 \cos 3\theta + 19 \cos \theta). \end{aligned} \quad (7.5-19)$$



Σχήμα 7.5-4

Οι συναρτήσεις μη μηδενικής τάξης, οι  $Q_n^{(m)}(w)$ , ορίζονται από σχέση με ίδια μορφή, όπως η σχέση (7.5-15), συγκεκριμένα:

$$Q_n^{(m)}(w) = (-1)^m (1-w^2)^{m/2} \frac{d^m}{dw^m} Q_n(w). \quad (7.5-20)$$

Οι αναλυτικές εκφράσεις των πρώτων συναρτήσεων αυτής της οικογένειας είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} Q_1^{(1)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{1-w^2} \ln q - \frac{w}{\sqrt{1-w^2}}, \\ Q_2^{(1)} &= -\frac{3}{2} w \sqrt{1-w^2} \ln q - \frac{3w^2-2}{\sqrt{1-w^2}}, \\ Q_2^{(2)} &= \frac{3}{2} (1-w^2) \ln q - \frac{w(3w^2-5)}{1-w^2}, \\ Q_3^{(1)} &= \frac{3}{4} \frac{5w^4-6w^2+1}{\sqrt{1-w^2}} \ln q - \frac{1}{2} \frac{15w^3-13w}{\sqrt{1-w^2}}, \\ Q_3^{(2)} &= \frac{15}{2} w(1-w^2) \ln q - \frac{15w^4-25w^2+8}{1-w^2}. \end{aligned} \quad (7.5-21)$$

Βασικό γνώρισμα όλων των συναρτήσεων β' είδους είναι οι απειρισμοί στα  $w = \cos \theta = \pm 1$ , στο θετικό και στον αρνητικό ημιάξονα του  $z$ . Κατά συνέπεια, σε αναπτύγματα του δυναμικού με μορφή  $\Phi = \sum_{mn} F_m(\varphi) R_n(r) \Theta_{nm}(w = \cos \theta)$  η συνάρτηση  $\Theta_{nm}$  δεν είναι δυνατόν να περιέχει συναρτήσεις  $Q_n^{(m)}(w)$ , ή  $Q_n(w)$ , εκτός αν συντρέχει συγκεκριμένος λόγος που να επιτρέπει ή να επιβάλλει τέτοιον απειρισμό.

**Σφαιρικές αρμονικές:** Οι συναρτήσεις  $F_0 = 1$  και  $F_m = \{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$  αποτελούν πλήρη ορθογώνια βάση, με την οποία μπορεί να περιγραφεί κάθε συνάρτηση της γωνίας  $\varphi$  στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ . Αντίστοιχα, οι συναρτήσεις  $P_n^{(m)}(w)$ , στις οποίες περιλαμβάνονται και τα πολυώνυμα *Legendre* με  $m = 0$ , αποτελούν για κάθε τάξη  $m$  επίσης πλήρη ορθογώνια βάση, για να αναπτυχθεί οποιαδήποτε συνάρτηση του  $w$  στο διάστημα  $-1 < w < +1$ , ή, με  $w = \cos \theta$ , στο διάστημα  $\pi > \theta > 0$ . Τα γινόμενα από συναρτήσεις των δύο αυτών οικογενειών ονομάζονται «σφαιρικές αρμονικές»  $Y_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ , με αντιπροσωπευτικά μέλη:

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n(\cos \theta), \\ P_n^{(m)}(\cos \theta) \times \cos(m\varphi), \\ P_n^{(m)}(\cos \theta) \times \sin(m\varphi), \end{cases} \quad (7.5-22)$$

με  $n = 0, 1, 2, \dots$  και  $m = 1, 2, 3, \dots, n$ , με τα πολυώνυμα  $P_n$  να καλύπτουν την τάξη  $m = 0$ . Υπενθυμίζεται πως αν είναι  $m > n$ , τότε  $P_n^{(m)}(w) = 0$ .

Κάθε συνάρτηση των  $\theta$  και  $\varphi$  μπορεί να αναπτυχθεί με βάση τις σφαιρικές αρμονικές:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ B_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n [A_{nm} \sin(m\varphi) + B_{nm} \cos(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta) \right\}. \quad (7.5-23)$$

Οι συντελεστές προσδιορίζονται αξιοποιώντας την ορθογωνιότητα δύο διαστάσεων:

$$\begin{aligned} B_{n0} 2\pi \frac{2}{2n+1} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta P_n(\cos \theta) f(\theta, \varphi) \sin \theta, \\ B_{nm} \pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \int_0^{\pi} d\theta P_n^{(m)}(\cos \theta) f(\theta, \varphi) \sin \theta, \\ A_{nm} \pi \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \int_0^{\pi} d\theta P_n^{(m)}(\cos \theta) f(\theta, \varphi) \sin \theta. \end{aligned} \quad (7.5-24)$$

Στην αριστερή πλευρά, οι συντελεστές  $2\pi$  και  $\pi$  προέρχονται από την ολοκλήρωση της μονάδας και των  $\cos^2(m\varphi)$  και  $\sin^2(m\varphi)$  στο διάστημα  $0 < \varphi < 2\pi$ , ενώ οι υπόλοιποι συντελεστές από την ολοκλήρωση των τετραγώνων των πολυωνύμων/συναρτήσεων *Legendre*, βλ. σχέσεις (7.5-14) και (7.5-17). Στη δεξιά πλευρά, το ημίτονο προέρχεται από την αλλαγή μεταβλητής  $w = \cos \theta$ , οπότε  $dw = -\sin \theta d\theta$ , με το αρνητικό πρόσημο να απορροφάται από την αντιστροφή στα όρια ολοκλήρωσης, καθώς το κάτω όριο  $w = -1$  αντιστοιχεί, τώρα, στο άνω όριο  $\theta = \pi$ .

Οι σφαιρικές αρμονικές με  $m = 0$  έχουν τη μορφή  $Y_n^{(0)} = P_n$  και δεν περιέχουν εξάρτηση από τη γωνία  $\varphi$ . Στο ανάπτυγμα (7.5-23) οι όροι με  $m = 0$  αντιπροσωπεύουν το μέρος της ποσότητας  $f$  που εξαρτάται μόνο από τη γωνία  $\theta$ . Σε σφαιρική επιφάνεια, αυτό το μέρος κατανέμεται, συνεπώς, σε «ζώνες»  $\theta = \text{σταθ.}$ , παράλληλες προς το ισημερινό επίπεδο. Για τον λόγο αυτό, οι σφαιρικές αρμονικές  $Y_n^{(0)}$  ονομάζονται «ζωνικές (zonal)» σφαιρικές αρμονικές. Η άλλη ακραία περίπτωση είναι οι σφαιρικές αρμονικές με  $m = n$ , οι όροι  $Y_n^{(n)}$ , που συστατικούς είναι οι συναρτήσεις  $P_n^{(n)}(\cos\theta)$ . Όπως έχει αναφερθεί προηγουμένως, οι συναρτήσεις αυτές δεν μηδενίζονται στο εσωτερικό του διαστήματος  $-1 < w = \cos\theta < +1$ , οπότε το μέρος του δυναμικού που περιγράφεται από τις  $Y_n^{(n)}$  κατανέμεται σε «τομείς»  $\varphi = \text{σταθ.}$ . Γι' αυτό οι σφαιρικές αρμονικές με  $m = n$  ονομάζονται «τομειακές (sectoral)» σφαιρικές αρμονικές.

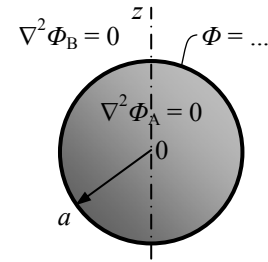
Στη βιβλιογραφία, ο όρος «σφαιρικές αρμονικές» χρησιμοποιείται συχνά για τις αντίστοιχες ορθοκανονικές συναρτήσεις, με τις συναρτήσεις *Legendre* και τις τριγωνομετρικές διαιρεμένες με το μέτρο τους, ώστε στην αριστερή πλευρά της σχέσης (7.5-24) να εμφανίζονται μόνο οι συντελεστές  $A_{mn}$  και  $B_{mn}$ . Επίσης, αντί των συναρτήσεων  $\{\cos(m\varphi), \sin(m\varphi)\}$ , συχνά χρησιμοποιείται ως βάση η μιγαδική εκθετική μορφή  $\{\exp(+jm\varphi), \exp(-jm\varphi)\}$ .

Τα **παрад. 7.5-1** έως **7.5-4** αναφέρονται σε διατάξεις, στις οποίες τα δεδομένα (οριακές συνθήκες χωρίς ασυνέχεια και με αποδεκτές συναρτήσεις) επιτρέπουν να εκφρασθεί η λύση ως ένα απλό γινόμενο  $\Phi = R(r)\Theta(\theta)F(\varphi)$ , ή να εφαρμοσθεί επαλληλία με λίγες τέτοιες διατάξεις. Αποβλέπεται, έτσι, να αποκτηθεί μία πρώτη εξοικείωση με τα πολώνυμα *Legendre* και τις ομώνυμες συναρτήσεις  $\alpha'$  είδους. Ακολουθούν τα **παрад. 7.5-5** έως **7.5-7**, στα οποία η επίλυση επιτυγχάνεται με τη βοήθεια αναπτύγματος με βάση τις σφαιρικές αρμονικές.

Αν η διάταξη δεν εκτείνεται σε ολόκληρο το διάστημα  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , αλλά υπάρχουν άκρα  $\varphi = \varphi_{1,2}$  με ομογενείς συνθήκες, τότε οι συναρτήσεις  $F_m$  είναι πάλι τριγωνομετρικές, αλλά με μη ακέραιες τιμές του  $m$ . Τέτοιες περιπτώσεις, όπως και διατάξεις με ομογενείς οριακές συνθήκες σε κωνικά εξωτερικά όρια  $\theta = \text{σταθ.}$ , αντιμετωπίζονται με γενίκευση των συναρτήσεων *Legendre* σε μη ακέραια  $m$  και  $n$ . Αν οι οριακές συνθήκες στα άκρα  $\varphi = \varphi_{1,2}$  είναι μη ομογενείς, τότε χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις (7.5-4γ), συνοδευόμενες από τις (7.5-7), των οποίων η εναλλασσόμενη συμπεριφορά συνοδεύεται από ορθογωνιότητα, καθώς και γενίκευση των συναρτήσεων *Legendre* σε μιγαδικά  $m$ . Άλλη γενίκευση των συναρτήσεων *Legendre*, σε μιγαδικά  $n$  τώρα, γίνεται όταν μη ομογενείς οριακές συνθήκες επικρατούν σε άκρα  $\theta = \theta_{1,2}$ . Όλες αυτές οι γενικεύσεις αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της «υπεργεωμετρικής συνάρτησης», αλλά είναι υπερβολικό να απασχολήσουν αυτό το κείμενο.

**Παράδειγμα 7.5-1:** Στη σφαιρική επιφάνεια  $r = a$  το δυναμικό  $\Phi$  είναι κατά περίπτωση:

- (α)  $\Phi(r=a) = U \cos \theta,$
- (β)  $\Phi(r=a) = U \cos^2 \theta,$
- (γ)  $\Phi(r=a) = U (1 + 2 \cos \theta + 3 \cos 2\theta),$
- (δ)  $\Phi(r=a) = U \sin^2 \theta \sin 2\varphi,$
- (ε)  $\Phi(r=a) = U (\sin \theta + \sin 3\theta) \sin \varphi.$



Στον υπόλοιπο χώρο είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  σε ολόκληρο το χώρο, τόσο στην περιοχές A, με  $r < a$ , όσο και στην B, με  $r > a$ .

**Επίλυση:** Σε όλες τις περιπτώσεις, η οριακή συνθήκη περιγράφεται από συνεχή συνάρτηση και δεν υπάρχει γραμμή στην οποία να τέμνονται διαφορετικές επιφάνειες, ώστε να πρέπει να εξετασθεί χωριστά. Επίσης, σε όλες τις εκφράσεις του  $\Phi(r=a)$  αναγνωρίζεται συνάρτηση  $F(\varphi)$  που είναι αποδεκτή κατά το χωρισμό μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες, συγκεκριμένα, η συνάρτηση  $F = 1$  στις τρεις πρώτες περιπτώσεις και οι συναρτήσεις  $F = \sin 2\varphi$  και  $F = \sin \varphi$  στις δύο τελευταίες. Απομένει να ελεγχθεί ακόμη, αν η εξάρτηση από τη γωνία  $\theta$  στην οριακή συνθήκη εμπλέκει αποδεκτές συναρτήσεις  $\Theta(\theta)$ , ώστε το δυναμικό να εκφρασθεί ως  $\Phi = R(r)\Theta(\theta)F(\varphi)$ , ή ως άθροισμα λίγων τέτοιων όρων. Αυτό θα γίνει χωριστά σε κάθε περίπτωση.

(α) Όταν είναι  $\Phi(r=a) = U \cos \theta$ , αναγνωρίζεται η συνάρτηση  $1 = F_0(\varphi)$ , με  $m = 0$ , με την οποία συνεργάζονται τα πολυώνυμα Legendre,  $\Theta(\theta) = P_n(\theta)$ . Από τις πληροφορίες των σχέσεων (7.5-13) αναγνωρίζεται ότι  $\cos \theta = P_1$ , που είναι αποδεκτή ως συνάρτηση  $\Theta(\theta)$  και αντιστοιχεί σε  $n = 1$ . Απομένει η ακτινική συνάρτηση, που για  $n = 1$  είναι γραμμικός συνδυασμός  $R(r) = \{r^n, r^{-(n+1)}\}$ . Η πρώτη συνάρτηση είναι η μόνη κατάλληλη για την περιοχή A, η οποία περιέχει το  $r = 0$ , όπου απειρίζεται η δεύτερη συνάρτηση. Για την περιοχή B κατάλληλη είναι μόνο η δεύτερη συνάρτηση, επειδή η πρώτη απειρίζεται στο άπειρο, που ανήκει στην εν λόγω περιοχή. Γράφοντας  $\Phi = C_A r^n P_1 F_0$  για την περιοχή A, με  $n = 1$ , θέτοντας  $r = a$  και εξισώνοντας με τη δεδομένη οριακή συνθήκη προκύπτει η τιμή της σταθεράς  $C_A$ . Αντίστοιχα, στην περιοχή B το γινόμενο θα γραφεί ως  $\Phi = C_B r^{-(n+1)} P_1 F_0$  κλπ. Έτσι, σχηματίζεται το τελικό αποτέλεσμα:

$$\Phi_A(r < a, \theta) = U \frac{r}{a} \cos \theta,$$

$$\Phi_B(r > a, \theta) = U \frac{a^2}{r^2} \cos \theta.$$

(β) Όταν είναι  $\Phi(r=a) = U \cos^2 \theta$ , πάλι είναι  $F_0(\varphi) = 1$ , με  $m = 0$ , αλλά η συνάρτηση  $\cos^2 \theta$  δεν είναι πολυώνυμο *Legendre*, ούτε αν γραφεί ως  $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ . Όμως, στις σχέσεις (7.5-13) επισημαίνονται οι συναρτήσεις  $P_2 = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1)$  και  $P_0 = 1$ , οι οποίες μπορούν να συνδυασθούν, ώστε να σχηματισθεί η συνάρτηση  $\cos^2 \theta$ . Απαιτώντας να είναι  $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) = k_0 P_0 + k_2 P_2 = (k_0 + \frac{1}{4}k_2) + \frac{3}{4}k_2 \cos 2\theta$  για κάθε  $\theta$ , σχηματίζεται το σύστημα  $\frac{1}{2} = k_0 + \frac{1}{4}k_2$  και  $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}k_2$  ως προς τους συντελεστές  $k_{0,2}$  και επιλύοντας προσδιορίζεται ότι  $k_2 = \frac{2}{3}$  και  $k_0 = \frac{1}{3}$ . Με αυτά τα δεδομένα, μπορεί να εφαρμοσθεί επαλληλία,  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_2$ , με κάθε επιμέρους πρόβλημα να διέπεται από την οριακή συνθήκη:

$$\Phi_0(r=a, \theta) = \frac{1}{3}UP_0 = \frac{1}{3}U, \quad \Phi_2(r=a, \theta) = \frac{2}{3}UP_2 = \frac{2}{3}U \frac{1}{4}[3 \cos 2\theta + 1].$$

Κάθε επιμέρους οριακή συνθήκη περιέχει αποδεκτές συναρτήσεις, πολυώνυμα *Legendre* (επειδή  $m = 0$ ) με βαθμό αντίστοιχα  $n_0 = 0$  και  $n_2 = 2$ , συνεπώς στην αντίστοιχη διάταξη η ακτινική εξάρτηση είναι  $R_{0,2} = \{r^n, r^{-(n+1)}\}$ , με το αντίστοιχο  $n_{0,2}$  και με την επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης για κάθε περιοχή. Οι παρατηρήσεις αυτές αρκούν για να γραφεί κάθε επί μέρους λύση, συνεπώς και το άθροισμα  $\Phi_0 + \Phi_2$ :

$$\Phi_A(r < a, \theta) = \frac{1}{3}U \left(\frac{r}{a}\right)^0 P_0 + \frac{2}{3} \left(\frac{r}{a}\right)^2 UP_2 = \frac{1}{6}U \left[ 2 + \left(\frac{r}{a}\right)^2 (3 \cos 2\theta + 1) \right],$$

$$\Phi_B(r > a, \theta) = \frac{1}{3}U \left(\frac{a}{r}\right)^1 P_0 + \frac{2}{3} \left(\frac{a}{r}\right)^3 UP_2 = \frac{1}{6}U \left[ 2 \frac{a}{r} + \left(\frac{a}{r}\right)^3 (3 \cos 2\theta + 1) \right].$$

(γ) Η οριακή συνθήκη  $\Phi(r=a) = U(1 + 2 \cos \theta + 3 \cos 3\theta)$  έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με της προηγούμενης περίπτωσης. Πάλι είναι  $m = 0$  και με αντιπαραβολή με τις σχέσεις (7.5-13) παρατηρείται, ότι είναι  $1 + 2 \cos \theta + 3 \cos 2\theta = 2P_1 + 4P_2$ . Ουσιαστικά, επιλύεται ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές  $k_1 = 2$  και  $k_2 = 4$ , χωρίς να υπάρχει λόγος να διατυπωθεί γραπτά το σύστημα. Υποδεικνύεται πάλι να εφαρμοσθεί επαλληλία,  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ , με τις επί μέρους διατάξεις να υπακούουν στις οριακές συνθήκες  $\Phi_1(r=a) = 2UP_1$  και  $\Phi_2(r=a) = 4UP_2$ . Τα πολυώνυμα  $P_1$  και  $P_2$  συνεργάζονται με ακτινικές συναρτήσεις με εκθέτες  $n = 1$  και  $n = 2$ , αντίστοιχα, οπότε αμέσως σχηματίζονται οι εκφράσεις για το δυναμικό:

$$\Phi_A(r < a, \theta) = 2U \left(\frac{r}{a}\right)^1 P_1 + 4 \left(\frac{r}{a}\right)^2 UP_2 = U \left[ 2 \frac{r}{a} \cos \theta + \left(\frac{r}{a}\right)^2 (3 \cos 2\theta + 1) \right],$$

$$\Phi_B(r > a, \theta) = 2U \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1 + 4 \left(\frac{a}{r}\right)^3 UP_2 = U \left[ 2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cos \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^3 (3 \cos 2\theta + 1) \right].$$

(δ) Η περίπτωση  $\Phi(r=a) = U \sin^2 \theta \sin 2\varphi$  διαφοροποιείται από τις προηγούμενες, επειδή παρουσιάζει εξάρτηση από τη γωνία  $\varphi$ . Επιλέγεται  $F(\varphi) = \sin 2\varphi$ , συνεπώς  $m = 2$ , οπότε στο ανάπτυγμα  $\Phi = R(r)\Theta(\theta)F(\varphi)$ , είτε μεμονωμένα, είτε σε άθροισμα με τέτοιους όρους, κατάλληλες είναι οι συναρτήσεις  $\Theta(\theta) = P_n^{(2)}(w = \cos \theta)$ , οι προσαρτημένες συναρτήσεις Legendre με τάξη  $m = 2$ , αλλά οποιουδήποτε βαθμού  $n \leq m = 2$ . Ανατρέχοντας στις σχέσεις (7.5-16) παρατηρείται ότι  $\sin^2 \theta = 1 - w^2 = \frac{1}{3}P_2^{(2)}(w)$  [ή,  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) = \frac{1}{3}P_2^{(2)}(w)$ ] και ο βαθμός της αντίστοιχης συνάρτησης είναι  $n = 2$ . Κατά τα λοιπά, η συνέχιση της επίλυσης είναι ίδια με των προηγούμενων διατάξεων, χωρίς, μάλιστα, να χρειάζεται εδώ επαλληλία, και η τελική έκφραση για το δυναμικό είναι:

$$\Phi_A(r < a, \theta, \varphi) = \frac{1}{3}U \left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2^{(2)}(\cos \theta) \sin 2\varphi = U \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi,$$

$$\Phi_B(r > a, \theta, \varphi) = \frac{1}{3}U \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_2^{(2)}(\cos \theta) \sin 2\varphi = U \left(\frac{a}{r}\right)^3 \sin^2 \theta \sin 2\varphi.$$

(ε) Η τελευταία οριακή συνθήκη,  $\Phi(r=a) = U(\sin \theta + \sin 3\theta) \sin \varphi$ , περιέχει τη συνάρτηση  $F_1(\varphi) = \sin \varphi$ . Με βάση τις σχέσεις (7.5-16) με  $m = 1$ , το σύμπλεγμα  $(\sin \theta + \sin 3\theta)$  της οριακής συνθήκης δεν περιέχεται στις αποδεκτές συναρτήσεις  $\Theta(\theta) = P_n^{(1)}(w = \cos \theta)$ , οπότε θα επιχειρηθεί επαλληλία. Οι δύο συναρτήσεις του συμπλέγματος,  $\sin \theta$  και  $\sin 3\theta$ , εμφανίζονται στις συναρτήσεις  $P_n^{(1)}$  με βαθμό  $n = 1$  και  $n = 3$ . Ευκολα προκύπτει ότι  $5(\sin \theta + \sin 3\theta) = (\sin \theta + 5 \sin 3\theta) + 4 \sin \theta = -\frac{8}{3}P_3^{(1)} - 4P_1^{(1)}$ . Εφαρμόζοντας, λοιπόν, επαλληλία,  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_3$ , οι οριακές συνθήκες και των δύο επιμέρους προβλημάτων,  $\Phi_1(r=a) = -\frac{4}{5}UP_1^{(1)} \sin \varphi$  και  $\Phi_3(r=a) = -\frac{8}{15}UP_3^{(1)} \sin \varphi$ , εμπλέκουν συναρτήσεις  $\Theta(\theta)$  και  $F(\varphi)$  που συνδυάζονται με αποδεκτό τρόπο στο χωρισμό μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες, που αναφέρονται και οι δύο στην ίδια τάξη  $m = 1$ . Αποκλείοντας από τις συναρτήσεις  $R(r) = \{r^n, r^{-(n+1)}\}$  εκείνη που προκαλεί απειρισμό σε κάθε περιοχή, η άθροιση των δύο επί μέρους λύσεων δίνει το τελικό αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \Phi_A(r < a, \theta) &= -\frac{4}{5}U \left(\frac{r}{a}\right)^1 P_1^{(1)} \sin \varphi - \frac{8}{15}U \left(\frac{r}{a}\right)^3 P_3^{(1)} \sin \varphi \\ &= \frac{1}{5}U \left[ 4\frac{r}{a} \sin \theta + \left(\frac{r}{a}\right)^3 (5 \sin 3\theta + \sin \theta) \right] \sin \varphi, \end{aligned}$$

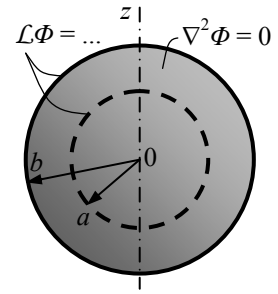
$$\begin{aligned} \Phi_B(r > a, \theta) &= -\frac{4}{5}U \left(\frac{a}{r}\right)^2 P_1^{(1)} \sin \varphi - \frac{8}{15}U \left(\frac{a}{r}\right)^4 P_3^{(1)} \sin \varphi \\ &= \frac{1}{5}U \left[ 4\left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin \theta + \left(\frac{a}{r}\right)^4 (5 \sin 3\theta + \sin \theta) \right] \sin \varphi. \end{aligned}$$

**Παράδειγμα 7.5-2:** Στην περιοχή  $a < r < b$  το δυναμικό περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Στις δύο οριακές επιφάνειες, οι οριακές συνθήκες είναι κατά περίπτωση:

(α)  $\Phi(r=a) = U(1 + 3 \cos 2\theta)$  και  $\Phi(r=b) = 0$ ,

(β)  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r=a} = 0$  και  $\Phi(r=b) = U \sin^3 \theta \cos 3\varphi$ .

Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  στην περιοχή  $a < r < b$ .



**Επίλυση:** Και στις δύο διατάξεις δεν παρατηρείται ασυνέχεια στις οριακές συνθήκες, γι' αυτό δεν αποκλείεται να είναι επιλύσιμες με λίγους όρους, με μορφή  $R(r)\Theta(\theta)F(\varphi)$ .

(α) Στην οριακή συνθήκη  $\Phi(r=a) = U(1 + 3 \cos 2\theta)$ , η ανεξαρτησία από τη γωνία  $\varphi$  σημαίνει ότι  $F(\varphi) = 1$  και  $m = 0$ . Επίσης, ο όρος με την εξάρτηση από τη γωνία  $\theta$  αναγνωρίζεται ως  $1 + 3 \cos 2\theta = 4P_2$ , βλ. σχέσεις (7.5-13). Με δεδομένο ότι  $m = 0$ , πρόκειται για αποδεκτή συνάρτηση  $\Theta(\theta)$  με  $n = 2$ , οπότε η ακτινική συνάρτηση έχει τη μορφή  $R(r) = \{r^2, r^{-3}\}$ . Τώρα ενδιαφέρει η περιοχή  $a < r < b$ , που δεν περιέχει ούτε το  $r = 0$ , ούτε το  $r = \infty$ , και δεν αιτιολογείται η εξαίρεση καμίας από τις δύο συναρτήσεις. Υπάρχει όμως και η οριακή συνθήκη  $\Phi(r=b) = 0$ , δηλαδή  $R(b) = 0$ , που υποδεικνύει το γραμμικό συνδυασμό  $R(r) = C[(b/r)^3 - (r/b)^2]$ , βλ. και σχέση (7.5-6γ). Εξισώνοντας  $U(1 + 3 \cos \theta) = R(r=a)\Theta(\theta)F(\varphi)$  προσδιορίζεται ο συντελεστής  $C$ . Τελικά, το δυναμικό περιγράφεται από την έκφραση:

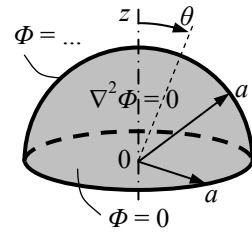
$$\Phi(a < r < b, \theta) = U \frac{\left(\frac{b}{r}\right)^3 - \left(\frac{r}{b}\right)^2}{\left(\frac{b}{a}\right)^3 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} (1 + 3 \cos 2\theta).$$

(β) Τώρα, η μη ομογενής οριακή συνθήκη  $\Phi(r=b) = U \sin^3 \theta \cos 3\varphi$  περιέχει εξάρτηση από τη γωνία  $\varphi$ . Η εξάρτηση αυτή περιγράφεται από τη συνάρτηση  $F(\varphi) = \cos 3\varphi$ , συνάρτηση που είναι αποδεκτή στο χωρισμό μεταβλητών και που προσδιορίζει την τάξη  $m = 3$ . Η εξάρτηση από τη γωνία  $\theta$  περιγράφεται από τη συνάρτηση  $\sin^3 \theta$ , η οποία με βάση τις σχέσεις (7.5-16) είναι μία αποδεκτή συνάρτηση (με  $m = 3$ ), καθώς είναι  $\sin^3 \theta = (1 - w^2)^{3/2} = -^{1/15} P_3^{(3)}$ , με βαθμό  $n = 3$ . Η αντίστοιχη ακτινική συνάρτηση  $R(r) = \{r^3, r^{-4}\}$  εξειδικεύεται στη μορφή  $R(r) = C[4(r/a)^3 + 3(a/r)^4]$ , όπως στη σχέση (7.5-6δ), ώστε να είναι  $(dR/dr)|_{r=a} = 0$  και να ικανοποιείται η ομογενής οριακή συνθήκη  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r=a} = 0$ . Εξισώνοντας στο  $r = b$ , προκύπτει η τιμή του συντελεστή  $C$ . Τελικά, το δυναμικό είναι ίσο με:

$$\Phi(a < r < b, \theta) = U \frac{4\left(\frac{r}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4}{4\left(\frac{b}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{b}\right)^4} \sin^3 \theta \cos 3\varphi.$$



**Παράδειγμα 7.5-3:** Στο εσωτερικό του ημισφαιρίου  $r < a$ ,  $\theta < \pi/2$  ισχύει η εξίσωση του Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Ο κυκλικός δίσκος  $\theta = \pi/2$  είναι σε επαφή με αγωγίμο γειωμένο επίπεδο, ενώ στην ημισφαιρική επιφάνεια  $r = a$  το δυναμικό κατανέμεται ως  $\Phi = U(3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta)$ . Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r, \theta)$  στο εσωτερικό του ημισφαιρίου.



**Επίλυση:** Η συνάρτηση  $3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta$  είναι συνεχής, ενώ στην κυκλική περιφέρεια στο  $\theta = \pi/2$  είναι  $\cos \theta = \cos 3\theta = 0$ , συνεπώς εκεί είναι  $\Phi = 0$  τόσο από την πλευρά του ημισφαιρίου, όσο και από την πλευρά του κυκλικού δίσκου. Επομένως, οι οριακές συνθήκες δεν περιέχουν ασυνέχειες. Επίσης, η οριακή συνθήκη περιγράφεται από συναρτήσεις που φαίνεται, αλλά πρέπει να επιβεβαιωθεί, ότι σχηματίζονται από αποδεκτές συναρτήσεις, συγκεκριμένα, από πολυώνυμα Legendre, αφού είναι  $\partial/\partial \theta = 0$ . Είναι πιθανόν, λοιπόν, να περιγράφεται η λύση από λίγους όρους, με μορφή  $R(r)\Theta(\theta)F(\varphi)$ .

Από το μοναδικό μη μηδενικό δεδομένο  $\Phi|_{r=a} = U(3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta)$  συνάγεται ότι είναι  $F = 1$ , συνεπώς η τάξη των συναρτήσεων  $\Theta(\theta)$  είναι  $m = 0$  και οι συναρτήσεις αυτές είναι πολυώνυμα Legendre. Στις εκφράσεις (7.5-13) αναγνωρίζεται ότι  $(3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta) = 8 P_3$ , και έτσι επιβεβαιώνεται ότι η οριακή συνθήκη περιέχει αποδεκτή συνάρτηση, συγκεκριμένα ένα πολυώνυμο Legendre, με βαθμό  $n = 3$ , οπότε επιλέγεται η συνάρτηση  $\Theta(\theta) = 8 P_3(w = \cos \theta) = (3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta)$ . Η ακτινική συνάρτηση  $R(r) = \{r^n, r^{-(n+1)}\}$ , με  $n = 3$ , εξειδικεύεται σε  $R(r) = C(r/a)^3$ , ώστε να μην απειρίζεται στο σημείο  $r = 0$ , εσωτερικό της περιοχής  $r < a$  που ενδιαφέρει. Τέλος, από την οριακή συνθήκη  $\Phi(r=a)$  διαπιστώνεται ότι ο συντελεστής έχει την τιμή  $C = U$ . Από όλα αυτά συνάγεται ότι στην περιοχή  $r < a$ ,  $\theta < \pi/2$  το δυναμικό είναι:

$$\Phi(r < a, \theta < \frac{1}{2}\pi) = U \left( \frac{r}{a} \right)^3 8P_3(w = \cos \theta) = U \left( \frac{r}{a} \right)^3 (3 \cos \theta + 5 \cos 3\theta).$$

**Σχόλιο:** Εύκολα ελέγχεται και επιβεβαιώνεται στην έκφραση αυτή αλλά και στα αποτελέσματα των προηγούμενων παραδειγμάτων ότι ικανοποιούνται όλες οι απαιτήσεις. Στο εσωτερικό είναι  $\nabla^2 \Phi = 0$ , επειδή συνδυάζονται αποδεκτές συναρτήσεις με τις ίδιες τιμές των παραμέτρων  $m$  και  $n$ , εδώ με  $m = 0$ , που αντιστοιχεί σε πολυώνυμο Legendre, και με  $n = 3$ , τόσο στο βαθμό του πολυωνύμου, όσο και στον εκθέτη της συνάρτησης  $R(r)$ . Επίσης, το δυναμικό δεν περιέχει αδικαιολόγητο απειρισμό, εδώ επειδή στη συνάρτηση  $R(r)$  δεν έχει περιληφθεί ο όρος  $r^{-4}$ . Τέλος, ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες σε ολόκληρο το περίβλημα της περιοχής, εδώ στην ημισφαιρική επιφάνεια  $r = a$ ,  $\theta < \pi/2$ , επειδή ο συντελεστής έχει επιλεγεί με την τιμή  $C = U$ , και στον κυκλικό δίσκο  $r < a$ ,  $\theta = \pi/2$ , επειδή είναι  $\Theta(\theta = \pi/2) = 0$ .

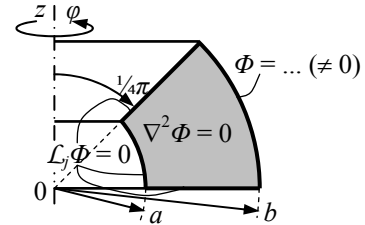
**Παράδειγμα 7.5-4:** Μία διάταξη με σχήμα τόρου περιορίζεται μεταξύ των σφαιρικών επιφανειών  $r = a$  και  $r = b$  ( $> a$ ), της κωνικής επιφάνειας  $\theta = \frac{1}{4}\pi$  και του επιπέδου  $\theta = \frac{1}{2}\pi$ . Στο εσωτερικό της διάταξης, το δυναμικό  $\Phi$  περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Στα διάφορα τμήματα την εξωτερικής επιφάνειας επικρατούν οι εξής οριακές συνθήκες:

$$r = a: \quad \Phi = 0,$$

$$r = b: \quad \Phi = U \sin 2\theta \cos \varphi,$$

$$\theta = \frac{1}{4}\pi: \quad \partial\Phi/\partial n = 0,$$

$$\theta = \frac{1}{2}\pi: \quad \Phi = 0.$$



Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  στο εσωτερικό ( $a < r < b$  και  $\frac{1}{4}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$ ) της διάταξης.

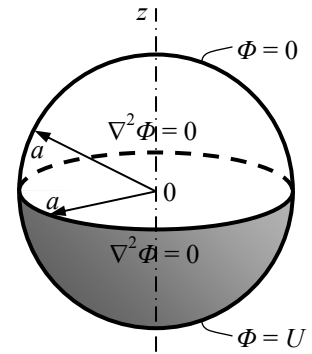
**Επίλυση:** Η συνάρτηση  $\sin 2\theta \cos \varphi$  της επιφάνειας  $r = b$  είναι συνεχής, στην κυκλική περιφέρεια στο  $\theta = \pi/2$  είναι  $\sin 2\theta = 0$ , συνεπώς εκεί είναι  $\Phi = 0$ , όπως και στην επιφάνεια  $\theta = \pi/2$ , ενώ τέλος στο  $\theta = \pi/4$  είναι  $(\partial/\partial\theta)\sin 2\theta = 2 \cos 2\theta = 0$ , συμβατό με τη συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$  της επιφάνειας  $\theta = \pi/4$  (με  $\partial/\partial n = -r^{-1}\partial/\partial\theta$ ). Επίσης, στα άκρα της επιφάνειας  $r = a$ , η συνθήκη  $\Phi = 0$  είναι προφανώς συμβατή με τις συνθήκες των παρακείμενων επιφανειών ( $\Phi = 0$  και  $\partial\Phi/\partial n = 0$ ). Επομένως, οι οριακές συνθήκες δεν περιέχουν ασυνέχειες.

Έχοντας διαπιστώσει ότι στις οριακές συνθήκες δεν εμφανίζεται ασυνέχεια, ας αναζητηθεί λύση με μορφή  $\Phi = R(r)\Theta(\theta)F(\varphi)$ . Η επιλογή  $F(\varphi) = \cos \varphi$  είναι αποδεκτή ως συνάρτηση  $F_m(\varphi)$ , με  $m = 1$ , οπότε η συνάρτηση  $\Theta(\theta)$  θα αναζητηθεί μεταξύ των προσαρτημένων συναρτήσεων Legendre α' είδους, και όχι των πολωνύμων, και συγκεκριμένα με τάξη  $m = 1$ , δηλαδή συνάρτηση  $\Theta(\theta) = P_n^{(1)}(w = \cos \theta)$ , με κατάλληλο βαθμό  $n$ . Στις σχέσεις (7.5-16) εντοπίζεται η συνάρτηση  $P_2^{(1)}(w = \cos \theta) = -\frac{3}{8} \sin 2\theta$ , που υποδεικνύει την επιλογή  $\Theta(\theta) = \sin 2\theta = -\frac{8}{3} P_2^{(1)}(w = \cos \theta)$ , προσαρτώντας το συντελεστή  $-\frac{8}{3}$  για απλοποίηση των εκφράσεων που πραγματικά ενδιαφέρουν. Αυτή η επιλογή προσδιορίζει την τιμή  $n = 2$  του εκθέτη, συνεπώς η ακτινική συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός  $R(r) = \{r^n, r^{-(n+1)}\} = \{r^2, r^{-3}\}$ , ειδικότερα  $R(r) = C[3(r/a)^2 + 2(a/r)^3]$ , όπου η εξειδίκευση εξασφαλίζει, βλ. και τη σχέση (7.5-6δ), ότι είναι  $(dR/dr)|_{r=a} = 0$  και ικανοποιείται η ομογενής οριακή συνθήκη  $(\partial\Phi/\partial n)|_{r=a} = 0$ . Ο συντελεστής  $C$  προσδιορίζεται, ώστε να ικανοποιείται ακριβώς η οριακή συνθήκη στο  $r = b$ , και το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\Phi(a < r < b, \theta) = U \frac{3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^3}{3\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right)^3} \sin 2\theta \cos \varphi.$$

**Παράδειγμα 7.5-5:** Στη σφαιρική επιφάνεια  $r = a$  το δυναμικό  $\Phi$  είναι ίσο με μηδέν στο πάνω μισό και ίσο με  $U$  στο κάτω μισό. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  στο εσωτερικό της σφαίρας, όπου το δυναμικό περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ .

**Επίλυση:** Η ασυνέχεια στην κυκλική περιφέρεια  $\theta = \pi/2$  αποκλείει το ενδεχόμενο να είναι η διάταξη επιλύσιμη με λίγους όρους, οπότε από την αρχή η επίλυση προσανατολίζεται στο να εκφρασθεί το δυναμικό με τη μορφή σειράς.



Η διάταξη συνολικά (όχι μόνο το σχήμα, αλλά και οι οριακές συνθήκες) είναι αμετάβλητη σε περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$ , δηλαδή  $\partial/\partial\varphi = 0$ . Συνεπώς, από τις σφαιρικές αρμονικές στο ανάπτυγμα συνεισφέρουν μόνο οι όροι με  $m = 0$ , με αντίστοιχη συνάρτηση  $F_{m=0} = 1$ , οπότε ως συναρτήσεις  $\Theta(\theta)$  κατάλληλες είναι μόνο τα πολώνυμα Legendre. Όλοι οι βαθμοί  $n$  είναι κατ' αρχήν αποδεκτοί, επειδή ο περιορισμός  $n \geq m$  εδώ απλά σημαίνει  $n \geq 0$ . Ο βαθμός  $n$  κάθε πολωνύμου Legendre μεταφέρεται ως εκθέτης στην ακτινική συνάρτηση  $R(r) = \{r^n, r^{-(n+1)}\}$ , αλλά ο δεύτερος όρος πρέπει να παραλειφθεί, ώστε το δυναμικό να μην απειρίζεται στην αρχή των αξόνων. Με βάση όλες αυτές τις πληροφορίες, το δυναμικό περιγράφεται από το ανάπτυγμα:

$$\Phi(r < a, \theta) = U \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta).$$

Ουσιαστικά, έχει γίνει το ανάπτυγμα (7.5-23), χωρίς τους όρους με  $m \neq 0$ , με την εισαγωγή και των συναρτήσεων  $R_n(r)$ . Στο ανάπτυγμα ο συντελεστής του  $r^n$  γράφτηκε ως  $(U/a^n)B_n$ , ώστε η έκφραση του  $\Phi(r=a, \theta)$  να είναι όσο γίνεται πιο απλή εκεί που θα χρησιμοποιηθεί, στο όριο  $r = a$ .

Η οριακή συνθήκη στην επιφάνεια  $r = a$  γράφεται:

$$\Phi(a, \theta) = U \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(w = \cos \theta) = \begin{cases} 0 & (0 < \theta < \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow 1 > w > 0), \\ U & (\frac{1}{2}\pi < \theta < \pi \Leftrightarrow 0 > w > -1). \end{cases}$$

Τα πολώνυμα Legendre είναι ορθογώνια στο διάστημα  $-1 < w < +1$ , με τη μονάδα ως συνάρτηση βάρους. Αν χρησιμοποιηθεί ως μεταβλητή ολοκλήρωσης η γωνία  $\theta$ , τότε από την αλλαγή μεταβλητής  $w = \cos \theta$  και την αντιστροφή των ορίων ολοκλήρωσης εμφανίζεται ως συνάρτηση βάρους το  $\sin \theta$ . Πολλαπλασιάζοντας με τον τυχόντα όρο της σειράς και ολοκληρώνοντας, σχηματίζονται χωριστές εξισώσεις για κάθε συντελεστή:

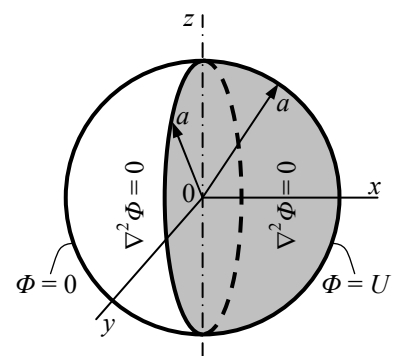
$$B_n \int_{-1}^{+1} P_n^2(w) dw = \int_{-1}^0 P_n(w) dw = K_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Το ολοκλήρωμα στην αριστερή πλευρά δίδεται στη σχέση (7.5-14β) και είναι ίσο με  $2/(2n+1)$ . Το ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς είναι καλά ορισμένο και η τιμή του έχει ονομασθεί  $K_n$ . Οι πρώτες τιμές των  $K_n$  υπολογίζονται εύκολα ολοκληρώνοντας τις εκφράσεις (7.5-13). [Υπάρχει, πάντως, και γενική αναλυτική έκφραση,  $K_n = \{P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)\}/(2n+1)$ , με τις τιμές  $P_{n\pm 1}(0)$  να προσδιορίζονται εύκολα από τη σχέση (7.5-12β), δεν είναι, όμως, αυτό το κύριο ζητούμενο εδώ.] Είναι  $K_0 = 1$ ,  $K_1 = -1/2$ ,  $K_2 = 0$ ,  $K_3 = 1/8$ ,  $K_4 = 0$  κλπ., και οι πρώτοι μη μηδενικοί συντελεστές του ανάπτυγματος του δυναμικού είναι  $B_0 = 1/2$ ,  $B_1 = -3/4$ ,  $B_3 = 7/16$ , κλπ. Έτσι, στο ανάπτυγμα του δυναμικού οι πρώτοι μη μηδενικοί όροι είναι:

$$\Phi(r < a, \theta) = U \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{r}{a} \cos \theta + \frac{7}{16} \left( \frac{r}{a} \right)^3 \frac{1}{8} (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta) - \dots \right\}.$$

Ο σταθερός όρος είναι ίσος με  $1/2 U$ , όσο η μέση τιμή του δυναμικού στο όριο. Από τους επόμενους όρους, εκείνοι με άρτιο βαθμό δεν συνεισφέρουν, όπως υποδεικνύει η παραπάνω έκφραση (και αποδεικνύεται αν χρησιμοποιηθεί η γενική έκφραση για τα  $K_n$ ). Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί. Η αρχική οριακή συνθήκη, αν γραφεί για τη διαφορά  $\Phi - 1/2 U$ , είναι αντισυμμετρική ως προς το επίπεδο  $\theta = \pi/2$ , οπότε την ίδια ιδιότητα έχει συνολικά το δυναμικό. Δεν μπορεί, συνεπώς, το ανάπτυγμα του δυναμικού να περιλαμβάνει συναρτήσεις συμμετρικές ως προς το  $w = 0$ , δηλαδή, ως προς  $\theta = \pi/2$ , όπως είναι τα πολυώνυμα *Legendre* με άρτιο βαθμό.

**Παράδειγμα 7.5-6:** Στη σφαιρική επιφάνεια  $r = a$  το δυναμικό  $\Phi$  είναι ίσο με  $U$  στο διάστημα  $-\pi/2 < \varphi < +\pi/2$  και ίσο με μηδέν στο υπόλοιπο μισό. Ζητείται το δυναμικό  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  στο εσωτερικό της σφαίρας, όπου το δυναμικό περιγράφεται από την εξίσωση του *Laplace*,  $\nabla^2 \Phi = 0$ .



**Επίλυση:** Προφανώς, το δυναμικό θα αναπτυχθεί σε σειρά.

Με τον συγκεκριμένο προσανατολισμό των αξόνων η διάταξη εξαρτάται από τη γωνία  $\varphi$ , αλλά είναι συμμετρική ως προς τη γωνιακή θέση  $\varphi = 0$  (ή  $\varphi = \pm\pi$ ), συνεπώς το ανάπτυγμα θα αποτελείται μόνο από τις συναρτήσεις  $F_m(\varphi) = \cos(m\varphi)$ , με όλες τις ακέραιες τιμές του  $m$ , συμπεριλαμβανομένης της τιμής  $m = 0$  (με  $F_{m=0} = 1$ ). Κάθε συνάρτηση  $F_m$  συνεργάζεται με τις προσαρτημένες συναρτήσεις *Legendre* α' είδους  $P_n^{(m)}(w = \cos \theta)$ , στις οποίες συμπεριλαμβάνονται και τα πολυώνυμα *Legendre*,  $P_n^{(m=0)} = P_n$ , σε κάθε περίπτωση

με βαθμό  $n \geq m$ . Τέλος, κάθε ζευγάρι συναρτήσεων  $F_n P_n^{(m)}$  συνοδεύεται από ακτινική συνάρτηση  $R_n(r) = (r/a)^n$ , αφού πρόκειται για την περιοχή  $r < a$ . Προσαρτώντας και έναν συντελεστή  $UB_{nm}$  σε κάθε όρο του διπλού αθροίσματος, το ανάπτυγμα του δυναμικού έχει τη μορφή:

$$\Phi(r < a, \theta, \varphi) = U \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left[ B_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n B_{nm} P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi) \right].$$

Στην επιφάνεια  $r = a$ , για τη δεδομένη οριακή συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται η ισότητα:

$$\begin{aligned} \Phi(r=a, \theta, \varphi) &= U \sum_{n=0}^{\infty} \left[ B_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n B_{nm} P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi) \right] \\ &= \begin{cases} U & \left( -\frac{1}{2}\pi < \varphi < +\frac{1}{2}\pi \right), \\ 0 & \left( \varphi < -\frac{1}{2}\pi, \varphi > +\frac{1}{2}\pi \right). \end{cases} \end{aligned}$$

Απαλείφοντας τον κοινό παράγοντα  $U$ , η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων 1 και  $\cos(m\varphi)$  στο διάστημα  $-\pi < \varphi < +\pi$  παράγει τις ισότητες:

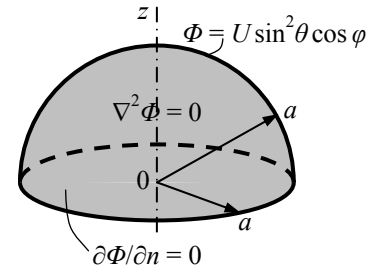
$$\begin{aligned} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} B_{n0} P_n(w=\cos \theta) &= \pi, \\ \pi \sum_{n=0}^{\infty} B_{nm} P_n^{(m)}(w=\cos \theta) &= \begin{cases} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2}{m} & (m=1,3,5,\dots), \\ 0 & (m=2,4,6,\dots), \end{cases} \end{aligned}$$

όπου η δεξιά πλευρά δίνει το αποτέλεσμα από την ολοκλήρωση της μονάδας και του  $\cos(m\varphi)$  στο διάστημα  $-\pi/2 < \varphi < +\pi/2$ , στο οποίο δεν είναι  $\Phi = 0$ . Ακολούθως, η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων *Legendre* στο διάστημα  $-1 < w < +1$ , βλ. και σχέσεις (7.5-14) και (7.5-17), παράγει χωριστές εξισώσεις για κάθε συντελεστή  $B_{nm}$ :

$$\begin{aligned} 2B_{n0} \frac{2}{2n+1} &= \int_{-1}^{+1} P_n(w) dw, \\ B_{nm} \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} &= (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2}{m\pi} \int_{-1}^{+1} P_n^{(m)}(w) dw \quad (m=1,3,5,\dots), \end{aligned}$$

ενώ για  $m = 2, 4, 6, \dots$  είναι  $B_{nm} = 0$ . Στο πρώτο ολοκλήρωμα της δεξιάς πλευράς μπορεί να γραφεί  $P_n(w) = P_n P_0$ , επειδή  $P_0 = 1$ , και να αναγνωρισθεί ως ολοκλήρωμα ορθογωνιότητας. Συνεπώς, το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με  $2\delta_{n,0}$ . Οι συναρτήσεις  $P_n^{(m)}$  είναι αντισυμμετρικές, όταν η διαφορά  $n-m$  είναι περιττός αριθμός, οπότε το ολοκλήρωμά τους είναι ίσο με μηδέν. Τελικά, μη μηδενικοί είναι μόνο οι όροι  $B_{00}$  και  $B_{nm}$  με  $n-m = \text{άρτιος}$ .

**Παράδειγμα 7.5-7:** Στο εσωτερικό ημισφαιρίου  $\theta < \pi/2$ ,  $r < a$ , το δυναμικό περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$ . Στον επίπεδο δίσκο  $\theta = \pi/2$  το δυναμικό υπακούει στη συνθήκη  $\partial\Phi/\partial n = 0$ , ενώ στην ημισφαιρική επιφάνεια το δυναμικό είναι ίσο με  $\Phi = U \sin^2 \theta \cos \varphi$ . Ζητείται η κατανομή του δυναμικού στο εσωτερικό του ημισφαιρίου.



**Επίλυση:** Το σύμπλεγμα  $\sin^2 \theta \cos \varphi$  περιέχει τη συνάρτηση  $\cos \varphi$ , αποδεκτή ως συνάρτηση  $F_m(\varphi)$ , με  $m = 1$ . Για να ικανοποιείται η εξίσωση του Laplace, η συνάρτηση  $F_m(\varphi)$  συνεργάζεται με συναρτήσεις  $P_n^{(m)}(w = \cos \theta)$  με  $n \geq m$ , εδώ με συναρτήσεις  $P_n^{(1)}$  με  $n \geq 1$ , οι οποίες θα αναζητηθούν στις σχέσεις (7.5-16) μεταξύ των συναρτήσεων με  $m = 1$ , με οδηγό την συνάρτηση  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ , που εμφανίζεται στην οριακή συνθήκη. Η συνάρτηση  $P_2^{(2)}$  είναι ανάλογη προς το  $(1 - \cos 2\theta)$ , όμως αφορά τάξη  $m = 2$  και δεν είναι αποδεκτή. Οι συναρτήσεις  $P_n^{(1)}$  με  $n \geq 4$ , που δεν αναγράφονται στις σχέσεις (7.5-16), επίσης αποκλείονται, επειδή καθεμία από αυτές περιέχει και όρους  $\sin(n\theta)$  ή  $\cos(n\theta)$ , που είναι ξένοι προς τη συνάρτηση  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ . Δεν εντοπίζεται, λοιπόν, κατάλληλη συνάρτηση και η επίλυση θα γίνει με ανάπτυγμα σε σειρά, χωρίς να εξετασθεί, αν στο  $\theta = \pi/2$  εμφανίζεται ή όχι ασυνέχεια.

Διαθέσιμη βάση για το ανάπτυγμα αποτελούν οι συναρτήσεις  $P_n^{(1)}(w = \cos \theta)$ , οι οποίες όμως είναι ορθογώνιες αυστηρά στο διάστημα  $-1 < w < +1$ , και όχι στο  $0 < w < 1$ , στο οποίο εκτείνεται η διάταξη. Είναι όμως εφικτό, να αξιοποιηθεί η ορθογωνιότητα, επειδή ειδικά στην παρούσα διάταξη η οριακή συνθήκη  $(\partial\Phi/\partial n)|_{w=0} = 0$  επιτρέπει να κατοπτρισθεί η διάταξη συμμετρικά στο υπόλοιπο διάστημα  $-1 < w < 0$ . Ο κατοπτρισμός της συνάρτησης  $\sin^2 \theta$  δίνει  $\sin^2(\pi - \theta) = \sin^2 \theta$ , οπότε στη διευρυμένη διάταξη η οριακή συνθήκη είναι  $\Phi = U \sin^2 \theta \cos \varphi$ , τώρα πλέον στην επιφάνεια ολόκληρης σφαίρας.

Με  $F_m(\varphi) = F_1(\varphi) = \cos \varphi$  (με  $m = 1$ ), χρησιμοποιώντας από τις συναρτήσεις  $P_n^{(1)}$  (με  $n \geq 1$ ) μόνο τις συμμετρικές ως προς  $w = 0$ , δηλαδή απορρίπτοντας αυτές με  $n - m = n - 1 = \text{περιττός}$ , και με τις ακτινικές συναρτήσεις  $R_n(r) = (r/a)^n$  για την περιοχή  $r < a$ , το δυναμικό γράφεται:

$$\Phi(r < a, \theta) = U \left[ \sum_{n=1(2)}^{\infty} B_n \left( \frac{r}{a} \right)^n P_n^{(1)}(\cos \theta) \right] \cos \varphi.$$

Οι συντελεστές  $B_n$  (με  $n = 1, 3, 5, \dots$ ) προσδιορίζονται εξισώνοντας στο όριο  $r = a$  και εφαρμόζοντας την ορθογωνιότητα. Με  $w = \cos \theta$ ,  $dw = -\sin \theta d\theta$ , προκύπτουν οι τιμές τους:

$$B_n \frac{2}{2n+1} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \int_0^\pi P_n^{(1)}(\cos \theta) \sin^3 \theta d\theta.$$