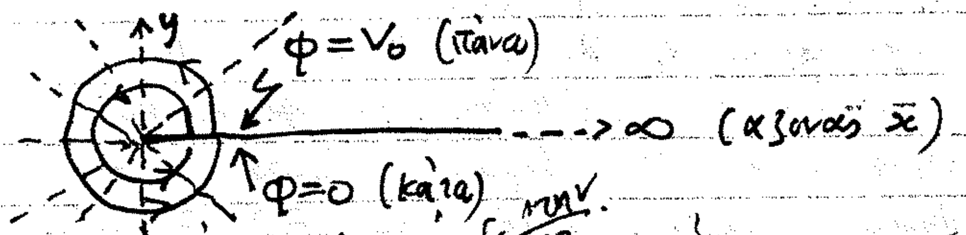
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση πηγών

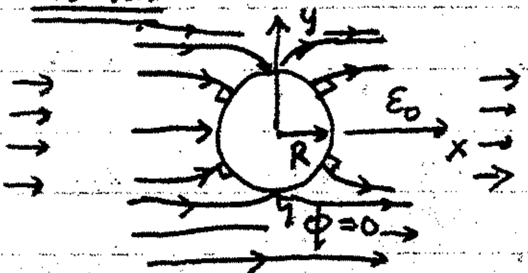


Οι περιοδικές συναρτήσεις $\cos k\varphi$ ή $\sin k\varphi$ δεν εξασφαλίζουν την ασυνέχεια στο $\varphi = 0/2\pi$. Ούτε όμως και η υπερβολική δεν εξασφαλίζει την.

Άρα αρκεί να δοκιμάσουμε το $k=0$ οπότε $F = A\varphi + B$ με τελική μορφή (λόγω του $\phi = V_0$ με $\varphi = 0$ και $\phi = 0$ με $\varphi = 2\pi$) του F την $F = V_0(1 - \varphi/2\pi)$. Επειδή δεν υφίσταται κάποιο r_T συγκεκριμένο (όριο, τέρμα) διαφορετικό από το 0 και το ∞ (οπότε δεν ορίζεται το $\ln r_T$), δεχόμαστε σαν R μόνο τη σταθερά (ίση την μονάδα). Άρα τελικά

$\phi = V_0(1 - \varphi/2\pi)$ και έτσι $\vec{E} = -\nabla\phi = \hat{i}_\varphi \frac{V_0}{2\pi r_T}$. Και πάλι οι ισοδυναμικές γραμμές (ακτινικά) είναι κάθετες στους κύκλους των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου (αζιμουθιακή συνιστώσα μόνο).

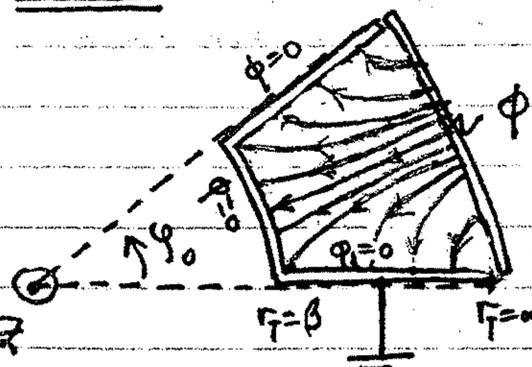
Άσκηση



Ομοιόμορφο ηλ. πεδίο μια $\frac{|\vec{r}|}{R} >> 1$. Σε κύλινδρο ακτίνας R το φ είναι 0 στην επιφάνειά του. Οι γραμμές του ηλ. πεδίου καταλήγουν και ξεκινούν κάθετα στην επιφάνεια του τέλεια αγώγιμου σώματος του κυλίνδρου. Στο εσωτερικό του δεν υφίσταται πεδίο.

Οριακή συνθήκη: $\phi(r_T = R, \forall\varphi) = 0$. Επίσης $\phi(r_T : \frac{r_T}{R} >> 1, \forall\varphi) =$ $=$ αντίστοιχο εκείνου που αντιστοιχεί στο $\vec{E} = \vec{i}_x E_0$. Επειδή $\vec{E} = -\nabla\phi$ προκύπτει ότι $E_0 = -\frac{d\phi}{dx}$ και έτσι $\phi = -xE_0$. Όμως $x = r_T\cos\varphi$. Άρα η δεύτερη οριακή συνθήκη είναι $\phi(r_T \to \infty, \forall\varphi) = -E_0 r_T \cos\varphi$. Η τελευταία αυτή συνθήκη υποδεικνύει ότι η σταθερά διαχωρισμού είναι 1 και η γωνιακή συνάρτηση διαχωρισμού $F(\varphi)$ η $\cos\varphi$. Άρα η λύση θα είναι γραμμικός της μορφής $\{r_T, r_T^{-1}\}\cos\varphi$ ή, ισοδύναμα, $\phi = B r_T\cos\varphi + \frac{A}{r_T}\cos\varphi$. Κάνοντας χρήση των δύο οριακών συνθηκών προκύπτει τελικά: $\phi = -E_0 R\left(\frac{r_T}{R} - \frac{R}{r_T}\right)\cos\varphi$.
Το πεδίο υπολογίζεται αμέσως: $\vec{E} = -\nabla\phi = \vec{i}_T E_0\left(1 + \frac{R^2}{r_T^2}\right)\cos\varphi - \vec{i}_\varphi E_0\left(1 - \frac{R^2}{r_T^2}\right)\sin\varphi$.
Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίων μπορεί επίσης εύκολα να βρεθεί από την σχέση: $\sigma_\varepsilon = \vec{i}_n \cdot (\vec{D}_{\varepsilon\xi\omega} - \vec{D}_{\mu\varepsilon\sigma\alpha})$ με $\vec{i}_n \equiv \vec{i}_T$ και $\vec{D}_{\mu\varepsilon\sigma\alpha} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\mu\varepsilon\sigma\alpha} = 0$, και $\vec{D}_{\varepsilon\xi\omega} = \varepsilon_0 \vec{E}_{\varepsilon\xi\omega}$ οπότε (για $r_T = R$) $\vec{D}_{\varepsilon\xi\omega} = \varepsilon_0 \vec{i}_T E_0 2\cos\varphi$ και $\sigma_\varepsilon = 2\varepsilon_0 E_0 \cos\varphi$. Δηλαδή, ο κύλινδρος είναι αρνητικά φορτισμένος (για $E_0 > 0$) αριστερά με μέγιστο μέτρο στο $\varphi = \pi$ και θετικά φορτισμένος δεξιά με μέγιστο στο $\varphi = 0$.

Άσκηση



Οριακές συνθήκες:

$\phi(r_T = \beta, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0) = 0$

$\phi(\beta \leq r_T \leq \alpha, \varphi = 0) = 0$

$\phi(\beta \leq r_T \leq \alpha, \varphi = \varphi_0 = 0$

$\phi(r_T = \alpha, 0 \leq \varphi \leq \varphi_0) = V_0$

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο ορισμού της φ δεν καλύπτει πλήρη κύκλο οπότε παραμένει η σταθερά διαχωρισμού να μην είναι ακέραια. Δεν είναι επίσης μηδενική διότι έχουμε δύο μηδενισμούς του δυναμικού, για $\varphi = 0$ και $\varphi = \varphi_0$. Άρα αποκλείεται λογαριθμική συνάρτηση διαχωρισμού $R(r_T)$ της μορφής $\ln r_T$. Η περιοδικότητα του δυναμικού στο φ δείχνει τριγωνομετρική γωνιακή συνάρτηση διαχωρισμού. Η ικανοποίηση δε είναι η $\sin(k\varphi)$ ($k \neq 0$ όπου $k>0$) διότι μόνο αυτή μηδενίζεται για $\varphi=0$. Ο μηδενισμός δε του Φ για $\varphi=\varphi_0$ επιβάλλει: $\sin(k\varphi_0)=0 \Rightarrow k=k_n=\frac{n\pi}{\varphi_0}$ δηλαδή ένα διακριτό απειροσύνολο σταθερών διαχωρισμού (n: ακέραιος). Άρα $F(\varphi)=\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi_0}\varphi\right)$. Τότε προφανώς $R(r_T)=\{r^{k_n}, r^{-k_n}\}$ και έτσι τελικά θα έχουμε:

$$\phi=\sum_n\left[A_n\left(\frac{r_T}{\beta}\right)^{\frac{n\pi}{\varphi_0}}+B_n\left(\frac{\beta}{r_T}\right)^{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\right]\sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\varphi_0}\right)$$

όπου κανονικοποιήσαμε τις προσδιοριστέες σταθερές A_n και B_n να γίνουν με τις αδιάστατες και διαίρεση με δύναμη της ακτίνας β. Για να ικανοποιείται τώρα η πρώτη από τις οριακές συνθήκες (για $r_T=\beta$, $\varphi=0$) θα πρέπει προφανώς $A_n+B_n=0$. Κάνοντας δε χρήση και της τέταρτης οριακής συνθήκης (πολλαπλασιάζοντας τη σχέση για το ϕ με $\sin\left(\frac{n'\pi\varphi}{\varphi_0}\right)$ για $r_T=\alpha$ και ολοκληρώνοντας ως προς φ στο διάστημα $[0,\varphi_0]$ (διάστημα ορισμού της φ) προκύπτει εύκολα ότι:

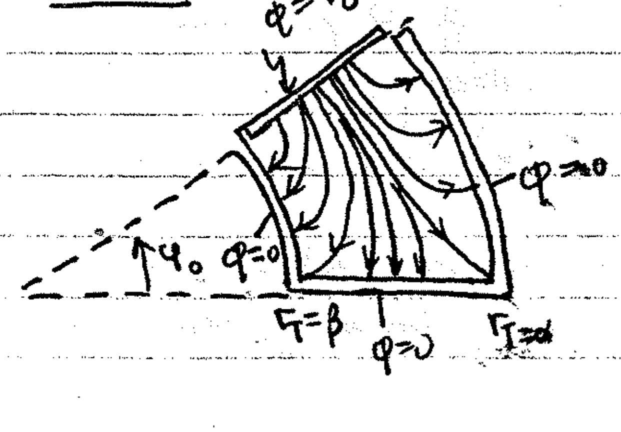
$$\phi=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=\text{περιττός}}\frac{1}{n}\frac{(r_T/\beta)^{n\pi/\varphi_0}-(\beta/r_T)^{n\pi/\varphi_0}}{(\alpha/\beta)^{n\pi/\varphi_0}-(\beta/\alpha)^{n\pi/\varphi_0}}\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi_0}\varphi\right).$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει το όριο $\beta\to 0$: $\phi=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=\text{περιττός}}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\frac{n\pi}{\varphi_0}}\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi_0}\varphi\right)$

Στο όριο αυτό, η ακτινική συνιστώσα του ηλ. πεδίου γίνεται: $E_T=-\partial\phi/\partial r_T=-\frac{4V_0}{\varphi_0}\sum_{n=\text{περιττός}}\frac{r_T^{(n\pi/\varphi_0-1)}}{\alpha^{n\pi/\varphi_0}}\sin\left(\frac{n\pi}{\varphi_0}\varphi\right)$. Για μικρά r (ιδιαίτερα για $n=1$) προκύπτει το ερώτημα κατά πόσο το E_T δεν απειρίζεται για $r_T=0$: Προφανώς αυτό συμβαίνει για $\frac{\pi}{\varphi_0}-1\geq 0$ δηλαδή όταν η γωνία φ_0 είναι οξεία.

. Αντίθετα, για αμβλεία γωνία, το E_T απειρίζεται. Δηλαδή στη γεωμετρία της μύτης λεπτής ακίδας αναπτύσσονται ισχυρά πεδία κοντά στην ακμή

Άσκηση



Οριακές συνθήκες:

$\phi(r_T=\beta,\ 0\leq\varphi\leq\varphi_0)=0$

$\phi(r_T=\alpha,\ 0\leq\varphi\leq\varphi_0)=0$

$\phi(\beta\leq r_T\leq\alpha,\ \varphi=0)=0$

$\phi(\beta\leq r_T\leq\alpha,\ \varphi=\varphi_0)=V_0$.

Επειδή υπάρχει περιοδικότητα στο r_T η ακτινική συνάρτηση διαχωρισμού θα είναι τριγωνομετρική συνάρτηση του ημιτόνου ή ημιτονικά αυτών. Η προφανής επιλογή που ικανοποιεί άμεσα την πρώτη οριακή συνθήκη είναι $R(r_T) = \sin\left(k\ln\left(\frac{r_T}{\beta}\right)\right)$. Για να ικανοποιείται και η δεύτερη θα πρέπει προφανώς να έχουμε: $\sin\left(k\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)=0 \Longrightarrow$

$k = k_n = \frac{n\pi}{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}$ δηλαδή ένα διακριτό αριθμήσιμο σύνολο σταθερών διαχωρισμού.

Η αντίστοιχη συνάρτηση διαχωρισμού αζιμουθιακά θα είναι υπερβολικά ημίτονα και μάλιστα, για να έχουμε μηδενισμό του ϕ στο $\varphi=0$ θα πρέπει αναγκαστικά να είναι η $\sinh(k_n\varphi)$. Έτσι τελικά έχουμε:

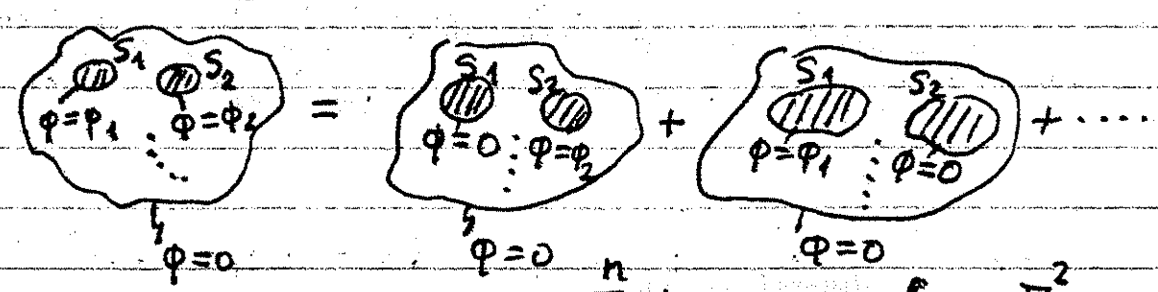
$$\phi = \sum_n A_n \sin\left[n\pi\frac{\ln(r_T/\beta)}{\ln(\alpha/\beta)}\right]\sinh\left[\frac{n\pi\varphi}{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}\right]$$

Για να βρούμε τις A_n κάνουμε χρήση και της $4^{ης}$ οριακής συνθήκης πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω σχέση (για $\varphi=\varphi_0$) με $\sin\left[n'\pi\frac{\ln(r_T/\beta)}{\ln(\alpha/\beta)}\right]$ και ολοκληρώνοντας ως προς $\ln(r_T/\beta)$ (δηλαδή το διαφορικό είναι $d\ln(r_T/\beta)$) στο διάστημα $r_T=[\beta,\alpha]$ δηλαδή $\ln(r_T/\beta) = [0, \ln(\alpha/\beta)]$. Κάνοντας χρήση των γνωστών σχέσεων ορθογωνιότητας προκύπτει τελικά:

$$\phi = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n\text{-περιττά}}\frac{1}{n}\sin\left[n\pi\frac{\ln(r_T/\beta)}{\ln(\alpha/\beta)}\right]\frac{\sinh\left[\frac{n\pi}{\ln(\alpha/\beta)}\varphi\right]}{\sinh\left[\frac{n\pi}{\ln(\alpha/\beta)}\varphi_0\right]}$$

$$\boxed{\text{Η ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ ΣΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ LAPLACE } \nabla^2\phi=0}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ(1) ΠΡΟΒΛΗΜΑ(2) ....

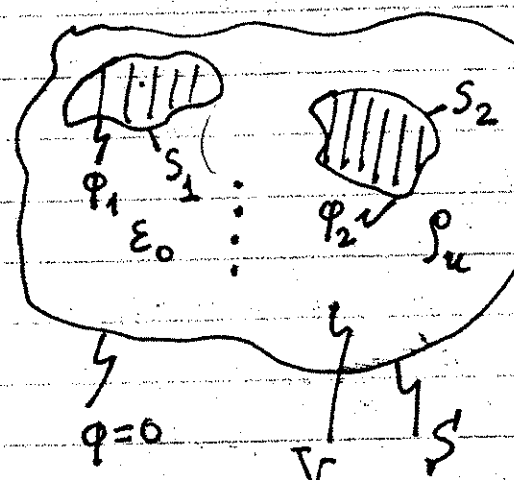


Μπορούμε να έχουμε: $\phi = \sum_{i=1}^{n}\phi_i$ όπου: $\left\{\phi_i : \nabla^2\phi_i = 0\right.$ με οριακές συνθήκες $\phi_i(S_k) = \begin{cases}\Phi_k & \text{για } k=i \\ 0 & \text{για } k\neq i\end{cases}$

δηλαδή το πρόβλημα μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία προβλημάτων έκαστο των οποίων χαρακτηρίζεται από μηδενική οριακή συνθήκη σε όλες τις επιφάνειες πλην μιας. Το πρόβλημα του προς επίλυση συστήματος στο παραπάνω σχήμα θεωρούμε ότι έχει μηδενική δυναμική αναφορά (σύμβαση).

Η ΕΙΔΙΚΗ ΚΑΙ Η ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Poisson $\nabla^2\phi = -\frac{\rho_{ολ}}{\varepsilon_0}$ ή $\nabla^2\phi = -\frac{\rho_u}{\varepsilon}$ (αν $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, ε: σταθερά) και αντίστοιχων εξισώσεων Poisson σε μαγνητοστατικά κτλ. προβλήματα.

Για λόγους ευκολίας στην παρουσίαση περιορισμένος σε ηλεκτροστατικά προβλήματα τύπου $\nabla^2\phi = -\frac{\rho_u}{\varepsilon_0}$ (δηλ. $\rho_{ολ}=\rho_u$ με $\rho_p=-\nabla\cdot\vec{P}=0$).



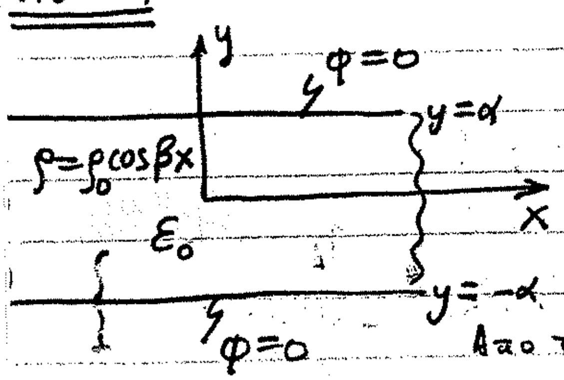
Στο σύστημα του σχήματος είναι δεδομένη η πυκνότητα ρ_u εντός του συστήματος όγκου V και στο χώρο μεταξύ των διαχωριστικών επιφανειών $\{S_i\}$ που βρίσκονται εκεί σε σταθερά δυναμικά $\{\phi_i\}$. Είναι δηλαδή επιφάνειες τέλειων αγωγών και γι' αυτό ισοδυναμικές. Η λύση του προβλήματος ϕ είναι $\phi=\phi_{part}+\phi_h$ όπου

$$\phi_{part}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho_u(\vec{r}')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

(δηλαδή, ένα ολοκλήρωμα επαλληλίας) και ο προσδιορισμός (V': χώρος μεταξύ επιφανειών)

ϕ_h βρίσκεται από τη λύση της εξίσωσης Laplace: $\nabla^2\phi_h=0$ με οριακές συνθήκες $\{\phi_h(S_i)=\phi_i-\phi_{part}(S_i)\,;\forall i\}$ δηλαδή τροποποιημένες κατά την τιμή της ειδικής (part) λύσης επί καθεμιάς των επιφανειών. Γενικότερα τώρα υπάρχουν προβλήματα πού μπορούμε να βρούμε μια κατάλληλη λύση της $\nabla^2\phi=-\rho_u/\varepsilon_0$ χωρίς να ληφθεί υπόψη καμιά οριακή συνθήκη. Η ειδική αυτή λύση ($\phi=\phi_{part}$) είναι μέρος της λύσης, δηλαδή $\phi=\phi_{part}+\phi_h$ όταν τώρα το άλλο μέρος ϕ_h ικανοποιεί την εξίσωση Laplace με τροποποιημένες οριακές συνθήκες $\{\phi_h(S_i)=\phi_i-\phi_{part}(S_i), \forall i\}$. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι απαραίτητο η ειδική λύση ϕ_{part} να σχετίζεται με ολοκλήρωμα επαλληλίας.

Άσκηση



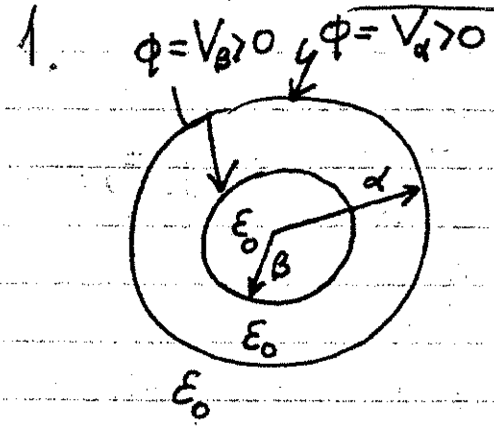
Ειδική λύση: Επιλέγουμε $\nabla^2\phi_{part}=\frac{d^2\phi_{part}}{dx^2}=-\frac{\rho_0\cos\beta x}{\varepsilon_0}$ οπότε $\phi_{part}=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\cos\beta x$.

Τροποποιημένες οριακές συνθήκες (για το πρόβλημα Laplace $\nabla^2\phi_h=0$): $\phi_h(y=\pm\alpha)=0-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\cos\beta x=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\cos\beta x$.

Από τις οριακές συνθήκες αυτές συνάγεται ότι η σταθερά διαχωρισμού είναι β και η συνάρτηση διαχωρισμού στο x η $\cos\beta x$. Έτσι μεταξύ των αντίστοιχων συναρτήσεων διαχωρισμού διαλέγουμε να είναι υπερβολική τέτοια και μάλιστα άρτια, άρα η $\cosh\beta y$. Άρα $\phi_h=A\cos\beta x\cosh\beta y$ και έτσι, τελικά $A=-\frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\Big/\cosh\beta\alpha$. Συνολικά στο τέλος έχουμε $\phi=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\left(1-\frac{\cosh\beta y}{\cosh\beta\alpha}\right)\cos\beta x$

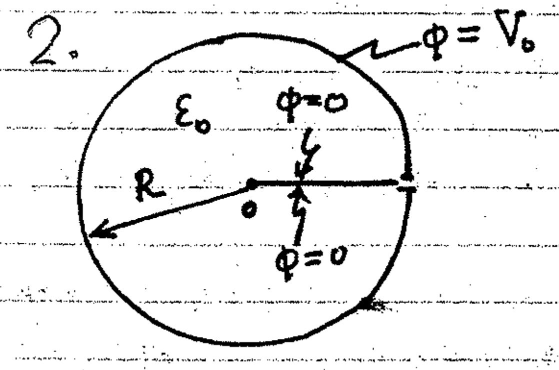
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.



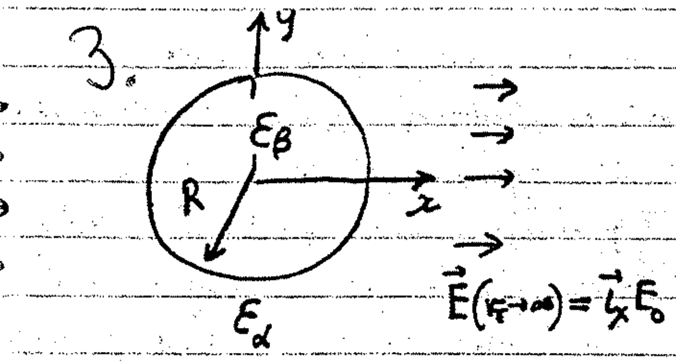
Να βρεθεί το πεδίο παντού στο χώρο καθώς και η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στις απέραντες κυλινδρικές επιφάνειες $r_T = \beta$, $r_T = \alpha$.

2.



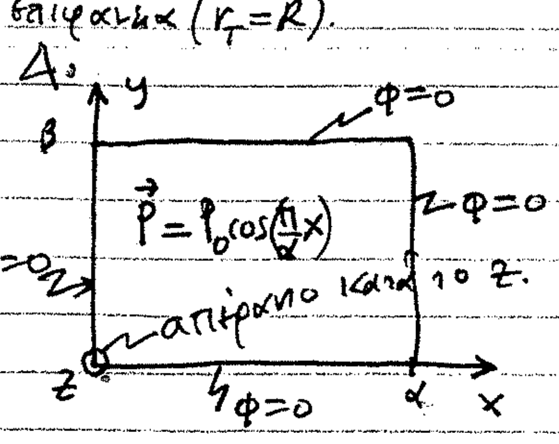
Να βρεθεί το πεδίο στο εσωτερικό του απέραντου κυλίνδρου ακτίνας R του οποίου η επιφάνεια ευρίσκεται σε δυναμικό V_0. Το απέραντο έλασμα στη θέση $\varphi=0$ και $0 \leq r_T \leq R$ έχει μηδενικό δυναμικό. Σημ.: Δεν είναι δυνατή η ύπαρξη αρνητικών δυνάμεων του r_T στην ακτινική συνάρτηση διαχωρισμού. Να υπολογισθεί επίσης οι επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στην κυλινδρική επιφάνεια και στο έλασμα. Να σχεδιασθούν επίσης οι γραμμές του πεδίου και οι ισοδυναμικές γραμμές (επιφάνειες).

3.

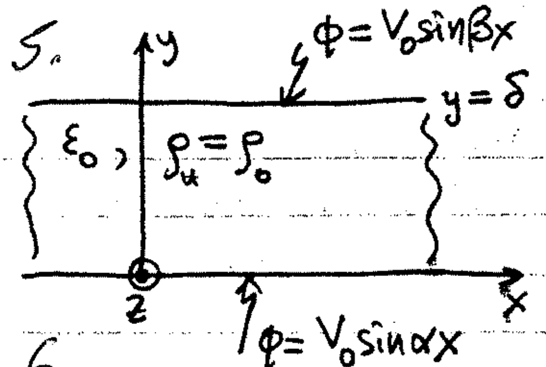


Απέραντος διηλεκτρικός κύλινδρος (με ε_β) ευρίσκεται εντός ομογενούς (μακριά) εξωτερικού πεδίου $\vec{E} = \vec{i}_x E_0$ και εντός μέσου με ε_α. Να ευρεθεί το πεδίο παντού στο χώρο, να σχεδιασθούν οι γραμμές του πεδίου και οι ισοδυναμικές επιφάνειες και να υπολογισθούν οι όποιες συγκεντρώσεις φορτίου στην κυλινδρική επιφάνεια ($r_T=R$).

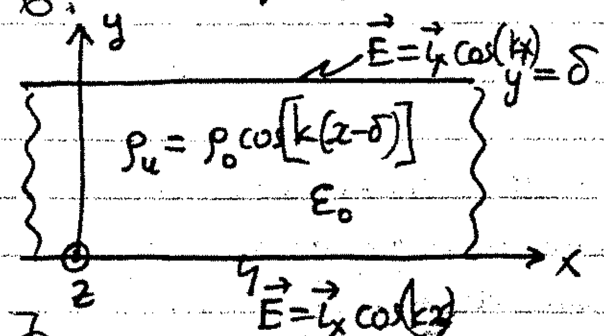
4.



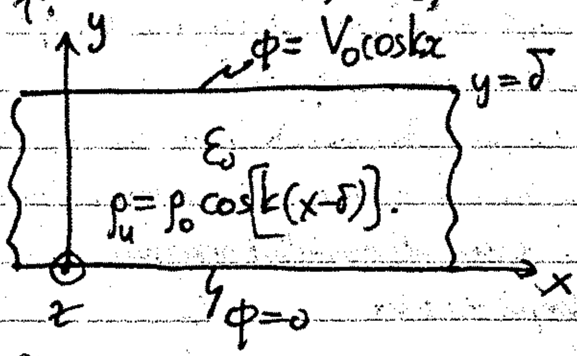
Να ευρεθεί το δυναμικό και το πεδίο στο εσωτερικό του ηλεκτρείτη (με διαμόρφωση) του σχήματος. Να σχεδιασθούν οι γραμμές του πεδίου, οι ισοδυναμικές επιφάνειες καθώς και να υπολογισθούν οι οποιεσδήποτε συγκεντρώσεις φορτίου στις επιφάνειες.



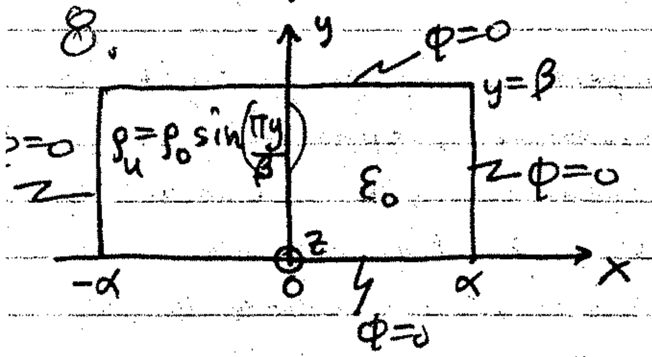
Να υπολογισθεί το πεδίο στο εσωτερικό του σχήματος όταν επιφανειακή $\rho_u = \rho_0 =$ = σταθερά. $\alpha \neq \beta$ και V_0 είναι δεδομένη σταθερή.



Να υπολογισθεί το πεδίο στο εσωτερικό του σχήματος όταν επιφανειακή $\rho_u =$ $\rho_0 \cos[k(x-\delta)]$ ενώ στα σύνορα το εφαρμοζόμενο πεδίο είναι όπως στο σχήμα. k, ρ_0 είναι δεδομένες σταθερές.



Να λυθεί το ίδιο και στο διπλανό σύστημα. Να σχεδιασθούν επίσης οι γραμμές του πεδίου και οι ισοδυναμικές επιφάνειες.



Το σύστημα του σχήματος είναι παραλληλεπίπεδο μεγάλου μήκους. Στο εσωτερικό του επικρατεί φορτίο χώρου με $\rho_u = \rho_0 \sin\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)$. Να ευρεθεί το πεδίο στο εσωτερικό του και να σχεδιασθούν οι ισοδυναμικές επιφάνειες. β και ρ_0 είναι δεδομένες σταθερές.

ΛΥΣΕΙΣ 3ης ΣΕΙΡΑΣ (8)

1-8

1. $F \propto 1$ (πλήρης κυκλική συμμετρία). Άρα $K=0$ οπότε $R = A\ln r_T + B$. Εφαρμογή των οριακών συνθηκών δίνει άμεσα: $A=(V_\alpha - V_\beta)/\ln(\alpha/\beta)$ και $B = (V_\beta \ln\alpha - V_\alpha \ln\beta)/\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$. Έτσι τελικά $\phi = A\ln r_T + B$ και $\vec{E} = \vec{i}_r E_r$ με $E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r_T} = -\frac{A}{r_T}$ οπότε $E_r = (V_\beta - V_\alpha)/\left[r_T \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$. Το πεδίο εκτός της περιοχής $\beta < r_T < \alpha$ είναι μηδέν.
Επίσης: $\sigma_\varepsilon(r_T=\beta) = -\vec{i}_r\cdot\left(\varepsilon_0 \vec{E}_{\varepsilon\kappa\tau} - \varepsilon_0 \vec{E}(r_T=\beta)\right) = \varepsilon_0 (V_\beta - V_\alpha)/\left[\beta \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$
$\sigma_\varepsilon(r_T=\alpha) = +\vec{i}_r\cdot\left(\varepsilon_0 \vec{E}_{\varepsilon\kappa\tau} - \varepsilon_0 \vec{E}(r_T=\alpha)\right) = -\varepsilon_0 (V_\beta - V_\alpha)/\left[\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right]$.

2. $F \propto \sin k\varphi$, k: $2\pi k = n\pi$ διότι $\sin(2\pi k)=0$. Άρα $k=\frac{n}{2}$
$R \propto r_T^{k} = r_T^{n/2}$ ($r_T^{-n/2}$ αδύνατο διότι $\phi \to \infty$ στο $r_T=0$ όπου δεδομένο είναι ότι $\phi=0$). Έχουμε λοιπόν: $\phi = \sum A_n r_T^{n/2} \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)$. Όμως $V_0 = \sum_n A_n R^{n/2} \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)$
Εφαρμογή της σχέσης ορθογωνιότητας δίνει τελικά:
$\phi = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n:\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\alpha}} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right)\left(\frac{r_T}{R}\right)^{n/2}$. Το πεδίο υπολογίζεται από τη σχέση
$\vec{E} = -\nabla\phi$ και έχει προφανώς δύο συνιστώσες (ακτινική και αζιμουθιακή)
$E_{r_T} = -\frac{2V_0}{\pi} \sum_{n:\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\alpha}} \sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right) \frac{r_T^{n/2-1}}{R^{n/2}}$, $E_\varphi = -\frac{2V_0}{\pi} \sum \cos\left(\frac{n\varphi}{2}\right) \frac{r_T^{n/2-1}}{R^{n/2}}$

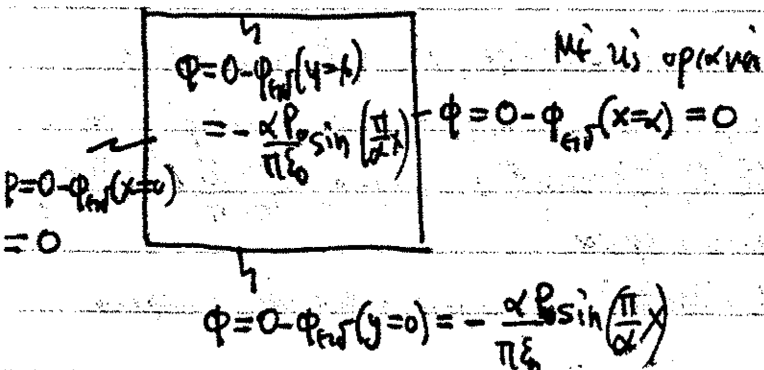

V_0 (για $V_0>0$)

3. Στο άπειρο: $\vec{E} = \vec{i}_x E_0 \Rightarrow \phi(r_T\to\infty) = -xE_0 = -r_T E_0 \cos\varphi$. Άρα $k=1$
Το πεδίο πεπερασμένο $\Rightarrow R \propto (r_T, r_T^{-1})$ στην έξω περιοχή, ενώ $R \propto (r_T)$ στη μέσα περιοχή. Δηλαδή $\phi(r_T>R) = B r_T \cos\varphi + \frac{A}{r_T}\cos\varphi$ και $\phi(r_T<R) = \Gamma r_T \cos\varphi$. Η συνθήκη στο άπειρο συνεπάγεται ότι $B=-E_0$.
Έχουμε επίσης $\phi_{\varepsilon\xi\omega} = \phi_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha}$ για $r_T=R$. Δηλαδή: $-E_0 R\cos\varphi + \frac{A}{R}\cos\varphi = \Gamma R\cos\varphi$ ή $\boxed{\frac{A}{R} - \Gamma R = E_0 R}$ (1). Επειδή φορτία δεν υφίστανται στην επιφάνεια θα έχουμε συνέχεια του D_r για $r_T=R$. Δηλαδή $\varepsilon_\alpha \frac{\partial}{\partial r_T}\left(-E_0 r_T\cos\varphi + \frac{A}{r_T}\cos\varphi\right)\Big|_{r_T=R} =$
$= \varepsilon_\beta \frac{\partial}{\partial r_T}\left(\Gamma r_T \cos\varphi\right)\Big|_{r_T=R} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_\alpha\left(-E_0 - \frac{A}{R^2}\right) = \varepsilon_\beta \Gamma}$ (2). Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν οι τιμές για τα A και Γ: $A = -E_0 R^2(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)/(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)$ και $\Gamma = -2E_0\varepsilon_\alpha/(\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta)$, οπότε $\phi_{\varepsilon\xi\omega} = -E_0 R\left(\frac{r_T}{R} + \frac{R}{r_T}\frac{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta}\right)\cos\varphi$ και $\phi_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha} = -E_0 R \frac{r_T}{R}\frac{2\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha+\varepsilon_\beta}\cos\varphi$. Το πεδίο υπολογίζεται άμεσα από την $\vec{E} = -\nabla\phi$.
Οι εμφανιζόμενοι φορτία στην επιφάνεια θα είναι δεσμευμένα φορτία πόλωσης μόνο δηλαδή $\sigma_p(r_T=R) = \varepsilon_0\left(E_r^{\varepsilon\xi\omega} - E_r^{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha}\right) = \varepsilon_0\left(\frac{\partial\phi}{\partial r_T}\Big|_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma\alpha} - \frac{\partial\phi}{\partial r_T}\Big|_{\varepsilon\xi\omega}\right)_{r_T=R}$

$\Rightarrow \sigma_p = 2\varepsilon_0 E_0 \cos\varphi \dfrac{\varepsilon_\beta-\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\beta+\varepsilon_\alpha}$ η οποία εμφανίζει μέγιστα και ελάχιστα στις θέσεις $\varphi = 0$ και π με αντιστοίχηση που εξαρτάται από το πρόσημο του $\varepsilon_\beta-\varepsilon_\alpha$ (αν υποθέσουμε ότι το $E_0>0$).

4. $\nabla\cdot\vec{D}=0 \Rightarrow -\varepsilon_0\nabla^2\phi = -\nabla\cdot\vec{P} = \frac{\pi}{\alpha}P_0\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right) \Rightarrow \nabla^2\phi = -\frac{\pi P_0}{\varepsilon_0\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)$

Ειδική λύση: $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\pi P_0\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)}{\varepsilon_0\alpha} \Rightarrow \phi_{ειδ} = +\frac{\alpha P_0}{\pi\varepsilon_0}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)$. Τροποποίηση των οριακών συνθηκών:

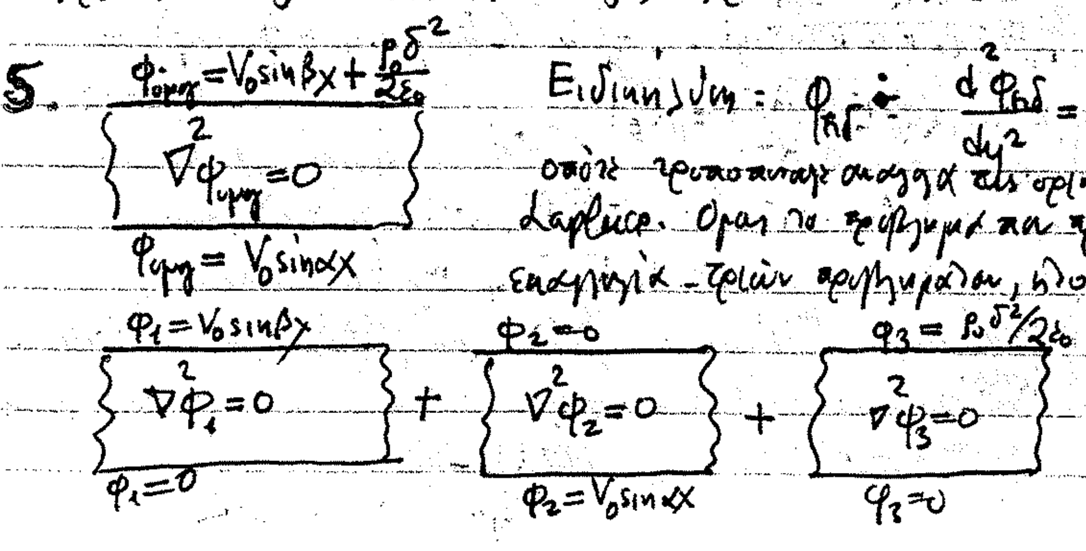


Με τις οριακές συνθήκες αυτές λύνουμε ένα πρόβλημα Laplace $\nabla^2\phi_{ομογ}=0$. Η σταθερά διαχωρισμού είναι αρμονική $k=\frac{\pi}{\alpha}$ ενώ η συνάρτηση διαχωρισμού Y θα πρέπει να είναι ένα γραμμικό μίγμα υπερβολικών συναρτήσεων έτσι ώστε να εξασφαλίζει την ίδια τιμή για $y=0,\beta$. (Βολεύει να είναι μονάδα για $y=0,\beta$ ή $Y(y=0)=Y(y=\beta)=1$ οπότε θα εξασφαλίζονται έτσι οι ζητούμενες οριακές συνθήκες. Επομένως $Y(y)=A\sinh\frac{\pi}{\alpha}y + B\cosh\frac{\pi}{\alpha}y$: $1=B$ και $1=A\sinh\frac{\pi}{\alpha}\beta + \cosh\frac{\pi}{\alpha}\beta$. Άρα $A=\left[1-\cosh(\pi\beta/\alpha)\right]/\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}\beta\right)$. Τελικά λύση $\phi_{ομογ} = \left[\frac{1-\cosh\pi\beta/\alpha}{\sinh\frac{\pi}{\alpha}\beta}\sinh\frac{\pi}{\alpha}y + \cosh\frac{\pi}{\alpha}y\right]\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)}{\varepsilon_0\alpha}$

$\phi = \phi_{ομογ} + \phi_{ειδ} = \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)\left[\frac{\alpha P_0}{\pi\varepsilon_0} + \frac{1-\cosh\pi\beta/\alpha}{\sinh\frac{\pi}{\alpha}\beta}\sinh\frac{\pi}{\alpha}y + \cosh\frac{\pi}{\alpha}y\right]$.

Το πεδίο υπολογίζεται απλά από την $\vec{E}=-\nabla\phi$. Στις επιφάνειες θα υπάρχουν μόνο επιφανειακοί φορτίοι αγωγού (υποθέτουμε ότι ο ηλεκτρικός απλώνεται αγώγιμα καθώς το κενό). Θα χρειαστεί όμως να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\partial\phi/\partial y$ στα $y=0,\beta$ και τις ποσότητες $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ στα $x=0,\alpha$. Τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}_n$ θα είναι: $\vec{i}_n(y=0)=-\vec{i}_y$, $\vec{i}_n(y=\beta)=+\vec{i}_y$, $\vec{i}_n(x=0)=-\vec{i}_x$ και $\vec{i}_n(x=\alpha)=+\vec{i}_x$.

5. Ειδική λύση: $\phi_{ειδ}$: $\frac{d^2\phi_{ειδ}}{dy^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow \phi_{ειδ} = -\frac{\rho_0 y^2}{2\varepsilon_0}$ οπότε τροποποιούμε ανάλογα τις οριακές συνθήκες για το πρόβλημα Laplace. Όμως το πρόβλημα που προκύπτει μπορεί να θεωρηθεί επαλληλία τριών προβλημάτων, ήτοι:



Για το αφόρτιστο 1 έχουμε σταθερά διαχωρισμού β. Επειδή θα πρέπει $Y(y) \propto \sinh\beta y$ για να έχουμε μηδενισμό στο $y=0$. Άρα: $\varphi_1 = V_0 \frac{\sinh\beta y}{\sinh\beta\delta}\sin\beta x$. Για το αφόρτιστο 2 έχουμε σταθερά διαχωρισμού α. Επειδή θα πρέπει $Y(y)$ να είναι ένα μίγμα, που να εξασφαλίζει μηδενισμό στο $y=\delta$. Εύκολα φαίνεται ότι το μίγμα αυτό μπορεί να γραφτεί και ως $Y(y) \propto \sinh[\alpha(\delta-y)]$. Επομένως $\varphi_2 = V_0 \frac{\sinh[\alpha(\delta-y)]}{\sinh\alpha\delta}\sin\alpha x$

Τέλος, για το φ_3 έχουμε προηγουμένως $\varphi_3 = \rho_0 \delta/2\varepsilon_0\, y$. Τελικά:

$$\varphi = -\frac{\rho_0 y^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 \delta y}{2\varepsilon_0} + V_0\left[\frac{\sinh\beta y}{\sinh\beta\delta}\sin\beta x + \frac{\sinh[\alpha(\delta-y)]}{\sinh\alpha\delta}\sin\alpha x\right].$$

6.

$\varphi = -E_0/k \sin kx$

$\rho_u = \rho_0\cos[k(x-r)]$

$\nabla^2\varphi = -\rho_u/\varepsilon_0$

$\varphi = -E_0/k \sin kx$

Ειδική λύση: $\frac{d^2\varphi_{\varepsilon\iota\delta}}{dy^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos[k(x-r)] \Longrightarrow$

$\varphi_{\varepsilon\iota\delta} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]$. Λύνουμε το αφόρτιστο Laplace $\nabla^2\varphi_{o\mu\sigma} = 0$ με

$\varphi_{o\mu\sigma} = -\frac{E_0}{k}\sin kx - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]$

$\nabla^2\varphi_{o\mu\sigma} = 0$

$\varphi_{o\mu\sigma} = -\frac{E_0}{k}\sin kx - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]$

τετραγωνικής οριακής συνθήκης όπως στο διπλανό σχήμα. Μπορούμε να θεωρήσουμε το αφόρτιστο ως επαλληλία τεσσάρων αφορτίστων για με την ίδια σταθερά διαχωρισμού k,

$\varphi_1 = -E_0/k\sin kx$; $\varphi_1 = 0$ $\quad + \quad$ $\varphi_2 = 0$; $\varphi_2 = -\frac{E_0}{k}\sin kx$ $\quad + \quad$ $\varphi_3 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]$; $\varphi_3 = 0$ $\quad + \quad$ $\varphi_4 = 0$; $\varphi_4 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $\varphi_1 = -\frac{E_0}{k}\sin kx\,\frac{\sinh ky}{\sinh k\delta}$,

$\varphi_2 = -\frac{E_0}{k}\sin kx\,\frac{\sinh[k(\delta-y)]}{\sinh k\delta}$, $\varphi_3 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]\,\frac{\sinh ky}{\sinh k\delta}$,

$\varphi_4 = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]\,\frac{\sinh[k(\delta-y)]}{\sinh k\delta}$ και τελικά $\varphi = \varphi_{\varepsilon\iota\delta} + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$.

7.

$\varphi = V_0\cos kx$

$\rho_u = \rho_0\cos[k(x-r)]$

$\varphi = 0$

Ειδική λύση: $\frac{d^2\varphi_{\varepsilon\iota\delta}}{dy^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos[k(x-r)] \Longrightarrow$

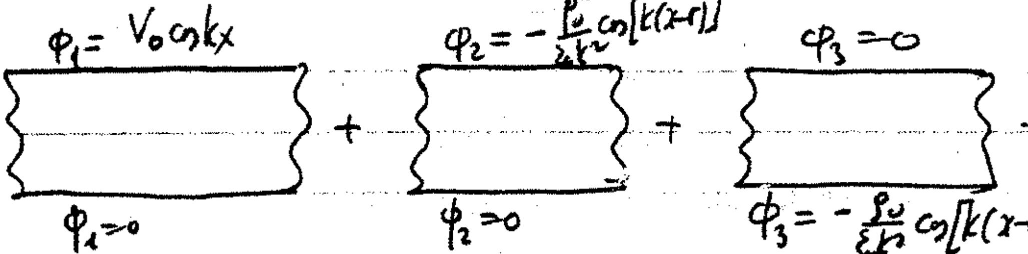
$\varphi_{\varepsilon\iota\delta} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]$. Λύνουμε το αφόρτιστο

Laplace $\nabla^2\varphi_{o\mu\sigma} = 0$ με τετραγωνικής οριακής συνθήκης όπως στο διπλανό σχήμα. Μπορούμε εδώ να θεωρήσουμε το τετραγωνικό (ομογενές) αφόρτιστο ως επαλληλία τριών επιμέρους αφορτίστων

$\varphi_{o\mu\sigma} = V_0\cos kx - \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]$

$\nabla^2\varphi_{o\mu\sigma} = 0$

$\varphi_{o\mu\sigma} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]$

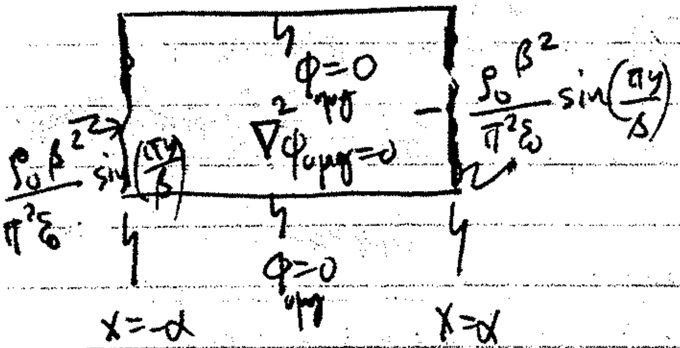


. Εύκολα βρίσκουμε

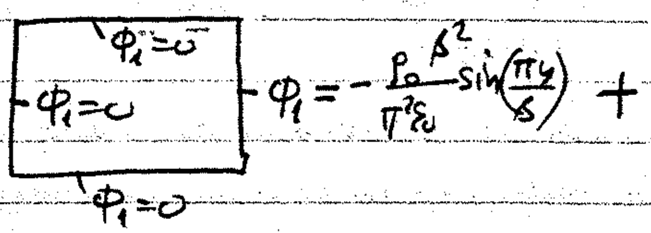
όπου $\varphi_1 = V_0 \cos kx \dfrac{\sinh ky}{\sinh k\delta}$, $\varphi_2 = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]\dfrac{\sinh ky}{\sinh k\delta}$, $\varphi_3 = -\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0 k^2}\cos[k(x-r)]\dfrac{\sinh[k(\delta-y)]}{\sinh k\delta}$

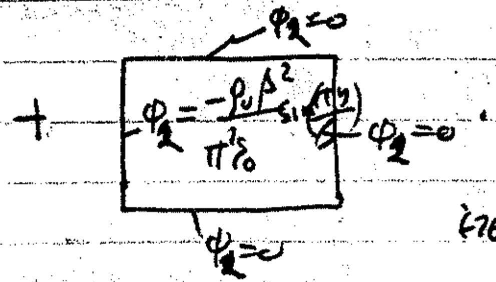
και τελικά $\varphi = \varphi_{\varepsilon\iota\delta} + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$.

8. Ειδική λύση: $-\dfrac{d^2\varphi_{\varepsilon\iota\delta}}{dy^2} = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\sin\left(\dfrac{\pi y}{\beta}\right) \Rightarrow \varphi_{\varepsilon\iota\delta} = \dfrac{\rho_0 \beta^2}{\pi^2 \varepsilon_0}\sin\left(\dfrac{\pi y}{\beta}\right)$



Μπορούμε να θεωρήσουμε το ομογενές πρόβλημα σαν επαλληλία των προβλημάτων





. Εύκολα γράφουμε ότι $\varphi_1 = -\dfrac{\rho_0 \beta^2}{\pi^2 \varepsilon_0}\sin\left(\dfrac{\pi y}{\beta}\right)\left[A\sinh\left(\dfrac{\pi}{\beta}x\right) + B\cosh\left(\dfrac{\pi}{\beta}x\right)\right]$

έτσι ώστε $-A\sinh\left(\dfrac{\pi\alpha}{\beta}\right) + B\cosh\left(\dfrac{\pi}{\beta}\alpha\right) = 0$

και $A\sinh\left(\dfrac{\pi\alpha}{\beta}\right) + B\cosh\left(\dfrac{\pi}{\beta}\alpha\right) = 1$ οπότε

$B = \dfrac{1}{2\cosh\left(\frac{\pi}{\beta}\alpha\right)}$ και $A = \dfrac{1}{2\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)}$ και έτσι $\varphi_1 = -\dfrac{\rho_0 \beta^2}{\pi^2 \varepsilon_0}\sin\left(\dfrac{\pi y}{\beta}\right)\left[\dfrac{\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}x\right)}{2\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)} + \dfrac{\cosh\left(\frac{\pi}{\beta}x\right)}{2\cosh\left(\frac{\pi}{\beta}\alpha\right)}\right]$

Επίσης, εύκολα δείχνουμε ότι $\varphi_2 = \dfrac{-\rho_0 \beta^2}{\pi^2 \varepsilon_0}\sin\left(\dfrac{\pi y}{\beta}\right)\left[A'\sinh\left(\dfrac{\pi}{\beta}x\right) + B'\cosh\left(\dfrac{\pi}{\beta}x\right)\right]$

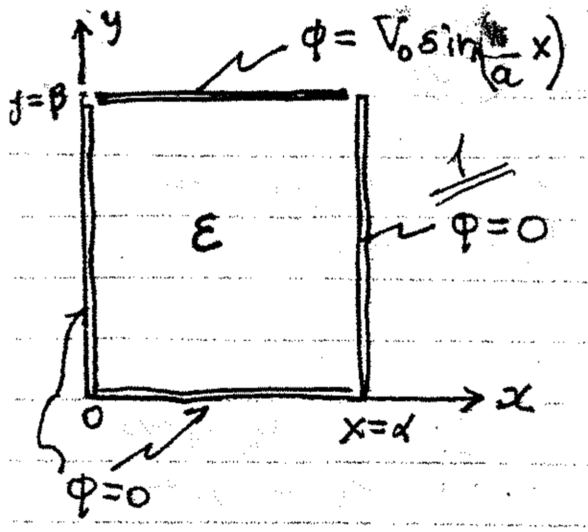
έτσι ώστε: $-A'\sinh\left(\dfrac{\pi\alpha}{\beta}\right) + B'\cosh\left(\dfrac{\pi}{\beta}\alpha\right) = 1$

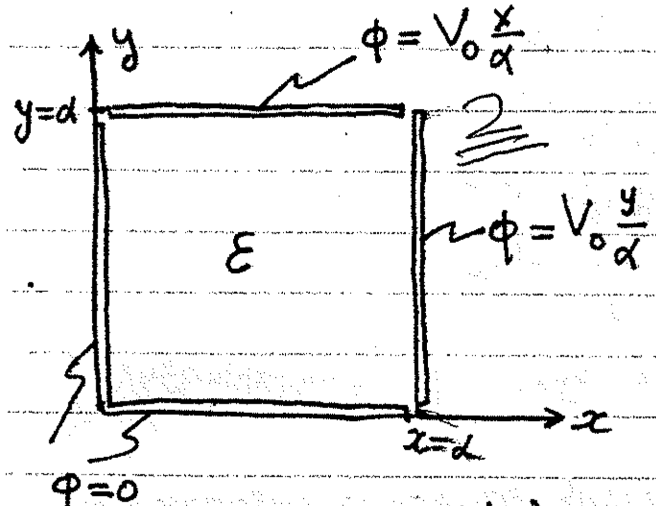
και $A'\sinh\left(\dfrac{\pi\alpha}{\beta}\right) + B'\cosh\left(\dfrac{\pi}{\beta}\alpha\right) = 0$ οπότε τώρα $B' = \dfrac{1}{2\cosh\left(\frac{\pi}{\beta}\alpha\right)}$ και $A' = -\dfrac{1}{2\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)}$

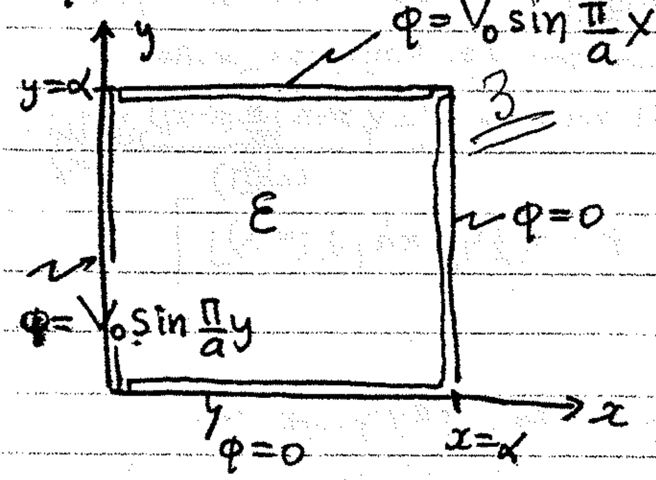
και έτσι τελικά:

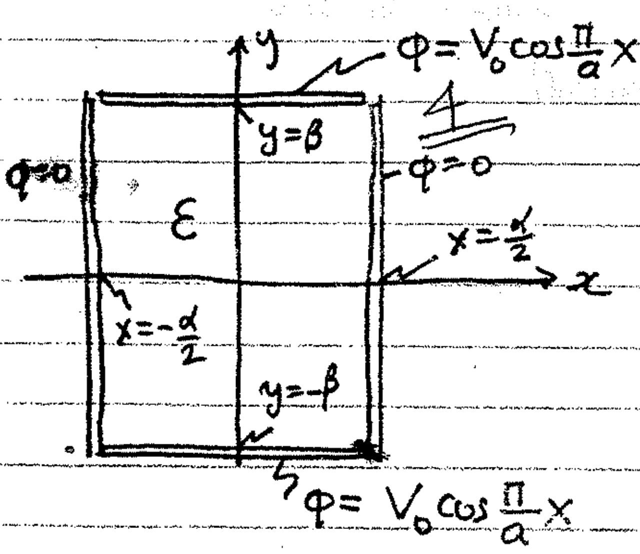
$$\varphi_2 = \frac{-\rho_0 \beta^2}{\pi^2 \varepsilon_0}\sin\left(\frac{\pi y}{\beta}\right)\left[-\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\beta}x\right)}{2\sinh\left(\frac{\pi\alpha}{\beta}\right)} + \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{\beta}x\right)}{2\cosh\left(\frac{\pi}{\beta}\alpha\right)}\right]$$ και $\varphi = \varphi_{\varepsilon\iota\delta} + \varphi_1 + \varphi_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ







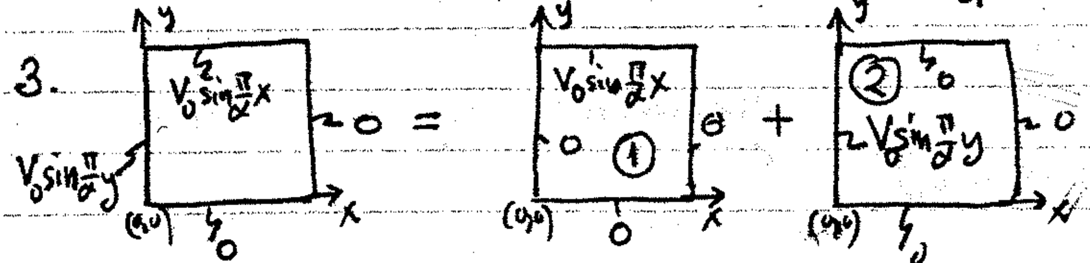


Να ευρεθεί το πεδίο εντός των διατάξεων αυτών (απέραντες κατά την z διεύθυνση) και να σκιτσαριστούν οι πεδιακές γραμμές καθώς και οι ισοδυναμικές γραμμές.

ΛΥΣΕΙΣ

1. Σταθερά διαχωρισμού $k=\frac{\pi}{\alpha}$, $Y \propto \{\sinh ky, \cosh ky\}$ επιλέγουμε την $\sinh ky$ διότι ικανοποιεί την ο.σ. $\varphi(y=0)=0$. Τελικά λοιπόν:
$\varphi = V_0 \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}y\right)/\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}\beta\right)$.

2. Σταθερά διαχωρισμού $k=0$, $X\propto\{x,1\}$, $Y\propto\{y,1\}$. Επιλέγουμε τον συνδυασμό xy διότι μόνο αυτός ικανοποιεί τις ο.σ. $\varphi(x=0,y) = \varphi(x,y=0)=0$. Τελικά λοιπόν: $\varphi = V_0\frac{xy}{\alpha^2}$

3. 

Έχουμε λοιπόν: ① : $Y_1 = \sinh\frac{\pi}{\alpha}y$ και τελικά $\varphi_1 = V_0\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}y\right)/\sinh(\pi)$

② : $X_2=\left\{\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right),\cosh\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)\right\}$ έτσι ώστε να μηδενίζεται για $x=\alpha$ προς ικανοποίηση των ο.σ. Επιλέγουμε λοιπόν $X_2=\sinh\left[\frac{\pi}{\alpha}(\alpha-x)\right]$ και τελικά $\varphi_2=V_0\frac{\sinh\left[\frac{\pi}{\alpha}(\alpha-x)\right]}{\sinh(\pi)}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}y\right)$.

Άρα $\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{V_0}{\sinh(\pi)}\left[\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)\sinh\left(\frac{\pi}{\alpha}y\right)+\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}y\right)\sinh\left[\frac{\pi}{\alpha}(\alpha-x)\right]\right]$.

4. Σταθερά διαχωρισμού $k=\frac{\pi}{\alpha}$. $Y\propto\{\sinh ky,\cosh ky\}$ επιλέγουμε την $\cosh ky$ διότι θα πρέπει οι ο.σ. να είναι ταυτόσημες στις θέσεις $y=\pm\beta$. Τελικά λοιπόν: $\varphi = V_0\cos\left(\frac{\pi}{\alpha}x\right)\cosh\left(\frac{\pi}{\alpha}y\right)/\cosh\left(\frac{\pi\beta}{\alpha}\right)$.