ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΣΕ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΙΣ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

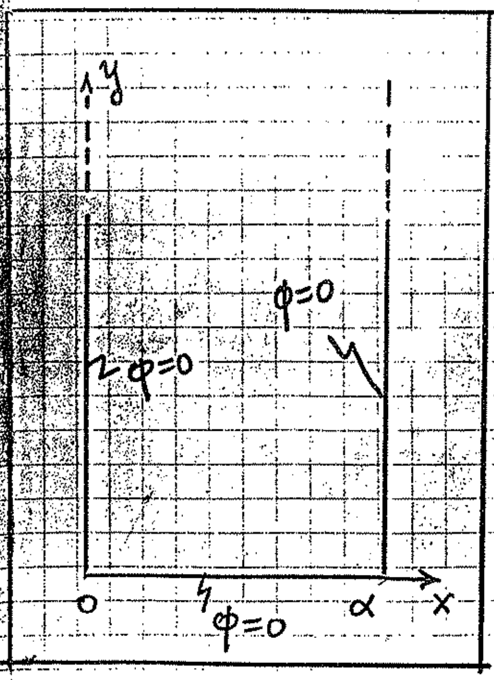
Γενικές Παρατηρήσεις

Ας εξετάσουμε τα προβλήματα που μπορούν να λυθούν με λύσεις κάποιες από τις "στοιχειώδεις" (υπό την έννοια ότι αποτελούν προσθετικούς σε λύσεις προβλημάτων) λύσεις του πίνακα (127): Έστω λοιπόν ότι έχουμε σαν λύση:

$$\boxed{\phi(x,y)= A\sin(kx)\sinh(ky) \quad , k^2>0} \qquad (α)$$

με A κάποιο σταθερό πολλαπλασιαστή. Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή μηδενίζεται για κάθε x όταν $y=0$ καθώς και για κάθε y όταν $x=\frac{n\pi}{k}$ (n: ακέραιος). Αν λοιπόν, $k=\frac{n\pi}{a}$ όπου a κάποιο δεδομένο μήκος, τότε για $x=a$ έχουμε $\phi=0$, όπως επίσης για $x=0$, πάλι $\phi=0$. Άρα το δυναμικό μηδενίζεται στο ανάποδο "Π" $x=0$, $y=0$, $x=a$! Το οποίο θα μπορούσε να αποτελεί το φυσικό όριο ενός μεταλλικού γειωμένου ($\phi=0$) πλαισίου. Εξ' άλλου το δυναμικό στη θέση $y=b$ θα έχουμε:

$$\boxed{\phi(x,b)= A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \qquad (β)$$

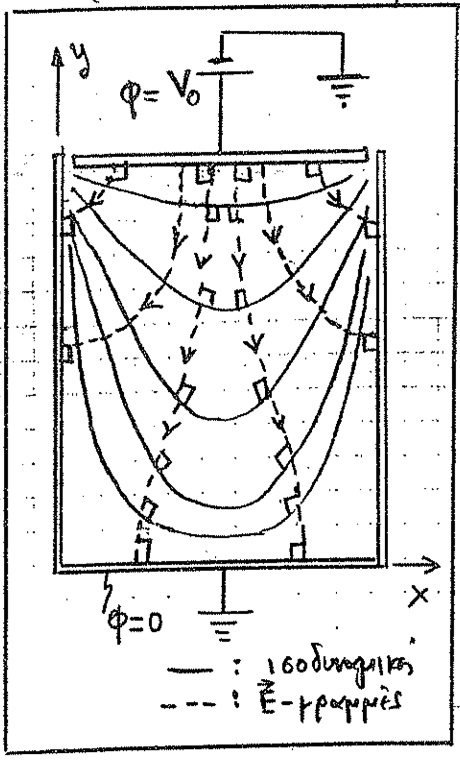


Αν αντιστρέψαμε τώρα το πρόβλημα; Υποθέτουμε δηλαδή ότι στα φυσικά όρια ενός συστήματος σχήματος ανάποδου "Π" έχουμε δυναμικό ίσο με μηδέν, είναι μεταλλικά γειωμένα. Επίσης υποθέτουμε ότι το εύρος του κατά την διεύθυνση x είναι a. Τότε προφανώς μια λύση της μορφής:

$$\boxed{\phi(x,y) = \sum_{n}^{n} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} \qquad (γ)$$

όπου $\{A_n\}$ κάποιο σύνολο σταθερών πεπερασμένο ή άπειρο θα ικανοποιούσε τις οριακές (τρεις) συνθήκες.

Το πρόβλημα βέβαια έτσι τοποθετημένο δεν δέχεται άλλη εκδοχή εκτός από την $\{A_n\} \equiv \{0\}$, δηλαδή το δυναμικό να είναι μηδέν παντού μιας και δεν υπάρχει τίποτα άλλο για να καθορίσει τις σταθερές αυτές. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε την εξής παραλλαγή: Υποθέτουμε ότι το δυναμικό στη θέση $y=b$ $(0\leq x \leq a)$ είναι γνωστή συνάρτηση του x. Μάλιστα, χάριν ευκολίας υποθέτουμε ότι $\phi(x,b) = V_0 =$ σταθερό. Δηλαδή υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο ηλεκτρόδιο στη θέση αυτή, μήκους a, που (χωρίς επαφή ηλεκτρική με το αντεστραμμένο "Π") διατηρείται σε σταθερό δυναμικό V_0 (βλ. σχήμα). Τότε απαιτούμε:



$$\boxed{V_0 = \phi(x,b) = \sum_n A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)} \quad (\delta)$$

οπότε και $\{A_n\} \neq \{0\}$. Ο υπολογισμός των A_n θα γίνει τώρα με χρήση των σχέσεων ορθογωνιότητας που διέπουν τις συναρτήσεις $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$:

$$\boxed{\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ \frac{a}{2} & n=m \end{cases}} \quad (\varepsilon)$$

Έτσι, πολλαπλασιάζοντας την (δ) με $\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)$ και ολοκληρώνοντας ως προς x $(0\leq x\leq a)$ θα έχουμε:

$$\boxed{A_n = \frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a \phi(x,b)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx} \quad (\sigma\tau)$$

ή επειδή $\phi(x,b) = V_0$:

$$\boxed{A_n = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ \frac{4V_0}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}, & n: \text{περιττό} \end{cases}} \quad (\zeta)$$

Έτσι, λοιπόν, η λύση που ικανοποιεί όλες τις οριακές μας συνθήκες και φυσικά είναι μοναδική όπως έχουμε γενικά δείξει θα είναι:

$$\boxed{\phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n:\text{περιττά}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}} \quad (\eta)$$

Οι ισοδυναμικές γραμμές [$\phi(x,y) = $ σταθερό] φαίνονται στο σχήμα της προηγούμενης σελίδας. Επίσης, τα ηλεκτρόδια θεωρούνται τέλεια αγώγιμα και επομένως ρεύματα δεν υφίστανται). Και έτσι οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου, κάθετες στις ισοδυναμικές ($\vec{E} = -\nabla\phi$), αρχίζουν και καταλήγουν κάθετες στα ηλεκτρόδια. Σημειώνονται δε με διακεκομμένες γραμμές. Από την (η) μπορούν να υπολογισθούν διάφορα ενδιαφέροντα μεγέθη. Παραδείγματος χάριν το ηλεκτρικό πεδίο κατά την διεύθυνση y κοντά στη βάση του συστήματος E_y είναι,

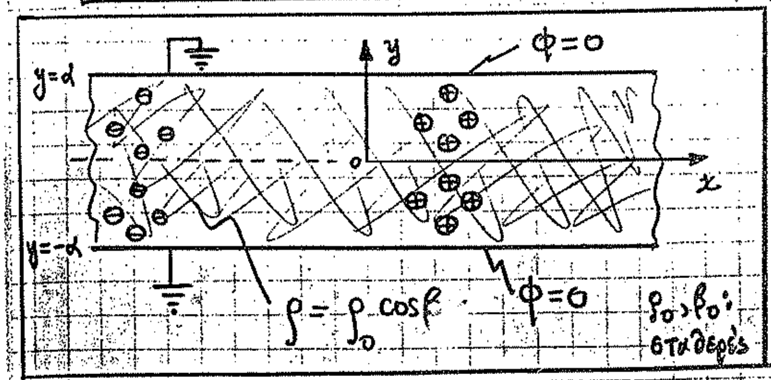
$$E_y = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{4V_0}{a}\sum_{n:\text{περιττά}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)/\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right).$$

Εάν δε το βάθος του συστήματος είναι w, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το φορτίο στη βάση με τη βοήθεια του νόμου του Gauss:

$$q = \oint_{y=0} \varepsilon_0 \vec{E}\cdot d\vec{S} = -\varepsilon_0 w\frac{4V_0}{a}\sum_{n:\text{περιττά}}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx = -\frac{8\varepsilon_0 w V_0}{\pi}\sum_{n:\text{περιττά}}\frac{1}{n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΛΥΣΕΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ POISSON ΜΕ ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

1. ΦΟΡΤΙΟΥ ΧΩΡΟΥ ΜΕ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΙΚΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΓΕΙΩΜΕΝΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΔΙΩΝ ΜΕΓΑΛΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ



Αν $\phi = \phi_h + \phi_p$ όπου ϕ_h και ϕ_p είναι η λύση της ομογενούς και η ειδική (μερική) λύση, αντίστοιχα τότε:

$\nabla^2\phi_p = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\nabla^2\phi_h = 0$ με $\phi_h = -\phi_p$ στα S (τα ηλεκτρόδια τοποθετημένα στις θέσεις $y = \pm\alpha$).

<u>Ειδική λύση</u>: Είναι φυσική η επιλογή $\phi = \phi(x)$ λόγω της άπειρης έκτασης κατά το y και της εξάρτησης του ρ από το x μόνο. Θα έχουμε λοιπόν:

$$\frac{d^2\phi_p}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\cos\beta x \Rightarrow \boxed{\phi_p(x) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\cos\beta x} \quad (\alpha)$$

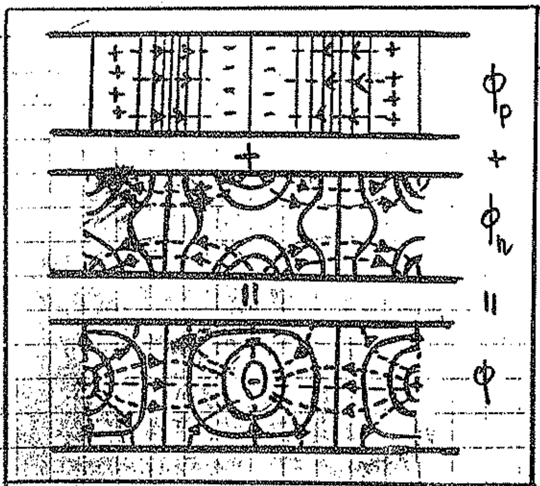
Μπορεί να δειχθεί ότι η λύση αυτή δεν προκύπτει από το ολοκλήρωμα επαλληλίας πάνω στο φορτίο χώρου μεταξύ των πλακών. Επίσης η (α) ισχύει για κάθε y και συνεπώς δεν ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες του προβλήματος. Η λύση της ομογενούς "διορθώνει" την ατελή αυτή.

Λύση ομογενούς : Έχουμε λοιπόν: $(\phi_h)_{y=\pm\alpha} = -(\phi_p)_{y=\pm\alpha}$, δηλαδή έχουμε γενικά

$$\boxed{\phi_h = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\cos\beta x \quad \text{στα } y=\pm\alpha} \quad (\beta)$$

Η λύση της ομογενούς, όπως προκύπτει από την οριακή αυτή συνθήκη, θα εξαρτάται ως προς y. Θα είναι επίσης και περιοδική ως προς x. Από τον πίνακα (12?) έχουμε το γινόμενο: $\cosh\beta y\cos\beta x$ $(k=\beta)$ και το κατάλληλο διότι η εξάρτηση ως προς το x υπάρχει και στις οριακές συνθήκες ενώ το $\cosh\beta y$ έχει την απαιτούμενη αρτιότητα. Έτσι $\phi_h = A\cos\beta x\cosh\beta y$ και με εφαρμογή της (β) έχουμε: $\phi_h = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\frac{\cosh\beta y}{\cosh\beta\alpha}$ ενώ η συνολική λύση γίνεται:

$$\boxed{\phi = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\left(1-\frac{\cosh\beta y}{\cosh\alpha\beta}\right)\cos\beta x} \quad (\gamma)$$



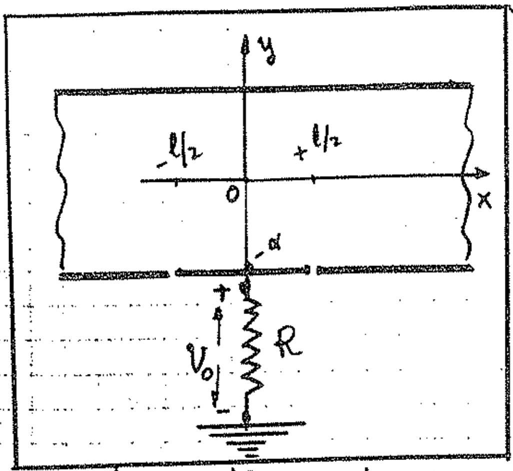
Σχηματικά, οι ισοδυναμικές γραμμές των δύο λύσεων και της ολικής δίνονται στο διπλανό σχήμα. Οι γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου που υποδηλώνονται με διακεκομμένες γραμμές είναι κάθετες στις ισοδυναμικές και αρχίζουν και καταλήγουν κάθετα στα δύο ηλεκτρόδια τα οποία, φυσικά, είναι ισοδυναμικές επιφάνειες με $\phi=0$ (λόγω της γείωσής τους)

2 ΚΙΝΟΥΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ ΧΩΡΟΥ

Στην περίπτωση που $\rho=\rho_0\cos(\beta(x-vt))$ με v: σταθερό και πολύ μικρότερο της ταχύτητας του φωτός θα έχουμε (με [illegible] κατά βαθμό) ότι και το δυναμικό ϕ θα συμπεριφέρεται όπως και στη λύση (1) με αντικατάσταση του x με $x' = x-vt$. Δηλαδή, γενικά:

$$\boxed{\phi = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0\beta^2}\left(1-\frac{\cosh\beta y}{\cosh\beta\alpha}\right)\cos[\beta(x-vt)]} \quad (\alpha)$$

Η χρονική αυτή εξάρτηση θα προκαλεί αντίστοιχη χρονική εξάρτηση και διακύμανση του επιφανειακά κατανεμημένων φορτίων στα δύο ηλεκτρόδια. Έτσι, αν απομονώσουμε ηλεκτρικά από το υπόλοιπο, τμήμα μήκους l και βάθους w του κάτω ηλεκτροδίου, θα έχουμε για το φορτίο που κατανέμεται σ' αυτό:



$$q = w\int_{-l/2}^{l/2}\varepsilon_0 E_y \, dx\Big|_{y=-a} = -\frac{w\rho_0}{\beta^2}\tanh(\beta a)\left[\sin\beta\left(\frac{l}{2}-vt\right)+\sin\beta\left(\frac{l}{2}+vt\right)\right]$$

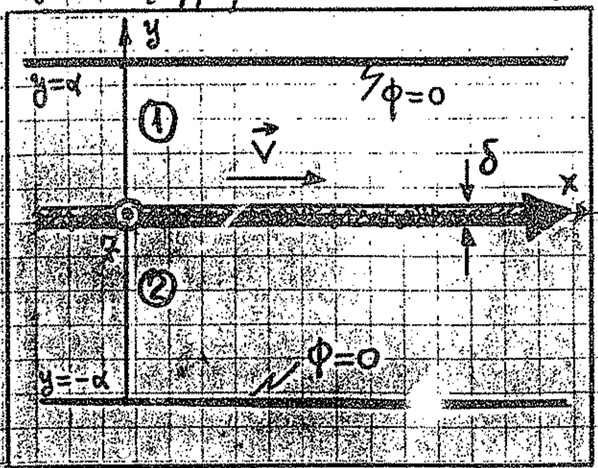
Η συσσώρευση φορτίου θα είναι τότε:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{2w\rho_0 v}{\beta}\tanh(\beta a)\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\sin(\beta v t)$$

Το ρεύμα το οποίο συνδέει τη συσσώρευση αυτή, $i=-\frac{dq}{dt}$ θα προκαλέσει διαφορά δυναμικού $v_0 = -R\frac{dq}{dt} = -\frac{2Rw\rho_0 v}{\beta}\tanh(\beta a)\sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)\sin(\beta v t)$ στα άκρα αντίστασης R που συνδέει το κάτω ηλεκτρόδιο με τη γη (δυναμικό μηδέν). Παρατηρούμε ότι η πτώση τάσης κατά μήκος της R είναι ανάλογη της ταχύτητας v. Επίσης αν το τμήμα ηλεκτροδίου είναι πολλαπλάσιο του $2\pi/\beta$ τότε το v_0 είναι συνεχώς μηδέν.

3 ΛΕΠΤΗ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΔΕΣΜΗ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΗΛΕΚΤΡΟΔΙΩΝ

Οι ηλεκτρονικές δέσμες αποτελούν φορτία χώρου κινούμενα και παρουσιάζουν σε διάφορες εφαρμογές διαμόρφωση κατά τη διεύθυνση της κίνησης των ηλεκτρονίων. Απαντώνται σε πλήθος εφαρμογών (ενισχυτικές διατάξεις μικροκυμάτων, ταλαντωτές κλπ). Στο παρόν πρόβλημα θεωρούμε μια δέσμη με πάχος πολύ μικρότερο του κύματος - ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αν δηλαδή το πάχος είναι δ και λ το μήκος κύματος θα έχουμε:



$$\boxed{\delta \ll \lambda} \quad (\alpha)$$

Η (α) μας επιτρέπει να κάνουμε χρήση στατικής προσέγγισης στη λύση. Έστω, λοιπόν, ρ η πυκνότητα φορτίων χώρου των ηλεκτρονίων που δίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\boxed{\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \delta/2 < y < a \\ \rho_0 + \rho_1\cos[2\pi(x-vt)/\lambda], & -\delta/2 \leq y \leq \delta/2 \\ 0, & -a < y < -\delta/2 \end{cases} \qquad \rho_0 < 0, \; |\rho_1| \ll |\rho_0|} \quad (\beta)$$

Λόγω του μικρού πάχους της δέσμης, η χωρική κατανομή (β) μπορεί να προσεγγισθεί με μια

Επιφανειακή κατανομή: $\boxed{\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos[2\pi(x-vt)/\lambda]\,,\ \sigma_0 = \rho_0\delta\,,\ \sigma_1 = \rho_1\delta.}$ (γ)

Το πρόβλημα ανάγεται έτσι στη λύση της εξίσωσης LAPLACE με τις εξής οριακές συνθήκες:

$$\boxed{\begin{aligned} &\phi_1 = \phi_2 \\ &-\varepsilon_0\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y} - \frac{\partial\phi_2}{\partial y}\right) = \sigma_0 + \sigma_1\cos[2\pi(x-vt)/\lambda] \\ &\phi_1(y=\alpha) = \phi_2(y=-\alpha) = 0 \end{aligned}} \quad (\delta)$$

Λόγω του διαχωρισμού της πηγής σε σταθερό και κυματικό μέρος, μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με επαλληλία δύο προβλημάτων $(\phi^{(0)}: \sigma=\sigma_0)$ και $(\phi^{(1)}: \sigma=\sigma_1\cos[2\pi(x-vt)/\lambda])$.
Επειδή $\frac{\partial\sigma_0}{\partial x}=0$, θα έχουμε $\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial x}=0$ και λόγω της (δ):

$$\phi_1^{(0)} = A_1 y + A_2$$
$$\phi_2^{(0)} = B_1 y + B_2$$

Που λόγω της (δ) γίνονται: $\boxed{\phi_1^{(0)} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(\alpha-y)\,,\ \phi_2^{(0)} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(\alpha+y)}$ (ε)

Όσον αφορά, τώρα, το δυναμικό $\phi^{(1)}$, αναμένεται (λόγω της εξάρτησης της πηγής-επιφανειακής κατανομής σ_1) να εξαρτάται ως προς $x' = x-vt$, σαν $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x'\right)$, δηλαδή η σταθερά διαχωρισμού είναι πραγματική και ίση με $\frac{2\pi}{\lambda}$. Από τον πίνακα (127) ξέρουμε ότι η αντίστοιχη εξάρτηση από το y θα πρέπει να είναι υπερβολικής μορφής, δηλαδή sinh ή cosh ή <u>μίγμα τους</u>! Επειδή, ούτε η sinh, ούτε η cosh μηδενίζονται (όπως επιβάλλεται από τις (δ)) στα $y=\pm\alpha$, η λύση θα είναι μίγμα. Δεν χρειάζεται όμως να γράψουμε $\phi_1 = \Gamma\cosh\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right) + \Delta\sinh\left(\frac{2\pi}{\lambda}y\right)$ (μπορούμε φυσικά!) δεδομένου ότι κάθε έκφραση της μορφής $\cosh\left(\frac{2\pi}{\lambda}y+\theta\right)$ ή $\sinh\left(\frac{2\pi}{\lambda}y+\theta\right)$ μπορεί να γραφτεί σαν μίγμα. Το κατάλληλο όρισμα για μια γρήγορη σωστή τρόπο διατύπωσης της λύσης είναι προφανώς: $\frac{2\pi}{\lambda}(y\pm\alpha)$ για $y=\mp\alpha$ αντίστοιχα, εκεί η συνάρτηση σωστή μας είναι το sinh. Το cosh δεν βγαίνει διότι δεν μηδενίζεται <u>ποτέ</u>! Άρα;

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_1^{(1)} &= \Gamma \sinh\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y-\alpha)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] \\ \phi_2^{(1)} &= \Delta \sinh\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y+\alpha)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] \end{aligned}} \quad (\sigma_2)$$

Εφαρμογή των (σ) (κατά το μέρος το διακυμαινόμενο μόνο) δίνει:

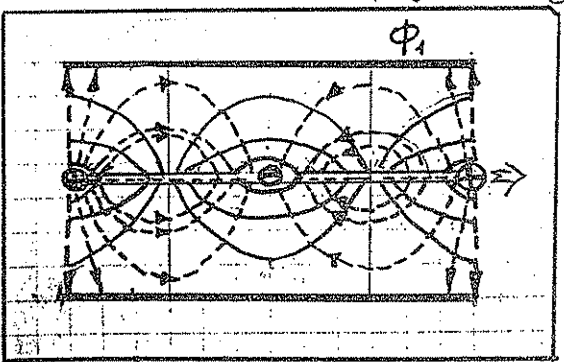
$$\boxed{\Gamma = -\Delta = \frac{\sigma_1 \lambda}{4\pi\varepsilon_0} \Big/ \cosh\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)} \quad (\gamma)$$

Τελικά λοιπόν,

$$(\eta) \quad \boxed{\phi_{1,2} = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}(\alpha \mp y) - \frac{\sigma_1 \lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sinh\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y \mp \alpha)\right]}{\cosh\left(\frac{2\pi\alpha}{\lambda}\right)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] \quad (1,2 \to -,+)}$$

Για $t=0$, το διακυμαινόμενο μέρος $\phi^{(1)}_{1,2}(t=0)$ είναι:

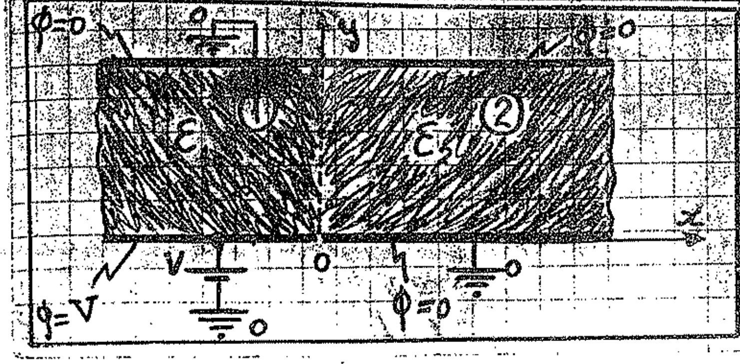
$$\phi^{(1)}_{1,2}(t=0) = -\frac{\sigma_1 \lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sinh\left[\frac{2\pi}{\lambda}(y \mp \alpha)\right]\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)}{\cosh(2\pi\alpha/\lambda)}$$



το οποίο σκιτσάρεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι για $\alpha \gg \lambda$ υπάρχουν ελάχιστες δυναμικές γραμμές πεδίου που καταλήγουν στα τοιχώματα (ασθενής σύζευξη), ενώ για $\lambda > \alpha$, η εικόνα αλλάζει (αρκετές γραμμές καταλήγουν στα τοιχώματα).

Στο σχήμα σκιτσάρεται η περίπτωση $\lambda > \alpha$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι υπάρχουν και γραμμές πεδίου που συνδέουν περιοχές αραίωσης των ηλεκτρονίων (+) με περιοχές πύκνωσής τους (−). Πάντως η εικόνα μοιάζει πολύ αυτής της προηγούμενης άσκησης.

4) ΠΥΚΝΩΤΗΣ ΔΥΟ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ



Πρώτα επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στο να γράψουμε τις λύσεις για το ϕ στις περιοχές 1 και 2 σαν να υπήρχαν μόνο αυτές (δηλαδή η περιοχή 1 να εκτείνεται: $x=0 \to -\infty$ και η περιοχή 2 να εκτείνεται: $x=0 \to +\infty$).

αλλά φυσικά τα αντίστοιχα δυναμικά - λύσεις των ομογενών προβλημάτων $\phi_h^{(1)}$ και $\phi_h^{(2)}$ θα πρέπει να μηδενίζονται στα πιο απομακρυσμένα σημεία των περιοχών. Δηλαδή $\phi_h^{(1)}(x\to\infty, y)\to 0$ και $\phi_h^{(2)}(x\to-\infty, y)\to 0$. Στην περιοχή (1) η λύση αποτελείται άθροισμα μιας ειδικής $\phi_p^{(1)}$ και της ομογενούς $\phi_h^{(1)}$ με αντίστοιχες οριακές συνθήκες $\{\phi_p^{(1)}(x, y=0)=V$ και $\phi_p^{(1)}(x, y=\alpha)=0\}$ και $\{\phi_h^{(1)}(x, y=0)=0,\ \phi_h^{(1)}(x, y=\alpha)=0\}$. Στην περιοχή (2) η λύση έχει μόνο ομογενή μέρος διότι οι οριακές συνθήκες είναι ομογενείς: $\{\phi^{(2)}(x, y=0)=0,\ \phi^{(2)}(x, y=\alpha)=0\}$. Οι μηδενισμοί αυτοί διασφαλίζουν και τον μηδενισμό των ϕ_h μακριά των ηλεκτροδίων μηδενικού δυναμικού. Από τον πίνακα (127) φαίνεται ότι

για την περιοχή (2) κατά μήκος της διεύθυνσης y, η συνάρτηση $\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}y\right)$ με $n=1\to\infty$ ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες για $y=0, \alpha$, ενώ η σταθερά διαχωρισμού είναι $\frac{n\pi}{\alpha}$. Αυτή η λύση συνδυάζεται εκθετική ή υπερβολική λύση κατά την x-διεύθυνση. Εδώ θέλουμε να μηδενίζεται η λύση για $x\to+\infty$, επιλέγουμε την εκθετική $e^{-\frac{n\pi}{\alpha}x}$ (τείνει στο μηδέν για $x\to-\infty$). Άρα η λύση θα είναι:

$$\boxed{\phi^{(2)}=\phi_h^{(2)}=\sum_n A_n^{(2)} e^{-\frac{n\pi}{\alpha}x}\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}y\right)} \quad (\alpha)$$

Για την περιοχή (1) και για την ειδική λύση έχουμε προφανώς (για ικανοποίηση και των δύο οριακών συνθηκών κατά την y-διεύθυνση):

$$\boxed{\phi_p^{(1)}=V\left(1-\frac{y}{\alpha}\right)} \quad (\beta)$$

Επίσης για την ομογενή, ισχύουν ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα όπως και για την $\phi_h^{(2)}$. Μόνο που το εκθετικό τώρα θα είναι $e^{+\frac{n\pi}{\alpha}x}$ επειδή θέλουμε να μηδενίζεται για $x\to\infty$:

$$\boxed{\phi_h^{(1)}=\sum_n A_n^{(1)} e^{+\frac{n\pi}{\alpha}x}\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}y\right)} \quad (\gamma)$$

Τα $A_n^{(1)}$ και $A_n^{(2)}$ θα προσδιορισθούν τώρα από την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων:

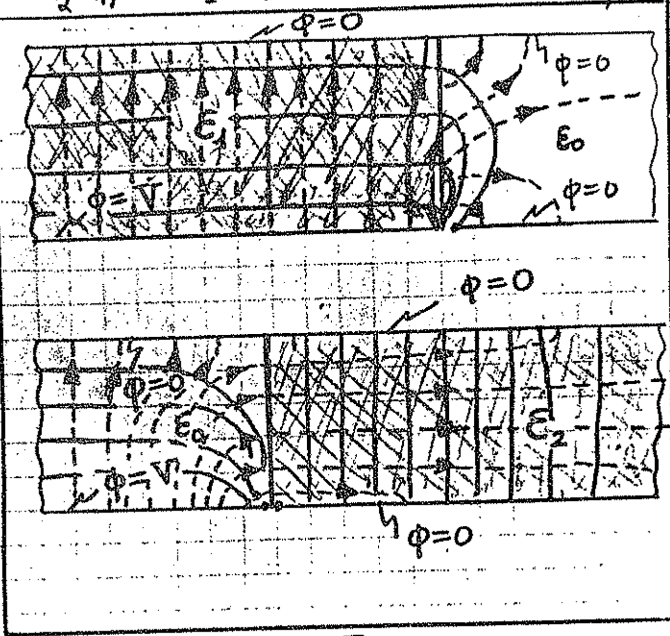
$$\boxed{\begin{array}{l} \phi^{(1)}=\phi^{(2)} \text{ για } x=0 \text{ και για κάθε } y \\ \varepsilon_1\dfrac{\partial\phi^{(1)}}{\partial x}=\varepsilon_2\dfrac{\partial\phi^{(2)}}{\partial x} \text{ για } x=0 \text{ και για κάθε } y \end{array}} \quad (\delta)$$

Από την πρώτη των (δ) και πολλαπλασιάζοντας με $\sin\left(\frac{m\pi y}{\alpha}\right)$, παίρνουμε μετά από ολοκλήρωση κατά μήκος του y για $y=0\to\alpha$:

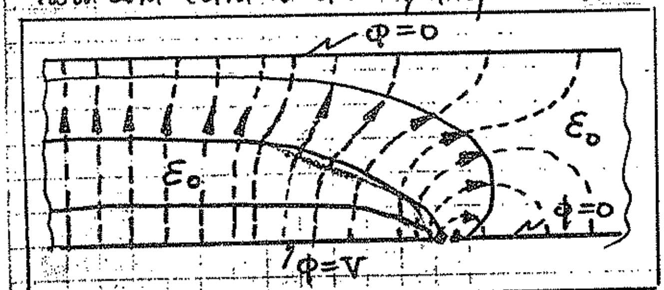
$A_n^{(2)} = \frac{2V}{n\pi} + A_n^{(1)}$ και από τη δεύτερη του (δ):

$\varepsilon_2 A_n^{(2)} = -\varepsilon_1 A_n^{(1)}$ οπότε τελικά θα έχουμε:

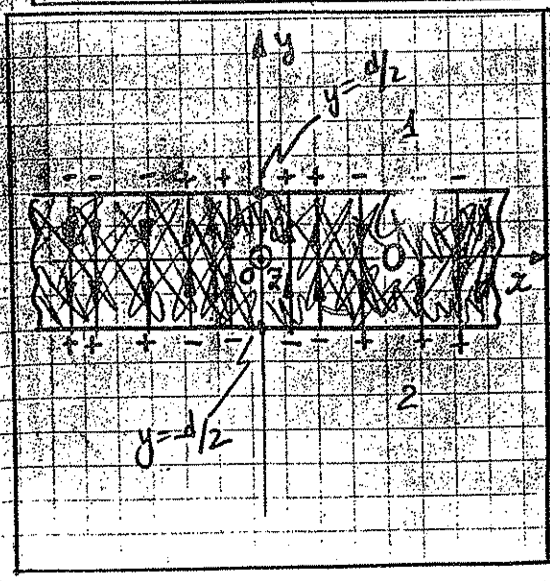
$$\boxed{\begin{aligned}\phi^{(2)} &= \sum_1^{\infty} \frac{2V}{n\pi(1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})} e^{-\frac{n\pi}{\alpha}x} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}y\right) \\ \phi^{(1)} &= V\left(1-\frac{y}{\alpha}\right) - \sum_1^{\infty} \frac{2V\,\varepsilon_1/\varepsilon_2}{n\pi(1+\varepsilon_1/\varepsilon_2)} e^{\frac{n\pi}{\alpha}x} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}y\right)\end{aligned}} \quad (\varepsilon)$$



Στο διπλανό σχήμα σχεδιάζονται οι ισοδυναμικές γραμμές και το πεδίο στις δύο ακραίες περιπτώσεις $\varepsilon_1 << \varepsilon_2$ και $\varepsilon_1 >> \varepsilon_2$. Στην πρώτη περίπτωση (έστω $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ και $\varepsilon_2 >> \varepsilon_0$) το υλικό βρίσκεται μεταξύ των ηλεκτροδίων μηδενικού δυναμικού. Το πεδίο εντός του υλικού τείνει να είναι κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια. Στη δεύτερη περίπτωση (έστω $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ και $\varepsilon_1 >> \varepsilon_0$) το υλικό βρίσκεται μεταξύ των ηλεκτροδίων που βρίσκονται σε διαφορά δυναμικού V. Το πεδίο εντός του υλικού στην περίπτωση αυτή τείνει να είναι εφαπτομενικό στη διαχωριστική επιφάνεια. Στο δεύτερο σχήμα σχεδιάζεται η περίπτωση που ο χώρος μεταξύ όλων των ηλεκτροδίων είναι ομογενής ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, έστω $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$). Οι δυναμικές γραμμές αρχίζουν και καταλήγουν κάθετα στα ηλεκτρόδια του συστήματος



ΑΝΑΓΝΩΣΗ ΣΗΜΑΤΟΣ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΣΕ ΜΑΓΝΗΤΟΤΑΙΝΙΑ



Ένας τρόπος εγγραφής σήματος σε ταινία είναι η δημιουργία μαγνήτισης εγκάρσια στην ταινία. Υποθέτουμε ότι έχει εγγραφεί σε ταινία πάχους d (κατά την y-διεύθυνση) συνημιτονικό (μη-αρμονικό μιάς περιοδικότητας) σήμα υπό την μορφή μαγνήτισης:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{i}_y M_0 \cos(\beta x)} \quad (\alpha)$$

δηλαδή υπάρχει περιοδικότητα χαρακτηριστικού μήκους $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ κατά μήκος (διεύθυνση x) της ταινίας.

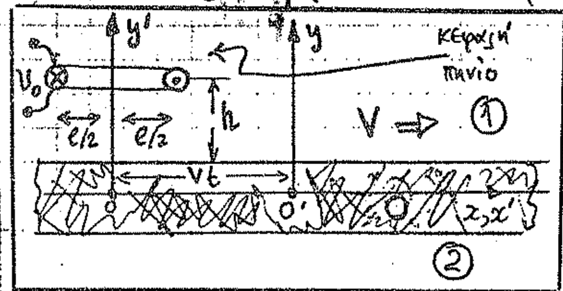
Όταν τεθεί σε κίνηση η ταινία, με ταχύτητα $V \ll c$, σε σχέση με την ακίνητη κεφαλή 26 ανάγνωσης τότε, αν x', y' είναι οι συντεταγμένες στο ακίνητο σύστημα αναφοράς και x, y οι ίδιες στο κινούμενο, η σχέση μεταξύ τους θα είναι απλά,

$$\boxed{x' = x + Vt \,,\quad y' = y} \qquad (β)$$

οπότε η (α) γίνεται:

$$\boxed{\vec{M}(x', y', t) = M_0 \vec{i}_y \cos(\beta x' - \omega t) \,,\quad \omega \equiv V\beta} \qquad (γ)$$

Δηλαδή η μαγνήτιση θα είναι, ως προς την κεφαλή, ένα οδεύον κύμα με χαρακτηριστική συχνότητα $f = V\beta/2\pi$ και το αυτό (όπως πριν) μήκος κύματος $\lambda = 2\pi/\beta$. Από τις γνωστές



σχέσεις $\nabla\cdot\vec{H} = \rho_m/\mu_0$, $\rho_m \equiv -\mu_0 \nabla\cdot\vec{M}$ και $\mu_0 \vec{i}_n\cdot(\vec{H}_+ - \vec{H}_-) = \sigma_m$ με $\sigma_m = -\mu_0 \vec{i}_n\cdot(\vec{M}_+ - \vec{M}_-)$ και δεδομένου ότι υπάρχει ϕ_m: $\vec{H} = -\nabla\phi_m$ (επειδή $\nabla\times\vec{H} = 0$) το πρόβλημα αντιμετωπίζεται σαν πρόβλημα υπολογισμού του δυναμικού ϕ_m (εξίσωση LAPLACE $\nabla^2\phi_m = 0$, εφ' όσον $\nabla\cdot\vec{M} = 0$ στο πρόβλημά μας) με δεδομένα μαγνητικά φορτία στις επιφάνειες $y = \pm d/2$, τα οποία εκφράζονται μέσω των σ_m:

$$\boxed{\sigma_m = \begin{cases} \mu_0 M_0 \cos\beta x \,, & y = d/2 \\ -\mu_0 M_0 \cos\beta x \,, & y = -d/2 \end{cases}} \qquad (δ)$$

Εφαρμογή των συνθηκών στις επιφάνειες $y = \pm d/2$ μας δίνει ($\vec{H} = -\nabla\phi_m$)

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{\partial\phi_m}{\partial y}\right)_1 - \left(\frac{\partial\phi_m}{\partial y}\right)_0 &= -M_0\cos\beta x \quad \text{στο} \quad y = d/2 \\ \left(\frac{\partial\phi_m}{\partial y}\right)_0 - \left(\frac{\partial\phi_m}{\partial y}\right)_2 &= +M_0\cos\beta x \quad \text{στο} \quad y = -d/2 \end{aligned}} \qquad (ε)$$

$$\boxed{\begin{aligned} (\phi_m)_1 &= (\phi_m)_0 \quad \text{στο} \quad y = d/2 \\ (\phi_m)_0 &= (\phi_m)_2 \quad \text{στο} \quad y = -d/2 \end{aligned}} \qquad (στ)$$

Μια επίσης σημαντική οριακή συνθήκη είναι ο μηδενισμός των πεδίων στο άπειρο. Η περιοδική μορφή των οριακών συνθηκών στις (ε) υποδηλώνει ότι η εξάρτηση στο x θα είναι τριγωνομετρική και μάλιστα $\cos\beta x$ με σταθερό κυματαριθμό β. Έτσι, η εξάρτηση στο y θα είναι υπερβολικού ή/και εκθετικού τύπου. Ο μηδενισμός του ϕ_m και $\vec{H}$ στο

άπειρο συνεπάγεται ότι $\phi_{m1} \propto e^{-\beta y}\cos\beta x$, ενώ $\phi_{m2} \propto e^{\beta y}\cos\beta x$. Επίσης, αναμέ- 27
νουμε $\phi_m(x,y) = -\phi_m(x,-y)$ δηλαδή η εξάρτηση από το y είναι περιττή συνάρτηση
διότι η πηγή (σ_m επί του προκειμένου) είναι περιττή συνάρτηση του y: $\sigma_m(y=d/2)$
$= -\sigma_m(y=-d/2)$. Άρα, αν $\phi_{m1} = Ae^{-\beta y}\cos\beta x$, τότε $\phi_{m2} = -Ae^{\beta y}\cos\beta x$, ενώ
μέσα (0) θα εισάγουμε την περιττή υπερβολική συνάρτηση $\sinh\beta y$. Έτσι:

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{m1} &= Ae^{-\beta y}\cos\beta x \quad, \quad y > d/2 \\ \phi_{m0} &= C\sinh\beta y\cos\beta x \quad, \quad -d/2 \leq y \leq d/2 \\ \phi_{m2} &= -Ae^{\beta y}\cos\beta x \quad, \quad y < -d/2 \end{aligned}} \qquad (\zeta)$$

Εφαρμόζοντας τις (ε) και (στ) παίρνουμε τελικά:

$$\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{M_0}{\beta} e^{\beta d/2}\left(1 + \coth\frac{\beta d}{2}\right)^{-1} \\ C &= \frac{M_0}{\beta}\left[\left(1+\coth\frac{\beta d}{2}\right)\sinh\frac{\beta d}{2}\right]^{-1} \end{aligned}} \qquad (\eta)$$

Το μαγνητικό πεδίο που "βλέπει" η κεφαλή (πηνίο παραγωγής προς την ταινία) θα
είναι $\vec{B} = -\mu_0\nabla\phi_{m1}$, ενώ η y-συνιστώσα του που χρειάζεται για τον υπολογισμό της
μαγνητικής ροής που εμπλέκεται με το πηνίο-κεφαλή είναι (στο ακίνητο σύστημα αναφοράς)

$$\boxed{B_y = \frac{\mu_0 M_0 e^{-\beta(y'-d/2)}\cos(\beta x' - \omega t)}{1+\coth\frac{\beta d}{2}}} \qquad (\vartheta)$$

οπότε η ροή $\Psi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{S}\Big|_{y=d/2+h} = WN\int_{-\ell/2}^{\ell/2} dx'\, B_y(x', y'=h+d/2)$, όπου W είναι
το βάθος του πηνίου (υποτίθεται ότι έχει ορθογωνικό σχήμα) και N ο αριθμός των
σπειρών του, είναι

$$\boxed{\Psi_m = \frac{2\mu_0 M_0 W N e^{-\beta h}}{\beta\left(1+\coth\frac{\beta d}{2}\right)}\sin\frac{\beta \ell}{2}\cos\omega t} \qquad (\iota)$$

Η τάση (ΗΕΔ) που αναπτύσσεται στους ακροδέκτες του πηνίου $U_0 = d\Psi_m/dt$ είναι λοιπόν,

$$v_o(t) = \left(\frac{2\mu_0 M_0 w V N}{1+\coth\frac{\beta d}{2}} e^{-\beta h} \sin\frac{\beta l}{2}\right)\sin\omega t \qquad (\iota\alpha)$$

Η ποσότητα μέσα στην παρένθεση είναι το πλάτος V_{omax} της τάσης, που είναι αρμονική κι αυτή όπως και η μαγνήτιση με την ίδια συχνότητα, και συνάρτηση του $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{\omega}{V} l \equiv \hat{\omega}$:

$$|V_{omax}| = \frac{2\mu_0 M_0 w V N}{1+\coth\left(\hat{\omega}\frac{d}{l}\right)} e^{-\hat{\omega}\frac{h}{l}} \sin\frac{\hat{\omega}}{2}$$

Παρατηρούμε ότι για $\hat{\omega} = 2\pi n$ (n: ακέραιος) έχουμε μηδενισμό του σήματος, δηλαδή όταν το μήκος του πηνίου είναι πολλαπλάσιο του μήκους περιοδικότητας του εγγεγραμμένου σήματος ($l = 2\pi n/\beta$). Εξασθένιση του σήματος προκαλεί και η τοποθέτηση της κεφαλής, δηλαδή ο λόγος h/l: Για μεγάλα h/l (κεφαλή σε απόσταση από την ταινία) έχουμε εξασθένιση ακόμη και για χαμηλές συχνότητες. Επομένως, είναι επιθυμητό για τη καλή αναπαραγωγή των υψηλών συχνοτήτων, να έχουμε το h/l όσο το δυνατόν μικρότερο, εί δυνατόν μηδενικό (ο μηδενισμός βέβαια θα προκαλέσει τριβή και φθορά της ταινίας ή/και της κεφαλής). Στο διπλανό σχήμα σκιτσάρεται το πλάτος του σήματος σαν συνάρτηση του $\hat{\omega}$ (κανονικοποιημένης συχνότητας) του εγγεγραμμένου σήματος που βρίσκεται, φυσικά, σε αντίστροφη αναλογία με το μήκος περιοδικότητας του, ήτοι $\omega = \beta V = \frac{2\pi V}{\lambda}$.