

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ

5.1 Εισαγωγή

Ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ : Σε πολλές εφαρμογές είναι $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, με συνέπεια το ηλεκτρικό πεδίο να είναι αστρόβιλο, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η μαθηματική ταυτότητα $\nabla \times (\nabla f) = 0$, για κάθε βαθμωτή συνάρτηση f , επιτρέπει το ηλεκτρικό πεδίο να γραφεί ως η κλίση μιας βαθμωτής ποσότητας, που έχει καθιερωθεί να επιλέγεται με αρνητικό πρόσημο, ως $f = (-\Phi)$, δηλαδή, το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ ορίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi, \quad \text{όταν } \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (5.1-1)$$

Σε διηλεκτρικά υλικά, η ένταση ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} και η πυκνότητα ηλεκτρικής ροής \mathbf{D} συνδέονται συνήθως με τη συντακτική σχέση $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, με την επιτρεπτότητα ως συνάρτηση του χώρου, $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$, στην περίπτωση μη ομογενούς υλικού. Όταν το πεδίο \mathbf{E} οφείλεται σε ηλεκτρικά φορτία, εφαρμόζεται ο νόμος του *Gauss*, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho$, και το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ συνδέεται με τη χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου με τη σχέση:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \Phi) = -\rho, \quad (5.1-2)$$

και στη συνηθισμένη περίπτωση, όταν το μέσο είναι ομογενές ($\nabla \epsilon = 0$), με ειδική περίπτωση τον κενό χώρο, $\epsilon = \epsilon_0$, η σχέση αυτή μετατρέπεται στην εξίσωση του *Poisson*:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = -\frac{1}{\epsilon} \rho, \quad \text{όταν } \nabla \epsilon = 0. \quad (5.1-3)$$

Ο τελεστής ∇^2 , όταν δρα σε βαθμωτή συνάρτηση, όπως εδώ στη Φ , ορίζεται ως η απόκλιση της κλίσης και ονομάζεται τελεστής του *Laplace*. Όταν σε κάποια περιοχή είναι $\rho = 0$, τότε εκεί εφαρμόζεται η ομογενής μορφή $\nabla^2 \Phi = 0$ της σχέσης (5.1-3), η εξίσωση του *Laplace*.

Σε διατάξεις με σταθερό ϵ σε χώρο με άπειρη έκταση και με γνωστές κατανομές φορτίων και διπόλων είναι δυνατόν να προσδιορισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό με κλειστή μορφή, ως ένα «ολοκλήρωμα επαλληλίας», όπως παρουσιάζεται στις παραγρ. 5.2.1 και 5.2.2. Στην παράγρ. 5.2.3 διατυπώνονται οι οριακές συνθήκες (σε επιφάνεια κλπ.) που συνοδεύουν τη διαφορική εξίσωση του *Poisson* ή του *Laplace*.

Σε αγώγιμα υλικά, η συνήθης συντακτική σχέση είναι ο μικροσκοπικός νόμος του *Ohm*, $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$, με την ειδική αγωγιμότητα να είναι (σε μη ομογενή μέσα) $g = g(\mathbf{r})$ και το πεδίο \mathbf{E} να οφείλεται σε αίτια έξω από το χώρο του αγωγού. Τότε, το δυναμικό μπορεί να συσχετισθεί με το ηλεκτρικό φορτίο, με χωρική πυκνότητα $\dot{\rho}$, που εκλύεται στο αγώγιμο υλικό ανά μονάδα χρόνου. Όπως παρουσιάζεται στην παράγρ. 5.2.4, η σχετική εξίσωση είναι:

$$\nabla \cdot (g\nabla\Phi) = -\dot{\rho}, \quad (5.1-4)$$

και σε ομογενές μέσο (δηλαδή, $\nabla g = 0$) προκύπτει η εξίσωση του *Poisson*:

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{g}\dot{\rho}, \quad \text{όταν } \nabla g = 0, \quad (5.1-5)$$

που εξειδικεύεται στην εξίσωση του *Laplace*, όταν $\dot{\rho} = 0$. Ο χειρισμός του δυναμικού Φ σε αγώγιμα υλικά (με σταθερό g και άπειρη έκταση) παρουσιάζεται στην παράγρ. 5.2.4, καθώς και η εξίσωση του *Poisson* ή του *Laplace*, μαζί με τις αντίστοιχες οριακές συνθήκες σε επιφάνεια κλπ.).

Επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi_{\text{επ}}$: Για να είναι σε κάποια περιοχή $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, αρκεί στην περιοχή αυτή να είναι $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$. Το ενδεχόμενο αυτό συναντάται σε μαγνητικές διατάξεις, όταν περιλαμβάνουν και υλικά με μεγάλη τιμή της μαγνητικής διαπερατότητας μ . Τότε, η μαγνητική ροή συγκεντρώνεται στο εσωτερικό αυτών των υλικών και στον υπόλοιπο χώρο (όπου η μαγνητική διαπερατότητα είναι τάξης $\mu_0 \ll \mu$) μπορεί να τεθεί $\mathbf{B}_0 = \mu_0\mathbf{H} \approx 0$. Ακόμα περισσότερο όταν οι χρονικές μεταβολές είναι αργές μπορεί να τεθεί $\partial\mathbf{B}_0/\partial t = 0$, με συνέπεια στο χώρο έξω από αυτά τα υλικά να είναι $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. Τότε, μπορεί πάλι να ορισθεί το επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi_{\text{επ}}$ από τη σχέση (5.1-1). Επειδή όμως, το δυναμικό αυτό δεν συνδέεται με ηλεκτρικά φορτία, περιγράφεται από ομογενή εξίσωση, στη γενική περίπτωση:

$$\nabla(\varepsilon\nabla\Phi_{\text{επ}}) = 0, \quad (5.1-6)$$

και στην περίπτωση ομογενούς μέσου ($\nabla\varepsilon = 0$) από την εξίσωση του *Laplace*:

$$\nabla^2\Phi_{\text{επ}} = 0, \quad \text{όταν } \nabla\varepsilon = 0. \quad (5.1-7)$$

Το επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό (όπως το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο) παράγεται από χρονικές μεταβολές της μαγνητικής ροής, η οποία ωστόσο είναι συγκεντρωμένη στο εσωτερικό των μαγνητικών υλικών με μεγάλο μ . Αυτό το αίτιο υπεισέρχεται στις εξισώσεις μέσω των οριακών συνθηκών, ιδίως μέσω μιας νοητής «επιφάνειας ασυνέχειας», όπως αναπτύσσεται στην παράγρ. 5.2.5, όπου παρουσιάζεται και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα επαλληλίας.

Διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} : Όταν το μαγνητικό πεδίο παράγεται από χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος, δεν είναι δυνατή η εισαγωγή ενός βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού (επειδή τότε $\nabla \times \mathbf{H} \neq 0$). Σε διατάξεις μαγνητοστατικής, αλλά με $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$, αφητηρία για την εισαγωγή συνάρτησης δυναμικού αποτελεί ο νόμος του *Gauss* για τη μαγνητική επαγωγή, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, που σε κάθε περίπτωση είναι ομογενής σχέση. Για οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση \mathbf{F} ισχύει η ταυτότητα $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$, συνεπώς σε κάθε περίπτωση μπορεί να εισαχθεί μία διανυσματική ποσότητα τέτοια, ώστε:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.1-8)$$

Η ποσότητα \mathbf{A} ονομάζεται απλά διανυσματικό δυναμικό.

Η διαφορική εξίσωση για το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} εξάγεται με ανάλογη πορεία, όπως για το δυναμικό Φ (αλλά όχι ταυτόσημη, επειδή τώρα το δυναμικό είναι διανυσματική συνάρτηση). Η συνήθης συντακτική σχέση $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ (με $\mu = \mu_0$ στο κενό) χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με το νόμο του *Ampere* $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, με αποτέλεσμα για το διανυσματικό δυναμικό να σχηματίζεται στη γενική περίπτωση μη ομογενούς μέσου, με $\mu = \mu(\mathbf{r})$, η σχέση:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = \mathbf{J}. \quad (5.1-9)$$

Σε ομογενές μέσο, η σταθερή ποσότητα μ μεταφέρεται στη δεξιά πλευρά και στο δυναμικό \mathbf{A} δρα ο τελεστής της διπλής περιστροφής, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J}$. Προτιμότερο, όμως, είναι να εισαχθεί ο τελεστής της διανυσματικής Λαπλασιανής, ο οποίος για οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο, όπως το \mathbf{A} , ορίζεται από την κλίση της απόκλισης και τη διπλή περιστροφή, ως:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (5.1-10)$$

Για την απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{A}$ υπάρχει απεριόριστη ευχέρεια επιλογής, οπότε επιλέγεται (στη μαγνητοστατική, όπως εδώ, πάντοτε) να είναι $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (επιλογή που πρακτικά καθιστά τη Λαπλασιανή να είναι ταυτόσημη με τη διπλή περιστροφή, εκτός από το πρόσημο). Έτσι για το διανυσματικό δυναμικό προκύπτει η διανυσματική εξίσωση του *Poisson*,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \text{όταν } \nabla \mu = 0 \text{ και } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (5.1-11)$$

που σε περιοχές με $\mathbf{J} = 0$ απλοποιείται στη διανυσματική εξίσωση του *Laplace*, $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$.

Στις παραγρ. 5.3.1 και 5.3.2 υπολογίζεται το δυναμικό \mathbf{A} σε χώρο με σταθερό μ , ενώ στην παράγρ. 5.3.3 εισάγονται οι κατάλληλες οριακές συνθήκες για τη σχέση (5.1-11).

Βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m : Για την ένταση μαγνητικού πεδίου, το ενδεχόμενο $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ (ανάλογο προς το ενδεχόμενο $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ της ηλεκτροστατικής) προϋποθέτει ότι είναι $\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t = 0$. Αυτή την προϋπόθεση καλύπτουν τα εξής δύο ενδεχόμενα:

- Όταν σε αγωγίμο υλικό το ηλεκτρικό ρεύμα συνδέεται μόνο με τη χρονική μεταβολή της πυκνότητας φορτίου, όπως όταν εκδηλώνεται το φαινόμενο της χαλάρωσης (Μέρος Α, παράγρ 2.2.3), τότε είναι $\mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t = 0$ και συνεπώς $\nabla \times \mathbf{H} = 0$.
- Σε αργές χρονικές μεταβολές, κατά κανόνα ισχύει $\partial \mathbf{D} / \partial t \approx 0$, ενώ είναι $\mathbf{J} \neq 0$ μόνο σε αγωγίμα υλικά. Ιδίως, όταν τα αγωγίμα υλικά καταλαμβάνουν μικρό τμήμα του χώρου, ώστε να περιγράφονται από νηματοειδείς αγωγούς (και αντίστοιχα να εκδηλώνονται μόνο νηματοειδή ηλεκτρικά ρεύματα), τότε σ' ολόκληρο τον υπόλοιπο χώρο είναι $\mathbf{J} = 0$ και η σχέση $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ ισχύει πρακτικά παντού.

Σε αυτά τα δύο ενδεχόμενα, καθώς είναι $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, υπάρχει η δυνατότητα να ορισθεί με ακριβώς ανάλογο τρόπο το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m , από τη σχέση:

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m, \quad \text{όταν } \nabla \times \mathbf{H} = 0. \quad (5.1-12)$$

Σε μαγνητικά υλικά η συνηθέστερη συντακτική σχέση είναι $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, με τη μαγνητική διαπερατότητα να είναι εν γένει χωροεξαρτώμενη, $\mu = \mu(\mathbf{r})$, και $\mu = \mu_0$ σε κενό χώρο. Χρησιμοποιώντας το νόμο του *Gauss* για τη μαγνητική επαγωγή, $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0$, το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό περιγράφεται από ομογενή εξίσωση, στη γενική περίπτωση:

$$\nabla (\mu \nabla \Phi_m) = 0, \quad (5.1-13)$$

και στην περίπτωση ομογενούς μέσου ($\nabla \mu = 0$) από την εξίσωση του *Laplace*:

$$\nabla^2 \Phi_m = 0, \quad \text{όταν } \nabla \mu = 0. \quad (5.1-14)$$

Αίτιο του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού (όπως του πεδίου \mathbf{H}) είναι το ηλεκτρικό ρεύμα, το οποίο όμως είναι συγκεντρωμένο στους αγωγούς και υπεισέρχεται στις εξισώσεις μέσω των οριακών συνθηκών, ιδίως της «επιφάνειας ασυνέχειας», αντίστοιχης προς του επαγωγικού ηλεκτρικού δυναμικού, όπως παρουσιάζεται στην παράγρ. 5.3.4, μαζί με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα επαλληλίας.

Ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά \mathbf{A} και Φ : Σε χρονομεταβλητές διατάξεις, κατάλληλες προσαρμογές επιτρέπουν να εισαχθούν γενικεύσεις των δυναμικών \mathbf{A} και Φ . Συγκεκριμένα, ο νόμος του *Gauss* για τη μαγνητική επαγωγή, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, ο οποίος ισχύει σε κάθε περίπτωση,

επιτρέπει να ορισθεί το εν γένει χρονοεξαρτώμενο διανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ από τη σχέση:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (5.1-15)$$

όπως ακριβώς στην περίπτωση της μαγνητοστατικής (με $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \neq 0$). Ακολούθως, εισάγοντας στο νόμο του *Faraday* τη μαγνητική επαγωγή ως $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, προκύπτει $\nabla \times \mathbf{E} = -(\partial/\partial t)\mathbf{B} = -(\partial/\partial t)(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times (\partial\mathbf{A}/\partial t)$, δηλαδή, $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0$. Τώρα, ως η κλίση μιας βαθμωτής ποσότητας, της $-\Phi$, είναι δυνατόν να γραφεί η ποσότητα σε παρένθεση (της οποίας η περιστροφή μηδενίζεται). Έτσι, εισάγεται το βαθμωτό δυναμικό $\Phi(\mathbf{r}, t)$, ως γενίκευση του ηλεκτροστατικού δυναμικού, από τη σχέση:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}. \quad (5.1-16)$$

Με πορεία ανάλογη προς τις προηγούμενες περιπτώσεις, τα πεδία $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ και $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$ (με την αρχική παραδοχή μη ομογενούς μέσου, με $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ και $\mu = \mu(\mathbf{r})$), εκφράζονται με χρήση των σχέσεων (5.1-15) και (5.1-16) και εισάγονται στο νόμο του *Gauss*, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ και στο νόμο των *Ampere-Maxwell*, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t$. Έτσι, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) &= -\rho - \nabla \cdot \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \\ \nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \right] &= \mathbf{J} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (5.1-17)$$

οι οποίες αποτελούν τις επεκτάσεις των (5.1-2) και (5.1-9) σε χρονομεταβλητές διατάξεις.

Οι εξισώσεις απλοποιούνται αισθητά, όταν το μέσο είναι ομογενές. Σε τέτοια περίπτωση, αντιστρέφοντας τα πρόσημα στη δεύτερη εξίσωση και προσθέτοντας τον όρο $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$, ώστε να σχηματισθεί η διανυσματική Λαπλασιανή $\nabla^2 \mathbf{A}$, όπως έχει ορισθεί με τη σχέση (5.1-10), αλλά θεωρώντας, ότι είναι $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (οπότε, με $\varepsilon = \text{σταθ.}$, μηδενίζεται ο τελευταίος όρος στην πρώτη σχέση), προκύπτει:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= -\frac{1}{\varepsilon} \rho, \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J} + \varepsilon \mu \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t} \Phi \right). \end{aligned} \quad \text{όταν } \nabla \varepsilon = 0 \text{ και } \nabla \mu = 0, \text{ με } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (5.1-18)$$

Η πρώτη σχέση, η εξίσωση του *Poisson*, είναι ταυτόσημη με την (5.1-3) της Ηλεκτροστατικής, αλλά, τώρα το δυναμικό Φ έχει διαφορετικό περιεχόμενο. Η δεύτερη σχέση περιγράφει

ότι το διανυσματικό δυναμικό υπακούει στην κυματική εξίσωση, με ταχύτητα διάδοσης ίση με $c_\varepsilon = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ (την ταχύτητα του φωτός στο μέσο) και με διέγερση οφειλόμενη στο ρεύμα \mathbf{J} , αλλά και στο δυναμικό Φ , το οποίο μπορεί να έχει προσδιορισθεί αυτοτελώς από την πρώτη σχέση και να θεωρηθεί γνωστό.

Αν στις σχέσεις (5.1-17) πάλι ληφθούν σταθερά τα ε και μ και στη δεύτερη σχέση (μετά την αντιστροφή των προσήμων) πάλι προστεθεί ο όρος $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$, αλλά χωρίς να τεθεί $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, και αν επιπλέον αφαιρεθεί από κάθε πλευρά της πρώτης σχέσης ο όρος $\varepsilon\mu(\partial^2\Phi/\partial t^2)$, ώστε και για το δυναμικό Φ να σχηματισθεί ο κυματικός τελεστής, τότε στη δεξιά πλευρά εμφανίζονται, εκτός από τους όρους ρ/ε και $\mu\mathbf{J}$, τα συμπλέγματα $(\partial/\partial t)(\nabla\cdot\mathbf{A} + \varepsilon\mu\partial\Phi/\partial t)$ και $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A} + \varepsilon\mu\partial\Phi/\partial t)$. Με τον τρόπο αυτό παρέχεται μία διαφορετική επιλογή που απλοποιεί τις εξισώσεις: να ληφθεί $\nabla\cdot\mathbf{A} = -\varepsilon\mu\partial\Phi/\partial t$. Τότε και τα δύο δυναμικά ικανοποιούν ισότιμα κυματικές εξισώσεις, με ταχύτητα διάδοσης $c_\varepsilon = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi &= -\frac{1}{\varepsilon}\rho, & \text{όταν } \nabla\varepsilon = 0 \text{ και } \nabla\mu = 0, \text{ με } \nabla\cdot\mathbf{A} &= -\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\Phi \\ \nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (5.1-19)$$

Η ημιτονοειδής μόνιμη κατάσταση περιγράφεται από τις σχέσεις αυτές με την αντικατάσταση $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= -\frac{1}{\varepsilon}\rho, & \text{όταν } \nabla\varepsilon = 0 \text{ και } \nabla\mu = 0, \text{ με } \nabla\cdot\mathbf{A} &= 0 \\ \nabla^2\mathbf{A} + \varepsilon\mu\omega^2\mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J} + j\varepsilon\mu\omega\nabla\Phi, \end{aligned} \quad (5.1-20)$$

και αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi + \varepsilon\mu\omega^2\Phi &= -\frac{1}{\varepsilon}\rho, & \text{όταν } \nabla\varepsilon = 0 \text{ και } \nabla\mu = 0, \text{ με } \nabla\cdot\mathbf{A} &= -j\varepsilon\mu\omega\Phi \\ \nabla^2\mathbf{A} + \varepsilon\mu\omega^2\mathbf{A} &= -\mu\mathbf{J}. \end{aligned} \quad (5.1-21)$$

Εύκολα φαίνεται πως όταν $\partial/\partial t = 0$ (ή, $\omega = 0$), οι δύο επιλογές ταυτίζονται, $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$, και τα δυναμικά \mathbf{A} και Φ ικανοποιούν αυτοτελώς τις εξισώσεις (5.1-3) και (5.1-11).

Εκτενέστερη εξαγωγή των σχέσεων αυτών (με πληρέστερη την τεκμηρίωση της ελευθερίας που παρέχεται για την επιλογή του $\nabla\cdot\mathbf{A}$), καθώς και ο υπολογισμός των δυναμικών σε άπειρης έκτασης ομογενή χώρο (τα αντίστοιχα ολοκληρώματα επαλληλίας), παρουσιάζονται στην παράγρ. 5.4.1, με εξειδίκευση στην παράγρ. 5.4.2 σε ορισμένες βασικές διατάξεις.

5.2 Το ηλεκτρικό δυναμικό Φ

5.2.0 Ορισμός και σύνδεση με το ηλεκτρικό πεδίο

Ορισμός του δυναμικού Φ : Όταν, για οποιονδήποτε λόγο, είναι $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, τότε η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να γραφεί ως η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης. Ως τέτοια συνάρτηση έχει καθιερωθεί η επιλογή $-\Phi$, με ενσωματωμένο το αρνητικό πρόσημο, όπου Φ είναι το ηλεκτροστατικό δυναμικό. Δηλαδή, ορίζεται:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi, \quad \text{όταν } \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (5.2-1)$$

Υπενθυμίζεται ότι ο τελεστής της κλίσης δρα σε βαθμωτό πεδίο (εδώ, το $-\Phi$) και επιστρέφει ως αποτέλεσμα ένα διανυσματικό πεδίο (εδώ, το \mathbf{E}). Στα τρία κύρια συστήματα συντεταγμένων οι αναλυτικές εκφράσεις για την κλίση είναι:

$$\begin{aligned} \nabla \Phi &= \mathbf{i}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} + \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r_T} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \mathbf{i}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (5.2-2)$$

Πεδίο εφαρμογής: Η προϋπόθεση $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ για τη σχέση (5.2-1) ισοδυναμεί με την απαίτηση $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$. Συνεπώς, το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να περιγραφεί μέσω του δυναμικού Φ στις ακόλουθες τέσσερις περιπτώσεις (και όχι μόνο στην πρώτη από αυτές):

- Όταν είναι $\partial / \partial t = 0$. Αυτή είναι η καθαυτή περίπτωση της ηλεκτροστατικής, στην οποία περιγράφεται η μόνιμη κατάσταση, με $\partial \mathbf{E} / \partial t = 0$. Το ηλεκτρικό πεδίο και τα συνδεδεμένα με αυτό χρονικά αμετάβλητα φορτία θεωρείται ότι έχουν σχηματισθεί σε χρόνους $t = -\infty$.
- Όταν είναι $\partial / \partial t \neq 0$, αλλά το μαγνητικό πεδίο που ενδεχομένως υπάρχει είναι στατικό ($\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$). Αυτή είναι η περίπτωση της γενικευμένης ηλεκτροστατικής, όπως σε φαινόμενα χαλάρωσης (βλ. παράγρ. 2.2.3 του Μέρους Α). Τότε, είναι $\mathbf{E}(\mathbf{r}; t)$ και $\Phi(\mathbf{r}; t)$, χρονοεξαρτώμενα, αλλά με το χρόνο t υποβαθμισμένο, κατά κάποιο τρόπο, σε παράμετρο.
- Όταν είναι $\partial / \partial t \neq 0$ και υπάρχει χρονομεταβλητό μαγνητικό πεδίο, αλλά έχει γίνει ο επιμερισμός του ηλεκτρικού πεδίου σε ηλεκτρομαγνητικό, που συνδέεται με το μαγνητικό πεδίο, και σε γενικευμένο ηλεκτροστατικό πεδίο, που οφείλεται μόνο στα φορτία και στο αστρόβιλο ηλεκτρικό ρεύμα. Τότε η σχέση (5.2-1) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγραφεί η ηλεκτροστατική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου, με το χρόνο t να έχει πάλι το ρόλο παραμέτρου, όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

- Όταν είναι $\partial/\partial t \neq 0$ και υπάρχει χρονομεταβλητό μαγνητικό πεδίο, αλλά στην περιοχή που εξετάζεται η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} έχει (πρακτικά) μηδενική τιμή. Αυτό μπορεί να συμβεί, αν στο χώρο υπάρχουν και μαγνητικά υλικά με $\mu \gg \mu_0$, οπότε έξω από τα υλικά αυτά πρακτικά είναι $\mathbf{B}_0 = 0$. Τότε, το επαγωγικό ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από τη σχέση (5.2-1), αλλά μόνο στο εξωτερικό των μαγνητικών υλικών (ενώ παράγεται στο εσωτερικό τους). Μολονότι και εδώ είναι $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, όπως και στις προηγούμενες τρεις περιπτώσεις, η διαφορά είναι ότι τώρα σε βρόχο από τον οποίο διέρχεται μαγνητική ροή είναι $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$, ενώ στις προηγούμενες περιπτώσεις ήταν $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ σε κάθε βρόχο.

Προσδιορισμός δυναμικού από ηλεκτρικό πεδίο: Η κλίση μιας βαθμωτής ποσότητας, όπως του δυναμικού Φ , είναι διάνυσμα και το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{i}_\ell \cdot \nabla \Phi$ περιγράφει την παράγωγο στην κατεύθυνση, την οποία ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}_ℓ . Συνεπώς, η ποσότητα $(\mathbf{i}_\ell d\ell) \cdot \nabla \Phi$ προσδιορίζει τη μεταβολή του Φ μεταξύ των άκρων του διαστήματος $d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_\ell d\ell$. Αθροίζοντας τη συνεισφορά από διαδοχικά στοιχεία $d\mathbf{r}'$, προκύπτει η ακόλουθη σχέση [που, ουσιαστικά, αποτελεί την αντιστροφή (ολοκλήρωση) της σχέσης (5.2-1)]:

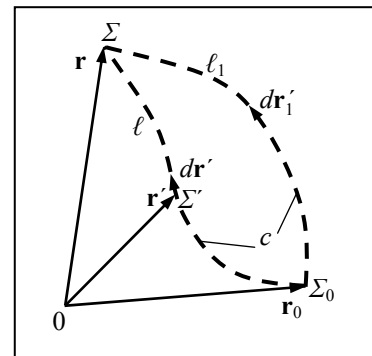
$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \quad (5.2-3)$$

Στο ολοκλήρωμα, οι συμβολισμοί φαίνονται στο **Σχήμα 5.2-1** και είναι:

- \mathbf{r}_0 Οι συντεταγμένες της αφετηρίας (σημείου Σ_0) της καμπύλης ℓ ,
- \mathbf{r} Οι συντεταγμένες του τέρματος (σημείου Σ) της καμπύλης ℓ ,
- \mathbf{r}' Οι συντεταγμένες κάθε ενδιάμεσου σημείου Σ' της καμπύλης ℓ ,
- $d\mathbf{r}'$ Το στοιχειώδες μήκος στην καμπύλη ℓ .

Αν αντί της ℓ είχε χρησιμοποιηθεί κάποια άλλη διαδρομή ℓ_1 (με την ίδια αφετηρία Σ_0 και το ίδιο τέρμα Σ), με στοιχειώδες μήκος $d\mathbf{r}'_1$, τότε οι δύο καμπύλες από κοινού θα σχημάτιζαν μία κλειστή καμπύλη c (με στοιχειώδες μήκος $d\mathbf{r}$ ίσο κατά περίπτωση με $d\mathbf{r}'$ και $-d\mathbf{r}'_1$).

Στην κλειστή αυτή καμπύλη θα ήταν $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (εκτός αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι επαγωγικό και από τον βρόχο c διέρχεται χρονομεταβλητή μαγνητική ροή, βλ. παράγρ. 5.2.5). Όμως, $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_\ell \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' + \int_{\ell_1} \mathbf{E} \cdot (-d\mathbf{r}'_1) = \int_\ell \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' - \int_{\ell_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'_1 = 0$. Δηλαδή, είναι $\int_\ell \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = \int_{\ell_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'_1$, οπότε το ολοκλήρωμα $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'$, συνεπώς και το δυναμικό Φ , είναι ανεξάρτητα από τις λεπτομέρειες της καμπύλης ℓ , αλλά εξαρτώνται μόνο από την αφετηρία και το τέρμα, ακριβώς, όπως η τάση πυκνωτή ή αντιστάτη είναι ανε-



Σχήμα 5.2-1

ξάρτητη από τη διαδρομή ολοκλήρωσης μεταξύ των οπλισμών. Άλλωστε, ανατρέχοντας και στους ορισμούς της παραγρ. 2.2.4, η τάση πυκνωτή και αντιστάτη (αλλά όχι η τάση πηνίου, βλ. παράγρ. 2.3.3) είναι απλώς η διαφορά των τιμών του δυναμικού μεταξύ των δύο οπλισμών. Όπως και η τάση, έτσι και το ηλεκτροστατικό δυναμικό έχει ως μονάδες τα *Volt* (V).

Σημείο αναφοράς: Επειδή η κλίση μιας σταθερής ποσότητας είναι ίση με το μηδέν, το δυναμικό επιδέχεται κάθε σταθερά ως προσθετέο, χωρίς να έχει η τιμή της καμία συνέπεια ως προς το ηλεκτρικό πεδίο, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\nabla(\Phi + \text{σταθ.})$. Η σταθερά αυτή μπορεί να επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε στην αφετηρία της ολοκλήρωσης στη σχέση (5.2-3) να είναι $\Phi(\mathbf{r}_0) = 0$, με συνέπεια το δυναμικό στην τυχαία θέση \mathbf{r} να είναι:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \quad (5.2-4)$$

Με τον τρόπο αυτό, το σημείο \mathbf{r}_0 , το οποίο χρησιμοποιείται ως κοινή αφετηρία για τον προσδιορισμό του Φ σε οποιαδήποτε άλλη θέση \mathbf{r} , λειτουργεί ως σημείο αναφοράς για τη μέτρηση του δυναμικού Φ . Κανείς εκ των προτέρων περιορισμός δεν επιβάλλει συγκεκριμένη επιλογή για το σημείο αναφοράς. Κριτήριο για την επιλογή του σημείου αναφοράς αποτελεί η γενικότερη διευκόλυνση. Όμως, όπως θα αναφερθεί στις επόμενες παραγράφους, κάποια σημεία είναι ακατάλληλα για σημεία αναφοράς.

Αλλαγή σημείου αναφοράς: Με την επιλογή κάποιου σημείου αναφοράς \mathbf{r}_0 , το δυναμικό γράφεται ως $\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$. Αν, για κάποιο λόγο, είναι επιθυμητό η ίδια διάταξη ηλεκτρικού πεδίου να περιγραφεί με κάποια διαφορετική επιλογή \mathbf{r}'_0 του σημείου αναφοράς, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η σχέση (5.2-4) με αφετηρία ολοκλήρωσης στη θέση \mathbf{r}'_0 . Όμως, είναι πολύ απλούστερο από την συνάρτηση $\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ να αφαιρεθεί η (σταθερή) ποσότητα $\Phi(\mathbf{r}=\mathbf{r}'_0; \mathbf{r}_0)$. Αμέσως, φαίνεται ότι η συνάρτηση:

$$\Phi'(\mathbf{r}; \mathbf{r}'_0) = \Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - \Phi(\mathbf{r}=\mathbf{r}'_0; \mathbf{r}_0) , \quad (5.2-5)$$

ικανοποιεί $\nabla\Phi' = \nabla\Phi$, οπότε περιγράφει την ίδια κατανομή ηλεκτρικού πεδίου, και, ταυτόχρονα, πράγματι είναι $\Phi'(\mathbf{r}=\mathbf{r}'_0) = 0$, όπως πρέπει για ένα σημείο αναφοράς. Η διαδικασία αυτή κυρίως ενδιαφέρει όταν είναι γνωστή η συνάρτηση $\Phi(\mathbf{r})$, ανεξάρτητα από τον τρόπο που προέκυψε, χωρίς όμως να είναι γνωστό ποιο είναι το σημείο αναφοράς (οποιαδήποτε ρίζα της εξίσωσης $\Phi(\mathbf{r}_0) = 0$). Τέτοια είναι η περίπτωση, όταν το δυναμικό έχει προσδιορισθεί από επαλληλία δύο ή περισσότερων διατάξεων, με διαφορετική επιλογή σημείου αναφοράς σε καθεμία, όπως στο *παράδ. 5.2-1*.

Ισοδυναμική επιφάνεια είναι η επιφάνεια, στην οποία το δυναμικό έχει σταθερή τιμή, π.χ. την τιμή U . Η εξίσωση μιας τέτοιας επιφάνειας σε πλεγμένη μορφή είναι απλώς η σχέση $\Phi(\mathbf{r}) = U$. Αν αυτή η σχέση δεν έχει πραγματικές ρίζες, τότε απλούστατα δεν υπάρχει ισοδυναμική επιφάνεια για την τιμή U . Στο **παράδ. 5.2-2** παρουσιάζεται ο προσδιορισμός ισοδυναμικών επιφανειών.

Μια ισοδυναμική επιφάνεια μπορεί να είναι «συνεκτική» (δηλαδή, από κάθε σημείο της επιφάνειας να είναι δυνατή η μετακίνηση σε οποιοδήποτε άλλο, παραμένοντας κατά τη μετακίνηση συνεχώς στην επιφάνεια), ή «μη συνεκτική» (που αποτελείται από δύο ή περισσότερες συνεκτικές επιφάνειες). Για παράδειγμα, όπως θα παρουσιασθεί στην επόμενη παράγραφο, το δυναμικό από σημειακό φορτίο q_0 στην αρχή των αξόνων παράγει δυναμικό ίσο με $\Phi = q_0/4\pi\epsilon_0 r$ (με σημείο αναφοράς στο άπειρο), και στην τιμή $\Phi = U$ αντιστοιχεί η συνεκτική σφαιρική επιφάνεια $r = q_0/4\pi\epsilon_0 U$, εφ' όσον οι ποσότητες U και q_0 είναι ομόσημες, ενώ δεν υπάρχουν ισοδυναμικές επιφάνειες που να αντιστοιχούν σε U ετερόσημο του q_0 . Παρομοίως, σταθερό επιφανειακό φορτίο σ_0 στο επίπεδο $z = 0$ με άπειρη έκταση παράγει δυναμικό ίσο με $\Phi = -\sigma_0|z|/2\epsilon_0$, με σημείο αναφοράς στο φορτισμένο επίπεδο και με την παραδοχή, ότι τα φορτία στο άπειρο είναι κατανομημένα συμμετρικά. Η ισοδυναμική επιφάνεια $\Phi = U$, με U ετερόσημο του σ_0 , είναι μη συνεκτική, αποτελούμενη από τα δύο επίπεδα $z = \pm 2\epsilon_0 U/\sigma_0$.

Σε μια ισοδυναμική επιφάνεια εξ ορισμού το δυναμικό είναι σταθερό, συνεπώς η παράγωγός του σε οποιαδήποτε διεύθυνση εφαπτομενική στην επιφάνεια είναι ίση με μηδέν, οπότε η κλίση $\nabla\Phi$, το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , καθώς και οι δυναμικές γραμμές (βλ. παράγρ. 2.2.2 του Μέρους Α) είναι όλα κάθετα στην ισοδυναμική επιφάνεια. Η φορά της κλίσης είναι προς τις παρακαείμενες ισοδυναμικές επιφάνειες με μεγαλύτερο δυναμικό, και αντίστοιχα το ηλεκτρικό πεδίο, το οποίο είναι αντίθετο προς την κλίση, έχει φορά προς τις επιφάνειες με μικρότερο δυναμικό. [Ιστορικά, αντιστοιχίζοντας το δυναμικό Φ με το υψόμετρο και την πυκνότητα ηλεκτρικής ροής \mathbf{D} με τη ροή ενός ρευστού λόγω βαρύτητας (με φορά προς τα χαμηλότερα υψόμετρα), για να είναι πλήρης αυτή η αντιστοιχία, έγινε η εισαγωγή του αρνητικού προσήμου στον ορισμό του δυναμικού, $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.]

Αντίστοιχος είναι ο ορισμός του **ισοδυναμικού χώρου**, στον οποίο είναι παντού $\Phi = \text{σταθ.}$ και, συνεπώς, επίσης $\mathbf{E} = 0$. Παράδειγμα ισοδυναμικού χώρου αποτελεί το εσωτερικό ενός ιδανικά αγωγίμου υλικού, ή ένας κλωβός (περιοχή που περικλείεται από ιδανικά αγωγά υλικό). Η ισοδυναμική επιφάνεια ή ο ισοδυναμικός χώρος με $\Phi = 0$, που περιέχει το σημείο αναφοράς, ονομάζεται «γη».

Παράδειγμα 5.2-1: Το ηλεκτροστατικό δυναμικό μιας διάταξης περιγράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, φ) από τη σχέση:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{A}{r} + Br|\cos\theta|,$$

όπου A και B είναι σταθερές ποσότητες, με κατάλληλες μονάδες. Να εκφρασθεί το δυναμικό με τη επιλογή του σημείου αναφοράς στη θέση \mathbf{r}_0 , με $r_0 = a$, $\theta_0 = 0$ και $\varphi_0 = \pi$.

Επίλυση: Αφαιρώντας από τη δίδομενη σχέση $\Phi(\mathbf{r})$ τον εαυτό της με $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, σύμφωνα με τη σχέση (5.2-5), αμέσως προκύπτει το δυναμικό Φ' (το οποίο ας γραφεί πάλι ως Φ) με την επιθυμητή επιλογή του σημείου αναφοράς:

$$\Phi(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{A}{r} + Br|\cos\theta| - \left(\frac{A}{a} + Ba \right).$$

Σχόλια:

- Στην αρχική έκφραση για το δυναμικό, προκειμένου να είναι $\Phi(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) = 0$, το σημείο αναφοράς θα προσδιοριζόταν από τη σχέση $r_0^2|\cos\theta_0| = -A/B$. Αν οι σταθερές A και B είναι ομόσημες, τότε η σχέση αυτή προσδιορίζει άπειρο πλήθος επιλογών (κάθε σημείο που βρίσκεται στη συγκεκριμένη ισοδυναμική επιφάνεια). Αν αντίθετα οι σταθερές A και B είναι ετερόσημες, τότε η αρχική έκφραση δεν συνδέεται με κάποιο σημείο αναφοράς. Αυτό δεν αποτελεί λόγο ανησυχίας. Είναι καθ' όλα δυνατόν, κάποια έκφραση για το δυναμικό να μην αναφέρεται σε υπαρκτό σημείο αναφοράς, όπως θα συνέβαινε αν σε κάποια έκφραση $\Phi(\mathbf{r})$ με αρνητικό ελάχιστο προστεθεί μία σταθερά με αρκετά μεγάλη τιμή, ώστε το ελάχιστο να ανυψωθεί σε θετική τιμή.
- Σε χώρο με ϵ_0 , το δυναμικό της εκφόνησης παράγεται από την επαλληλία σημειακού φορτίου $q_0 = 4\pi\epsilon_0 A$ στην αρχή των αξόνων (με σημείο αναφοράς στο άπειρο) και σταθερού επιφανειακού φορτίου $\sigma_0 = 2\epsilon_0 B$ στο επίπεδο $z = 0$ (με σημείο αναφοράς στο ίδιο επίπεδο $z = 0$), με την παραδοχή ότι στο άπειρο τα φορτία είναι κατανεμημένα συμμετρικά.

Παράδειγμα 5.2-2: Η ένταση ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} στην περιοχή $x > 0$ έχει τις συνιστώσες $E_x = E_0 \cos(ky) \exp(-kx)$, $E_y = E_0 \sin(ky) \exp(-kx)$ και $E_z = 0$. Να προσδιορισθούν:

- (α) Το δυναμικό Φ στην ίδια περιοχή $x > 0$ (με όποιο σημείο αναφοράς είναι πρόσφορο),
 (β) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες.

Επίλυση: Προκαταρκτικά, καλό είναι να ελεγχθεί ότι είναι $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ σε ολόκληρη την περιοχή $x > 0$. Πράγματι, παραγωγίζοντας την έκφραση του δεδομένου πεδίου διαπιστώνεται αμέσως ότι ισχύει η ισότητα $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{i}_z(\partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y) = 0$.

(α) Για να προσδιορισθεί το δυναμικό Φ , η εφαρμογή της σχέσης (5.2-1) σε καρτεσιανές συντεταγμένες δίνει:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi = -E_x = -E_0 \cos(ky) \exp(-kx),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi = -E_y = -E_0 \sin(ky) \exp(-kx),$$

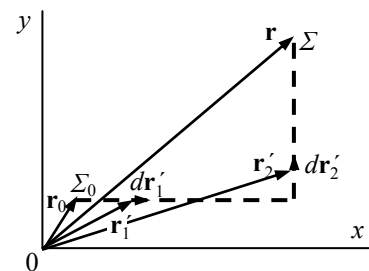
$$\frac{\partial}{\partial z} \Phi = -E_z = 0.$$

Με ολοκλήρωση ως προς x , η πρώτη σχέση δίνει $\Phi = (E_0/k) \cos(ky) \exp(-kx) + C(y, z)$, όπου η σταθερά ολοκλήρωσης C μπορεί να είναι εν γένει συνάρτηση των συντεταγμένων y και z (που αντιπροσωπεύουν παραμέτρους, κατά την ολοκλήρωση ως προς x). Εισάγοντας, όμως, αυτή την έκφραση του Φ στις επόμενες δύο σχέσεις φαίνεται αμέσως, ότι στην προκείμενη περίπτωση είναι $\partial C/\partial y = 0$ και $\partial C/\partial z = 0$, οπότε είναι απλά $C = C_0 = \text{σταθ.}$ και συνεπώς:

$$\Phi = \frac{E_0}{k} \cos(ky) \exp(-kx) + C_0.$$

Για τη σταθερά C_0 οποιαδήποτε επιλογή είναι αποδεκτή. Ας γίνει η επιλογή $C_0 = 0$, με κριτήριο την απλούστευση της έκφρασης για το Φ . Η επιλογή αυτή αντιστοιχεί σε επιλογή του σημείου αναφοράς σε οποιαδήποτε από τις θέσεις με $\cos(ky_0) = 0$ και με οποιαδήποτε x_0 και y_0). Εναλλακτικά, θα μπορούσε να είχε επιλεγεί ως σημείο αναφοράς η αρχή των αξόνων. Τότε θα ήταν $C_0 = -(E_0/k)$, ώστε να ήταν $\Phi(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = 0) = 0$.

Αν, εναλλακτικά, προτιμηθεί η σχέση (5.2-3) για να προσδιορισθεί το δυναμικό Φ , η πιο πρόσφορη διαδρομή ολοκλήρωσης αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς τους άξονες (ώστε το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'$ να προσδιορίζεται αμέσως), με $d\mathbf{r}'_1 = \mathbf{i}_x dx'$, $d\mathbf{r}'_2 = \mathbf{i}_y dy'$ και $d\mathbf{r}'_3 = \mathbf{i}_z dz'$ (ανεξάρτητα αν το τελευταίο δεν συνεισφέρει, επειδή $E_z = 0$).



Αφήνοντας, προς το παρόν, ελεύθερες παραμέτρους τις συντεταγμένες του σημείου αναφοράς, είναι:

$$\Phi(x, y, z) = - \left[\int_{x_0}^x E_x(x', y_0, z_0) dx' + \int_{y_0}^y E_y(x, y', z_0) dy' \right],$$

και ολοκληρώνοντας προκύπτει η έκφραση:

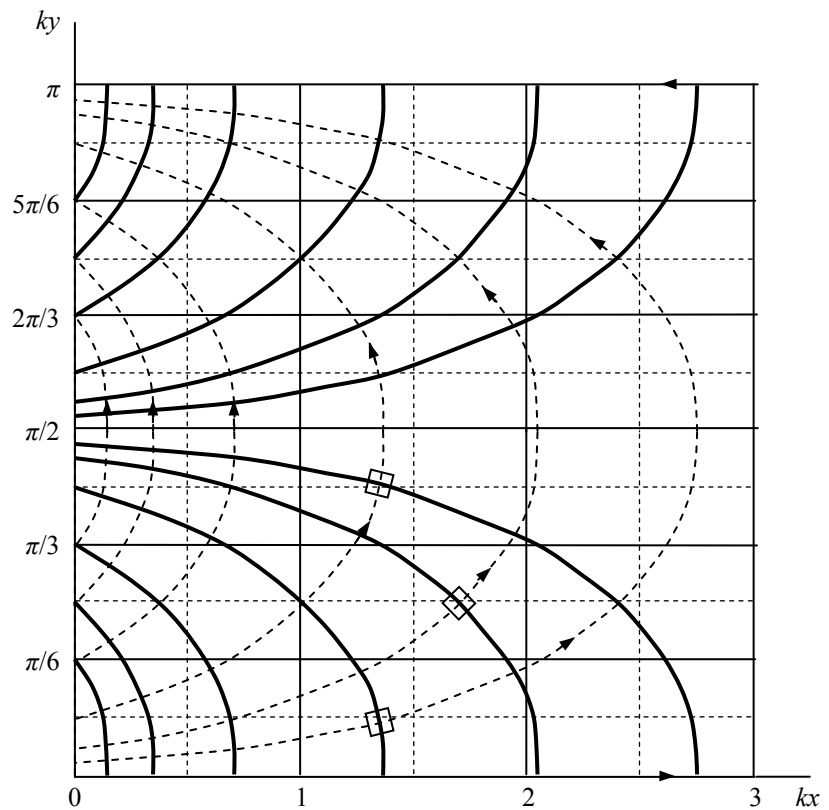
$$\begin{aligned}\Phi(x, y, z) &= \frac{E_0}{k} \{ \cos(ky_0) [\exp(-kx) - \exp(-kx_0)] + [\cos(ky) - \cos(ky_0)] \exp(-kx) \} \\ &= \frac{E_0}{k} \cos(ky) \exp(-kx) - \frac{E_0}{k} \cos(ky_0) \exp(-kx_0).\end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος, συμπεριλαμβανοντάς το αρνητικό πρόσημο, αντιστοιχεί στη σταθερά C_0 της εναλλακτικής επίλυσης που προηγήθηκε, οπότε ως προς την επιλογή του σημείου αναφοράς ισχύουν τα ίδια όπως προηγουμένως. Βεβαίως, αν ήταν από την αρχή επιθυμητό να επιλεγεί συγκεκριμένο σημείο αναφοράς, όπως η αρχή των αξόνων, τότε από την αρχή θα είχε τεθεί $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

(β) Οι ισοδυναμικές επιφάνειες προσδιορίζονται θέτοντας $\Phi(\mathbf{r}) = U$ για διάφορες τιμές του U . Χρησιμοποιώντας την έκφραση $\Phi = (E_0/k) \cos(ky) \exp(-kx)$, δηλαδή με την επιλογή $C_0 = 0$ για τη σταθερά ολοκλήρωσης, προκύπτει:

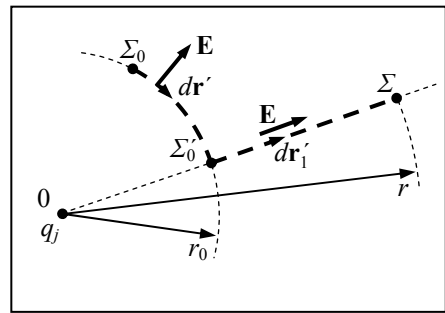
$$\cos(ky) \exp(-kx) = \frac{kU}{E_0},$$

που εύκολα επιλύεται ως προς $y(x)$ ή ως $x(y)$. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες περιγράφονται από τη σχέση αυτή σε κάθε z και απεικονίζονται από τις συνεχείς καμπύλες στο σχήμα. Στο ίδιο σχήμα παρουσιάζονται και οι δυναμικές γραμμές, από το *παράδ. 2.2-20* του Μέρους Α. Όπως αναμένεται, οι δύο οικογένειες γραμμών τέμνονται σε ορθή γωνία, επειδή το πεδίο $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ και οι δυναμικές γραμμές είναι κάθετα προς τις ισοδυναμικές επιφάνειες $\Phi = \text{σταθ}$.



5.2.1 Ηλεκτροστατικό δυναμικό από κατανομές φορτίων

Ηλεκτροστατικό δυναμικό σημειακού φορτίου: Αν ένα σημειακό φορτίο q_j βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, σε χώρο όπου επικρατεί παντού η ίδια τιμή ϵ_0 για την επιτρεπτότητα, από το νόμο του *Gauss* είναι γνωστό ότι $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_r q_j / (4\pi\epsilon_0 r^2)$. Εφόσον είναι γνωστό το ηλεκτρικό πεδίο, το ηλεκτροστατικό δυναμικό στην τυχαία θέση \mathbf{r} (σημείο Σ) μπορεί να προσδιορισθεί χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.2-3), με απλή ολοκλήρωση από το σημείο αναφοράς Σ_0 , στο οποίο είναι $\Phi(\mathbf{r}_0) = 0$, μέχρι το σημείο Σ . Η διαδρομή ολοκλήρωσης είναι αδιάφορη, συνεπώς μπορεί να επιλεγεί με κριτήριο τη διευκόλυνση στον υπολογισμό του ολοκληρώματος στη σχέση (5.2-4). Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 5.2-2**, μια τέτοια διαδρομή μπορεί να είναι ο συνδυασμός ενός κυκλικού τόξου $\Sigma_0\Sigma'_0$, με κέντρο στο 0 και ακτίνα r_0 , με ένα ακτινικό ευθύγραμμο τμήμα $\Sigma'_0\Sigma$. Στο τόξο είναι $d\mathbf{r}' \perp \mathbf{E}$, δηλαδή $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = 0$ σε κάθε στοιχείο $d\mathbf{r}'$ του τόξου. Αντιθέτως, στην τυχαία ενδιάμεση θέση $\mathbf{r}' = \mathbf{i}_r r'$ του ευθύγραμμου τμήματος, το στοιχείο $d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_r dr'$ είναι συγγραμμικό με το πεδίο $\mathbf{E}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}_r q_j / (4\pi\epsilon_0 r'^2)$, οπότε η συνεισφορά του στο ολοκλήρωμα είναι ίση με $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = [q_j / (4\pi\epsilon_0)] (dr' / r'^2)$. Η πορεία που περιγράφηκε παρουσιάζεται στην εξίσωση:



Σχήμα 5.2-2

περιγράφηκε παρουσιάζεται στην εξίσωση:

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \left[\int_{\Sigma_0}^{\Sigma'_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \int_{\Sigma'_0}^{\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right] = 0 - \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2},$$

και με ολοκλήρωση στο διάστημα $r_0 < r' < r$ προκύπτει, ότι σε χώρο όπου είναι παντού ϵ_0 , το δυναμικό από σημειακό φορτίο q_j στην αρχή των αξόνων είναι ίσο με:

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right], \quad (5.2-6)$$

όπου r_0 είναι η απόσταση του σημείου αναφοράς από την αρχή των αξόνων.

Δυναμικό από σημειακό φορτίο q_j σε τυχαία θέση r' : Στη σχέση (5.2-6) μπορεί να αναγνωρισθεί ότι στην πραγματικότητα r είναι η απόσταση του σημείου Σ , στο οποίο προσδιορίζεται το δυναμικό, από τη θέση του φορτίου q_j , και επίσης ότι r_0 είναι η απόσταση του σημείου αναφοράς πάλι από το σημειακό φορτίο. Αν το σημειακό φορτίο δεν βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, αλλά σε κάποια άλλη θέση r' , τότε αυτές οι αποστάσεις ας ονομασθούν R και R_0 , αντί r και r_0 , περιγράφουν πάγια αποστάσεις από την αρχή των αξόνων. Ουσιαστικά,

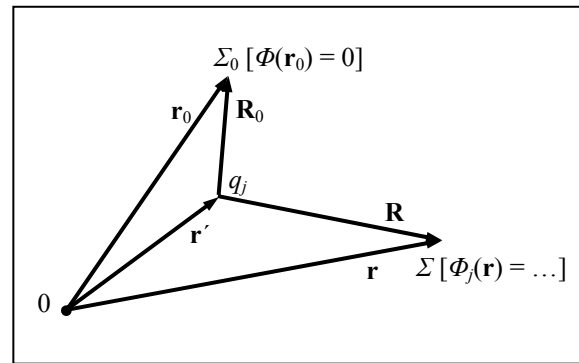
πρόκειται για μετατόπιση της αρχής των αξόνων στη θέση του φορτίου, με τα κεφαλαία σύμβολα R και R_0 να περιγράφουν αποστάσεις από τη νέα αρχή των αξόνων (τη θέση του σημειακού φορτίου). Με βάση αυτά τα σχόλια, από τη σχέση (5.2-6) προκύπτει αμέσως ότι (αν παντού είναι ϵ_0) **το δυναμικό από σημειακό φορτίο q_j σε τυχαία θέση είναι ίσο με:**

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right], \quad (5.2-7)$$

όπου R και R_0 είναι αντίστοιχα οι αποστάσεις του σημείου υπολογισμού του δυναμικού και του σημείου αναφοράς από τη θέση του σημειακού φορτίου.

Συγκεντρωτικά, οι συμβολισμοί και οι αλληλοσυνδέσεις των αποστάσεων, όπως παρουσιάζεται και στο **Σχήμα 5.2-3**, είναι οι ακόλουθοι:

- \mathbf{r} = Θέση προσδιορισμού δυναμικού,
- \mathbf{r}' = Θέση με το φορτίο q_j ,
- \mathbf{r}_0 = Θέση σημείου αναφοράς,
- $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ = Θέση προσδιορισμού δυναμικού, σε σχέση με θέση φορτίου,
- $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'$ = Θέση σημείου αναφοράς, σε σχέση με θέση φορτίου,
- $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ = Απόσταση Σ από q_j ,
- $R_0 = |\mathbf{R}_0| = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|$ = Απόσταση Σ_0 από q_j .



Σχήμα 5.2-3

Η σχετική απόσταση, όπως το μέτρο κάθε διανύσματος, προσδιορίζεται από την τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου του διανύσματος με τον εαυτό του. Σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες, η σχετική απόσταση R είναι αντίστοιχα ίση με:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\ &= \sqrt{r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2} \\ &= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' [\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi')]} \end{aligned} \quad (5.2-8)$$

και παρόμοια έκφραση (με $x \rightarrow x_0$ κλπ.) δίνει την απόσταση R_0 .

Δυναμικό από τυχαία κατανομή φορτίων (Ολοκλήρωμα επαλληλίας): Επειδή η σχέση που συνδέει το δυναμικό με τα φορτία είναι γραμμική, επιδέχεται επαλληλία. Έτσι, αν υπάρχουν τα σημειακά φορτία q_j στις θέσεις \mathbf{r}'_j , το δυναμικό στη θέση \mathbf{r} προκύπτει από

άθροιση της (5.2-7) ως προς j (με $R \rightarrow R_j$ και $R_0 \rightarrow R_{0j}$). Αν, τώρα, τα σημειακά φορτία αντιπροσωπεύουν απειροστά φορτία $dQ = \{\rho(\mathbf{r})dV, \sigma(\mathbf{r}_S)dS, \lambda(\ell)d\ell\}$, τότε η άθροιση μετατρέπεται σε ολοκλήρωση στην έκταση του χώρου με τις κατανομές ρ, σ και λ . Για να είναι σαφής η διαφοροποίηση ανάμεσα στο σημείο \mathbf{r} , στο οποίο προσδιορίζεται το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$, και στις θέσεις με τα φορτία, ως προς τις οποίες γίνεται η ολοκλήρωση, εφαρμόζεται η σύμβαση να προσδιορίζουν τις θέσεις με τα φορτία οι τονισμένες συντεταγμένες, οπότε αυτές αντιπροσωπεύουν τις μεταβλητές ολοκλήρωσης. Το αποτέλεσμα είναι η γενική έκφραση:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} - \frac{1}{R_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}')} \right] dQ' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j q_j \left[\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_{0j}} \right], \quad (5.2-9)$$

που περιορίζεται από την παραδοχή ότι παντού είναι ϵ_0 . Στη σχέση αυτή έχει συμπεριληφθεί ο τελευταίος όρος, για να καλυφθεί η συνεισφορά ενδεχόμενων σημειακών φορτίων q_j , και:

- (α) $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ και $R_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}') = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|$ είναι οι σχετικές αποστάσεις, όπως ορίστηκαν προηγουμένως, βλ. και σχέσεις (5.2-8).
- (β) $dQ' = \{\rho(\mathbf{r}')dV', \sigma(\mathbf{r}'_S)dS', \lambda(\ell')d\ell'\}$ είναι το στοιχειώδες φορτίο (λόγω των κατανομών φορτίου ρ, σ , ή/και λ που υπάρχουν στον χώρο), διατυπωμένο ως συνάρτηση των τονισμένων συντεταγμένων.
- (γ) Η ολοκλήρωση γίνεται κατ' αρχήν σε όλο το χώρο, μέχρι το άπειρο. Ουσιαστικά όμως, η ολοκλήρωση περιορίζεται μόνο σε εκείνες τις περιοχές, στις οποίες τα ρ, σ , ή/και λ είναι μη μηδενικά, επειδή ο υπόλοιπος χώρος (χωρίς ρ, σ ή λ) έχει μηδενική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα, καθώς εκεί η ολοκληρωτέα παράσταση είναι εκεί ίση με μηδέν.
- (δ) Οι μεταβλητές ολοκλήρωσης (οι τονισμένες ποσότητες) εμφανίζονται τόσο στο dQ' , το οποίο γράφεται τονισμένο για να επισημανθεί ότι εκφράζεται ως συνάρτηση των τονισμένων συντεταγμένων, όσο και στα $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ και $R_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}')$. Δεδομένου ότι η ολοκλήρωση γίνεται, ουσιαστικά, μόνο στο χώρο με τα φορτία, δηλαδή, ότι πρόκειται για ορισμένο ολοκλήρωμα, με όρια ολοκλήρωσης τα όρια των περιοχών με τα φορτία, το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης δεν μπορεί να εξαρτάται από τις τονισμένες μεταβλητές.
- (ε) Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης δίνει το δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ στη θέση \mathbf{r} και εξαρτάται μόνο από τις άτονες συντεταγμένες, λόγω της παρουσίας τους στο $R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.
- (ζ) Στο αποτέλεσμα θα εμφανίζονται και παράμετροι, που είτε περιέχονται στις εκφράσεις για τα $\{\rho(\mathbf{r}'), \sigma(\mathbf{r}'_S), \lambda(\ell')\}$, είτε προέρχονται από τα όρια ολοκλήρωσης. Οι παράμετροι περιγράφουν με ποιον τρόπο επηρεάζουν οι κατανομές φορτίων το δυναμικό.

Η σχέση (5.2-9) προέκυψε από την εφαρμογή επαλληλίας σε στοιχειώδη σημειακά φορτία και το ολοκλήρωμα που περιλαμβάνει χαρακτηρίζεται ως «ολοκλήρωμα επαλληλίας». Με τη σχέση αυτή επιλύεται κάθε πρόβλημα Ηλεκτροστατικής (σε χώρο όπου είναι παντού ϵ_0), όταν τα φορτία είναι γνωστά. [Όμως, σε πραγματικές διατάξεις, τα φορτία κατανέμονται στο χώρο, συνήθως στα όρια των αγωγίμων υλικών, από τη δράση του ηλεκτρικού, κυρίως, πεδίου, συνεπώς δεν είναι γνωστά από την αρχή.] Το ερώτημα αν το ολοκλήρωμα $[dQ'/R$ μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά είναι δευτερεύον. Κατά κανόνα, η ολοκλήρωση θα γίνει μόνο προσεγγιστικά ή αριθμητικά. Μετά τον προσδιορισμό του $\Phi(\mathbf{r})$, το ηλεκτρικό πεδίο προσδιορίζεται από τη σχέση $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ (αναλυτικά, προσεγγιστικά ή αριθμητικά).

Ολοκλήρωμα επαλληλίας για το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} : Αντί για τον προσδιορισμό πρώτα του δυναμικού $\Phi(\mathbf{r})$ και κατόπιν του $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ είναι δυνατός ο απευθείας υπολογισμός του ηλεκτρικού πεδίου με παρόμοιο ολοκλήρωμα, όπως έχει περιγραφεί στην παράγρ. 2.2-1 του Μέρους Α (βλ. εφαρμογή στο *παράδ 2.2-10*). Συγκεκριμένα, το dQ' στη θέση \mathbf{r}' παράγει ηλεκτρικό πεδίο $d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_R dQ' / (4\pi\epsilon_0 R^2) = \mathbf{R} dQ' / (4\pi\epsilon_0 R^3)$, όπου $\mathbf{i}_R = \mathbf{R}/R$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, το συγγραμμικό με το $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Συνεπώς, η έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο με τη μορφή ολοκληρώματος επαλληλίας είναι:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{R}}{R^3} dQ' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{\mathbf{R}_j}{R_j^3} q_j. \quad (5.2-10)$$

Φυσικά, η σχέση αυτή δεν μπορεί να περιέχει κανέναν όρο με το R_0 , αφού αναφέρεται στο πεδίο και όχι στο δυναμικό. Για την εφαρμογή αυτής της σχέσης πρέπει να προσεχθεί ότι πρόκειται για ολοκλήρωμα διανυσματικής ποσότητας, με επιπρόσθετη εξάρτηση από τις μεταβλητές ολοκλήρωσης (τις τονισμένες) στο διάνυσμα \mathbf{R} (στον αριθμητή).

[Εναλλακτικά, η σχέση (5.2-10) μπορεί να εξαχθεί εφαρμόζοντας την αρνητική κλίση στη σχέση (5.2-9). Η κλίση εφαρμόζεται στο $\Phi(\mathbf{r})$, δηλαδή αναφέρεται σε παραγωγίσεις ως προς τις άτονες συντεταγμένες. Στο ολοκλήρωμα της (5.2-9) μπορεί να αντιστραφεί η σειρά ολοκλήρωσης (ως προς τις τονισμένες συντεταγμένες) και παραγωγήσις, μεταφέροντας τον τελεστή της κλίσης στο εσωτερικό του ολοκληρώματος. Μόνο η σχετική απόσταση R περιέχει τις άτονες συντεταγμένες, δηλαδή χρειάζεται η ποσότητα $-\nabla(1/R)$, και είναι $-\nabla(1/R) = -\nabla[(R^2)^{-1/2}] = +1/2(R^2)^{-3/2}\nabla(R^2) = 1/2R^{-3}2\mathbf{R} = \mathbf{R}/R^3 = \mathbf{i}_R/R^2$, όπως στη σχέση (5.2-10).]

Πάντως, προτιμότερος είναι ο υπολογισμός πρώτα του $\Phi(\mathbf{r})$, που ως βαθμωτή ποσότητα είναι πιο εύχρηστη από τη διανυσματική ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Μάλιστα, συχνά,

αρκεί να προσδιορισθεί μόνο το δυναμικό Φ . Αλλά, και όταν απαιτείται να προσδιορισθεί και το ηλεκτρικό πεδίο, αν προταχθεί ο προσδιορισμός του δυναμικού Φ απαιτούνται λιγότερο χρονοβόρες «πράξεις» (μία ολοκλήρωση $\int dQ'/R$ και τρεις παραγωγίσεις για τις συνιστώσες του $\nabla\Phi$), απ' όσες στον απ' ευθείας προσδιορισμό του πεδίου (τρεις ολοκληρώσεις για τις συνιστώσες του $\int dQ'\mathbf{R}/R^3$). Επισημαίνεται, πάντως, ότι αριθμητικά το ολοκλήρωμα $\int dQ'/R$ όχι μόνο συγκλίνει βραδύτερα, αλλά πρέπει να προσδιορισθεί και με περισσότερη ακρίβεια, ώστε οι παραγωγίσεις που ακολουθούν να δώσουν με ικανοποιητική ακρίβεια το πεδίο.

Επιλογή του σημείου αναφοράς: Όταν το δυναμικό Φ παράγεται από σημειακό φορτίο, τότε η επιλογή του σημείου αναφοράς στο άπειρο (σε οποιαδήποτε διεύθυνση του απείρου) κάνει τη σχετική απόσταση $R_0 = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|$ να τείνει στο άπειρο, σε οποιαδήποτε πεπερασμένη θέση \mathbf{r}' και αν βρίσκεται το σημειακό φορτίο. Με τέτοια επιλογή, ο όρος $q_j/(4\pi\epsilon_0 R_0)$ στη σχέση (5.2-7) μηδενίζεται. Επίσης, συχνά, η κατανομή των φορτίων είναι τέτοια, ώστε από το άπειρο να φαίνεται σαν σημειακό φορτίο. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η αντίστροφη απόσταση, $1/R_0$, πρακτικά έχει μηδενική τιμή σε ολόκληρη την περιοχή της ολοκλήρωσης στη σχέση (5.2-9), με συνέπεια ο δεύτερος όρος στο ολοκλήρωμα να μηδενίζεται. Και στις δύο περιπτώσεις, οι εκφράσεις που σχηματίζονται με την επιλογή $\mathbf{r}_0 = \infty$ είναι απλούστερες, συγκεκριμένα:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ'}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{R_j}, \quad \text{με } \mathbf{r}_0 = \infty. \quad (5.2-11)$$

Εξυπηρετεί, βέβαια, να επιλεγεί το σημείο αναφοράς στο άπειρο, αλλά αυτό επιτρέπεται μόνο όταν από το άπειρο η κατανομή φορτίου μοιάζει να είναι συγκεντρωμένη σε σημείο. Πρακτικά, αυτό σημαίνει, ότι οι επιφανειακές ή γραμμικές κατανομές δεν πρέπει να εκτείνονται μέχρι το άπειρο, ή τουλάχιστο να φθάνουν στο άπειρο με επαρκώς φθίνουσα τιμή, ώστε το συνολικό φορτίο τους, το ολοκλήρωμα $\int \rho dS$ ή $\int \lambda dl$, να έχει πεπερασμένη τιμή, και αντίστοιχα για τις χωρικές πυκνότητες, αν φθάνουν μέχρι το άπειρο, η τιμή τους να μηδενίζεται επαρκώς γρήγορα, ώστε να είναι $\int \rho dV \neq \infty$.

Αντίθετα, η θέση ενός σημειακού φορτίου με πεπερασμένη τιμή δεν είναι αποδεκτή ως σημείο αναφοράς, επειδή τότε ο όρος $1/R_0$ αποκλίνει. Επίσης, όπως θα φανεί σε λίγο, δεν είναι αποδεκτό, το σημείο αναφοράς να βρίσκεται σε φορτισμένη γραμμή (σε θέσεις όπου το λ έχει πεπερασμένη τιμή), επειδή και τότε εμφανίζεται αποκλίνων όρος, με απειρισμό της μορφής $\ln R_0$.

Διατάξεις αμετάβλητες σε στροφή: Στροφή τέτοιων διατάξεων γύρω από τον άξονα συμμετρίας (που λαμβάνεται ως ο άξονας z) δεν αλλοιώνει την κατανομή των φορτίων, π.χ. αν τα φορτία περιγράφονται από χωρική πυκνότητα, είναι $\partial\rho/\partial\varphi = 0$, οπότε αναμένεται να είναι και $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$. Όμως, σε τέτοιες διατάξεις, στο ολοκλήρωμα (5.2-9 ή 11) ο στοιχειώδης όγκος πρέπει να γραφεί ως $dV' = r_T' dr_T' dz' d\varphi'$ (και όχι ως $2\pi r_T' dr_T' dz'$, όπως είναι προτιμότερο κατά την εφαρμογή της ολοκληρωτικής μορφής του νόμου του *Gauss*, βλ. παράγρ. 2.2.1 στο Μέρος Α), επειδή η ολοκληρωτέα παράσταση περιέχει και τον όρο $1/R$, που εξαρτάται από τη θέση $\mathbf{r}' = (r_T', \varphi', z')$, δηλαδή και από τη γωνία φ' (ενώ στο νόμο του *Gauss* ολοκληρώνεται μόνο το φορτίο, $\int dQ = \int \rho dV$, που επιτρέπει όταν είναι $\partial\rho/\partial\varphi = 0$ να ληφθεί $dV = 2\pi r_T' dr_T' dz$).

Ο όρος $1/R$ εξαρτάται, επίσης, από τη θέση $\mathbf{r} = (r_T, \varphi, z)$. Η πρώτη εντύπωση που σχηματίζεται είναι πως η γωνία φ , η οποία ως προς την ολοκλήρωση είναι παράμετρος (επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τις τονισμένες μεταβλητές), θα εμφανισθεί και στην έκφραση για το $\Phi(\mathbf{r})$, σε αντίθεση με την αναμενόμενη ανεξαρτησία, $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$, λόγω της συμμετρίας. Στην πραγματικότητα το δυναμικό δεν εξαρτάται από τη γωνία φ , όπως άλλωστε αναμένεται. Αυτό φαίνεται αν στην έκφραση (5.2-8) για την απόσταση R σε κυλινδρικές ή σε σφαιρικές συντεταγμένες γίνει η αλλαγή μεταβλητής $\varphi' = \varphi + \xi$. Η αλλαγή μεταβλητής δεν επηρεάζει την έκφραση για το φορτίο, η οποία είναι ανεξάρτητη από τη γωνία. Ως προς την περιοχή και τα όρια ολοκλήρωσης, η αρχική περιοχή $0 < \varphi' < 2\pi$ μετασχηματίζεται στην $-\varphi < \xi < 2\pi - \varphi$, που όμως είναι ακριβώς ισοδύναμη με την περιοχή $0 < \xi < 2\pi$, επειδή το μόνο που χρειάζεται είναι η ολοκλήρωση να καλύψει μια ολόκληρη περιφέρεια κύκλου και είναι αδιάφορο, ποια είναι η αφετηρία. Το αποτέλεσμα, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, υποθέτοντας μόνο χωρική πυκνότητα ρ , και με το σημείο αναφοράς στο άπειρο, είναι:

$$\begin{aligned} \Phi(r_T, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r_T', z')}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} r_T' dr_T' dz' d\varphi' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\rho(r_T', z') r_T' dr_T' dz' \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\left[r_T^2 + r_T'^2 + (z - z')^2 - 2r_T r_T' \cos \xi \right]^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.2-12a)$$

Παρόμοια διαδικασία δίνει τις εκφράσεις για το δυναμικό, όταν η κατανομή ηλεκτρικού φορτίου περιγράφεται από επιφανειακή ή γραμμική πυκνότητα ανεξάρτητη από τη γωνία φ . Ας σημειωθεί, μολονότι είναι προφανές, ότι δεν αρκεί να είναι $\partial\sigma/\partial\varphi = 0$ και $\partial\lambda/\partial\varphi = 0$, αλλά πρέπει επιπρόσθετα και η επιφάνεια με το σ ή η γραμμή με το λ να έχουν σχήμα ανεξάρτητο από τη γωνία φ . Τέτοια σχήματα, για το λ είναι μόνο οι κυκλικοί βρόχοι με r_T και z σταθερά,

ενώ για το σ είναι μόνο οι επιφάνειες που σχηματίζονται από τέτοιους κυκλικούς βρόχους, όπως είναι οι κυλινδρικές, κωνικές, τοροειδείς και δακτυλιοειδείς επιφάνειες. Οι εκφράσεις για το δυναμικό που παράγεται από σ και λ , καταναμεμένα με $\partial/\partial\varphi = 0$, είναι:

$$\begin{aligned}\Phi(r_T, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sigma(r'_T, z'(r'_T)) r'_T \sqrt{1 + \left(\frac{dz'}{dr'_T}\right)^2} dr'_T \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\left[r_T^2 + r_T'^2 + (z - z')^2 - 2r_T r'_T \cos \xi\right]^{1/2}}, \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sigma(z', r'_T(z')) r'_T \sqrt{1 + \left(\frac{dr'_T}{dz'}\right)^2} dz' \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\left[r_T^2 + r_T'^2 + (z - z')^2 - 2r_T r'_T \cos \xi\right]^{1/2}}, \\ \Phi(r_T, z) &= \frac{\lambda_0 r'_T}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\left[r_T^2 + r_T'^2 + (z - z')^2 - 2r_T r'_T \cos \xi\right]^{1/2}}.\end{aligned}\quad (5.2-12\beta, \gamma)$$

Η τελευταία σχέση, αυτή με το γραμμικό φορτίο, αναγνωρίζεται εύκολα: Με $\partial/\partial\varphi = 0$, η γραμμική πυκνότητα είναι σταθερή, $\lambda = \lambda_0$, το φορτίο εκτείνεται σε περιφέρεια κύκλου με σταθερά $r_T \rightarrow r'_T$ και $z \rightarrow z'$, και είναι $dQ' = \lambda_0 r'_T d\xi$ (με $d\varphi' \rightarrow d\xi$). Στην πρώτη σχέση τώρα, η πυκνότητα σ , εν γένει μία συνάρτηση των μεταβλητών που προσδιορίζουν τη θέση στην επιφάνεια, είναι ανεξάρτητη από τη γωνία $\varphi \rightarrow \varphi'$, και ως μοναδική μεταβλητή, από την οποία εξαρτάται, μπορεί να ληφθεί (σε κυλινδρικές συντεταγμένες) είτε η ακτίνα $r_T \rightarrow r'_T$, είτε το υψόμετρο $z \rightarrow z'$, ενώ οι τιμές της τρίτης μεταβλητής καθορίζονται από τις σχέσεις $z'(r'_T)$ ή $r'_T(z')$ που περιγράφουν, σε κάθε φ' , το σχήμα της επιφάνειας. Το στοιχειώδες εμβαδόν στην επιφάνεια είναι ίσο με $(r'_T d\xi) dl'$, όπου για το στοιχειώδες μήκος του τόξου (σε ημι-επίπεδο $\varphi = \text{σταθ.}$) είναι $dl'^2 = dr_T'^2 + dz'^2$, με αποτέλεσμα τις δύο εναλλακτικές εκφράσεις στη σχέση (5.2-12β).

Σε όλες τις σχέσεις (5.2-12), η εσωτερική ολοκλήρωση ως προς ξ δίνει αποτέλεσμα εξαρτώμενο από τα $\{r'_T, z'\}$, που απορροφάται από τα όρια κατά την εξωτερική ολοκλήρωση, καθώς και από τα $\{r_T, z\}$, που δίνει την εξάρτηση του Φ από αυτά, αλλά όχι από το φ .

[Το ολοκλήρωμα ως προς ξ δεν είναι δυνατόν να εκφρασθεί με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων. Εισάγοντας τις ποσότητες $R_{\max}^2(r_T, z, r'_T, z') = (r_T + r'_T)^2 + (z - z')^2$ ($= R^2|_{\xi=\pi}$) και $m(r_T, z, r'_T, z') = 4r_T r'_T / R_{\max}^2$ (< 1) και την αλλαγή μεταβλητής $\xi = \pi - 2\theta$, το ολοκλήρωμα εκφράζεται με τη βοήθεια του «πλήρους ελλειπτικού ολοκληρώματος α' είδους», $K(m)$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\left[r_T^2 + r_T'^2 + (z - z')^2 - 2r_T r'_T \cos \xi\right]^{1/2}} = \frac{4}{R_{\max}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\left[1 - m \sin^2 \theta\right]^{1/2}} \doteq \frac{4}{R_{\max}} K(m).$$

Πάντως, η διατύπωση του αποτελέσματος με κλειστή μορφή προσφέρει μόνο αισθητική, ίσως, ικανοποίηση. Το ουσιαστικό όφελος είναι περιορισμένο, επειδή ακολουθούν, εκτός των άλλων, οι ολοκληρώσεις ως προς r_T' ή/και z' , οι οποίες κατά κανόνα θα γίνουν αριθμητικά.]

Διατάξεις αμετάβλητες σε μετατόπιση: Η μετατόπιση τέτοιων διατάξεων κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής (όπως του άξονα z) δεν αλλοιώνει την κατανομή των φορτίων, για παράδειγμα, αν τα φορτία περιγράφονται από χωρική πυκνότητα, είναι $\partial\rho/\partial z = 0$. Συνεπώς, αναμένεται να είναι και $\partial\Phi/\partial z = 0$. Φυσικά, εκτός των άλλων, αυτό απαιτεί η διάταξη να έχει άπειρο μήκος. Πάλι, όπως και στην περίπτωση διατάξεων με $\partial/\partial\phi = 0$, η ολοκληρωτέα παράσταση περιέχει και τον όρο $1/R$, που εξαρτάται από τη θέση $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}'_{\perp}, z')$, δηλαδή που εξαρτάται και από το z' . Γι' αυτό, στο ολοκλήρωμα (5.2-9 ή 11) ο στοιχειώδης όγκος πρέπει να γραφεί ως $dV' = dS' dz'$ (με $dS' = r_T' dr_T' d\phi'$ ή $dS' = dx' dy'$), και όχι ως LdS' .

Σε τέτοιες διατάξεις, μπορεί να προταχθεί η ολοκλήρωση ως προς z' , δηλαδή να υπολογισθεί πρώτα το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{R} \approx \int_{-L}^{+L} \frac{dz'}{\left[R_{\perp}^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}},$$

με $R_{\perp}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 = r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\phi - \phi')$, ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων, και με $L = \text{πεπερασμένο}$ (αλλά με $L \gg r_T, z$) ώστε να μπορεί να ληφθεί το σημείο αναφοράς στο άπειρο. Το ολοκλήρωμα μπορεί να εκφρασθεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις: Με την αλλαγή μεταβλητής $z' = z + R_{\perp}\zeta$, με $dz' = R_{\perp}d\zeta$, το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\int (1 + \zeta^2)^{-1/2} d\zeta = \ln|\zeta + (1 + \zeta^2)^{1/2}|$ και η ολοκλήρωση αναφέρεται στο διάστημα $-(L + z)/R_{\perp} < \zeta < (L - z)/R_{\perp}$. Με $L \gg r_T, z$, στο άνω όριο είναι $\zeta \approx L/R_{\perp} \gg 1$, οπότε εκεί είναι $\ln|\zeta + (1 + \zeta^2)^{1/2}| \approx \ln(2L/R_{\perp})$. Για το κάτω όριο, όμως, είναι $\zeta \approx -L/R_{\perp} < 0$ και συνεπώς $\sqrt{\zeta^2} = -\zeta$, και τώρα είναι $\zeta + (1 + \zeta^2)^{1/2} = \zeta + (-\zeta)(1 + \zeta^{-2})^{1/2} \approx \zeta + (-\zeta)(1 + 1/2\zeta^{-2}) = 1/(-2\zeta)$ και $\ln|\zeta + (1 + \zeta^2)^{1/2}| \approx \ln(R_{\perp}/2L)$. Συνολικά, το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι ίσο με τη διαφορά των δύο λογαριθμικών ποσοτήτων:

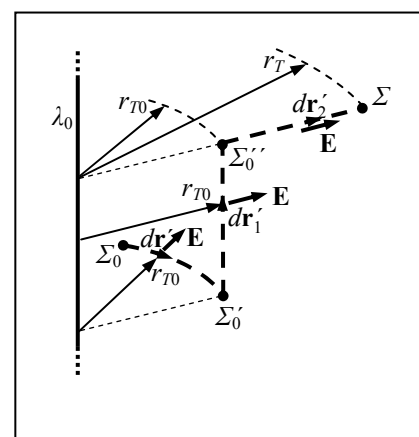
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{R} \approx \int_{-L}^{+L} \frac{dz'}{\left[R_{\perp}^2 + (z - z')^2\right]^{1/2}} \approx \ln\left(\frac{2L}{R_{\perp}}\right) - \ln\left(\frac{R_{\perp}}{2L}\right) = -2\ln\left(\frac{R_{\perp}}{2L}\right). \quad (5.2-13)$$

Στο αποτέλεσμα έχει εξαλειφθεί η εξάρτηση από το z , η οποία αρχικά περιεχόταν στο R , προβάλλοντας, όπως είναι αναμενόμενο, ότι το δυναμικό που θα προσδιορισθεί μετά από τις ολοκληρώσεις ως προς π.χ. x' και y' δεν εξαρτάται από το z . Η διαδικασία αυτή (όταν $\partial/\partial z = 0$) οδηγεί στο διδιάστατο ολοκλήρωμα επαλληλίας (5.2-17) που ακολουθεί.

Συμπληρωματικά σχόλια: Το ολοκλήρωμα επαλληλίας (5.2-9) χρησιμοποιείται στα παραδ. 5.2-3 έως 5.2-10. Ήδη έχουν εκτεθεί μερικά βασικά σχόλια αμέσως μετά την εξίσωση αυτή, ενώ οι περιορισμοί στην επιλογή του σημείου αναφοράς έχουν παρουσιασθεί με τη ευκαιρία της σχέσης (5.2-11), η οποία αναφέρεται στην ειδική, αλλά εύχρηστη επιλογή $\mathbf{r}_0 = \infty$ για το σημείο αναφοράς. Επιπρόσθετα, ας σημειωθούν τα ακόλουθα:

- (α) Όταν η διάταξη διέπεται από συμμετρία, όπως $\partial/\partial z = 0$ ή $\partial/\partial \varphi = 0$, τα (z, z') ή (φ, φ') δεν εμφανίζονται στο dQ' , ούτε στα όρια ολοκλήρωσης, αλλά μόνο στη σχετική απόσταση R , και μάλιστα ως $\zeta = (z' - z)/R_{\perp}$, ή, απλούστερα, ως $\zeta = z' - z$, στο διάστημα $-\infty < \zeta < \infty$, ή ως $\xi = \varphi' - \varphi$ στο διάστημα $0 < \xi < 2\pi$ ή οποιοδήποτε διάστημα με πλάτος 2π .
- (β) Οι ενδεχόμενες συμμετρίες της διάταξης δεν μεταφέρονται και στην ολοκληρωτέα παράσταση, επειδή εμφανίζεται και η σχετική απόσταση R , ανεξάρτητα από το αν, τελικά, στο αποτέλεσμα για το δυναμικό Φ , η ανεξαρτησία από το z ή το φ ανακτάται με τις αλλαγές μεταβλητής που αναφέρονται στο προηγούμενο σχόλιο (α). Γι' αυτό, τα στοιχεία dV' και dS' πρέπει να διατυπωθούν με διαφορικά ως προς όλες τις διαστάσεις. Έτσι, ακόμα και αν είναι $\partial/\partial \varphi = 0$, πρέπει να ληφθεί $dV' = r_T' dr_T' dz' d\varphi'$ (και όχι $2\pi r_T' dr_T' dz'$), επειδή η σχετική απόσταση R εξαρτάται και από τη γωνία φ' .
- (γ) Όλες οι σχέσεις της παρούσας ενότητας έχουν εξαχθεί με την παραδοχή ότι παντού είναι ϵ_0 , συνεπώς κατ' αρχήν οι σχέσεις αυτές ισχύουν μόνο σε κενό χώρο. Αν ο χώρος έχει $\epsilon \neq \epsilon_0$, τότε με αντίστοιχη πορεία φαίνεται πως πάλι μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ίδιες σχέσεις (με την αντικατάσταση $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$), αλλά μόνο όταν όλος ο χώρος, μέχρι το άπειρο, έχει την ίδια τιμή ϵ για την επιτρεπτότητα. Με άλλα λόγια, η απλή αντικατάσταση $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ δεν είναι αποδεκτή, όταν είναι $\nabla \epsilon \neq 0$, αλλά ούτε και όταν η επιτρεπτότητα είναι τμηματικά σταθερή.)

Δυναμικό γραμμικού φορτίου λ_0 (σταθερού, σε ευθεία γραμμή με άπειρο μήκος: Θεωρώντας ότι το γραμμικό φορτίο βρίσκεται στον άξονα $r_T = 0$ (στον άξονα z), σε χώρο όπου είναι παντού ϵ_0 , από το νόμο του Gauss είναι γνωστό ότι $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_T \lambda_0 / 2\pi \epsilon_0 r_T$. Για την ολοκλήρωση από το σημείο αναφοράς Σ_0 (στη θέση \mathbf{r}_0) μέχρι το σημείο Σ (στη θέση \mathbf{r}), εξυπηρετεί η διαδρομή μέσω των σημείων Σ'_0 και Σ'_0 , βλ. Σχήμα 5.2-4. Στα τμήματα $\Sigma_0 \Sigma'_0$ και $\Sigma'_0 \Sigma'_0$, τα στοιχειώδη μήκη, αντίστοιχα ίσα με $d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_{\varphi} r_{T0} d\varphi'$ και με



Σχήμα 5.2-4

$d\mathbf{r}'_1 = \mathbf{i}_z dz'$, είναι κάθετα προς το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , οπότε τα τμήματα αυτά έχουν μηδενική συνεισφορά στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'$. Αντίθετα, στο τελευταίο τμήμα $\Sigma'_0 \Sigma'$ είναι $d\mathbf{r}'_2 = \mathbf{i}_T dr'_T$, συγγραμμικό με το ηλεκτρικό πεδίο. Το τμήμα αυτό συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα κατά $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}' = [\lambda_0/(2\pi\epsilon_0)](dr'_T/r'_T)$. Συνολικά, στη διαδρομή $\Sigma_0 \Sigma'_0 \Sigma'_0 \Sigma'$ ο προσδιορισμός του δυναμικού ακολουθεί την πορεία:

$$\Phi_j(\mathbf{r}) = - \int_{r_0}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = - \left[\int_{\Sigma_0}^{\Sigma'_0} + \int_{\Sigma'_0}^{\Sigma'_0} + \int_{\Sigma'_0}^{\Sigma} \right] (\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}') = 0 + 0 - \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_0}^{r_T} \frac{dr'_T}{r'_T},$$

και η ολοκλήρωση δίνει **το δυναμικό από σταθερό γραμμικό φορτίο λ_j στον άξονα z (με άπειρο μήκος)**, σε χώρο με ϵ_0 παντού, που είναι ίσο με:

$$\Phi_j(\mathbf{r}_\perp) = - \frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_T}{r_{T0}} \right), \quad (5.2-14)$$

όπου r_{T0} είναι η απόσταση του σημείου αναφοράς από τον άξονα (δηλαδή από το γραμμικό φορτίο). Τρία αρχικά σχόλια για τη σχέση αυτή:

- Ενώ μαθηματικά οι γραφές $\ln(r_T/r_{T0})$ και $(\ln r_T - \ln r_{T0})$ δείχνουν να είναι ισοδύναμες, στις εφαρμογές αποδεκτή είναι μόνο η πρώτη γραφή, όπως έχει χρησιμοποιηθεί και στη σχέση (5.2-14), επειδή οι ποσότητες r_T και r_{T0} δεν είναι αδιάστατες και δεν έχουν νόημα ως ορίσματα μαθηματικών συναρτήσεων, εδώ του λογαρίθμου. Αντίθετα, το πηλίκο r_T/r_{T0} , ως πηλίκο ομοδιάστατων ποσοτήτων, είναι αδιάστατο.
- Το σημείο αναφοράς μπορεί να ληφθεί σε οποιαδήποτε ακτινική θέση r_{T0} , αλλά πρέπει να αποκλεισθεί τόσο το άπειρο, όσο και το μηδέν, επειδή και με τις δύο αυτές επιλογές προκύπτει αποτέλεσμα που αποκλίνει, $\Phi = \pm\infty$ αντίστοιχα, για κάθε θέση r_T .
- Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τη θέση z , όπως άλλωστε αναμένεται για διάταξη με $\partial/\partial z = 0$. Αυτό υποδηλώνεται από τη χρήση του συμβόλου $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ ή $\mathbf{r}_\perp = (r_T, \varphi)$ για τη θέση. Φυσικά, εδώ το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο και από τη γωνία φ .

[Η σχέση (5.2-14) μπορεί να προκύψει και από το ολοκλήρωμα επαλληλίας (5.2-9), που με $dQ' = \lambda_j dz'$ είναι $\Phi = (\lambda_j/4\pi\epsilon_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dz' (1/R - 1/R_0)$. Με βάση τη σχέση (5.2-13), αλλά με $R_\perp \rightarrow r_T$ (επειδή το φορτίο είναι στον άξονα, συνεπώς $r'_T = 0$), είναι $-\int_{-L}^{+L} dz'/R = -2\ln(r_T/2L)$ και αντίστοιχα $-\int_{-L}^{+L} dz'/R_0 = -2\ln(r_{T0}/2L)$, οπότε το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι ίσο με $\Phi = (\lambda_j/4\pi\epsilon_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dz' (1/R - 1/R_0) = -(\lambda_j/2\pi\epsilon_0) [\ln(r_T/2L) - \ln(r_{T0}/2L)]|_{L \rightarrow -\infty} = -(\lambda_j/2\pi\epsilon_0) \ln(r_T/r_{T0})$.]

Το δυναμικό από γραμμικό φορτίο λ_j (σταθερό, με άπειρο μήκος) σε τυχαία θέση προσδιορίζεται απλά με μετατόπιση της αρχής των αξόνων, ώστε ο νέος άξονας να συμπίπτει με το φορτισμένο νήμα. Το αποτέλεσμα προκύπτει από τη σχέση (5.2-14) με την εισαγωγή των σχετικών αποστάσεων (κάθετα προς τον άξονα), R_{\perp} και $R_{\perp 0}$, του σημείου παρατήρησης και του σημείου αναφοράς σε σχέση με τη θέση (r_T', φ') του γραμμικού φορτίου. Το αποτέλεσμα είναι, ότι το δυναμικό από σταθερό γραμμικό φορτίο λ_j (με άπειρο μήκος) στην τυχαία θέση (x', y') ή (r_T', φ') , σε χώρο όπου είναι παντού ϵ_0 , είναι ίσο με:

$$\Phi_j(\mathbf{r}_{\perp}) = -\frac{\lambda_j}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_{\perp}}{R_{\perp 0}}\right), \quad (5.2-15)$$

όπου R_{\perp} και $R_{\perp 0}$ είναι αντίστοιχα οι προβολές σε επίπεδο $z = \text{σταθ.}$ των αποστάσεων του σημείου υπολογισμού του δυναμικού και του σημείου αναφοράς από τη θέση του γραμμικού φορτίου λ_j . Οι αποστάσεις αυτές δίδονται απλά από τις σχέσεις (5.2-8), αλλά χωρίς τον όρο $(z - z')^2$. Έτσι, η απόσταση R_{\perp} (και παρόμοια η $R_{\perp 0}$) είναι ίση με:

$$\begin{aligned} R_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}'_{\perp}) &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\ &= \sqrt{r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi')}. \end{aligned} \quad (5.2-16)$$

Συνολικά, οι συμβολισμοί είναι το διδιάστατο ανάλογο των τριδιάστατων συμβολισμών. Με βάση και το Σχήμα 5.2-5, όπου σημειώνονται μόνο οι πολικές συντεταγμένες, είναι:

$\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$ ή (r_T, φ) : Θέση προσδιορισμού δυναμικού,

$\mathbf{r}'_{\perp} = (x', y')$ ή (r_T', φ') : Θέση με το φορτίο λ_j ,

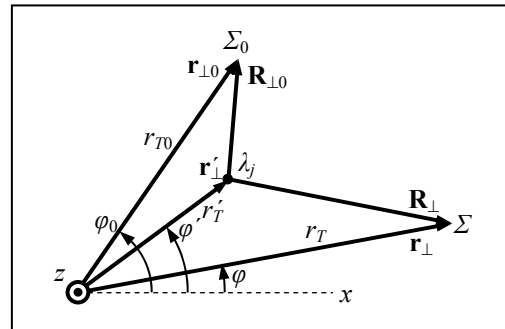
$\mathbf{r}_{\perp 0} = (x_0, y_0)$ ή (r_{T0}, φ_0) : Θέση σημ. αναφοράς,

$\mathbf{R}_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}$: Θέση προσδιορισμού δυναμικού, σε σχέση με θέση φορτίου λ_j ,

$\mathbf{R}_{\perp 0} = \mathbf{r}_{\perp 0} - \mathbf{r}'_{\perp}$: Θέση σημείου αναφοράς, σε σχέση με θέση φορτίου λ_j ,

$R_{\perp} = |\mathbf{R}_{\perp}| = |\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{r}'_{\perp}|$: Απόσταση Σ από λ_j ,

$R_{\perp 0} = |\mathbf{R}_{\perp 0}| = |\mathbf{r}_{\perp 0} - \mathbf{r}'_{\perp}|$: Απόσταση Σ_0 από λ_j .



Σχήμα 5.2-5

Δυναμικό από τυχαία διδιάστατη κατανομή φορτίων: Χωρικές ή επιφανειακές πυκνότητες, για τις οποίες είναι $\partial/\partial z = 0$, μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από άπειρο πλήθος απειροστών γραμμικών φορτίων $d\lambda$. Συγκεκριμένα:

- Κατανομή $\rho(\mathbf{r})$ περιγράφεται από $d\lambda = \rho dx dy$ ή $d\lambda = \rho r_T dr_T d\varphi$,

▪ Κατανομή $\sigma(\mathbf{r}_s)$ περιγράφεται από $d\lambda = \sigma d\ell$, με $d\ell^2 = dx^2 + dy^2$ ή $d\ell^2 = dr_T^2 + r_T^2 d\phi^2$, Μεταγράφοντας $d\lambda \rightarrow d\lambda'$, ώστε να διατηρηθεί η σύμβαση πως οι τονισμένες συντεταγμένες προσδιορίζουν τη θέση των φορτίων, το συνολικό δυναμικό, από όλα τα $d\lambda'$, εκφράζεται από το **διδιάστατο ολοκλήρωμα επαλληλίας** (με την υπόθεση ότι παντού είναι ϵ_0):

$$\Phi(\mathbf{r}_\perp) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int d\lambda' \ln\left(\frac{R_\perp}{R_{\perp 0}}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\lambda' \ln\left(\frac{R_\perp^2}{R_{\perp 0}^2}\right). \quad (5.2-17)$$

Οι συμβολισμοί είναι όπως στα προηγούμενα. Η τελευταία έκφραση συχνά διευκολύνει, επειδή οι σχετικές αποστάσεις R_\perp και $R_{\perp 0}$ προσδιορίζονται, όπως στη σχέση (5.2-16), μέσω των τετραγώνων τους. Η διαδικασία για την εφαρμογή της σχέσης αυτής, όπως εφαρμόζεται και στα **παραδ. 5.2-11** έως **5.2-13**, είναι όπως και στην τριδιάστατη περίπτωση: Ολοκλήρωση γίνεται ως προς τις τονισμένες μεταβλητές, οι οποίες προσδιορίζουν την κατανομή των φορτίων, με όρια ολοκλήρωσης τα όρια της περιοχής με τα $d\lambda'$, ενώ η εξάρτηση του δυναμικού από τις άτονες συντεταγμένες προέρχεται από την εξάρτηση του R_\perp από τα (x, y) ή (r_T, ϕ) .

Δυναμικό επιφανειακού φορτίου σ_j (σταθερού, σε επίπεδο με άπειρη έκταση): Θεωρώντας (σε χώρο με ϵ_0 παντού) ότι το σ_j βρίσκεται στο επίπεδο $z = z'_j$, από το νόμο του *Gauss* προκύπτει αμέσως ότι $\mathbf{E}(z < z'_j) = \mathbf{i}_z E_{-\infty}$ και $\mathbf{E}(z > z'_j) = \mathbf{i}_z (E_{-\infty} + \sigma_j/\epsilon_0)$, όπου η σταθερά $E_{-\infty}$ δίνει την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στη θέση $z = -\infty$ και εξαρτάται από την κατανομή των φορτίων στο άπειρο. Για παράδειγμα, αν τα φορτία είναι τοποθετημένα συμμετρικά στις θέσεις $z = \pm\infty$ του απείρου, τότε είναι $E_{-\infty} = -\sigma_j/2\epsilon_0$. Για να προσδιορισθεί το δυναμικό από το ολοκλήρωμα $\Phi = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}'$, οι αλγεβρικές πράξεις είναι απλές, αλλά διαφοροποιούνται ελαφρώς, ανάλογα με τη θέση z_0 του σημείου αναφοράς σε σχέση με τη θέση z'_j του επιφανειακού φορτίου. Το αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί ενιαία και για τα δύο ενδεχόμενα $z_0 < z'_j$ και $z_0 > z'_j$, ως:

$$\Phi(z) = -\left(E_{-\infty} + \frac{\sigma_j}{2\epsilon_0}\right)(z - z_0) - \frac{\sigma_j}{2\epsilon_0} (|z - z'_j| - |z_0 - z'_j|). \quad (5.2-18)$$

Είναι φανερό ότι η επιλογή $z_0 = z'_j$ (σημείο αναφοράς στο επίπεδο του σ_j) είναι αποδεκτή και μάλιστα διευκολύνει, ενώ αντίθετα η επιλογή $z_0 = \pm\infty$ δεν είναι δεκτή. Η έκφραση (5.2-18) μπορεί να αποτελέσει βάση για ολοκλήρωμα επαλληλίας σε μονοδιάστατες κατανομές. Τέτοιες διατάξεις εξετάζονται, όμως, πιο εύκολα με ολοκλήρωση της εξίσωσης *Laplace*, επειδή, όταν είναι $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, όπως εδώ, η εξίσωση *Poisson* απλοποιείται σε μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση, $\nabla^2 \Phi = (d^2/dz^2)\Phi$.

Παράδειγμα 5.2-3: Στο εσωτερικό του ημιάπειρου πρίσματος $|x| < a$, $|y| < b$, $z > 0$ υπάρχει χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, ίση με $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \exp(-z/h)$. Ο χώρος έχει παντού επιτρεπτότητα ίση με ϵ_0 . Ζητείται να επιλεγεί κατάλληλη θέση του σημείου αναφοράς και να προσδιορισθεί παντού στον χώρο το δυναμικό Φ (με τη μορφή ολοκληρώματος, κατάλληλα διατυπωμένου, για αριθμητική π.χ. ολοκλήρωση).

Επίλυση: Από το άπειρο τα φορτία φαίνονται συγκεντρωμένα κοντά στην αρχή των αξόνων, συνεπώς μπορεί να ληφθεί το σημείο αναφοράς στο άπειρο, οπότε το δυναμικό μπορεί να προσδιορισθεί από το ολοκλήρωμα $\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\epsilon_0) \int dQ'/R$. Τα φορτία βρίσκονται στις θέσεις $z' > 0$, $-a < x' < a$ και $-b < y' < b$ (που προσδιορίζουν την περιοχή ολοκλήρωσης), και το στοιχειώδες φορτίο είναι $dQ' = \rho(\mathbf{r}')dV' = \rho_0 \exp(-z'/h) dx' dy' dz'$, ενώ για τη σχετική απόσταση είναι $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$. Εισάγοντας τις ποσότητες αυτές στο ολοκλήρωμα επαλληλίας, προκύπτει η ζητούμενη παράσταση:

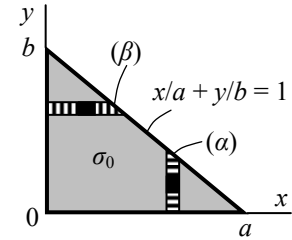
$$\Phi(x, y, z) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a dx' \int_{-b}^b dy' \int_0^\infty dz' \frac{\exp(-z'/h)}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

Σχόλια:

- Το αποτέλεσμα είναι καλά διατυπωμένο και προβάλλει με σαφήνεια κάθε απαιτούμενη πληροφορία για παραπέρα επεξεργασία (ουσιαστικά, αριθμητική ολοκλήρωση): Ποια είναι η ολοκληρωτέα παράσταση, ποιες είναι οι μεταβλητές ολοκλήρωσης και ποια είναι τα όρια ολοκλήρωσης που αντιστοιχούν σε κάθε μεταβλητή. Αντίθετα, γραφή όπως η $\int_0^\infty \int_{-b}^b \int_{-a}^a dx' dy' dz' \exp(\dots)/R$, μολονότι είναι σωστή, αφήνει κάποια αίσθηση ασάφειας.
- Το αποτέλεσμα είναι συνάρτηση των x, y, z (μέσω του R στον παρονομαστή), ενώ η εξάρτηση από τα x', y', z' στο R και στο ρ (στην εκθετική συνάρτηση) απορροφάται από την ολοκλήρωση, και το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τις τονισμένες μεταβλητές.
- Τα όρια ολοκλήρωσης (τα όρια της κατανομής φορτίου) εδώ είναι σταθερά, συνεπώς η σειρά ολοκλήρωσης είναι αδιάφορη.
- Το αποτέλεσμα $\Phi(\mathbf{r})$ δίνει το δυναμικό παντού: Τόσο μέσα στο πρίσμα, όπου υπάρχουν τα φορτία, όσο και εκεί που δεν υπάρχουν, δηλαδή έξω από το πρίσμα.
- Στη συγκεκριμένη διάταξη είναι δυνατόν μία από τις τρεις ολοκληρώσεις (ως προς x' ή y') να προταχθεί και να γίνει αναλυτικά [χρησιμοποιώντας τη σχέση $\int (1+\zeta^2)^{-1/2} d\zeta = \ln |\zeta + (1+\zeta^2)^{1/2}|$]. Αυτή η διαδικασία, όμως, εδώ είναι τελείως εκτός θέματος.

Παράδειγμα 5.2-4: Στο ορθογώνιο τρίγωνο, με μήκη πλευρών a και b στο επίπεδο $z = 0$, υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, ίση με $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_0$. Ζητείται να επιλεγεί κατάλληλη θέση του σημείου αναφοράς και να προσδιορισθεί παντού (σε χώρο με ϵ_0) το δυναμικό Φ , με τη μορφή καλά προσδιορισμένου ολοκληρώματος.

Επίλυση: Τα φορτία περιορίζονται σε πεπερασμένες περιοχές του χώρου, συνεπώς το σημείο αναφοράς μπορεί να ληφθεί στο άπειρο, $\mathbf{r}_0 = \infty$, που διευκολύνει, επειδή $R_0^{-1} = 0$ και το ολοκλήρωμα επαλληλίας απλουστεύεται σε $\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\epsilon_0)[dQ'/R$. Είναι $dQ' = \sigma(\mathbf{r}')dS' = \sigma_0 dx' dy'$. Ανάλογα με τη σειρά ολοκλήρωσης, η περιοχή με τα



φορτία μπορεί να ληφθεί (α) ως $0 < y' < b(1 - x'/a)$, $0 < x' < a$, ή (β) ως $0 < x' < a(1 - y'/b)$, $0 < y' < b$, με πρώτα αναφερόμενα τα όρια της εσωτερικής ολοκλήρωσης, και σε κάθε περίπτωση με $z' = 0$. Τέλος, για τη σχετική απόσταση είναι $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2$, επειδή $z' = 0$. Συνεπώς, το δυναμικό μπορεί να προσδιορισθεί εναλλακτικά από τις σχέσεις:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dx' \int_0^{b(1-x'/a)} dy' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}},$$

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^b dy' \int_0^{a(1-y'/b)} dx' \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}}.$$

Οι δύο εκφράσεις για το Φ είναι τελείως ισοδύναμες. Η διαφορά έγκειται μόνο στη σειρά της ολοκλήρωσης: Εσωτερική (πρώτη) είναι εκείνη της οποίας τα όρια είναι μεταβλητά.

Παράδειγμα 5.2-5: Στον δίσκο $r_T < a$ του επιπέδου $z = 0$ υπάρχει επιφανειακή κατανομή φορτίου με πυκνότητα $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_0(r_T/a)^2 \sin \varphi$. Σε χώρο με ϵ_0 ζητείται το δυναμικό Φ , με τη μορφή καλά διατυπωμένου ολοκληρώματος, με κατάλληλη επιλογή της αναφοράς.

Επίλυση: Πάλι, το σημείο αναφοράς μπορεί να επιλεγεί στο άπειρο, για τους ίδιους λόγους και με τις ίδιες συνέπειες, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Φυσιολογική επιλογή είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες, στις οποίες το στοιχειώδες φορτίο είναι $dQ' = \sigma(\mathbf{r}')dS' = [\sigma_0(r_T'/a)^2 \sin \varphi'] [r_T' dr_T' d\varphi']$, στην περιοχή $0 < r_T' < a$, $0 < \varphi' < 2\pi$, με $z' = 0$, συνεπώς $R^2 = r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi') + z^2$. Εισάγοντας τις ποσότητες αυτές στο ολοκλήρωμα επαλληλίας, όπου τώρα η σειρά ολοκλήρωσης είναι αδιάφορη, προκύπτει το δυναμικό:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a dr_T' \frac{r_T'^3 \sin \varphi'}{\sqrt{r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi') + z^2}}.$$

Παράδειγμα 5.2-6: Στη σφαιρική επιφάνεια $r = a$ υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου, ίση με $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_0 \sin \theta$. Ζητείται (σε χώρο με ϵ_0) το δυναμικό Φ , με τη μορφή ενός καλά διατυπωμένου ολοκληρώματος, με κατάλληλη επιλογή του σημείου αναφοράς.

Επίλυση: Τα φορτία είναι συγκεντρωμένα στον πεπερασμένο χώρο, οπότε είναι αποδεκτή και προτιμάται πάλι η επιλογή της αναφοράς στο άπειρο ($\mathbf{r}_0 = \infty$ και $1/R_0 = 0$). Σε σφαιρικές συντεταγμένες, τώρα, είναι $dQ' = \sigma(\mathbf{r}')dS'$, με $\sigma(\mathbf{r}') = \sigma_0 \sin \theta'$ και $dS' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\varphi'$, επειδή τα φορτία βρίσκονται στην ακτίνα $r' = a$. Οι τονισμένες μεταβλητές εκτείνονται στην περιοχή $0 < \theta' < \pi$ και $0 < \varphi' < 2\pi$ (ενώ $r' = a$, όπως προαναφέρθηκε) και για τη σχετική απόσταση είναι $R^2 = r^2 + a^2 - 2ra[\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')]$. Με αυτές τις εκφράσεις, το δυναμικό παίρνει τη μορφή:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{a^2 \sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\sin^2 \theta'}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra[\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')]}}$$

Η έκφραση για το δυναμικό Φ εξαρτάται από τη θέση \mathbf{r} , δηλαδή, τις ποσότητες $\{r, \theta, \varphi\}$, οι οποίες εμφανίζονται στην απόσταση R (στον παρονομαστή), αλλά αντιπροσωπεύουν παραμέτρους κατά την ολοκλήρωση ως προς θ' και φ' . Όμως, με βάση την κυλινδρική συμμετρία που χαρακτηρίζει τη διάταξη, αναμένεται $\partial/\partial\varphi = 0$. Η εικονική εξάρτηση από τη γωνία φ μπορεί να απαλειφεί με την αλλαγή μεταβλητής $\xi = \varphi' - \varphi$ και ολοκλήρωση στο διάστημα $-\varphi < \xi < -\varphi + 2\pi$, ή ισοδύναμα, στο $0 < \xi < 2\pi$, οπότε:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{a^2 \sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\theta' \sin^2 \theta' \int_0^{2\pi} d\xi \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra[\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \xi]}}$$

Παράδειγμα 5.2-7: Στο δακτυλίδι με ακτίνα $r_T = a$ στο επίπεδο $z = h$ υπάρχει γραμμικό φορτίο, με πυκνότητα $\lambda = \lambda_0$. Ζητείται το δυναμικό Φ (με μορφή καλά διατυπωμένου ολοκληρώματος) παντού στο χώρο (με ϵ_0), με πρόσφορη επιλογή για το σημείο αναφοράς.

Επίλυση: Πάλι η συγκεντρωση των φορτίων μακριά από το άπειρο επιτρέπει να επιλεγεί το σημείο αναφοράς στο άπειρο και να χρησιμοποιηθεί η απλή έκφραση $\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\epsilon_0) \int dQ'/R$. Τα φορτία είναι σε θέσεις με $r_T' = a$ και $z' = h$, στο διάστημα $0 < \varphi' < 2\pi$, ή, οποιοδήποτε άλλο διάστημα με πλάτος 2π . Είναι $dQ' = \lambda_0 a d\varphi'$ και $R^2 = r_T^2 + a^2 - 2r_T a \cos(\varphi - \varphi') + (z - h)^2$ και με την αλλαγή μεταβλητής $\xi = \varphi' - \varphi$, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, προκύπτει:

$$\Phi(r_T, z) = \frac{\lambda_0 a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\xi \frac{1}{\sqrt{r_T^2 + a^2 - 2r_T a \cos \xi + (z - h)^2}}$$

Παράδειγμα 5.2-8: Στην ημιευθεία $r_T = 0, z > 0$ υπάρχει σταθερή γραμμική πυκνότητα $\lambda = \lambda_0$. Ζητείται να επιλεγεί πρόσφορο σημείο αναφοράς και να προσδιορισθεί το δυναμικό Φ , σε χώρο με ϵ_0 , όπως στα προηγούμενα παραδείγματα.

Επίλυση: Τώρα, τα φορτία εκτείνονται μέχρι το άπειρο με πεπερασμένη τιμή, οπότε δεν είναι αποδεκτή η επιλογή της αναφοράς στο άπειρο. Για οποιαδήποτε αποδεκτή επιλογή είναι $1/R_0 \neq 0$ και πρέπει να χρησιμοποιηθεί η πλήρης σχέση, $\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\epsilon_0) \int dQ' (1/R - 1/R_0)$. Επειδή τα φορτία ανήκουν σε γραμμική κατανομή, η οποία βρίσκεται στο $r_T' = 0, z' > 0$, ούτε τέτοιες θέσεις είναι αποδεκτές για το σημείο αναφοράς. Για την προκείμενη κατανομή φορτίου, για τη σχετική απόσταση είναι $R^2 = r_T'^2 + (z - z')^2$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες, οπότε για την απόσταση του σημείου αναφοράς (r_{T0}, φ_0, z_0) είναι $R_0^2 = r_{T0}^2 + (z_0 - z')^2$. Έχοντας ως κριτήριο την απλούστευση του R_0 και του τελικού αποτελέσματος, η επιλογή $r_{T0} = 0$ είναι αποδεκτή, εφόσον όμως συνοδεύεται και από $z_0 = -h (< 0)$: Με την επιλογή αυτή είναι απλά $R_0 = z' + h$ (και είναι $R_0 > 0$, όπως πρέπει, αφού πρόκειται για απόσταση). Για το στοιχειώδες φορτίο είναι απλά $dQ' = \lambda_0 dz'$, και από το ολοκλήρωμα επαλληλίας προκύπτει:

$$\Phi(r_T, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dz' \left[\frac{1}{\sqrt{r_T^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{z' + h} \right].$$

Σχόλια:

- Η επιλογή του σημείου αναφοράς στον αρνητικό ημιάξονα z έγινε μόνο για λόγους απλούστευσης της τελικής έκφρασης για το δυναμικό Φ . Για οποιαδήποτε άλλη επιλογή, ο παρονομαστής του δεύτερου όρου θα ήταν $R_0 = \sqrt{r_{T0}^2 + (z_0 - z')^2}$.
- Το ολοκλήρωμα της διαφοράς, $\int dQ' (1/R - 1/R_0)$, δεν μπορεί να υποκατασταθεί από διαφορά ολοκληρωμάτων, $\int dQ'/R - \int dQ'/R_0$, επειδή, για οποιαδήποτε αποδεκτή επιλογή για το \mathbf{r}_0 , το καθένα από μόνο του αποκλίνει στο άνω όριο $z' = \infty$. Αν είναι επιθυμητό να γραφεί το ολοκλήρωμα ως διαφορά ολοκληρωμάτων, τότε πρέπει το άνω όριο να ληφθεί πεπερασμένο, $z' = L$, και στο τέλος να ληφθεί το όριο $L \rightarrow \infty$.
- Η παρούσα διάταξη είναι από τις λίγες, στις οποίες το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί με κλειστή μορφή, με χρήση μόνο βασικών υπερβατικών συναρτήσεων. Δεν είναι το κύριο ζητούμενο η εκτέλεση αλγεβρικών πράξεων. Πάντως, με το άνω όριο προσωρινά πεπερασμένο, $z' = L$, με την αλλαγή μεταβλητής $\zeta = (z' - z)/r_T$, και με το αόριστο ολοκλήρωμα $\int (1 + \zeta^2)^{-1/2} d\zeta = \ln |\zeta + (1 + \zeta^2)^{1/2}|$ στον πρώτο όρο του ολοκληρώματος, το τελικό αποτέλεσμα (σε κλειστή μορφή) γράφεται $\Phi(\mathbf{r}) = (\lambda_0/4\pi\epsilon_0) \ln \{2h / [(r_T^2 + z^2)^{1/2} - z]\}$.

Παράδειγμα 5.2-9: Στο εσωτερικό κυλίνδρου με ακτίνα a και άπειρο μήκος υπάρχει χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, ίση με $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(r_T/a)\sin^2\varphi$. Ο χώρος έχει παντού ϵ_0 . Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ , με μορφή ολοκληρώματος καλά διατυπωμένου.

Επίλυση: Επειδή τα φορτία φθάνουν μέχρι το άπειρο με πεπερασμένη τιμή, δεν είναι αποδεκτή η επιλογή του σημείου αναφοράς στο άπειρο. Κάθε άλλο σημείο είναι αποδεκτό ως αναφορά, αδιάφορο αν βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό της χωρικής πυκνότητας. Για τη σχετική απόσταση R του σημείου \mathbf{r} είναι $R^2 = r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2$ και αντίστοιχα για του σημείου αναφοράς \mathbf{r}_0 είναι $R_0^2 = r_{T0}^2 + r_T'^2 - 2r_{T0} r_T' \cos(\varphi_0 - \varphi') + (z_0 - z')^2$. Με βάση και τους συλλογισμούς του προηγούμενου παραδείγματος, επιλέγεται σημείο αναφοράς με $r_{T0} = 0$, που απλοποιεί την τελευταία έκφραση σε $R_0^2 = r_T'^2 + (z_0 - z')^2$, και μάλιστα, η θέση z_0 είναι αδιάφορη σε διάταξη με $\partial/\partial z = 0$, όπως η παρούσα. Το στοιχειώδες φορτίο είναι $dQ' = [\rho_0(r_T'/a)\sin^2\varphi'] [r_T' dr_T' d\varphi' dz']$ και με ολοκλήρωση στην περιοχή με τα φορτία, $r_T' < a$, $0 < \varphi' < 2\pi$, $-\infty < z' < +\infty$, προκύπτει η έκφραση:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^a dr_T' r_T'^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin^2\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \left[\frac{1}{\sqrt{r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_T'^2 + (z_0 - z')^2}} \right].$$

Η διάταξη είναι ανεξάρτητη από τη συντεταγμένη z , οπότε αναμένεται και για το δυναμικό να είναι $\partial\Phi/\partial z = 0$. Η απομάκρυνση της καθαρά εικονικής εξάρτησης από το z , το οποίο περιέχεται στη σχετική απόσταση R , όπως και από το z_0 , επιτυγχάνεται μέσω των αντικαταστάσεων $\zeta = z' - z$ και $\zeta = z' - z_0$ στους δύο όρους, αντίστοιχα. Οι αντικαταστάσεις δεν επηρεάζουν τα όρια (από $-\infty < z' < +\infty$ σε $-\infty < \zeta < +\infty$), οπότε προκύπτει το δυναμικό, με έκφραση που προβάλλει ότι είναι ανεξάρτητο από τη θέση z :

$$\Phi(r_T, \varphi) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^a dr_T' r_T'^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin^2\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \left[\frac{1}{\sqrt{r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi') + \zeta^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_T'^2 + \zeta^2}} \right].$$

Η ολοκλήρωση ως προς ζ μπορεί να γίνει με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων. Για παράδειγμα, για τον δεύτερο όρο είναι $\int d\zeta / (r_T'^2 + \zeta^2)^{1/2} = \ln |\zeta/r_T' + (1 + \zeta^2/r_T'^2)^{1/2}|$, και αντίστοιχα για τον πρώτο, και εφαρμόζοντας τα όρια $\zeta = \pm\infty$, το τελικό αποτέλεσμα γράφεται ως:

$$\Phi(r_T, \varphi) = -\frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0 a} \int_0^a dr_T' r_T'^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin^2\varphi' \ln \left[\frac{r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi')}{r_T'^2} \right].$$

Η έκφραση αυτή ταυτίζεται με το αποτέλεσμα από την απευθείας εφαρμογή της σχέσης (5.2-17) στην παρούσα διδιάστατη κατανομή, με $d\mathbf{l}' = \rho(\mathbf{r})dS' = [\rho_0(r_T'/a)\sin^2\varphi'] [r_T' dr_T' d\varphi']$.

Παράδειγμα 5.2-10: Σε χώρο με επιτρεπτότητα ϵ_0 , το ηλεκτροστατικό δυναμικό περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες $\{r_T, \varphi, z\}$ από την έκφραση:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \Phi_0 \int_0^a \frac{\sin(\pi\zeta/a) d\zeta}{\left[r_T^2 + z^2 - 2ar_T \cos\varphi - 2\zeta z + \zeta^2 + a^2 \right]^{1/2}}.$$

Ζητείται η κατανομή φορτίων (είδος, θέση και τιμή) που παράγει το δυναμικό αυτό.

Επίλυση: Η παρουσία της τετραγωνικής ρίζας στον παρονομαστή υποδεικνύει, ότι είναι πιθανόν (αλλά, σε καμία περίπτωση βέβαιο), το δυναμικό να εκφράζεται ως ολοκλήρωμα επαλληλίας κάποιας κατάλληλης κατανομής. Εξισώνοντας την υπορρίζα ποσότητα με το τετράγωνο R^2 της σχετικής απόστασης (σε κυλινδρικές συντεταγμένες), προκύπτει:

$$r_T^2 + z^2 - 2ar_T \cos\varphi - 2\zeta z + \zeta^2 + a^2 = r_T'^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2 \quad (= R^2),$$

προβάλλοντας τις αντιστοιχίες $r_T' = a$, $\varphi' = 0$ και $z' = \zeta$. Το αίτιο, συνεπώς, πρέπει να είναι κάποια κατάλληλη γραμμική πυκνότητα φορτίου λ , όπως φαίνεται και από το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα είναι απλό, και το φορτίο αυτό πρέπει να βρίσκεται στην ευθεία γραμμή $r_T' = a$, $\varphi' = 0$ (δηλαδή, στο $x' = a, y' = 0$) και ειδικότερα στο τμήμα $0 < z' < a$, όπως φαίνεται από τα όρια του ολοκληρώματος. Τέλος, για να προσδιορισθεί και η τιμή της πυκνότητας $\lambda(z)$, εξισώνεται το ολοκλήρωμα $(1/4\pi\epsilon_0) \int dQ'/R$, με $dQ' = \lambda(z') dz'$, με τη δεδομένη έκφραση:

$$\Phi_0 \int_0^a \frac{\sin(\pi\zeta/a) d\zeta}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\lambda(\zeta) d\zeta}{R},$$

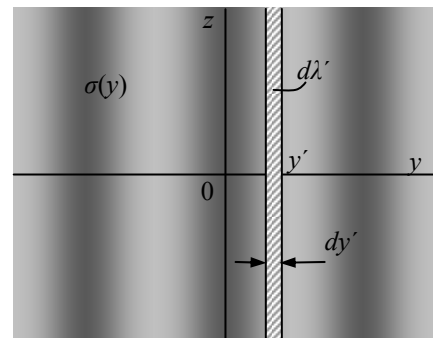
και αμέσως φαίνεται ότι $\lambda(z') = 4\pi\epsilon_0 \Phi_0 \sin(\pi z'/a)$. Συνοψίζοντας, το δυναμικό της εκφώνησης παράγεται από γραμμική πυκνότητα φορτίου (\Leftarrow είδος), στο διάστημα $0 < z < a$ της γραμμής $\{r_T = a, \varphi = 0\}$ (\Leftarrow θέση), με τιμή $\lambda(z) = 4\pi\epsilon_0 \Phi_0 \sin(\pi z/a)$, όπου είναι πλεονασμός πια να συνεχισθεί η χρήση των τονισμένων μεταβλητών.

Σχόλιο: Αν είχε επιχειρηθεί, από το δυναμικό Φ αρχικά να προσδιορισθεί, με σεβαστή αλγεβρική προσπάθεια, το ηλεκτρικό πεδίο ως $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ και ακολούθως η έκφραση για το πεδίο \mathbf{E} να εισαχθεί στο νόμο του *Gauss* για να προσδιορισθούν τα φορτία, θα προέκυπτε (μηχανιστικά, αλλά με αρκετές πράξεις) ότι $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Θα έπρεπε, όμως, να ελεγχθούν και οι οριακές συνθήκες. Στην παρούσα περίπτωση είναι εφικτό, εφόσον υπάρχει ικανοποιητική αλγεβρική δεξιότητα, να αναγνωρισθεί ο απειρισμός του ηλεκτρικού πεδίου σε γραμμή και ακόμα και να προσδιορισθεί η τιμή του νηματοειδούς φορτίου. Αν, όμως, το αίτιο ήταν επιφανειακή κατανομή, τότε η αναγνώριση ότι υπάρχει βηματική ασυνέχεια σε επιφάνεια και ο προσδιορισμός της τιμής της ασυνέχειας (\Rightarrow του σ) είναι πολύ πιο απαιτητικές ενέργειες.

Παράδειγμα 5.2-11: Στο επίπεδο $x = 0$ υπάρχει ηλεκτρικό φορτίο, με επιφανειακή πυκνότητα $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_0 \cos^2(2\pi y/L)$. Με κατάλληλη επιλογή του σημείου αναφοράς να προσδιορισθεί το δυναμικό Φ , με τη μορφή απλού ολοκληρώματος, σε χώρο με ϵ_0 παντού.

Επίλυση: Επειδή τα φορτία φθάνουν μέχρι το άπειρο με πεπερασμένη τιμή, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα επαλληλίας με τη μορφή $\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\epsilon_0) \int dQ'/R$, αλλά με τη μορφή $\Phi(\mathbf{r}) = (1/4\pi\epsilon_0) \int dQ'(1/R - 1/R_0)$, με σημείο αναφοράς σε οποιαδήποτε πεπερασμένη θέση. Θα είναι $dQ' = \sigma_0 \cos^2(2\pi y'/L) dy' dz'$ και θα προκύψει διπλό ολοκλήρωμα (ως προς y' και z'), στο οποίο η ολοκλήρωση ως προς z' μπορεί να γίνει με στοιχειώδεις τεχνικές, για να προκύψει το δυναμικό με μορφή απλού ολοκληρώματος, όπως ζητείται. Το ζητούμενο, όμως μπορεί να επιτευχθεί και απευθείας, με εφαρμογή της σχέσης (5.2-17), δεδομένου ότι η κατανομή φορτίου χαρακτηρίζεται από $\partial/\partial z = 0$, τόσο ως προς την εξάρτηση $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_0 \cos^2(2\pi y/L)$, όσο και ως προς την έκτασή του, σε κάθε z . Είναι $d\lambda' = \sigma_0 \cos^2(2\pi y'/L) dy'$, με $x' = 0$ και $-\infty < y' < +\infty$, ενώ $R_{\perp}^2 = x^2 + (y - y')^2$. Για το σημείο αναφοράς, $R_{\perp 0}^2 = x_0^2 + (y_0 - y')^2$, φαίνεται ότι εξυπηρετεί η επιλογή $x_0 = 0, y_0 = 0$, ώστε $R_{\perp 0}^2 = y'^2$, οπότε το δυναμικό γράφεται ως:

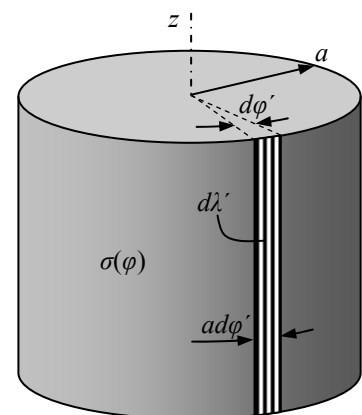
$$\Phi(x, y) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \cos^2 \frac{2\pi y'}{L} \ln \frac{x^2 + (y - y')^2}{y'^2}.$$



Παράδειγμα 5.2-12: Στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ (με άπειρο μήκος) υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου, ίση με $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_0 \sin \varphi$. Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό, ως απλό ολοκλήρωμα καλά διατυπωμένο, σε χώρο με ϵ_0 , αφού επιλεγεί πρόσφορα το σημείο αναφοράς.

Επίλυση: Με συλλογιστική ίδια με εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος, εξυπηρετεί η χρήση της σχέσης (5.2-17). Τώρα είναι $d\lambda' = (\sigma_0 \sin \varphi')(a d\varphi')$ στην περιοχή $0 < \varphi' < 2\pi$, και $r_T' = a$. Είναι $R_{\perp}^2 = r_T^2 + a^2 - 2r_T a \cos(\varphi - \varphi')$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες, και επιλέγοντας το σημείο αναφοράς στον άξονα ($r_{T0} = 0$) είναι $R_{\perp 0}^2 = a^2$. Έτσι, προκύπτει το δυναμικό ως:

$$\Phi(r_T, \varphi) = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin \varphi' \ln \frac{r_T^2 + a^2 - 2r_T a \cos(\varphi - \varphi')}{a^2}.$$



Παράδειγμα 5.2-13: Στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ (με άπειρο μήκος) υπάρχει φορτίο, με πυκνότητα $\sigma = \sigma_0$ (σταθερή). Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ , παντού σε χώρο με ϵ_0 .

Επίλυση: Η διάταξη είναι, όσον αφορά την εφαρμογή του διδιάστατου ολοκληρώματος επαλληλίας, πανομοιότυπη με αυτή του προηγούμενου παραδείγματος. Και στις δύο περιπτώσεις υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα $\sigma = \sigma_0 f(\varphi)$ στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T = a$ (με άπειρο μήκος), με $f(\varphi) = \sin \varphi$ και $f(\varphi) = 1$, αντίστοιχα. Δηλαδή, το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος δίνει το δυναμικό της παρούσας διάταξης, με την αντικατάσταση $\sin \varphi \rightarrow 1$. Επί πλέον, τώρα είναι $\partial\sigma/\partial\varphi = 0$, οπότε με την καθιερωμένη αλλαγή μεταβλητής, $\xi = \varphi' - \varphi$, το δυναμικό γράφεται χωρίς να εμφανίζεται η γωνία φ :

$$\Phi(r_T) = -\frac{\sigma_0 a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\xi \ln \frac{r_T^2 + a^2 - 2r_T a \cos \xi}{a^2} = -\frac{\sigma_0 a}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\xi \ln \frac{r_T^2 + a^2 - 2r_T a \cos \xi}{a^2}.$$

Όπως σε κάθε περίπτωση εφαρμογής του ολοκληρώματος επαλληλίας, η έκφραση αυτή δίνει το δυναμικό παντού στον χώρο (τόσο στο εσωτερικό, όσο και στο εξωτερικό του κυλίνδρου).

Βεβαίως, σε αυτή τη διάταξη με τη διπλή συμμετρία ($\partial/\partial z = 0$ και $\partial/\partial\varphi = 0$), από το νόμο του Gauss προκύπτει αμέσως το ηλεκτρικό πεδίο, $\mathbf{E}(r_T < a) = 0$ και $\mathbf{E}(r_T > a) = (\sigma_0/\epsilon_0)(a/r_T)$, και ακολούθως το δυναμικό προσδιορίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\Phi = -\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, με το σημείο αναφοράς πάλι στον άξονα, $\Phi(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = 0) = 0$, για να γίνει σύγκριση με το προηγούμενο αποτέλεσμα. Τώρα η εναλλακτική έκφραση για το δυναμικό είναι:

$$\Phi(r_T < a) = \Phi(r_T = 0) - \int_0^{r_T} 0 dr'_T = 0,$$

$$\Phi(r_T > a) = \Phi(r_T = a) - \int_a^{r_T} \frac{\sigma_0 a}{\epsilon_0 r'_T} dr'_T = -\frac{\sigma_0 a}{\epsilon_0} \ln \frac{r_T}{a}.$$

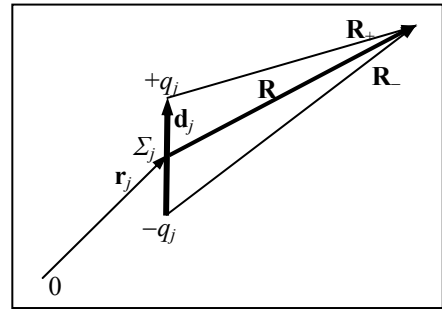
Σχόλιο: Σύγκριση των δυο (εξ ίσου σωστών) τελικών εκφράσεων για το δυναμικό Φ δίνει την αξιοσημείωτη μαθηματική ισότητα (με την αντικατάσταση $r_T/a = \chi$):

$$f(\chi) = \int_0^\pi d\xi \ln(1 + \chi^2 - 2\chi \cos \xi) \Rightarrow \begin{cases} f(\chi \leq 1) = 0, \\ f(\chi \geq 1) = 2\pi \ln \chi. \end{cases}$$

[Η ίδια ισότητα μπορεί να αποδειχθεί με το θεώρημα της αμοιβαιότητας. Για απόδειξη με στοιχειώδεις τεχνικές, το διάστημα $(0, \pi)$ χωρίζεται στα δύο, αξιοποιείται η αντισυμμετρία, και με αλλαγή μεταβλητών $\xi_1 = 2\xi$ προκύπτει $f(\chi) = \frac{1}{2}f(\chi^2)$, και μετά από n επαναλήψεις $f(\chi) = 2^{-n}f(\chi^{2^n})$. Συνεπώς, $f(\chi < 1) = (1/\infty)f(0) = 0$ και $f(\chi > 1) = 2^{-n} \int_0^\pi d\xi \ln[(\chi^2)^{2^n}] = \pi \ln \chi^2 = 2\pi \ln \chi$.]

5.2.2 Ηλεκτροστατικό δυναμικό από κατανομές ηλεκτρικών διπόλων

Δυναμικό λόγω σημειακού διπόλου \mathbf{p}_j : Η πιο απλή περιγραφή ενός σημειακού ηλεκτρικού διπόλου \mathbf{p}_j στη θέση \mathbf{r}_j (βλ. παράγρ. 1.3.1 στο Μέρος Α) γίνεται μέσω δύο ετερόσημων σημειακών φορτίων $\pm q_j$ στις θέσεις $\mathbf{r}_j \pm \frac{1}{2}\mathbf{d}_j$, αντίστοιχα (δηλαδή, με τη φορά της σχετικής θέσης \mathbf{d}_j από τον αρνητικό προς το θετικό πόλο), στο όριο $q_j \rightarrow \infty$ και $\mathbf{d}_j \rightarrow 0$. Το δυναμικό λόγω της παρουσίας του διπόλου προσδιορίζεται από το άθροισμα της συνεισφοράς των δύο πόλων, παίρνοντας ακολούθως το όριο $\mathbf{d}_j \rightarrow 0$. Όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 5.2-6**, σε σχέση με τους δύο πόλους η θέση του τυχαίου σημείου Σ είναι $\mathbf{R}_{\pm} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}_j \pm \frac{1}{2}\mathbf{d}_j) = \mathbf{R} \mp \frac{1}{2}\mathbf{d}_j$, οπότε, με την αναφορά στο άπειρο, το δυναμικό στο σημείο Σ είναι ίσο με $\Phi(\mathbf{r}) = (q_j/4\pi\epsilon_0)/(1/R_+ - 1/R_-)$. Για τις αποστάσεις R_{\pm} λαμβάνεται υπ' όψιν ότι η απόσταση \mathbf{d}_j είναι μικρή και το τετράγωνό της ακόμα μικρότερο, οπότε με το διωνυμικό ανάπτυγμα $(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - (1/2)\delta + (3/8)\delta^2 + \dots$ προκύπτει:



Σχήμα 5.2-6

$$\frac{1}{R_{\pm}} = (\mathbf{R}_{\pm} \cdot \mathbf{R}_{\pm})^{-1/2} = \left(R^2 \mp \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_j + \frac{1}{4} d_j^2 \right)^{-1/2} \approx R^{-1} \left(1 \mp \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_j}{R^2} \right)^{-1/2} \approx \frac{1}{R} \pm \frac{1}{2} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{d}_j}{R^3},$$

όπου οι επόμενοι όροι έχουν αμελητέα συνεισφορά στη διαφορά $1/R_+ - 1/R_-$ που ενδιαφέρει. Στη διαφορά αυτή, οι όροι μηδενικής τάξης ως προς τη μικρή ποσότητα \mathbf{d}_j απαλείφονται. Ανακαλώντας τον ορισμό του ηλεκτρικού διπόλου, $\mathbf{p}_j = q_j \mathbf{d}_j$, το **δυναμικό σημειακού ηλεκτρικού διπόλου, τοποθετημένου στη θέση \mathbf{r}_j** , σε χώρο με ϵ_0 , προκύπτει ίσο με:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{i}_R}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{p_j \cos\theta_j}{4\pi\epsilon_0 R^2}. \quad (5.2-19\alpha)$$

Στις δύο τελευταίες εκφράσεις, $\mathbf{i}_R = \mathbf{R}/R$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα συγγραμμικό με το \mathbf{R} και θ_j η γωνία μεταξύ των \mathbf{p}_j και \mathbf{R} . Όμως, πρακτικά ο προσδιορισμός των \mathbf{i}_R και θ_j συνήθως γίνεται από τις σχέσεις $\mathbf{i}_R = \mathbf{R}/R$ και $\cos\theta_j = \mathbf{i}_R \cdot \mathbf{p}_j/p_j$, οπότε (με την εξαίρεση απολύτως ειδικών περιπτώσεων), κατά κανόνα, το δυναμικό Φ προσδιορίζεται από την πρώτη έκφραση.

Αν το σημείο αναφοράς δεν ληφθεί στο άπειρο, τότε με παρόμοιο χειρισμό και στις αποστάσεις του σημείου αναφοράς από τους δύο πόλους προκύπτει η γενικότερη έκφραση:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{p}_j \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3} \right). \quad (5.2-19\beta)$$

Διπολικό πεδίο: Ας περιορισθούμε προσωρινά στο απλούστερο ενδεχόμενο, το δίπολο να βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, με $\mathbf{p}_j = p_0 \mathbf{i}_z$. Τότε, στη σχέση (5.2-19α) οι ποσότητες απλοποιούνται σε $R \rightarrow r$, $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{r}$, $\mathbf{i}_R \rightarrow \mathbf{i}_r$ και $\theta_j \rightarrow \theta$, επειδή $\cos \theta_j = \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_z = \cos \theta$. Για τη σχέση $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, σε σφαιρικές συντεταγμένες η κλίση είναι $\nabla \Phi = \mathbf{i}_r (\partial/\partial r) \Phi + \mathbf{i}_\theta r^{-1} (\partial/\partial \theta) \Phi$, με μηδενική την τρίτη συνιστώσα, καθώς εδώ είναι $\partial/\partial \varphi = 0$. Έτσι προσδιορίζεται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, και παρομοίως σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Το αποτέλεσμα για το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό σημειακού διπόλου $\mathbf{p} = p_0 \mathbf{i}_z$ στην αρχή των αξόνων είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{i}_r 2 \cos \theta + \mathbf{i}_\theta \sin \theta}{r^3} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{i}_T 3r_T z + \mathbf{i}_z (2z^2 - r_T^2)}{(r_T^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \Phi(\mathbf{r}) &= \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r_T^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5.2-20)$$

Οι σχέσεις αυτές προβάλλουν δύο βασικά χαρακτηριστικά, τα οποία συνιστούν την «υπογραφή» ενός διπολικού πεδίου:

- Η εξάρτηση από την απόσταση ($E \sim r^{-3}$, $\Phi \sim r^{-2}$) έχει, σε σχέση με την περίπτωση ενός σημειακού φορτίου, ένα επιπλέον r στον παρονομαστή. Η παρουσία ενός σημειακού διπόλου γίνεται αισθητή και σε μεγάλες αποστάσεις, αλλά λιγότερο έντονα απ' όσο ενός σημειακού φορτίου.
- Το δίπολο, ως διανυσματική ποσότητα, χαρακτηρίζεται από κατευθυντικότητα, που προβάλλεται τόσο από την εξάρτηση από τη γωνία θ (τη γωνία σε σχέση με τον άξονα του διπόλου), όσο και από την παρουσία μη ακτινικής συνιστώσας στο πεδίο \mathbf{E} .

Δυναμικό κατανεμημένων διπόλων: Για δίπολα κατανεμημένα στο χώρο, σε επιφάνεια, ή σε γραμμή, τα οποία περιγράφονται από τις πυκνότητες διπολικής ροπής, \mathbf{P} , \mathbf{p}_S και \mathbf{p}_ℓ , η στοιχειώδης διπολική ροπή $d\mathbf{p} = \{\mathbf{P}dV, \mathbf{p}_S dS, \mathbf{p}_\ell d\ell\}$ συμπεριφέρεται ως σημειακό δίπολο. Η ολική συνεισφορά προκύπτει ολοκληρώνοντας ως προς τις θέσεις των στοιχειωδών διπόλων:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\mathbf{p}' \cdot \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right], \quad (5.2-21)$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι καθιερωμένοι συμβολισμοί, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ και $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_0$, και η ολοκλήρωση είναι ως προς τις τονισμένες συντεταγμένες, με όρια ολοκλήρωσης τα όρια της περιοχής με τη διπολική ροπή $d\mathbf{p}' = \{\mathbf{P}(\mathbf{r}')dV, \mathbf{p}_S(\mathbf{r}'_S)dS', \mathbf{p}_\ell(\ell')d\ell'\}$. Αν υπάρχουν και σημειακά δίπολα, τότε προστίθενται και όροι όπως στη σχέση (5.2-19). Επίσης, αν το σημείο αναφοράς ληφθεί στο άπειρο, τότε ο τελευταίος όρος απομακρύνεται, επειδή $\mathbf{R}_0/R_0^3 \rightarrow 0$.

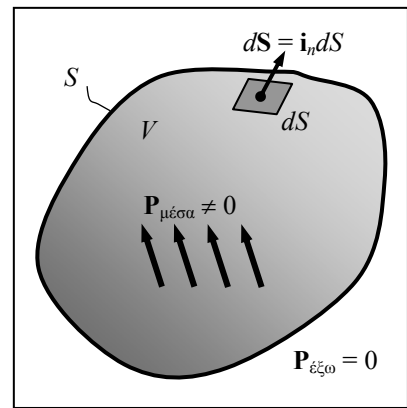
Δυναμικό ισοδύναμων κατανομών φορτίου: Όπως έχει περιγραφεί στην παράγρ. 1.3.1, οι διπολικές κατανομές (εκτός από το διπολικό στρώμα $p_{S\perp}$, τη διπολική ταινία $\mathbf{p}_{\ell\perp}$ και το σημειακό δίπολο \mathbf{p}) μπορούν να υποκατασταθούν από κατανομές ηλεκτρικού φορτίου, βλ. σχέσεις (1.3-7), (1.3-9) και (1.3-11). Για παράδειγμα, ομαλά μεταβαλλόμενη χωρική πυκνότητα διπολικής ροπής \mathbf{P} υποκαθίσταται από χωρική πυκνότητα $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, βηματικά μεταβαλλόμενη \mathbf{P} ή/και ομαλά μεταβαλλόμενη $\mathbf{p}_{S\parallel}$ από επιφανειακή πυκνότητα $\sigma_p = -\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-) - \nabla \cdot \mathbf{p}_{S\parallel}$ κλπ. Σε τέτοιες περιπτώσεις, αντί για τη σχέση (5.2-21) μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα επαλληλίας (5.2-9) με τα στοιχειώδη φορτία $dQ_p' = \{\rho_p(\mathbf{r}')dV', \sigma_p(\mathbf{r}_S')dS', \lambda_p(\ell')d\ell'\}$, ή τα αντίστοιχα σημειακά φορτία q_p , και να περιορισθεί η (5.2-21) μόνο στους όρους $d\mathbf{p}'_{μη\ αναγ.} = \{\mathbf{i}_n p_{S\perp}(\mathbf{r}_S')dS', \mathbf{p}_{\ell\perp}(\ell')d\ell'\}$ και σε μεμονωμένα σημειακά δίπολα \mathbf{p} , δηλαδή:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int dQ_p' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) + \sum_j q_{pj} \left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_{0j}} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int d\mathbf{p}'_{μη\ αναγ.} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right) + \sum_j \mathbf{p}_j \cdot \left(\frac{\mathbf{R}_j}{R_j^3} - \frac{\mathbf{R}_{0j}}{R_{0j}^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.2-22)$$

Στη σχέση αυτή, η πρώτη γραμμή δίνει τη συνεισφορά στο δυναμικό από τις διπολικές κατανομές, οι οποίες έχουν υποκατασταθεί από κατανομές φορτίου με πεπερασμένη τιμή. Εφόσον χρησιμοποιηθεί αυτή η περιγραφή, τότε δεν έχει νόημα να προστεθεί και το δυναμικό των ίδιων διπολικών κατανομών, υπολογισμένο από τη σχέση (5.2-21), γιατί τότε η ίδια συνεισφορά θα προσμετρήταν δύο φορές.

Η αντιστοίχιση πυκνότητας διπολικής ροπής και φορτίων (όπου είναι δυνατή) μπορεί να γίνει εξισώνοντας τις αντίστοιχες εκφράσεις του δυναμικού. Για παράδειγμα, αν στην περιοχή V , με όριο την κλειστή επιφάνεια S , υπάρχει χωρική πυκνότητα \mathbf{P} χωρίς ασυνέχειες, όπως στο **Σχήμα 5.2-7**, τότε αναμένεται η εφαρμογή της σχέσης (5.2-21) για τον προσδιορισμό του δυναμικού να αναπαράγει την έκφραση του δυναμικού που παράγεται από χωρική πυκνότητα $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ και επιφανειακή πυκνότητα, $\sigma_p = -\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-) = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{P}|_S$. Το δυναμικό, από τη σχέση (5.2-21) με $\mathbf{r}_0 = \infty$, είναι ίσο με:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{R}}{R^3}, \quad (5.2-23)$$



Σχήμα 5.2-7

με ολοκλήρωση στο χώρο V με τη διπολική ροπή \mathbf{P} . Μπορεί να δειχθεί πως $\mathbf{R}/R^3 = \nabla'(1/R)$, όπου ∇' είναι ο τελεστής της κλίσης, π.χ. $\nabla' = \mathbf{i}_x \partial/\partial x' + \mathbf{i}_y \partial/\partial y' + \mathbf{i}_z \partial/\partial z'$ στις τονισμένες συντεταγμένες (ως προς τις οποίες γίνεται η ολοκλήρωση). [Με $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ και $R = (R^2)^{1/2} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})^{1/2}$, για να αποδειχθεί η ισότητα, η πορεία είναι $\nabla'(1/R) = \nabla'[(R^2)^{-1/2}] = -1/2(R^2)^{-3/2} \nabla'(R^2) = +1/2 R^{-3} 2\mathbf{R} = \mathbf{R}/R^3$.] Με χρήση της ταυτότητας $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot (\nabla f)$, η ολοκληρωτέα παράσταση στη σχέση (5.2-23) γράφεται $\mathbf{P}' \cdot (\mathbf{R}/R^3) = \mathbf{P}' \cdot \nabla'(1/R) = -(1/R)\nabla' \cdot \mathbf{P}' + \nabla' \cdot (\mathbf{P}'/R)$. Για το χωρικό ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου, για το $\int_V \nabla' \cdot (\mathbf{P}'/R) dV'$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του *Gauss*, βλ. σχέση (A.5-1α) στο Παράρτημα A.5 του Μέρους A, για να μετατραπεί το ολοκλήρωμα σε επιφανειακό στην κλειστή επιφάνεια S που περιβάλλει το χώρο V . Προκύπτει, επομένως, από την (5.2-23) η σχέση:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{P}}{R}. \quad (5.2-24)$$

Το αποτέλεσμα περιέχει δύο όρους, οι οποίοι έχουν και οι δύο το χαρακτηριστικό γνώρισμα του ολοκληρώματος επαλληλίας (5.2-9), η σχετική απόσταση R να εμφανίζεται στον παρονομαστή. Συνεπώς, ο αριθμητής πρέπει να αντιπροσωπεύει φορτία dQ' , ακριβέστερα, dQ'_p , αφού προέρχονται από εναλλακτική περιγραφή της πυκνότητας \mathbf{P} της σχέσης (5.2-23). Ο πρώτος όρος είναι χωρικό ολοκλήρωμα, άρα αναφέρεται σε χωρική πυκνότητα φορτίου, επιβεβαιώνοντας έτσι την ισοδυναμία $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$. Στο δεύτερο όρο πάλι, γράφοντας $d\mathbf{S}' = \mathbf{i}_n dS'$, αναγνωρίζεται η παρουσία επιφανειακής πυκνότητας, ίσης με $\sigma_p = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{P}|_S$. Ουσιαστικά πρόκειται για τη σχέση $\sigma_p = -\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-)$, η οποία στη συγκεκριμένη περίπτωση εξειδικεύεται με $\mathbf{P}_- = \mathbf{P}|_S$ και $\mathbf{P}_+ = 0$, επειδή η πυκνότητα \mathbf{P} βρίσκεται μόνο στο χώρο V .

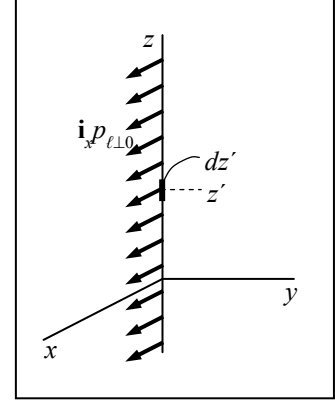
Με παρόμοια, αλλά λιγότερο απλή, διαδικασία επιδεικνύονται και οι λοιπές αντιστοιχίες διπολικών κατανομών με κατανομές ηλεκτρικών φορτίων με πεπερασμένη τιμή.

Δυναμικό διπολικής ταινίας $\mathbf{p}_{\ell\perp}$: Με το στοιχειώδες δίπολο $d\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\ell\perp}(\ell) d\ell$, η γενική έκφραση δίνει το δυναμικό της διπολικής ταινίας ως ολοκλήρωμα στο μήκος ℓ της ταινίας:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} d\ell' \frac{\mathbf{p}_{\ell\perp}(\ell') \cdot \mathbf{R}}{R^3}, \quad (5.2-25)$$

Στην ειδική (που είναι αυθυπόστατα ενδιαφέρουσα) περίπτωση διπολικής ταινίας με σταθερή διπολική ροπή $\mathbf{p}_{\ell\perp} = \mathbf{p}_{\ell\perp 0}$ (δηλαδή, με σταθερό μέτρο, διεύθυνση και φορά), και κατ' ανάγκη ευθύγραμμη, ώστε η διεύθυνση, που είναι κάθετη στην ταινία, να είναι σταθερή) το

δυναμικό μπορεί να προσδιορισθεί αναλυτικά. Προσανατολίζοντας, όπως στο **Σχήμα 5.2-8**, το σύστημα συντεταγμένων, ώστε ο άξονας z να συμπίπτει με την ταινία και να είναι $\mathbf{p}_{\ell\perp} = p_{\ell\perp 0}\mathbf{i}_x$, και θεωρώντας την ταινία με άπειρο μήκος, είναι $x' = 0, y' = 0$ και $-\infty < z' < +\infty$, συνεπώς είναι $\mathbf{R} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + (z - z')\mathbf{i}_z$ και $\mathbf{p}_{\ell\perp} \cdot \mathbf{R} = p_{\ell\perp 0}x$. Εισάγοντας την αλλαγή μεταβλητής $\zeta = (z' - z)/r_T$, δηλαδή $d\ell' = dz' = r_T d\zeta$ και $R^2 = r_T^2(1 + \zeta^2)$, εμφανίζεται το ολοκλήρωμα $\int d\zeta/(1 + \zeta^2)^{3/2} = \zeta/(1 + \zeta^2)^{1/2}$ και με τα όρια $\zeta = \pm\infty$ προκύπτει για το δυναμικό διπολικής ταινίας η έκφραση:



Σχήμα 5.2-8

$$\Phi(x, y) = \frac{p_{\ell\perp 0}}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2)^{3/2}} = \frac{p_{\ell\perp 0}}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (5.2-26)$$

$$\Phi(r_T, \varphi) = \frac{p_{\ell\perp 0}}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \varphi}{r_T}.$$

Το δυναμικό έχει χαρακτηριστικό απειρισμό όταν $x = y = 0$, δηλ. στη διπολική ταινία. Ο απειρισμός προβάλλεται με τη χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων, στην τελευταία έκφραση (με $x = r_T \cos \varphi$ κλπ.).

Ασυνέχεια δυναμικού σε διπολική ταινία: Η έκφραση (5.2-26) για το δυναμικό διπολικής ταινίας με σταθερό $\mathbf{p}_{\ell\perp}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και όταν $\mathbf{p}_{\ell\perp} \neq \text{σταθ.}$, αλλά σε αποστάσεις πολύ κοντά στην ταινία. Πράγματι, ακόμα και όταν η $\mathbf{p}_{\ell\perp}$ εξαρτάται από τη θέση ℓ κατά μήκος της γραμμής, οι μεταβολές της $\mathbf{p}_{\ell\perp}$ δεν γίνονται αισθητές σε μικρές αποστάσεις r_T από την ταινία, οπότε ισχύει:

$$\left[r_T \Phi(r_T, \varphi, \ell) \right]_{r_T \rightarrow 0} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} p_{\ell\perp}(\ell) \cos \varphi. \quad (5.2-27)$$

Η γωνία φ μετράται με αφετηρία το διάνυσμα $\mathbf{p}_{\ell\perp}$ (δηλαδή, είναι $\varphi = 0$ όταν $\mathbf{i}_T \parallel \mathbf{p}_{\ell\perp}$), ενώ r_T είναι η απόσταση κάθετα προς τη διπολική ταινία, στην τυχαία θέση ℓ κατά μήκος της.

Δυναμικό διπολικού στρώματος $p_{S\perp}$: Γενικά, αν ληφθεί υπ' όψιν και η ενδεχόμενη εξάρτηση $p_{S\perp}(\mathbf{r}_S)$ του διπολικού στρώματος από τη θέση στην επιφάνεια S , το δυναμικό προσδιορίζεται από τη σχέση (5.2-21), που εδώ εξειδικεύεται σε:

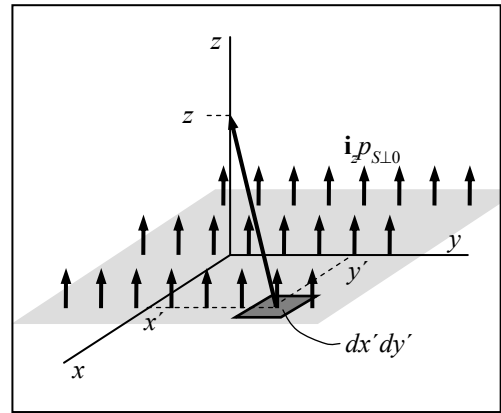
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' p_{S\perp}(\mathbf{r}') \mathbf{i}'_n \cdot \left[\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right], \quad (5.2-28)$$

όπου $\mathbf{i}'_n dS'$ είναι το στοιχείο της επιφάνειας S με το διπολικό στρώμα, στην έκταση της οποίας γίνεται η ολοκλήρωση, και η φορά του \mathbf{i}'_n είναι ομόρροπη με του αντίστοιχου $d\mathbf{p}'$, από το αρνητικό προς το θετικό επιφανειακό φορτίο του στρώματος. Στη γενική περίπτωση, το δυναμικό Φ εξαρτάται από τον τρόπο μεταβολής του $p_{S\perp}(\mathbf{r}_s)$ στην επιφάνεια. Στην ειδική, όμως, περίπτωση, στην οποία το διπολικό στρώμα έχει σταθερό μέτρο, $p_{S\perp} = p_{S\perp 0}$, τότε είναι:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{p_{S\perp 0}}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' \frac{\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{p_{S\perp 0}}{4\pi\epsilon_0} \int_S dS' \frac{\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{i}_R}{R^2}, \quad (5.2-29)$$

με το σημείο αναφοράς στο άπειρο. Το δυναμικό εξαρτάται από τη μορφή της επιφάνειας S (σχήμα και μέγεθος), χωρίς να υπάρχει κανένας περιορισμός. Ενδεχόμενη καμπυλότητα της S λαμβάνεται υπ' όψιν από το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}'_n , ενώ η έκταση της S προσδιορίζει τα όρια ολοκλήρωσης.

Δυναμικό επίπεδου σταθερού διπολικού στρώματος $p_{S\perp 0}$: Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ειδική περίπτωση σταθερού διπολικού στρώματος, $p_{S\perp} = p_{S\perp 0}$, σε επίπεδο με άπειρη έκταση. Ας ληφθεί το $p_{S\perp 0}$ στο επίπεδο $z = 0$ (δηλαδή, στο ολοκλήρωμα επαλληλίας θα ληφθεί $z' = 0$, με ολοκλήρωση στα διαστήματα $-\infty < x' < +\infty$, και $-\infty < y' < +\infty$), και με φορά προς τα θετικά z (δηλαδή, με $d\mathbf{p}' = \mathbf{i}_z p_{S\perp 0} dx' dy'$). Η διάταξη χαρακτηρίζεται από $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, οπότε αρκεί να υπολογισθεί το δυναμικό σε θέσεις με $x = y = 0$ (δηλαδή, $\mathbf{r} = z\mathbf{i}_z$). Είναι $\mathbf{R} = -x'\mathbf{i}_x - y'\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$ και $R^2 = x'^2 + y'^2 + z^2$ και $\mathbf{p}_{S\perp} \cdot \mathbf{R} = p_{S\perp 0} z$, όπως φαίνεται και στο **Σχήμα 5.2-9**. Εισάγοντας τις αλλαγές μεταβλητής $\eta = y'/(x'^2 + z^2)^{3/2}$ στην εσωτερική και $\xi = x'/|z|$ στην εξωτερική ολοκλήρωση, δηλαδή με την ακόλουθη πορεία:



Σχήμα 5.2-9

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dy'}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{3/2}} = z \int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{(x'^2 + z^2)^{1/2}}{(x'^2 + z^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{(1+\eta^2)^{3/2}} = \frac{z}{|z|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1+\xi^2} \frac{\eta}{(1+\eta^2)^{1/2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty},$$

το διπλό ολοκλήρωμα προκύπτει ίσο με $2\pi z/|z| = 2\pi \operatorname{sgn}(z)$, όπου sgn είναι η συνάρτηση προσήμου και το δυναμικό διπολικού στρώματος σταθερού, σε επίπεδο με άπειρη έκταση, είναι:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{p_{S\perp 0}}{2\epsilon_0} \operatorname{sgn}(z). \quad (5.2-30)$$

Ασυνέχεια δυναμικού σε διπολικό στρώμα: Το δυναμικό Φ έχει ασυνέχεια μεταξύ των δύο όψεων του διπολικού στρώματος. Για παράδειγμα, η σχέση (5.2-30) υποδεικνύει ασυνέχεια ίση με $p_{S\perp}/\epsilon_0$. Αιτία της ασυνέχειας είναι το ηλεκτρικό πεδίο που αναπτύσσεται στον ενδιάμεσο χώρο μεταξύ των επιφανειακών φορτίων $\pm\sigma_0$ ($\rightarrow \pm\infty$), τα οποία αντιπροσωπεύουν το διπολικό στρώμα. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίση με $\mathbf{E} = -(\sigma_0/\epsilon_0)\mathbf{i}_n$ (όπως είναι σε πυκνωτή παράλληλων πλακών), και προκαλεί την ασυνέχεια $\Phi_+ - \Phi_- = -\int_+^+ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -[-(\sigma_0/\epsilon_0)\mathbf{i}_n] \cdot (\mathbf{i}_n d) = \sigma_0 d/\epsilon_0 = p_{S\perp}/\epsilon_0$. Όμως, ακόμα και αν $p_{S\perp} \neq \text{σταθ.}$ ή αν η αντίστοιχη επιφάνεια έχει καμπυλότητες (οπότε $\mathbf{i}_n \neq \text{σταθ.}$), στην άμεση γειτονιά του διπολικού στρώματος τα $\pm\sigma(\mathbf{r}_S) = \pm p_{S\perp}(\mathbf{r}_S)/d$ φαίνονται σταθερά και σε επίπεδα με άπειρη έκταση, επειδή το πάχος είναι μικρό, $\mathbf{d} \rightarrow 0$. Με την πρόσθετη γενίκευση, να υπάρχει στον ενδιάμεσο χώρο διηλεκτρικό υλικό με $\epsilon = \epsilon_S$, ενδεχομένως εξαρτώμενο από τη θέση \mathbf{r}_S , αλλά μη μεταβαλλόμενο στη μικρή διάσταση \mathbf{d} , προκύπτει το γενικό συμπέρασμα:

$$\Phi_+(\mathbf{r}_S) - \Phi_-(\mathbf{r}_S) = \frac{p_{S\perp}(\mathbf{r}_S)}{\epsilon_S(\mathbf{r}_S)}. \quad (5.2-31)$$

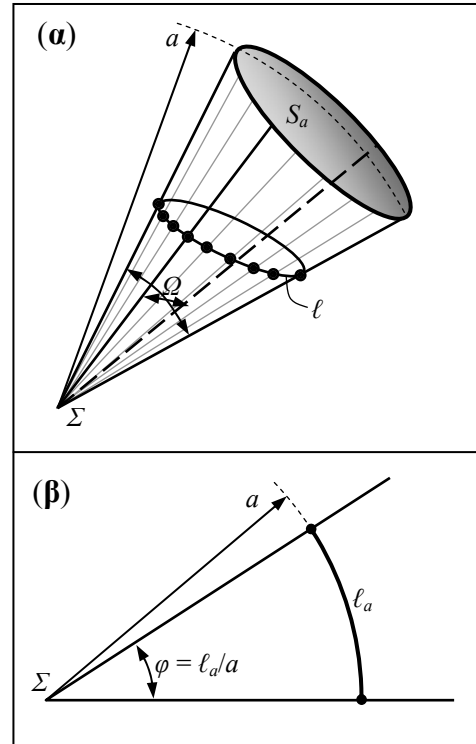
Οι όψεις “+” και “-” ορίζονται έτσι ώστε η φορά του κάθετου \mathbf{i}_n (από την αρνητική προς τη θετική όψη) να συμπίπτει με τη φορά του διπολικού στρώματος (από το αρνητικό προς το θετικό επιφανειακό φορτίο).

Συνέπεια της σχέσης (5.2-31) είναι ότι σε επιφάνεια με χωροεξαρτώμενο $p_{S\perp}$, η σχέση που συνδέει τις εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου γενικεύεται σε:

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) = -\mathbf{i}_n \times \nabla \left(\frac{1}{\epsilon_S} p_{S\perp} \right), \quad (5.2.32)$$

σε αντίθεση με την ομογενή σχέση που έχει εξαχθεί και έχει χρησιμοποιηθεί στο Μέρος A, στο οποίο δεν περιλαμβανόταν το ενδεχόμενο χωροεξαρτώμενου $p_{S\perp}$. Η διαφοροποίηση οφείλεται στην παραδοχή που είχε γίνει για την εξαγωγή της σχέσης (2.1-28α), ότι οι δύο πλευρές μήκους $2h$ έχουν μηδενική συνεισφορά στη κυκλοφορία, στο όριο $h \rightarrow 0$ (βλ. **Σχήμα 2.1-11**). Αυτή η παραδοχή προϋποθέτει πως το ηλεκτρικό πεδίο δεν απειρίζεται κάθετα προς την επιφάνεια, ενώ, όταν υπάρχει διπολικό στρώμα, στο εσωτερικό του αναπτύσσεται ηλεκτρικό πεδίο με ένταση $\mathbf{E} = -(\sigma/\epsilon)\mathbf{i}_n \rightarrow \infty$.

Μία **στερεή γωνία** Ω σχηματίζεται από ευθείες γενέτειρες γραμμές, οι οποίες διέρχονται από τα σημεία μιας κλειστής καμπύλης ℓ , της οδηγού καμπύλης, και από ένα σημείο Σ , την κορυφή της γωνίας, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.2-10α**. Οι μονάδες της στερεής γωνίας τα «στερακτίνια», εκφράζουν το πηλίκο του εμβαδού της καμπύλης επιφάνειας S_a , την οποία η στερεή γωνία αποτέμνει από σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα a και κέντρο στο Σ , προς το τετράγωνο της ακτίνας. Δηλαδή, $\Omega = S_a/a^2$. Ο ορισμός αυτός επεκτείνει στις τρεις διαστάσεις τον ορισμό της γωνίας φ σε επίπεδο (που σχηματίζεται από δύο πλευρές που διέρχονται από δύο σημεία και την κορυφή), της οποίας το μέτρο (σε ακτίνια) είναι το πηλίκο του μήκους τόξου κύκλου ℓ_a (με κέντρο στο Σ και με ακτίνα a) προς την ακτίνα a , δηλαδή $\varphi = \ell_a/a$ (**Σχήμα 5.2-10β**).



Σχήμα 5.2-10

Στον ορισμό $\Omega = S_a/a^2$, ο αριθμητής και ο παρονομαστής είναι ανάλογα ποσά και η τιμή Ω είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα. Συνεπώς, θα μπορούσε η επιφάνεια S_a να αποτελείται από πολλά τμήματα δS_a , με πεπερασμένο ή απειροστό εμβαδό, σε διαφορετικές ακτίνες το καθένα, αρκεί κάθε τμήμα δS_a να διαιρεθεί με την αντίστοιχη ακτίνα. Επίσης, κάποια δS_a μπορεί να μην είναι κάθετα στην ακτίνα, αλλά τότε πρέπει να προσμετρηθούν πολλαπλασιασμένα με το κατάλληλο συνημίτονο. Αυτές οι παρατηρήσεις οδηγούν στο γενικότερο ορισμό της στερεής γωνίας, και μάλιστα ως προσημασμένης ποσότητας, μέσω του ολοκληρώματος:

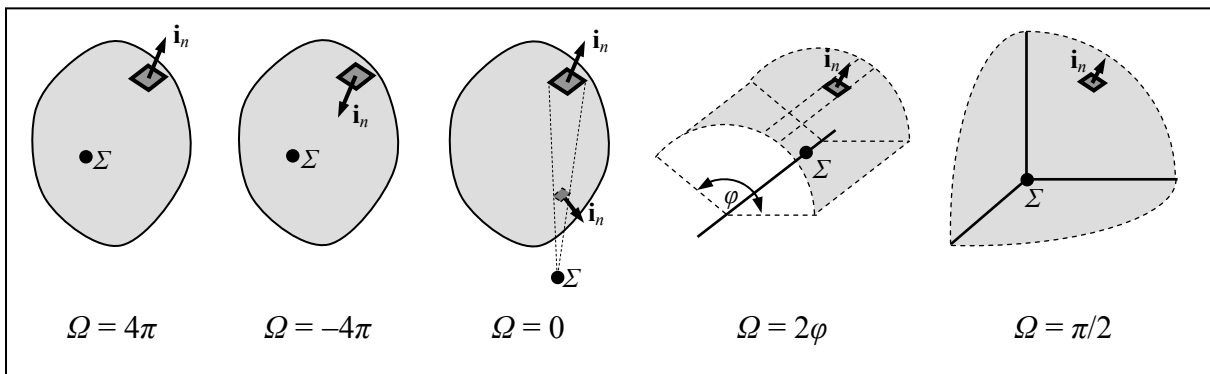
$$\Omega = \int d\Omega = - \int_S dS' \frac{\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{i}_R}{R^2}, \quad (5.2-33)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε οποιαδήποτε επιφάνεια S έχει ως όριο την οδηγό καμπύλη ℓ , ή οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη λειτουργεί ως οδηγός, για δεδομένη στερεή γωνία, το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}_n είναι κάθετο προς την επιφάνεια S , ώστε να είναι $d\mathbf{S} = \mathbf{i}_n dS$, και το διάνυσμα $\mathbf{R} = \mathbf{i}_R R$ έχει αφετηρία στα σημεία της S και τέρμα στο σημείο Σ (την κορυφή της γωνίας Ω). Θεωρώντας δηλαδή ότι το σημείο Σ είναι στη θέση \mathbf{r} και τα σημεία της επιφάνειας στις θέσεις \mathbf{r}' , τότε επαναλαμβάνεται ο καθιερωμένος συμβολισμός $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

Γεωμετρικός προσδιορισμός δυναμικού διπολικού στρώματος: Το ολοκλήρωμα στη σχέση (5.2-29) ταυτίζεται με τον γενικό ορισμό (5.2-33) της στερεής γωνίας, οπότε το δυναμικό διπολικού στρώματος μπορεί να γραφεί ως:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{P_{S\pm 0}}{4\pi\epsilon_0} \Omega, \quad (5.2-34)$$

όπου Ω είναι η στερεή γωνία, με την οποία φαίνεται η αρνητική όψη (αυτή με το αρνητικό φορτίο) του διπολικού στρώματος από το σημείο Σ (από τη θέση \mathbf{r} , στην οποία προσδιορίζεται το δυναμικό Φ). Κατά κανόνα, η στερεή γωνία υπολογίζεται αναλυτικά από τη σχέση (5.2-33). Όμως, σε ειδικές περιπτώσεις, ο προσδιορισμός μπορεί να γίνει γεωμετρικά, δηλαδή από τη σχέση $\Omega = S_a/a^2$, ιδίως όταν η επιφάνεια S_a είναι εύκολα προσδιοριζόμενο κλάσμα της σφαιρικής επιφάνειας, που, βεβαίως, έχει εμβαδό ίσο με $4\pi a^2$ και συνεπώς αντιστοιχεί σε στερεή γωνία ίση με $\pm 4\pi$, με το πρόσημο εξαρτώμενο από τη φορά του \mathbf{i}_n . Τέτοιες ειδικές περιπτώσεις παρουσιάζονται στο **Σχήμα 5.2-11**. Αλλά και το διπολικό στρώμα στο επίπεδο $z' = 0$ φαίνεται από θέσεις $z = \pm|z|$ σε στερεή γωνία $\mp 2\pi$, και αυτή η ιδιότητα θα επέτρεπε να εξαχθεί το αποτέλεσμα (5.2-30) από τη σχέση (5.2-34).



Σχήμα 5.2-11

Επιλογή σημείου αναφοράς: Όταν το δυναμικό οφείλεται σε διπολικές κατανομές που μπορούν να υποκατασταθούν από πεπερασμένα φορτία dQ_p' , τότε για το σημείο αναφοράς ισχύουν τα ίδια με την περίπτωση δυναμικού που παράγεται από συνήθη φορτία. Συνεπώς, το σημείο αναφοράς δεν μπορεί να ληφθεί:

- Σε γραμμές με φορτία γραμμικά λ_p ή σημειακά q_p , ή, ισοδύναμα, όπου απειρίζεται η \mathbf{P} , όπου η $\mathbf{p}_{S\parallel}$ έχει βηματική μεταβολή ή απειρίζεται, και όπου η $\rho_{e\parallel}$ μεταβάλλεται, είτε ομαλά, είτε με βηματική ασυνέχεια,

- Στο άπειρο, όταν εκεί υπάρχουν φορτία σ_p ή λ_p με πεπερασμένη τιμή, όπως συμβαίνει, πρακτικά, όταν οποιαδήποτε κατανομή \mathbf{P} , $\mathbf{p}_{S\parallel}$, ή $p_{\ell\parallel}$ έχει πεπερασμένη τιμή στο άπειρο.

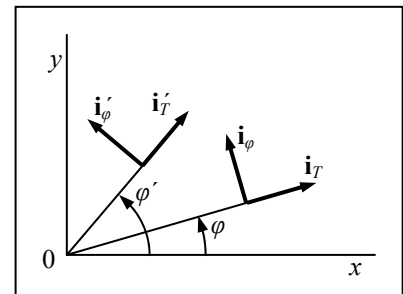
Επιπρόσθετα, το σημείο αναφοράς δεν μπορεί να ληφθεί σε θέσεις, στις οποίες το δυναμικό έχει ασυνέχεια οφειλόμενη σε γνήσια διπολικές κατανομές:

- Σε σημεία με σημειακά δίπολα \mathbf{p} ,
- Σε γραμμές με διπολική ταινία $\mathbf{p}_{\ell\perp}$,
- Σε επιφάνειες με διπολικό στρώμα $\mathbf{p}_{S\perp}$.

Παρατηρήσεις: Για την εφαρμογή του ολοκληρώματος $\int d\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}/R^3$ ισχύουν, κατάλληλα προσαρμοσμένα, όσα έχουν αναφερθεί στην προηγούμενη παράγραφο για το ολοκλήρωμα $\int dQ'/R$. Το νέο βασικό στοιχείο σχετίζεται με το διανυσματικό χαρακτήρα του $d\mathbf{p}'$ και την εμφάνιση του εσωτερικού γινομένου του με το $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Το $d\mathbf{p}'$ ως διάνυσμα, και όχι μόνο οι συνιστώσες του, εκφράζεται στο τονισμένο σύστημα. Αυτό σημαίνει πως και τα μη σταθερά μοναδιαία διανύσματα \mathbf{i}_T , \mathbf{i}_φ , \mathbf{i}_r και \mathbf{i}_θ , όταν χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τα $d\mathbf{p}' = \{\mathbf{P}(\mathbf{r}')dV', \mathbf{p}_S(\mathbf{r}'_S)dS', \mathbf{p}_\ell(\ell')d\ell'\}$, πρέπει να εκφραστούν στις τονισμένες συντεταγμένες και η εξάρτησή τους από αυτές να ληφθεί υπ' όψιν κατά την ολοκλήρωση. Για το σκοπό αυτό, σημειώνονται οι ακόλουθες σχέσεις που συνδέουν το τονισμένο με το άτονο σύστημα:

- Σχέσεις μεταξύ των \mathbf{i}_T και \mathbf{i}_φ (που αναφέρονται στη γωνία φ) και των \mathbf{i}'_T και \mathbf{i}'_φ (που αναφέρονται στη γωνία φ'):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}'_T \\ \mathbf{i}'_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi' - \varphi) & \sin(\varphi' - \varphi) \\ -\sin(\varphi' - \varphi) & \cos(\varphi' - \varphi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_T \\ \mathbf{i}_\varphi \end{bmatrix}.$$



- Σχέσεις μεταξύ των \mathbf{i}_r , \mathbf{i}_θ και \mathbf{i}_φ , όταν αναφέρονται σε διαφορετικές γωνίες (φ , φ') και (θ , θ'):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}'_r \\ \mathbf{i}'_\theta \\ \mathbf{i}'_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta' \cos\theta + \sin\theta' \sin\theta \cos\xi & -\cos\theta' \sin\theta + \sin\theta' \cos\theta \cos\xi & \sin\theta' \sin\xi \\ -\sin\theta' \cos\theta + \cos\theta' \sin\theta \cos\xi & \sin\theta' \sin\theta + \cos\theta' \cos\theta \cos\xi & \cos\theta' \sin\xi \\ -\sin\theta \sin\xi & -\cos\theta \sin\xi & \cos\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{i}_r \\ \mathbf{i}_\theta \\ \mathbf{i}_\varphi \end{bmatrix},$$

όπου $\xi = \varphi' - \varphi$. Κάθε στοιχείο των πινάκων δίνει το συνημίτονο μεταξύ των αντίστοιχων διανυσμάτων, για παράδειγμα, $\mathbf{i}'_r \cdot \mathbf{i}_\theta = -\cos\theta' \sin\theta + \sin\theta' \cos\theta \cos\xi$.

Στα *παραδ. 5.2-14* έως *5.2-18* εφαρμόζεται το ολοκλήρωμα επαλληλίας σε διπολικές κατανομές και στις εκφράσεις για το δυναμικό αναγνωρίζονται οι κατανομές φορτίου.

Παράδειγμα 5.2-14: Στην περιοχή $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < h$ υπάρχει διπολική ροπή με χωρική πυκνότητα $\mathbf{P} = \mathbf{i}_z P_0 \sin(\pi x/a)$. Όλος ο χώρος έχει ϵ_0 . Να διατυπωθεί με σαφήνεια ολοκλήρωμα για το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ . Ακολουθώντας να γίνει η ολοκλήρωση ως προς z' , να αναγνωρισθούν από το αποτέλεσμα οι ισοδύναμες κατανομές φορτίου και να συγκριθούν με τις εκφράσεις, από τις οποίες θα μπορούσαν να προκύψουν απευθείας.

Επίλυση: Επιλέγοντας το σημείο αναφοράς στο άπειρο, επειδή η πυκνότητα \mathbf{P} περιορίζεται σε πεπερασμένη περιοχή, οι ποσότητες που εμπλέκονται στο ολοκλήρωμα (5.2-21) είναι:

$$d\mathbf{p}' = \mathbf{P}dV' = \mathbf{i}_z P_0 \sin\left(\pi \frac{x'}{a}\right) dx' dy' dz', \quad \text{με } 0 < x' < a, \quad 0 < y' < b, \quad 0 < z' < h,$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z, \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i}_x + y'\mathbf{i}_y + z'\mathbf{i}_z, \quad \text{δηλ. } \mathbf{R} = (x-x')\mathbf{i}_x + (y-y')\mathbf{i}_y + (z-z')\mathbf{i}_z,$$

$$R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2, \quad d\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R} = P_0 \sin\left(\pi \frac{x'}{a}\right) (z-z') dx' dy' dz'.$$

Εισάγοντας τις ποσότητες αυτές στην (5.2-21), προκύπτει η ζητούμενη έκφραση για το δυναμικό:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dx' \sin\left(\pi \frac{x'}{a}\right) \int_0^b dy' \int_0^h dz' \frac{z-z'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}.$$

Η ολοκλήρωση ως προς z' μπορεί να γίνει αμέσως, με αλλαγή μεταβλητής $z' \rightarrow R^2(z')$, οπότε $dR^2 = -2(z-z')dz'$. Προκύπτει:

$$\int_0^h dz' \frac{z-z'}{\left[R^2\right]^{3/2}} = -\frac{1}{2} \int_{R^2(z'=0)}^{R^2(z'=h)} \frac{dR^2}{\left[R^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{\left[R^2\right]^{1/2}} \Big|_{R^2(z'=0)}^{R^2(z'=h)} = \frac{1}{R|_{z'=h}} - \frac{1}{R|_{z'=0}},$$

δηλαδή, το δυναμικό δίδεται και από την έκφραση:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dx' \sin\left(\pi \frac{x'}{a}\right) \int_0^b \frac{dy'}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-h)^2\right]^{1/2}} - \frac{P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dx' \int_0^b dy' (\dots) \Big|_{h=0}.$$

Πρόκειται για δύο πρακτικά ταυτόσημους όρους (ο πρώτος με το $(z-h)^2$ στον παρονομαστή, ο δεύτερος με το z^2), ο καθένας από τους οποίους έχει μορφή $(4\pi\epsilon_0)^{-1} [dQ'/R]$ και ειδικότερα:

- Εμφανίζει στον παρονομαστή τη σχετική απόσταση R στην πρώτη δύναμη, ιδιότητα που υποδηλώνει δυναμικό παραγόμενο από φορτία.
- Εμπλέκει μόνο διπλό ολοκλήρωμα, συνεπώς το αίτιο βρίσκεται σε επιφάνεια (δηλαδή, η κατανομή φορτίου είναι επιφανειακή), και δεν υπάρχει άλλου είδους κατανομή φορτίου, όπως χωρική, που θα προκαλούσε την εμφάνιση τριπλού ολοκληρώματος.

- Από τη μορφή της έκφρασης για την απόσταση R συνάγεται ότι οι μεταβλητές ολοκλήρωσης, x' και y' , αντιστοιχούν στους άξονες x και y , επειδή εμφανίζονται τα τετράγωνα των διαφορών $x-x'$ και $y-y'$, καθώς και ότι τα επιφανειακά φορτία βρίσκονται στα επίπεδα $z = h$ και $z = 0$ (από την εμφάνιση των τετραγώνων των $z-h$ και $z-z=0$).
- Τα όρια του ολοκληρώματος υποδηλώνουν ότι τα φορτία βρίσκονται στην περιοχή $0 < x' < a$, $0 < y' < b$, και στα διαφορικά αναγνωρίζεται το στοιχειώδες εμβαδόν $dS' = dx' dy'$.
- Τέλος, από τη σύγκριση με την έκφραση $\Phi = (4\pi\epsilon_0)^{-1} \int dx' dy' (\sigma_p/R)$, συνάγεται, ότι τα επιφανειακά φορτία είναι ίσα με $\sigma_p(x,y) = \pm P_0 \sin(\pi x/a)$ (αντίστοιχα στα $z = h$ και $z = 0$).

Το αποτέλεσμα ταυτίζεται με εκείνο από την εφαρμογή της σχέσης $\sigma_p = -\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-)$. Παραδείγματος χάριν, παίρνοντας $\mathbf{i}_n = \pm \mathbf{i}_z$ στις έδρες $z = h$ και $z = 0$, είναι $\mathbf{P}_+ = 0$ και $\mathbf{P}_- = \mathbf{i}_z P_0 \sin(\pi x/a)$, τόσο στο $z = h$, όσο και στο $z = 0$. Και αντίστροφα, επειδή είναι $\mathbf{P} = \mathbf{i}_z P_z$, σε κάθε άλλη έδρα είναι $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-) = 0$ και δεν αναμένεται άλλο σ_p . Επίσης, δεν παρατηρήθηκε συνεισφορά στο δυναμικό από χωρικό φορτίο, αλλά αυτό είναι συμβατό με τη σχέση $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$, που εδώ δίνει $\rho_p = -\partial P_z / \partial z = 0$.

Παράδειγμα 5.2-15: Στην κυλινδρική περιοχή $r_T < a$, $-h < z < h$ υπάρχει χωρική πυκνότητα διπολικής ροπής, ίση με $\mathbf{P} = \mathbf{i}_T P_0$. Σε χώρο όπου παντού είναι ϵ_0 , να γραφεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ , με μορφή καλά διατυπωμένου ολοκληρώματος, και ακολούθως να γίνει παραγοντική ολοκλήρωση ως προς την ακτινική θέση και στο αποτέλεσμα να αναγνωρισθούν και να ελεγχθούν τα υπεύθυνα φορτία.

Επίλυση: Τώρα είναι:

$$d\mathbf{p}' = \mathbf{P}' dV' = \mathbf{i}'_T P_0 r'_T dr'_T d\varphi' dz', \quad \text{με } 0 < r'_T < a, \quad 0 < \varphi' < 2\pi, \quad -h < z' < +h,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}_T r_T + \mathbf{i}_z z, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{i}'_T r'_T + \mathbf{i}_z z', \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{i}_T r_T - \mathbf{i}'_T r'_T + \mathbf{i}_z (z - z').$$

Στις εκφράσεις αυτές έγινε διάκριση ανάμεσα στα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{i}_T και \mathbf{i}'_T , τα οποία εξαρτώνται από τις τιμές των γωνιών φ και φ' , αντίστοιχα, και εν γένει δεν είναι, βέβαια, συγγραμμικά (εκτός αν είναι $\varphi' = \varphi$). Αντιθέτως, για το σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}_z δε χρειάζεται τέτοια διάκριση, επειδή σε κάθε περίπτωση είναι $\mathbf{i}'_z = \mathbf{i}_z$. Στο γινόμενο $d\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}$ εμπλέκονται τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{i}'_T \cdot \mathbf{i}_T = \cos(\varphi - \varphi')$, $\mathbf{i}'_T \cdot \mathbf{i}'_T = 1$ και $\mathbf{i}'_T \cdot \mathbf{i}_z = 0$. Τέλος, επειδή η γωνία φ' εμφανίζεται μόνο στο σύμπλεγμα $\varphi - \varphi'$ (και αυτό οφείλεται στην ανεξαρτησία του μέτρου P_0 της \mathbf{P} από τη γωνία φ), μπορεί να γίνει η αλλαγή μεταβλητής $\zeta = \varphi - \varphi'$. Έτσι, τελικά, με την αναφορά στο άπειρο, προκύπτει για το ηλεκτροστατικό δυναμικό η παράσταση:

$$\Phi(r_T, z) = \frac{P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-h}^h dz' \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^a dr'_T r'_T \frac{r_T \cos \xi - r'_T}{\left[r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r'_T \cos \xi + (z - z')^2 \right]^{3/2}}$$

Η σειρά ολοκλήρωσης είναι αδιάφορη, επειδή τα όρια είναι σταθερά. Ενδιαφέρει η ολοκλήρωση ως προς r'_T , για την οποία η αλλαγή μεταβλητής $r'_T \rightarrow R^2(r'_T)$ δίνει το διαφορικό $dR^2 = 2(r'_T - r_T \cos \xi) dr'_T$. Παρατηρώντας την ολοκληρωτέα παράσταση, στον αριθμητή εμφανίζεται η ποσότητα $-1/2 r'_T dR^2$, και όχι μόνο το dR^2 , πράγμα που σημαίνει ότι η αλλαγή μεταβλητής θα αφήσει και ολοκλήρωμα ως προς r'_T . Συγκεκριμένα, είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^a dr'_T r'_T \frac{r_T \cos \xi - r'_T}{\left[R^2 \right]^{3/2}} &= -\frac{1}{2} \int_{R^2(r'_T=0)}^{R^2(r'_T=a)} \frac{dR^2 r'_T (R^2)}{\left[R^2 \right]^{3/2}} = \frac{r'_T (R^2)}{\left[R^2 \right]^{1/2}} \Big|_{R^2(r'_T=0)}^{R^2(r'_T=a)} - \int_{R^2(r'_T=0)}^{R^2(r'_T=a)} \frac{dR^2}{\left[R^2 \right]^{1/2}} \frac{dr'_T}{dR^2} \\ &= \frac{r'_T}{R(r'_T)} \Big|_{r'_T=0}^{r'_T=a} - \int_0^a \frac{dr'_T}{R} = \frac{a}{\left[r_T^2 + a^2 - 2r_T a \cos \xi + (z - z')^2 \right]^{3/2}} - 0 - \int_0^a \frac{dr'_T}{R}. \end{aligned}$$

Εισάγοντας τους τρεις όρους της παραγοντικής ολοκλήρωσης στην έκφραση του δυναμικού, προκύπτει η εναλλακτική γραφή για το δυναμικό, $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$. Οι συνεισφορές είναι:

- Από το όριο $r'_T = a$ (πρώτος όρος):

$$\Phi_1(r_T, z) = \frac{P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-h}^h dz' \int_0^{2\pi} d\xi \frac{a}{\left[r_T^2 + a^2 - 2r_T a \cos \xi + (z - z')^2 \right]^{3/2}}.$$

Εύκολα αναγνωρίζεται το αίτιο, μια επιφανειακή πυκνότητα $\sigma_p = P_0$ στην επιφάνεια $r_T = a$ και $-h < z < h$ (με $dS' = a d\varphi' dz' = a d\xi dz'$), σε συμφωνία με το αναμενόμενο από τη σχέση $\sigma_p = -\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-) = -\mathbf{i}_T \cdot (0 - \mathbf{i}_T P_0|_{r_T=a}) = P_0$.

- Από το όριο $r'_T = 0$ (δεύτερος όρος), με μηδενική συνεισφορά, $\Phi_2 = 0$. Αυτό σημαίνει ότι στον άξονα $r'_T = 0$ δεν υπάρχει γραμμικό φορτίο, $\lambda_p = 0$. Και αυτό το αποτέλεσμα ταιριάζει με το αναμενόμενο $\lambda_p = -(2\pi r_T P_T)|_{r_T=0} = -(2\pi r_T P_0)|_{r_T=0} = 0$.
- Από την περιοχή $0 < r'_T < a$ (τρίτος όρος), που συνεισφέρει με το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\Phi_3(r_T, z) = -\frac{P_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-h}^h dz' \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^a \frac{dr'_T}{\left[r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r'_T \cos \xi + (z - z')^2 \right]^{3/2}}.$$

Για να σχηματισθεί ο στοιχειώδης όγκος $dV = r'_T dr'_T d\xi' dz'$, πρέπει να πολλαπλασιασθεί ο αριθμητής, άρα και ο παρονομαστής, με r'_T . Συνεπώς, η χωρική πυκνότητα είναι ίση με $\rho_p = -P_0/r_T$, στην περιοχή $r_T < a$, $-h < z < h$, $0 < \varphi < 2\pi$, όπως προκύπτει και από τη σχέση $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -(1/r_T)(\partial/\partial r_T)(r_T P_T) = -(1/r_T)(\partial/\partial r_T)(r_T P_0) = -P_0/r_T$.

Παράδειγμα 5.2-16: Στο ημισφαίριο $r = a$, $0 < \theta < \pi/2$ υπάρχει επιφανειακή πυκνότητα διπολικής ροπής, ίση με $\mathbf{p}_S = \mathbf{i}_z p_{S0}$. Να προσδιορισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό $\Phi(\mathbf{r})$ παντού στο χώρο (με ϵ_0), ως καλά διατυπωμένο ολοκλήρωμα. Ακολούθως να αντικατασταθεί η πυκνότητα \mathbf{p}_S από κατανομές φορτίων και διπολικά στρώματα (ό,τι απαιτείται) και να εκφραστεί το δυναμικό ως το άθροισμα των επί μέρους συνεισφορών.

Επίλυση: Το στοιχειώδες δίπολο είναι $d\mathbf{p}' = \mathbf{i}_z p_{S0} dS'$ στην περιοχή $0 < \theta' < \pi/2$, $0 < \phi' < 2\pi$, με $r' = a$, όπου στην προκείμενη σφαιρική επιφάνεια το στοιχείο dS' είναι ίσο με $dS' = a^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$. Η σχετική απόσταση είναι ίση με $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{i}_r r - \mathbf{i}'_r a$, κάνοντας διάκριση μεταξύ των μοναδιαίων \mathbf{i}_r και \mathbf{i}'_r , τα οποία εν γένει δεν είναι συγγραμμικά. Για το γινόμενο $d\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}$ χρειάζονται τα εσωτερικά γινόμενα των \mathbf{i}_r και \mathbf{i}'_r με το \mathbf{i}_z , ίσα αντίστοιχα με $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_r = \cos \theta$ και $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}'_r = \cos \theta'$, οπότε προκύπτει ότι $d\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R} = p_{S0} a^2 (r \cos \theta - a \cos \theta') \sin \theta' d\theta' d\phi'$. Αυτές οι εκφράσεις εισάγονται στο ολοκλήρωμα επαλληλίας (5.2-21) και με την επιλογή $r_0 = \infty$, επειδή η διπολική κατανομή δεν εκτείνεται μέχρι το άπειρο, προκύπτει το ηλεκτροστατικό δυναμικό:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{p_{S0} a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\zeta \int_0^{\pi/2} d\theta' \frac{\sin \theta' (r \cos \theta - a \cos \theta')}{[r^2 + a^2 - 2ra(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \zeta)]^{3/2}},$$

όπου ο παρονομαστής δίνει την ποσότητα R^3 (σε σφαιρικές συντεταγμένες, με $r' = a$) και έχει γίνει η αλλαγή μεταβλητής $\zeta = \phi' - \phi$.

Εναλλακτικά, η $\mathbf{p}_{S\parallel}$ μπορεί να αναλυθεί σε συνιστώσες $p_{S\perp}$ κάθετα και $\mathbf{p}_{S\parallel}$ παράλληλα προς τη σφαιρική επιφάνεια, και ακολούθως η $\mathbf{p}_{S\parallel}$ να υποκατασταθεί από κατάλληλες κατανομές φορτίων (ενώ για το διπολικό στρώμα $p_{S\perp}$ κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν), και το δυναμικό να εκφραστεί ως άθροισμα από τις επί μέρους συνεισφορές. Κατά σειρά είναι:

- Η κάθετη συνιστώσα είναι $p_{S\perp} = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{p}_{S\perp}$. Για το κάθετο προς την επιφάνεια διάνυσμα είναι γενικά αποδεκτές και οι δύο φορές, $\mathbf{i}_n = \pm \mathbf{i}_r$, οπότε η κάθετη συνιστώσα είναι $p_{S\perp} = \mathbf{i}_n \cdot \mathbf{p}_{S\perp} = \pm p_{S0} \cos \theta$, επειδή μεταξύ των \mathbf{i}_r και \mathbf{i}_z η γωνία είναι ίση με θ , και αντιπροσωπεύει διπολικό στρώμα, με $d\mathbf{p}' = \mathbf{i}'_r p_{S0} \cos \theta'$, το οποίο, βεβαίως, είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της φοράς για το \mathbf{i}_n . Για το εσωτερικό γινόμενο $d\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}$, με $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{i}_r r - \mathbf{i}'_r a$, είναι $\mathbf{i}'_r \cdot \mathbf{R} = r(\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos \zeta) - a$. Το δυναμικό που οφείλεται στο διπολικό στρώμα $p_{S\perp}$ είναι, τελικά, ίσο με:

$$\Phi_1(r, \theta) = \frac{p_{S0} a^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\zeta \int_0^{\pi/2} d\theta' \sin \theta' \cos \theta' \frac{r(\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos \zeta) - a}{[r^2 + a^2 - 2ra(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \zeta)]^{3/2}}.$$

- Η εφαπτομενική συνιστώσα $\mathbf{p}_{S\parallel}$ (ως διάνυσμα) υπολογίζεται, είτε αναλύοντας σε βαθμωτές εφαπτομενικές συνιστώσες, $\mathbf{p}_{S\parallel} = \mathbf{i}_\theta(\mathbf{p}_{S\parallel} \cdot \mathbf{i}_\theta) + \mathbf{i}_\varphi(\mathbf{p}_{S\parallel} \cdot \mathbf{i}_\varphi) = -\mathbf{i}_\theta p_{S0} \sin \theta$, επειδή $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_\theta = -\sin \theta$ και βέβαια $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_\varphi = 0$, είτε εξαιρώντας την κάθετη συνιστώσα, $\mathbf{p}_{S\parallel} = \mathbf{p}_S - \mathbf{i}_n p_{S\perp}$. Η συνιστώσα $\mathbf{p}_{S\parallel}$ μπορεί να υποκατασταθεί συνολικά από κατανομές φορτίων. Τα ενδεχόμενα είναι:

- ο Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου $\sigma_p = -\nabla \cdot \mathbf{p}_{S\parallel} = -(a \sin \theta)(\partial/\partial \theta)(p_{S\parallel} \sin \theta) = 2(p_{S0}/a) \cos \theta$, που αντιστοιχεί σε $dQ' = 2(p_{S0}/a) \cos \theta' dS'$ στην επιφάνεια $0 < \theta' < \pi/2$, $0 < \varphi' < 2\pi$, με $r' = a$. Το αντίστοιχο δυναμικό είναι ίσο με :

$$\Phi_2(r, \theta) = \frac{p_{S0} a}{2\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\xi \int_0^{\pi/2} d\theta' \frac{\sin \theta' \cos \theta'}{\left[r^2 + a^2 - 2ra(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \xi) \right]^{3/2}}.$$

- ο Γραμμικό φορτίο λ_p , ίσο με το αρνητικό ενδεχόμενης βηματικής ασυνέχειας στην $\mathbf{p}_{S\parallel}$, σε γραμμή κάθετη προς την $\mathbf{p}_{S\parallel}$. Τέτοια ασυνέχεια θα μπορούσε να εμφανισθεί, και πράγματι εμφανίζεται, στην κυκλική περιφέρεια $\theta = \pi/2$, επειδή εκεί τερματίζεται η συνιστώσα $p_{S\parallel}$, η κάθετη στη γραμμή. Η βηματική ασυνέχεια εκδηλώνεται από την τιμή $p_{S\parallel} = -p_{S0} \sin \theta = -p_{S0}$ στο $\theta = (\pi/2)^-$, επειδή $\sin \theta = 1$, μέχρι την τιμή $p_{S\parallel} = 0$ στο $\theta = (\pi/2)^+$, επειδή δεν υπάρχουν δίπολα για $\theta > \pi/2$. Δηλαδή, το γραμμικό φορτίο είναι ίσο με $\lambda_p = -[0 - (-p_{S0})] = -p_{S0}$ και παράγει δυναμικό:

$$\Phi_3(r, \theta) = \frac{-p_{S0} a}{4\pi \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{\left[r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \xi \right]^{3/2}}.$$

Στη σχέση αυτή, η απόσταση R (ο παρονομαστής) έχει πολύ απλούστερη έκφραση απ' ό,τι στις προηγούμενες σχέσεις, επειδή εδώ το φορτίο λ_p είναι στη γωνιακή θέση $\theta' = \pi/2$, συνεπώς $\sin \theta' = 1$ και $\cos \theta' = 0$.

- ο Σημειακό φορτίο q_p , σε σημεία με απλό απειρισμό της $\mathbf{p}_{S\parallel}$ (της συνιστώσας που είναι ακτινική σε σχέση με το σημείο απειρισμού). Όμως, η $\mathbf{p}_{S\parallel}$ περιγράφεται από συνεχή συνάρτηση, δεν απειρίζεται πουθενά, άρα είναι $q_p = 0$ και $\Phi_4 = 0$.

Συνολικά, η εναλλακτική περιγραφή του δυναμικού Φ είναι από το άθροισμα $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$, αντίστοιχα λόγω του διπολικού στρώματος $p_{S\perp}$, του επιφανειακού φορτίου σ_p και του γραμμικού φορτίου λ_p , ενώ δεν εκδηλώνεται σημειακό φορτίο q_p και είναι $\Phi_4 = 0$.

Σχόλιο: Το διπολικό στρώμα $p_{S\perp} = p_{S0} \cos \theta$ δεν είναι σταθερό, συνεπώς το δυναμικό δεν μπορεί να προσδιορισθεί γεωμετρικά μέσω της στερεής γωνίας Ω . Αλλά, ακόμα και αν ήταν $p_{S\perp} = \text{σταθ.}$, η επιφάνεια δεν έχει σχήμα πρόσφορο για να υπολογισθεί η Ω γεωμετρικά.

Παράδειγμα 5.2-17: Σε επιφάνεια κυλίνδρου με ακτίνα a και ύψος h (τόσο στην παράπλευρη κυλινδρική επιφάνεια, όσο και στις δύο βάσεις), υπάρχει διπολικό στρώμα, με σταθερή διπολική ροπή $p_{S\perp} = p_{S\perp 0}$ και με φορά προς τα έξω. Ο χώρος έχει παντού επιτρεπτότητα ϵ_0 . Να προσδιορισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό παντού στο χώρο.

Επίλυση: Το σχήμα της επιφάνειας με το διπολικό στρώμα επιτρέπει να προσδιορισθεί το δυναμικό μέσω της στερεής γωνίας Ω . Θα εξετασθούν χωριστά τα δύο ενδεχόμενα, να βρίσκεται το σημείο παρατήρησης Σ στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του κυλίνδρου.

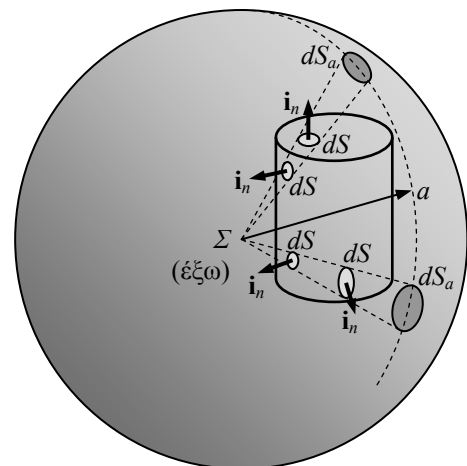
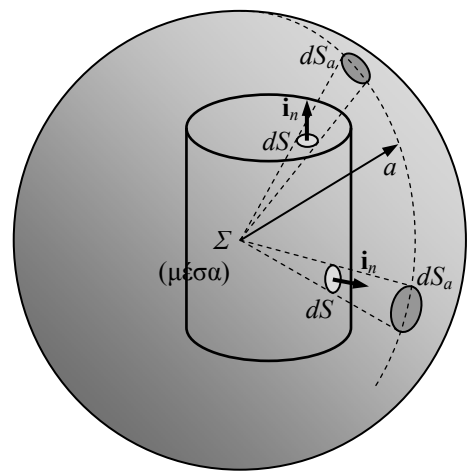
Όταν το σημείο Σ βρίσκεται μέσα στον κύλινδρο, τότε από το Σ κάθε στοιχείο dS της επιφάνειας του κυλίνδρου προβάλλεται σε αντίστοιχο στοιχείο dS_a σφαιρικής επιφάνειας (με ακτίνα a και κέντρο στο Σ), και μάλιστα όλα τα dS_a συναποτελούν σφαιρική επιφάνεια με εμβαδόν $4\pi a^2$. Συνεπώς, η στερεή γωνία έχει μέτρο $|\Omega| = S_a/a^2 = 4\pi$. Για τη δεδομένη φορά της $p_{S\perp}$ προς τα έξω, από το Σ φαίνεται η αρνητική όψη της επιφάνειας του κυλίνδρου, άρα η στερεή γωνία είναι θετική, $\Omega = +4\pi$. Συνεπώς, το δυναμικό μέσα στον κύλινδρο είναι:

$$\Phi_{\text{μέσα}} = \frac{p_{S\perp}}{4\pi\epsilon_0} (+4\pi) = \frac{p_{S\perp}}{\epsilon_0}.$$

Αντίθετα, όταν το σημείο Σ βρίσκεται έξω από τον κύλινδρο, τότε από το Σ ο κύλινδρος προβάλλεται μόνο σε τμήμα σφαιρικής επιφάνειας (με κέντρο το Σ και ακτίνα a), αλλά σε κάθε dS_a αντιστοιχούν δύο dS , από τα οποία του ενός φαίνεται η αρνητική και του άλλου η θετική όψη. Αυτή η αμοιβαία αναίρεση έχει σαν αποτέλεσμα τα $d\Omega$ να εξουδετερώνονται σε ζεύγη και να είναι συνολικά $\Omega = 0$. Συνεπώς, το δυναμικό σε σημεία έξω από τον κύλινδρο είναι ίσο με:

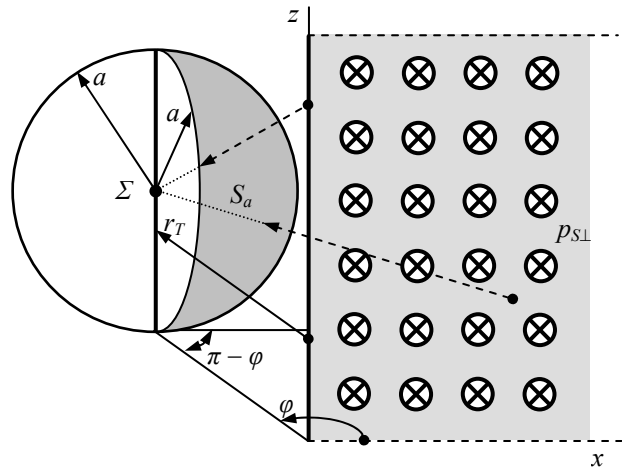
$$\Phi_{\text{έξω}} = \frac{p_{S\perp}}{4\pi\epsilon_0} 0 = 0.$$

Σχόλιο: Στην επιφάνεια του κυλίνδρου, εκεί που βρίσκεται το διπολικό στρώμα, επιβεβαιώνεται η ασυνέχεια $\Phi_+ - \Phi_- = \Phi_{\text{μέσα}} - \Phi_{\text{έξω}} = p_{S\perp 0}/\epsilon_0$.



Παράδειγμα 5.2-18: Στο ημιεπίπεδο $\varphi = 0$ υπάρχει διπολικό στρώμα, με σταθερή διπολική ροπή $p_{S\perp} = p_{S\perp 0}$ και με φορά ομόρροπη με το διάνυσμα \mathbf{i}_φ . Όλος ο χώρος έχει επιτρεπτότητα ίση με ϵ_0 . Να προσδιορισθεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό παντού.

Επίλυση: Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, το σχήμα της επιφάνειας με το διπολικό στρώμα επιτρέπει να προσδιορισθεί το δυναμικό μέσω της στερεής γωνίας Ω . Ας υποτεθεί αρχικά, πως το σημείο παρατήρησης Σ βρίσκεται στο διάστημα $0 < \varphi < \pi$, σε κάποια ακτινική απόσταση r_T από τον άξονα z (το όριο του ημιεπιπέδου). Τότε, σε σφαίρα με ακτίνα a και κέντρο στο Σ , το ημιεπίπεδο με το διπολικό στρώμα προβάλλεται σε σφαιρικό τμήμα (το σκιασμένο στο σχήμα), το οποίο οριοθετείται από επίπεδο παράλληλο προς το $\varphi = 0$ (μέσω του οποίου προβάλλονται στο Σ οι περιοχές του ημιεπιπέδου στο άπειρο) και από το επίπεδο που περιέχει τον άξονα z και το σημείο Σ (μέσω του οποίου προβάλλεται στο Σ ο άξονας z , το πεπερασμένο όριο του ημιεπιπέδου). Το σφαιρικό τμήμα αντιστοιχεί σε επίπεδη γωνία ίση με $\pi - \varphi$, οπότε το εμβαδόν του είναι κλάσμα, ίσο με $(\pi - \varphi)/2\pi$, του εμβαδού $4\pi a^2$ της σφαίρας. Συνεπώς, το εμβαδόν του σφαιρικού τμήματος είναι ίσο με $S_a = [(\pi - \varphi)/2\pi](4\pi a^2)$ και διαιρώντας με το a^2 η στερεά γωνία είναι ίση με $\Omega = -2(\pi - \varphi)$, αρνητική, επειδή από το Σ φαίνεται η θετική όψη του ημιεπιπέδου με τη διπολική ροπή.



Μέχρι εδώ έχει υποτεθεί ότι είναι $0 < \varphi < \pi$. Αν, τώρα, είναι $\pi < \varphi < 2\pi$, τότε από το Σ το ημιεπίπεδο φαίνεται σε επίπεδη γωνία $(\varphi - \pi)$, που αντιστοιχεί σε στερεή γωνία με μέτρο $|\Omega| = 2(\varphi - \pi)$. Όμως, τώρα, φαίνεται η αρνητική όψη του ημιεπιπέδου με τη διπολική ροπή, συνεπώς, είναι $\Omega = 2(\varphi - \pi)$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι $\Omega = -2(\pi - \varphi)$ και το δυναμικό είναι ίσο με:

$$\Phi(\varphi) = \frac{p_{S\perp 0}}{4\pi\epsilon_0} 2(\pi - \varphi) = \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) \frac{p_{S\perp 0}}{2\epsilon_0}.$$

Ας σημειωθεί ότι η γωνία φ περιορίζεται αυστηρά στο διάστημα $0 < \varphi < 2\pi$ και $\Phi(\varphi + 2\pi)$ δεν έχει νόημα, λόγω της παρουσίας του διπολικού στρώματος στο $\varphi = 0$ που ταυτίζεται με το $\varphi = 2\pi$. Επίσης, εκ των υστέρων διαπιστώνεται ότι η έκφραση $\Phi(\varphi)$ μηδενίζεται όταν $\varphi = \pi$, που σημαίνει ότι το αποτέλεσμα αντιστοιχεί σε σημείο αναφοράς με $\varphi_0 = \pi$.

5.2.3 Σημειακές σχέσεις για το δυναμικό Φ σε διηλεκτρικά

Το ολοκλήρωμα επαλληλίας, είτε αναφέρεται σε κατανομές φορτίου, είτε σε κατανομές ηλεκτρικών διπόλων, που εισάχθηκε στις προηγούμενες παραγράφους επιτρέπει να γραφεί το ηλεκτροστατικό δυναμικό με κλειστή μορφή, εφόσον ικανοποιούνται δύο προϋποθέσεις:

- Ο χώρος είναι ομογενής, χαρακτηρίζεται δηλαδή από την ίδια τιμή της επιτρεπτότητας ϵ .
- Τα αίτια (κατανομές φορτίων ή διπόλων) είναι γνωστά.

Στις εφαρμογές συνήθως και οι δύο προϋποθέσεις δεν ικανοποιούνται, ούτε καν προσεγγιστικά. Κατ' αρχάς, η μόνη «φυσιολογική» περίπτωση να είναι ο χώρος ομογενής συναντάται όταν ολόκληρος ο χώρος έχει ιδιότητες κενού, $\epsilon = \epsilon_0$. Συνήθως, όμως, σε διαφορετικές περιοχές του χώρου υπάρχουν διαφορετικά ομογενή υλικά, οπότε η επιτρεπτότητα είναι μόνο τμηματικά σταθερή, $\epsilon(\mathbf{r} \in V_j) = \epsilon_j$, ενώ μη ομογενή υλικά συναντώνται πιο σπάνια. Όσον αφορά στα αίτια πάλι, συνήθως αυτά δεν είναι γνωστά, αλλά παράγονται από τα πεδία με βάση και τις ιδιότητες των υλικών, οπότε εξαρτώνται από την κατανομή του ζητούμενου ηλεκτροστατικού δυναμικού Φ .

Σε τέτοιες περιπτώσεις, στις οποίες δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το ολοκλήρωμα επαλληλίας, η επίλυση για το δυναμικό Φ γίνεται μέσω των σημειακών σχέσεων (διαφορικών εξισώσεων και συνθηκών σε επιφάνεια, γραμμή ή σημείο), ενώ η έλλειψη πληροφοριών για τις συγκεκριμένες τιμές των φορτίων ή διπόλων που αναπτύσσονται στα όρια των υλικών υποκαθίσταται από τη διατύπωση ενός «προβλήματος οριακών τιμών», όπως θα παρουσιασθεί εκτενέστερα στο επόμενο Κεφ. 6.

Διαφορικές εξισώσεις για το δυναμικό Φ : Όπως έχει παρουσιασθεί στην παράγρ. 5.1, η σχέση $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, συνδυάζεται με το νόμο του Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$, ώστε το ηλεκτροστατικό δυναμικό να συνδεθεί με τα φορτία. Στην περίπτωση γραμμικού ιστροπικού υλικού με πρόσθετη μόνιμη πόλωση $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$, η συντακτική σχέση είναι $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}$ (εννοώντας $\epsilon \rightarrow \epsilon_\Delta$, όταν είναι $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} \neq 0$). Όταν η επιτρεπτότητα ϵ (ή ϵ_Δ) είναι συνάρτηση του χώρου, $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$, το δυναμικό Φ υπακούει στη διαφορική εξίσωση (5.1-2), ελαφρώς γενικευμένη, δηλαδή:

$$\nabla \cdot (\epsilon(\mathbf{r})\nabla\Phi) = -\rho(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}. \quad (5.2-35)$$

Ειδικότερα, σε κάθε περιοχή του χώρου, όπου το μέσο είναι ομογενές ($\nabla\epsilon = 0$), η σχέση αυτή μετατρέπεται στην εξίσωση του Poisson:

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = -\frac{1}{\epsilon} [\rho(\mathbf{r}) - \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mu\text{ov}}], \quad \text{όταν } \nabla\epsilon = 0, \quad (5.2-36)$$

όπου ∇^2 είναι ο τελεστής του *Laplace*. Συνήθως, τα διηλεκτρικά είναι μονωτές και στο εσωτερικό τους δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία, δηλαδή $\rho = 0$, ενώ η παρουσία μόνιμης πόλωσης είναι εξαιρετικά σπάνια. Τότε, το δυναμικό Φ περιγράφεται από την εξίσωση του *Laplace*:

$$\nabla^2\Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi) = 0, \quad \text{όταν } \nabla\varepsilon = 0 \text{ και επίσης } \rho(\mathbf{r}) = 0 \text{ και } \mathbf{P}_{\text{μον}} = 0. \quad (5.2-37)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, η πυκνότητα ρ , αν υπάρχει, θεωρείται γνωστή, ή, έστω, θεωρείται γνωστός ο μηχανισμός που τη συνδέει με το δυναμικό (Φ) και αναφέρεται μόνο στα ελεύθερα φορτία, ενώ η πυκνότητα διπολικής ροπής $\mathbf{P}_{\text{μον}}$ περιλαμβάνει μόνο τη μόνιμη πόλωση ενδεχόμενου ηλεκτρήτη και, γενικότερα, εξωτερικά επιβαλλόμενη πυκνότητα διπολικής ροπής, που δεν εξαρτάται από την ένταση του πεδίου \mathbf{E} , ενώ η παρουσία των λοιπών φορτίων πόλωσης περιγράφεται από την επιτρεπτότητα ε , ή ε_{Δ} .

Ο **τελεστής του *Laplace*** συμβολίζεται με ∇^2 και όταν δρα σε βαθμωτή ποσότητα, όπως εδώ το δυναμικό Φ , ορίζεται ως η απόκλιση της κλίσης, $\nabla^2\Phi = \nabla \cdot (\nabla\Phi)$. Η γενική έκφραση της Λαπλασιανής σε ένα τρισσορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.4 του Μέρους Α. Στα τρία βασικά συστήματα συντεταγμένων, οι αναλυτικές εκφράσεις είναι:

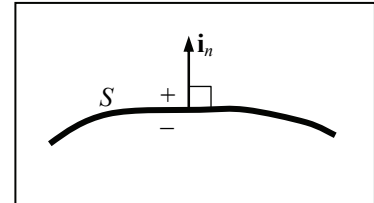
$$\begin{aligned} \nabla^2\Phi &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \frac{\partial\Phi}{\partial r_T} \right) + \frac{1}{r_T^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}. \end{aligned} \quad (5.2-38)$$

Πρόκειται για γραμμικό διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης, ο οποίος εκφράζεται ως άθροισμα με τρεις όρους (εκτός, βέβαια, αν οι παράγωγοι γινομένων αναλυθούν περαιτέρω).

Οριακές συνθήκες: Ως διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, η εξίσωση (5.2-35) και οι επόμενες ειδικές περιπτώσεις συνοδεύονται από πληροφορίες για τη συνέχεια τόσο της τιμής του δυναμικού Φ , όσο και της παραγώγου του, που είναι το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Εν γένει, τόσο το δυναμικό Φ , όσο και η παράγωγός του είναι συναρτήσεις με ενδεχόμενες ασυνέχειες μόνο σε επιφάνειες, γραμμές ή σημεία με συγκεντρώσεις φορτίων ή διπόλων, ή με αλλαγές στις ιδιότητες του χώρου, που ισοδυναμούν με συγκεντρωμένα φορτία πόλωσης. Η ενδεχόμενη ασυνέχεια του δυναμικού Φ οφείλεται στην παρουσία διπολικών κατανομών,

όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ενώ η ασυνέχεια στην παράγωγο του Φ (στο ηλεκτρικό πεδίο) συνδέεται με την παρουσία φορτίων και προσδιορίζεται από τις συνθήκες που συνοδεύουν το νόμο του Gauss. Για να διατυπωθούν οι σχέσεις που προσδιορίζουν τις ασυνέχειες σε τέτοιες επιφάνειες κλπ., χρησιμοποιούνται οι καθιερωμένοι συμβολισμοί που επαναλαμβάνονται στα **Σχήματα 5.2-12** έως **14**.

Συνθήκες σε επιφάνεια: Οι δύο όψεις της επιφάνειας S ονομάζονται, κατά τα καθιερωμένα “+” και “-”, με οποιοδήποτε κριτήριο, και το κάθετο διάνυσμα \mathbf{i}_n λαμβάνεται με φορά από την όψη “-” προς την όψη “+”, βλ. **Σχήμα 5.2-12**. Με τους συμβολισμούς αυτούς, στην οριακή συνθήκη που συνδέεται με το νόμο του Gauss, $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{D}_+ - \mathbf{D}_-) = \sigma$, είναι $\mathbf{D}_\pm = \epsilon_\pm \mathbf{E}_\pm + \mathbf{P}_{\text{mov},\pm}$ σε κάθε όψη (με $\epsilon_\pm \rightarrow \epsilon_{\Delta\pm}$, αν είναι $\mathbf{P}_{\text{mov},\pm} \neq 0$) και από τον ορισμό του δυναμικού είναι $\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{E}_\pm = -\mathbf{i}_n \cdot (\nabla \Phi)_\pm = -(\partial \Phi / \partial n)_\pm$. Έτσι, προκύπτει η συνθήκη για την κάθετο παράγωγο $\partial \Phi / \partial n$ του δυναμικού:



Σχήμα 5.2-12

$$\epsilon_+ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_+ - \epsilon_- \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_- = -\sigma(\mathbf{r}_S) + \mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{P}_{\text{mov},+} - \mathbf{P}_{\text{mov},-}). \quad (5.2-39)$$

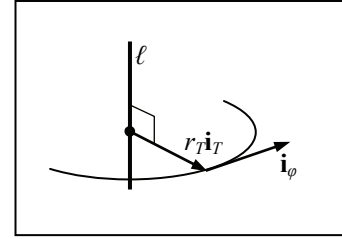
Υπενθυμίζεται ότι οι δείκτες “ \pm ” υποδηλώνουν τις τιμές οριακά κοντά στην επιφάνεια (στην αντίστοιχη όψη της). Στη δεξιά πλευρά, στην πυκνότητα σ περιλαμβάνεται το ελεύθερο φορτίο, το οποίο ενδεχομένως βρίσκεται στην επιφάνεια, καθώς και το ισοδύναμο φορτίο $-\nabla \cdot \mathbf{p}_{S\parallel}$ εφαπτομενικής διπολικής ροπής, η οποία ενδεχομένως βρίσκεται στην επιφάνεια αυθυπόστατα και συνεπώς εκδηλώνεται πλήρως σαν ελεύθερο φορτίο, ενώ η συνεισφορά από ενδεχόμενη μόνιμη πόλωση \mathbf{P}_{mov} στις παρακείμενες περιοχές εμφανίζεται ως χωριστός όρος.

Η συνθήκη για την ασυνέχεια στην τιμή του δυναμικού θα διατυπωθεί ολοκληρώνοντας $\Phi_+ - \Phi_- = -\int^+ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ μεταξύ των δύο όψεων της S . Η διαδρομή έχει πρακτικά μηδενικό μήκος, οπότε το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης αναμένεται μηδενικό, εκτός αν στο εσωτερικό της επιφάνειας το ηλεκτρικό πεδίο απειρίζεται. Αυτό μπορεί να συμβεί αν η επιφάνεια έχει διπολικό στρώμα $p_{S\perp}$. Όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο, τότε το δυναμικό έχει ασυνέχεια, που περιγράφεται από τη σχέση (5.2-31):

$$\Phi_+ - \Phi_- = \frac{p_{S\perp}(\mathbf{r}_S)}{\epsilon_p}, \quad (5.2-40)$$

όπου ϵ_p είναι η επιτρεπτότητα στο εσωτερικό του διπολικού στρώματος.

Οι συνθήκες σε γραμμή ℓ διατυπώνονται, ταυτίζοντας τοπικά τη γραμμή με τον άξονα z και χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες (r_T, φ, ℓ) , όπως στο **Σχήμα 5.2-13**. Τότε, στην έκφραση του νόμου του *Gauss* σε γραμμή, λαμβάνοντας υπ' όψιν χωριστά το φορτίο πόλωσης που αντιστοιχεί στη μόνιμη πόλωση $\mathbf{P}_{\text{μov}}$ ενδεχόμενου ηλεκτρήτη (και τότε νοείται $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_{\Delta}$), δίνει τη συνθήκη για την ακτινική παράγωγο του δυναμικού,



Σχήμα 5.2-13

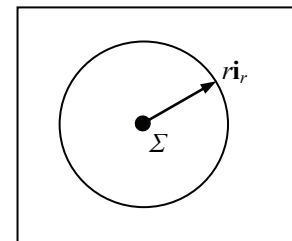
$$\left[r_T \frac{\partial}{\partial r_T} \int_0^{2\pi} d\varphi \varepsilon \Phi \right]_{r_T \rightarrow 0} = -\lambda(\ell) + \left[r_T \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{P}_{\text{μov}} \right]_{r_T \rightarrow 0} . \quad (5.2-41)$$

Αντίστοιχα με την προηγούμενη περίπτωση, η γραμμική πυκνότητα φορτίου λ αναφέρεται στα ελεύθερα φορτία, αλλά νοείται ότι περιλαμβάνει και το $\lambda_p = -\mathbf{i}_{\perp \ell} \cdot (\mathbf{p}_{S||+} - \mathbf{p}_{S||-})$ που οφείλεται σε ενδεχόμενη πυκνότητα $\mathbf{p}_{S||}$ με ασυνέχεια στη γραμμή ℓ , καθώς και το $\lambda_p = -\partial p_{\ell||} / \partial \ell$ που αντιστοιχεί σε μεταβολές ενδεχόμενης $p_{\ell||}$, τοποθετημένης στη γραμμή. Αν υπάρχουν τέτοιες πυκνότητες, είναι αυθυπόστατες, ανεξάρτητες από τη μόνιμη πόλωση του παρακείμενου υλικού, και συνεπώς συμπεριφέρονται ως ελεύθερα φορτία.

Όσον αφορά την τιμή του δυναμικού, εκδηλώνεται απειρισμός, αν στη γραμμή υπάρχει διπολικό στρώμα. Πολύ κοντά στη γραμμή, ο χώρος φαίνεται ομογενής και το διπολικό στρώμα μοιάζει σταθερό και με άπειρο μήκος, οπότε το αποτέλεσμα (5.2-26) μπορεί να εφαρμοσθεί. Γενικεύοντας ελαφρώς, θεωρείται ότι η ροπή του διπολικού στρώματος έχει διεύθυνση που προσδιορίζεται από τη γωνία $\varphi_{p\ell}$, οπότε το δυναμικό υπόκειται στη συνθήκη:

$$(2\pi \varepsilon r_T \Phi) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = p_{\ell \perp} \cos(\varphi - \varphi_{p\ell}) = \mathbf{i}_T \cdot \mathbf{p}_{\ell \perp}(\ell) . \quad (5.2-42)$$

Συνθήκες σε σημείο: Αντίστοιχα με τα προηγούμενα, το σημείο Σ λαμβάνεται τοπικά ως η αρχή σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων (r, θ, φ) , βλ. **Σχήμα 5.2-14**. Εφαρμόζοντας το νόμο του *Gauss* σε σημείο, η ενδεχόμενη παρουσία ηλεκτρήτη στον παρακείμενο χώρο, με απειρισμό ($\sim r^2$) στην ακτινική συνιστώσα της μόνιμης πόλωσης $\mathbf{P}_{\text{μov}}$ εκδηλώνεται ως σημειακό φορτίο, με αποτέλεσμα η συνθήκη για την παράγωγο του δυναμικού να είναι:



Σχήμα 5.2-14

$$\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \varepsilon \Phi \right]_{r \rightarrow 0} = -q + \left[r^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{P}_{\text{μov}} \right]_{r \rightarrow 0} . \quad (5.2-43)$$

Στο σημειακό φορτίο q περιλαμβάνονται και τα q_p που αντιστοιχούν σε απειρισμό ($\sim r^{-1}$) ενδεχόμενης πυκνότητας $\rho_{S\parallel}$, ή σε βηματική ασυνέχεια ενδεχόμενης $\rho_{\ell\parallel}$, όπως έχει παρουσιασθεί στην παράγρ. 1.3.1 του Μέρους Α. Και αυτά τα q_p εκδηλώνονται ως ελεύθερα φορτία.

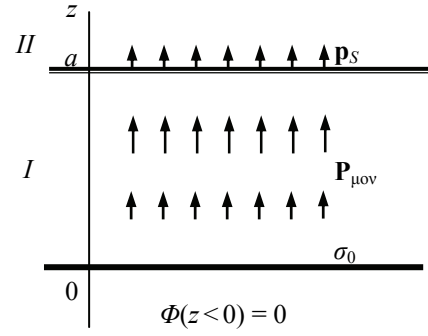
Επιπλέον, αν στο σημείο αυτό υπάρχει σημειακό δίπολο με διπολική ροπή \mathbf{p} , από τη σχέση (5.2-19) προκύπτει ότι θα υπάρχει και απειρισμός στην τιμή του δυναμικού, που (με δεδομένο ότι απειροστά κοντά στο Σ ο χώρος συμπεριφέρεται ως ομογενής) προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\left(4\pi\epsilon r^2\Phi\right)\Big|_{r\rightarrow 0} = \mathbf{i}_r \cdot \mathbf{p}. \quad (5.2-44)$$

Σύγκριση σημειακών σχέσεων με ολοκληρώματα επαλληλίας: Τα ολοκληρώματα επαλληλίας για το δυναμικό Φ , το οποίο προέρχεται από φορτία dQ ή από ηλεκτρικά δίπολα $d\mathbf{p}$, όπως παρουσιάστηκαν στις δύο προηγούμενες παραγράφους, εφαρμόζονται μόνο σε χώρο με σταθερή τιμή ϵ για την επιτρεπτότητα (πρακτικά όταν είναι παντού $\epsilon = \epsilon_0$). Στην παρούσα παράγραφο, οι διαφορικές εξισώσεις, καθώς και οι οριακές συνθήκες για την παράγωγο του δυναμικού, διατυπώθηκαν χρησιμοποιώντας το νόμο του *Gauss*, ο οποίος επιδέχεται μεταβολές στο ϵ . Επίσης, σε συγκεντρωμένες κατανομές ρ , $\rho_{\ell\perp}$ ή $\rho_{S\perp}$ χρησιμοποιήθηκαν οι εκφράσεις που δίνουν το δυναμικό σε ομογενή χώρο, με $\rho_{\ell\perp}$ ή $\rho_{S\perp}$ σταθερά και με άπειρο μήκος ή έκταση, όμως αυτές οι εκφράσεις εφαρμόστηκαν μόνο πολύ κοντά στις κατανομές αυτές, εκεί απ' όπου ο χώρος φαίνεται ως ομογενής και με $\rho_{\ell\perp}$ ή $\rho_{S\perp}$ σταθερά κλπ., ώστε να διατυπωθούν οι εκφράσεις για την ασυνέχεια του δυναμικού σε τέτοιες κατανομές. Συνεπώς, οι σημειακές σχέσεις της παρούσας παραγράφου είναι γενικές, σε αντίθεση με τα ολοκληρώματα επαλληλίας που εφαρμόζονται μόνο με τις προϋποθέσεις που έχουν αναφερθεί, και τότε αντιπροσωπεύουν τη λύση του συστήματος των σημειακών σχέσεων με κλειστή μορφή).

Επειδή ο τελεστής του *Laplace* εκφράζεται ως άθροισμα τριών μερικών παραγώγων, δεν είναι δυνατή η επίλυση των σημειακών σχέσεων με άμεση ολοκλήρωση. Διάφορες τεχνικές για το χειρισμό προβλημάτων που εμπλέκουν την εξίσωση του *Laplace* περιγράφονται στα επόμενα δύο Κεφάλαια. Προς το παρόν, απλά και μόνο ως μία πρώτη εξοικείωση με τις σημειακές σχέσεις, στα *παραδ. 5.2-19* έως *21* παρουσιάζονται επιλύσεις μονοδιάστατων διατάξεων, στις οποίες από τις συμμετρίες φαίνεται ότι δύο από τους τρεις προσθετέους που σχηματίζουν τη Λαπλασιανή $\nabla^2\Phi$ είναι ίσοι με μηδέν και η επίλυση είναι εφικτή με στοιχειώδεις ολοκληρώσεις. Σε τέτοιες μονοδιάστατες διατάξεις είναι πολύ πιο απλός ο χειρισμός με τις σημειακές σχέσεις, αντί να εφαρμοσθούν τα ολοκληρώματα επαλληλίας.

Παράδειγμα 5.2-19: Στο επίπεδο $z = 0$ βρίσκεται επιφανειακό φορτίο $\sigma = \sigma_0$, στο χώρο $0 < z < a$ υπάρχει ηλεκτρήτης με $\mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = \mathbf{i}_z P_0 \sin(\pi z/2a)$ και $\epsilon_\Delta = \epsilon_0$ και στο επίπεδο $z = a$ βρίσκεται διπολικό στρώμα με $\mathbf{p}_S = \mathbf{i}_z p_{S0}$. Η περιοχή $z > 0$ είναι κενή (με ϵ_0), ενώ για την περιοχή $z < 0$, όπου επίσης $\epsilon = \epsilon_0$, είναι γνωστό ότι $\Phi(z) = 0$.

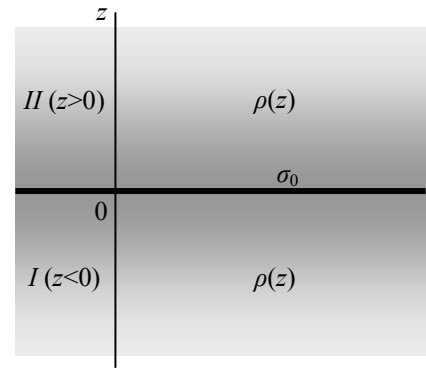


Ζητείται το δυναμικό Φ παντού στο χώρο.

Επίλυση: Όλα τα δεδομένα (φορτία και δίπολα, καθώς και διάταξη χώρου) εξαρτώνται μόνο από τη συντεταγμένη z , δηλαδή είναι $\Phi = \Phi(z)$ και $\nabla^2 \Phi = d^2 \Phi/dz^2$. Είναι γνωστό ότι στην περιοχή $z < 0$ είναι $\Phi(z) = 0$, οπότε και $d\Phi/dz = 0$, συνεπώς κατάλληλη αφηρησία είναι το επίπεδο $z = 0$, για το οποίο στην όψη $z = 0^-$ (που ανήκει στην περιοχή $z < 0$) είναι $\Phi(z = 0^-) = 0$ και $\partial\Phi/\partial z|_{z=0^-} = 0$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τις οριακές συνθήκες (για την τιμή και την παράγωγο) σε κάθε επιφάνεια και ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση σε κάθε περιοχή, προκύπτει:

- Επίπεδο $z = 0$, με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$, οπότε $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial z$:
 $\epsilon_0 \partial\Phi/\partial z|_{z=0^+} = \epsilon_0 \partial\Phi/\partial z|_{z=0^-} - \sigma_0 \Rightarrow \partial\Phi/\partial z|_{z=0^+} = -\sigma_0/\epsilon_0$,
 $\Phi(z = 0^+) = \Phi(z = 0^-) + 0$ (επειδή δεν υπάρχει διπολικό στρώμα) $\Rightarrow \Phi(z = 0^+) = 0$.
- Περιοχή $0 < z < a$, στην οποία $\epsilon_0 d^2 \Phi/dz^2 = \nabla \cdot \mathbf{P}_{\mu\text{ov}} = (\pi P_0/2a) \cos(\pi z/2a)$, με τις τιμές των Φ και $\partial\Phi/\partial n$ στην όψη $z = 0^+$ γνωστές από το προηγούμενο βήμα:
 $\epsilon_0 d\Phi/dz|_z = \epsilon_0 d\Phi/dz|_{z=0^+} + \int_0^z (\epsilon_0 d^2 \Phi/dz^2) dz = -\sigma_0 + P_0 \sin(\pi z/2a) - 0$,
 $\Phi(z) = \Phi(z = 0^+) + \int_0^z (d\Phi/dz) dz = 0 - (\sigma_0/\epsilon_0)(z - 0) + (2aP_0/\pi\epsilon_0)[1 - \cos(\pi z/2a)]$.
- Επίπεδο $z = a$, πάλι με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$, οπότε $\partial\Phi/\partial n = \partial\Phi/\partial z$, και με τις τιμές των Φ και $\partial\Phi/\partial n$ στην όψη $z = a^-$ γνωστές από την επίλυση στην περιοχή $0 < z < a$:
 $\epsilon_0 \partial\Phi/\partial z|_{z=a^+} = \epsilon_0 \partial\Phi/\partial z|_{z=a^-} + (0 - P_z(z = a^-))$
 $\Rightarrow \epsilon_0 \partial\Phi/\partial z|_{z=a^+} = -\sigma_0 + P_0 \sin(\pi z/2a)|_{z=a^-} - P_0 \sin(\pi z/2a)|_{z=a^-} = -\sigma_0$,
 $\Phi(z = a^+) = \Phi(z = a^-) + p_{S0}/\epsilon_0$
 $\Rightarrow \Phi(z = a^+) = -(\sigma_0/\epsilon_0)z|_{z=a^-} + (2aP_0/\pi\epsilon_0)[1 - \cos(\pi z/2a)|_{z=a^-}] + p_{S0}/\epsilon_0$
 $= -(\sigma_0 a/\epsilon_0) + 2aP_0/\pi\epsilon_0 + p_{S0}/\epsilon_0$.
- Περιοχή $z > a$, στην οποία $\epsilon_0 d^2 \Phi/dz^2 = 0$, με τις τιμές των Φ και $\partial\Phi/\partial n$ στην όψη $z = a^+$ γνωστές από την επίλυση του προηγούμενου βήματος (στο επίπεδο $z = a$):
 $\epsilon_0 d\Phi/dz|_z = \epsilon_0 d\Phi/dz|_{z=a^+} + \int_a^z (\epsilon_0 d^2 \Phi/dz^2) dz = -\sigma_0$,
 $\Phi(z) = \int_a^z (d\Phi/dz) dz + \Phi(z = a^+) = \dots = -\sigma_0 z/\epsilon_0 + (2aP_0/\pi\epsilon_0) + p_{S0}/\epsilon_0$.

Παράδειγμα 5.2-20: Στο επίπεδο $z = 0$ υπάρχει σταθερή επιφανειακή πυκνότητα σ_0 , ενώ στον υπόλοιπο χώρο υπάρχει άγνωστη χωρική πυκνότητα ρ , με τιμή ομόσημη και ανάλογη προς το δυναμικό, δηλαδή $\rho(z) = (\epsilon_0/\ell^2)\Phi(z)$, όπου ℓ είναι σταθερή ποσότητα με διαστάσεις μήκους και για το δυναμικό θεωρείται πως το σημείο αναφοράς έχει ληφθεί στο άπειρο $z = \pm\infty$. Όλος ο χώρος χαρακτηρίζεται από επιτρεπτότητα ϵ_0 .



Ζητείται η κατανομή του δυναμικού $\Phi(z)$ και της πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου $\rho(z)$.

Επίλυση: Αμέσως φαίνεται ότι πρόκειται για μονοδιάστατη διάταξη, δηλαδή $\nabla^2\Phi = d^2\Phi/dz^2$. Η εξίσωση του Poisson, $\nabla^2\Phi = \rho/\epsilon_0$, παίρνει τη μορφή $d^2\Phi/dz^2 = (1/\ell^2)\Phi(z)$. Οι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης είναι $\{\exp(+z/\ell), \exp(-z/\ell)\}$, με άλλα λόγια η γενική λύση έχει τη μορφή:

$$\Phi(z < 0) = A_- \exp(+z/\ell) + B_- \exp(-z/\ell),$$

$$\Phi(z > 0) = A_+ \exp(+z/\ell) + B_+ \exp(-z/\ell),$$

Οι σταθερές μπορούν να έχουν διαφορετικές τιμές, A_{\mp} και B_{\mp} στις δύο περιοχές $I (z < 0)$ και $II (z > 0)$, επειδή μεταξύ των δύο περιοχών παρεμβάλλεται το φορτισμένο επίπεδο $z = 0$.

Προκειμένου να είναι $\Phi(z = -\infty) = 0$, πρέπει να είναι $B_- = 0$, όπως αμέσως φαίνεται θέτοντας $z = -\infty$ στη έκφραση για το $\Phi(z < 0)$, δηλαδή είναι $\Phi(z < 0) = A_- \exp(+z/\ell)$. Ακριβώς αντίστοιχα, πρέπει να είναι $A_+ = 0$, ώστε $\Phi(z = +\infty) = 0$, δηλαδή $\Phi(z > 0) = B_+ \exp(-z/\ell)$.

Εισάγοντας τις εκφράσεις $\Phi(z)$ στις συνθήκες για τη διαχωριστική επιφάνεια $z = 0$, στην οποία υπάρχει επιφανειακό φορτίο σ_0 , αλλά όχι διπολικό στρώμα, σχηματίζεται γραμμικό σύστημα για τους συντελεστές A_- και B_+ :

$$\Phi(z = 0^+) - \Phi(z = 0^-) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_+ = A_-$$

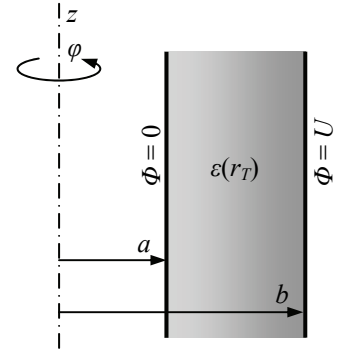
$$\epsilon_0 \partial\Phi/\partial z|_+ - \epsilon_0 \partial\Phi/\partial z|_- = -\sigma_0 \quad \Rightarrow \quad -\epsilon_0 B_+/\ell = \epsilon_0 A_-/\ell - \sigma_0,$$

από την επίλυση του οποίου αμέσως προκύπτει ότι $B_+ = A_- = -\sigma_0 \ell / 2\epsilon_0$. Συνεπώς, το δυναμικό και ακολούθως η πυκνότητα φορτίου γράφονται (ενιαία και για τις δύο περιοχές):

$$\Phi(z) = -\frac{\sigma_0 \ell}{2\epsilon_0} \exp\left(-\frac{|z|}{\ell}\right), \quad \rho(z) = -\frac{\sigma_0}{2\ell} \exp\left(-\frac{|z|}{\ell}\right).$$

Το δυναμικό και το ηλεκτρικό φορτίο κατανέμονται συμμετρικά ως προς το επίπεδο $z = 0$.

Παράδειγμα 5.2-21: Σε μία διάταξη εκ περιστροφής ως προς τον άξονα z , ο χώρος $r_T < a$ είναι γειωμένος, δηλαδή εκεί είναι $\Phi(r_T < a) = 0$, ενώ στο χώρο έξω από την κυλινδρική επιφάνεια $r_T = b$ ($> a$) εφαρμόζεται δυναμικό $\Phi(r_T > b) = U$. Ο ενδιάμεσος χώρος έχει μη ομογενές διηλεκτρικό υλικό με επιτρεπτότητα $\varepsilon(r_T) = \varepsilon_0 b/r_T$.



Ζητείται το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ στον ενδιάμεσο χώρο, καθώς και οι επιφανειακές πυκνότητες σ_a και σ_b , οι οποίες επάγονται στις οριακές επιφάνειες $r_T = a$ και $r_T = b$ αντίστοιχα.

Επίλυση: Επειδή η επιτρεπτότητα δεν είναι σταθερή, το δυναμικό δεν περιγράφεται από την εξίσωση του Laplace (στην παρούσα περίπτωση είναι $\nabla^2 \Phi \neq 0$, μολονότι $\rho = 0$), αλλά από την εξίσωση $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = 0$. Η διάταξη (σχήμα, επιτρεπτότητα, τιμές δυναμικού στα όρια) χαρακτηρίζεται από ανεξαρτησία από τη γωνία φ και τη θέση z , είναι δηλαδή μονοδιάστατη, με $\Phi = \Phi(r_T)$. Τότε, είναι $\nabla \Phi = \mathbf{i}_T (\partial/\partial r_T) \Phi$ και η εξίσωση $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \Phi) = 0$ γίνεται:

$$\frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} \left(r_T \varepsilon(r_T) \frac{\partial \Phi}{\partial r_T} \right) = 0.$$

Η πρώτη ολοκλήρωση δίνει $r_T \varepsilon(r_T) (\partial \Phi / \partial r_T) = A = \text{σταθ.}$, όπου ο προσδιορισμός της σταθεράς A θα αναβληθεί προς το παρόν, επειδή στα δεδομένα δεν υπάρχει πληροφορία για την τιμή της παραγώγου σε κάποια ακτινική θέση. Ολοκληρώνοντας άλλη μία φορά, τώρα με αφετηρία στην ακτίνα $r_T = a^+$, όπου είναι $\Phi(r_T = a^+) = 0$ (επειδή είναι $\Phi(r_T < a) = 0$ και στην επιφάνεια $r_T = a$ δεν υπάρχει διπολικό στρώμα που θα προκαλούσε ασυνέχεια), προκύπτει:

$$\Phi(r_T) = \Phi(r_T = a^+) + \int_a^{r_T} \frac{A dr'_T}{r'_T \varepsilon(r'_T)} = 0 + \frac{A}{\varepsilon_0} \int_a^{r_T} \frac{dr'_T}{b} = \frac{A}{\varepsilon_0} \frac{r_T - a}{b}.$$

Τώρα, η σταθερά A μπορεί να προσδιορισθεί, χρησιμοποιώντας τη συνθήκη $\Phi(r_T = b^-) = U$ (πάλι επειδή $\Phi(r_T > b) = U$ και στην επιφάνεια $r_T = b$ δεν υπάρχει διπολικό στρώμα), που δίνει την ισότητα $(A/\varepsilon_0)[(b-a)/b] = U$, συνεπώς $A = \varepsilon_0 U b / (b-a)$. Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

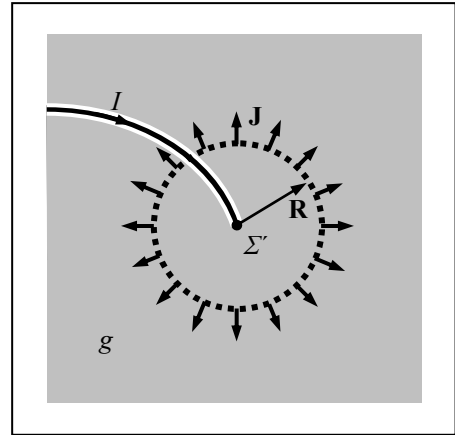
$$\Phi(r_T) = U \frac{r_T - a}{b - a}.$$

Οι πυκνότητες σ_a και σ_b προσδιορίζονται από την οριακή συνθήκη για την παράγωγο $\partial \Phi / \partial n$. Επειδή στις περιοχές $r_T < a$ και $r_T > b$ είναι $\partial \Phi / \partial r_T = 0$, αμέσως προκύπτει ότι $\sigma_a = -A/a$ και $\sigma_b = A/b$, όπου η σταθερά A έχει ήδη προσδιορισθεί. [Το ηλεκτρικό πεδίο είναι $\mathbf{E} = -\mathbf{i}_T \partial \Phi / \partial r_T = -\mathbf{i}_T A / \varepsilon_0 b$, σταθερό για την παρούσα εξάρτηση $\varepsilon(r_T)$. Αντίθετα, η πυκνότητα ηλεκτρικής ροής, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{i}_T A / r_T$, ανακτά την εξάρτηση $D_T \sim 1/r_T$, ώστε να είναι $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0$.]

5.2.4 Ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ σε αγώγιμα υλικά

Μόνιμη ροή ηλεκτρικού ρεύματος: Σε αγώγιμα υλικά, η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος συνδέεται, κατά κανόνα, με την ένταση ηλεκτρικού πεδίου με το νόμο του *Ohm*, $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$, όπου g [S/m] είναι η ειδική αγωγιμότητα. Όταν επικρατεί μόνιμη κατάσταση ($\partial/\partial t = 0$), θα είναι $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ και το ηλεκτρικό πεδίο θα μπορεί να περιγραφεί μέσω του ηλεκτροστατικού δυναμικού Φ , ως $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, ανεξάρτητα από το ποια είναι τα αίτια που το παράγουν.

Πηγές ηλεκτρικού ρεύματος: Για την πυκνότητα ηλεκτρικής ροής \mathbf{D} σε διηλεκτρικό υλικό, το στοιχειώδες αίτιο είναι ένα σημειακό φορτίο q . Για την πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος σε αγώγιμο υλικό ως στοιχειώδες αίτιο μπορεί να θεωρηθεί η σημειακή πηγή \dot{q} . Για να περιγραφεί η υλοποίηση μιας τέτοιας πηγής, ας θεωρηθεί (βλ. **Σχήμα 5.2-15**) ότι στο εσωτερικό του αγώγιμου υλικού βρίσκεται ένας αγωγός με ρεύμα I , νηματοειδής και πλευρικά με επαρκή μόνωση, ώστε η παρουσία του, και το ρεύμα I που διέρχεται από αυτόν, να μην παρενοχλεί τη ροή ρεύματος στο αγώγιμο υλικό. Αν σε κάποιο σημείο Σ' τερματίζεται ο νηματοειδής αγωγός και η μόνωσή του, τα φορτία που μεταφέρονται μέσω του νηματοειδούς αγωγού, όπως αυτά περιγράφονται από το ρεύμα I , απελευθερώνονται και εκλύονται στον παρακείμενο χώρο με το αγώγιμο υλικό ως χωρική πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} . Το αγώγιμο υλικό αντιλαμβάνεται, δηλαδή, ότι στο σημείο Σ' «παράγονται» φορτία με ρυθμό \dot{q} *Coulomb* ανά δευτερόλεπτο (C/sec). Βέβαια, τα φορτία αυτά δεν «παράγονται», αλλά απλώς διοχετεύονται στο αγώγιμο υλικό, προερχόμενα από το νηματοειδή αγωγό. Προφανώς, από τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου, σε μόνιμη κατάσταση όσο φορτίο ανά δευτερόλεπτο διοχετεύεται μέσω του ρεύματος I , τόσο εκλύεται ως \dot{q} . Η ισότητα αυτή αποδίδεται από τη σχέση $\dot{q} = I$.



Σχήμα 5.2-15

Δυναμικό από σημειακή πηγή \dot{q} : Όταν το αγώγιμο υλικό έχει σταθερή ειδική αγωγιμότητα g και τα όριά του είναι μακριά από το σημείο Σ' με την πηγή \dot{q} , τότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις για σφαιρική συμμετρία ως προς το σημείο Σ' , και η χωρική πυκνότητα \mathbf{J} θα έχει τη μορφή $\mathbf{J} = \mathbf{i}_R J(R)$, όπου $\mathbf{i}_R = \mathbf{R}/R$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα συγγραμμικό με την απόσταση \mathbf{R} από το σημείο Σ' . Σε σφαιρική επιφάνεια *Gauss*, ο νόμος διατήρησης φορτίου, $\oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = 0$ (με $\partial/\partial t = 0$) δίνει $(4\pi R^2)J(R) - I = 0$, συνεπώς $J(R) = I/(4\pi R^2)$. Από τη συντακτική σχέση προκύπτει το ηλεκτρικό πεδίο, $\mathbf{E} = (1/g)\mathbf{J}$, και ολοκληρώνοντας από κάποιο σημείο

αναφοράς \mathbf{r}_0 , όπου $\Phi(\mathbf{r}_0) = 0$, μέχρι το σημείο \mathbf{r} , με διαδικασία ταυτόσημη με εκείνη που ακολουθήθηκε για την εξαγωγή της σχέσης (5.2-7), προκύπτει, τελικά, η έκφραση για το δυναμικό σημειακής πηγής σε ομογενές αγωγίμο υλικό:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{\dot{q}}{4\pi g} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right]. \quad (5.2-45)$$

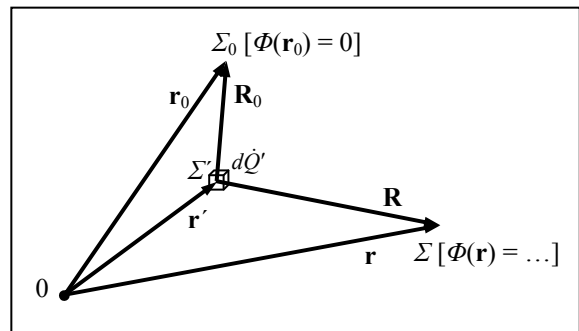
Κατά τα καθιερωμένα, R και R_0 είναι οι αποστάσεις του σημείου υπολογισμού του δυναμικού και του σημείου αναφοράς από τη θέση της σημειακής πηγής \dot{q} .

Ολοκλήρωμα επαλληλίας: Στο αγωγίμο υλικό θα μπορούσαν να εκλύονται ανά δευτερόλεπτο φορτία \dot{q}_j σε διάφορα σημεία Σ_j , οπότε το δυναμικό θα περιγράφεται από άθροιση εκφράσεων, όπως η (5.2-45). Παρόμοια, τα φορτία θα μπορούσαν να εκλύονται όχι μόνο σημειακά (ως \dot{q}), αλλά κατανεμημένα σε μία διάσταση (ως $\dot{\lambda}$, όπως όταν ο αγωγός προσάγει το ρεύμα σε ράβδο που είναι σε αγωγήμη επαφή με το αγωγίμο υλικό), ή σε δύο διαστάσεις (ως $\dot{\sigma}$) ή ακόμα και σε τρεις διαστάσεις (ως $\dot{\rho}$). Θεωρώντας την πηγή απειροστή, $\dot{q} \rightarrow d\dot{Q}$, θα είναι $d\dot{Q}' = \{ \dot{\rho}(\mathbf{r}')dV', \dot{\sigma}(\mathbf{r}'_S)dS, \dot{\lambda}(\ell')d\ell' \text{ ή } \dot{q} \}$, όπου έχει εισαχθεί πάλι η σύμβαση να αντιπροσωπεύουν οι τονισμένες μεταβλητές τις θέσεις των αιτίων. Εφόσον το αγωγίμο υλικό έχει σταθερή ειδική αγωγιμότητα g και μεγάλη, πρακτικά άπειρη, έκταση, το δυναμικό σε τέτοιες περιπτώσεις με κατανεμημένο αίτιο θα είναι:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi g} \int d\dot{Q}' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right). \quad (5.2-46)$$

Συνολικά, οι συμβολισμοί είναι οι ίδιοι που έχουν εισαχθεί στο **Σχήμα 5.2-3** και που παρουσιάζονται πάλι στο **Σχήμα 5.2-16**. Συγκεκριμένα:

- \mathbf{r} = Θέση Σ προσδιορισμού δυναμικού,
- \mathbf{r}' = Θέση Σ' με την πηγή $d\dot{Q}'$,
- \mathbf{r}_0 = Θέση Σ_0 σημείου αναφοράς,
- $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ = Θέση προσδιορισμού δυναμικού, σε σχέση με θέση πηγής,
- $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'$ = Θέση σημείου αναφοράς, σε σχέση με θέση πηγής,
- $R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ = Απόσταση Σ από $d\dot{Q}'$,
- $R_0 = |\mathbf{R}_0| = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|$ = Απόσταση Σ_0 από $d\dot{Q}'$.



Σχήμα 5.2-16

Το δυναμικό από κατανομές πηγών υπολογίζεται στα **παραδ. 5.2-22** και **23**.

Σημειακές σχέσεις: Το ολοκλήρωμα επαλληλίας μπορεί να εφαρμοσθεί, όταν η ειδική αγωγιμότητα g είναι σταθερή σε ολόκληρο το χώρο. Αυτή η απαίτηση περιορίζει την εφαρμοσιμότητά του μόνο σε περιοχές κοντά στις πηγές και μακριά από τα όρια του αγωγικού και αποκλείει τη χρήση του ευρύτερα, σε οποιαδήποτε πραγματική διάταξη, στην οποία τουλάχιστο μέρος της θα περιλαμβάνει μονωτές με $g_0 = 0$. Για γενική εφαρμογή κατάλληλες είναι οι σημειακές σχέσεις. Η διατύπωσή τους προκύπτει με την ίδια διαδικασία, όπως για τα διηλεκτρικά υλικά στην παράγρ. 5.2.3. Από τη σύγκριση των συντακτικών σχέσεων $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ και $\mathbf{J} = g \mathbf{E}$, καθώς και των ολοκληρωμάτων επαλληλίας, που προβάλλουν οι αντιστοιχίες $\epsilon \rightarrow g$ και $dQ \rightarrow d\dot{Q}$, οι σημειακές σχέσεις μπορούν να γραφούν αμέσως, χρησιμοποιώντας τους καθιερωμένους συμβολισμούς (**Σχήμα 5.2-17**):

- Σε όλα τα σημεία του χώρου (εκτός από επιφάνειες κλπ. με ιδιαιτερότητες):

$$\nabla \cdot (g(\mathbf{r}) \nabla \Phi) = -\dot{\rho}(\mathbf{r}), \quad (5.2-47)$$

και στη συνηθισμένη περίπτωση με $g = \text{σταθ.}$ (έστω και τμηματικά, με τις ενδεχόμενες βηματικές ασυνέχειες να καλύπτονται από τη συνθήκη σε επιφάνεια) και $\dot{\rho} = 0$:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0, \quad \text{όταν } \nabla g = 0 \text{ και επίσης } \dot{\rho} = 0. \quad (5.2-48)$$

- Σε όλα τα σημεία κάθε επιφάνειας, αλλά ιδίως σε επιφάνειες με κατανεμημένες πηγές ή με αλλαγή στις ιδιότητες του χώρου (εκτός από γραμμές κλπ. με ιδιαιτερότητες):

$$g_+ \left. \frac{\partial \Phi_+}{\partial n} \right|_+ - g_- \left. \frac{\partial \Phi_-}{\partial n} \right|_- = -\dot{\sigma}(\mathbf{r}_s). \quad (5.2-49)$$

$$\Phi_+ - \Phi_- = 0. \quad (5.2-50)$$

- Σε όλα τα σημεία κάθε γραμμής, αλλά ιδίως σε γραμμές με κατανεμημένες πηγές (εκτός από σημεία με ιδιαιτερότητες):

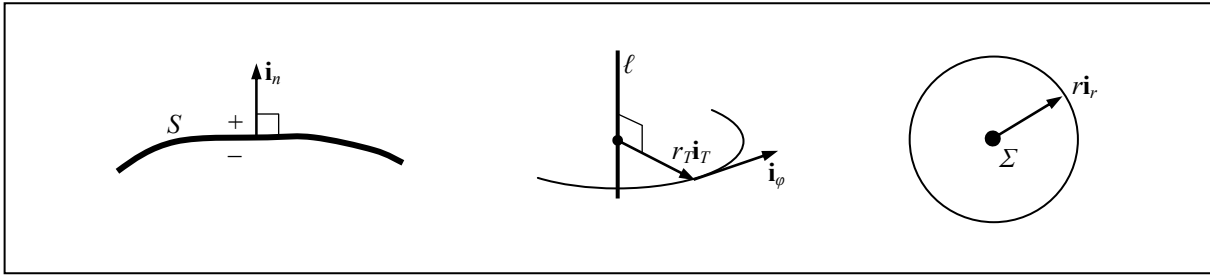
$$\left[r_T \frac{\partial}{\partial r_T} \int_0^{2\pi} d\varphi g \Phi \right]_{r_T \rightarrow 0} = -\dot{\lambda}(l), \quad (5.2-51)$$

$$(r_T g \Phi) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = 0. \quad (5.2-52)$$

- Σε κάθε σημείο, αλλά ιδίως σε σημεία με συγκεντρωμένες πηγές:

$$\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi g \Phi \right]_{r \rightarrow 0} = -\dot{q}, \quad (5.2-53)$$

$$(r^2 g \Phi) \Big|_{r \rightarrow 0} = 0. \quad (5.2-54)$$

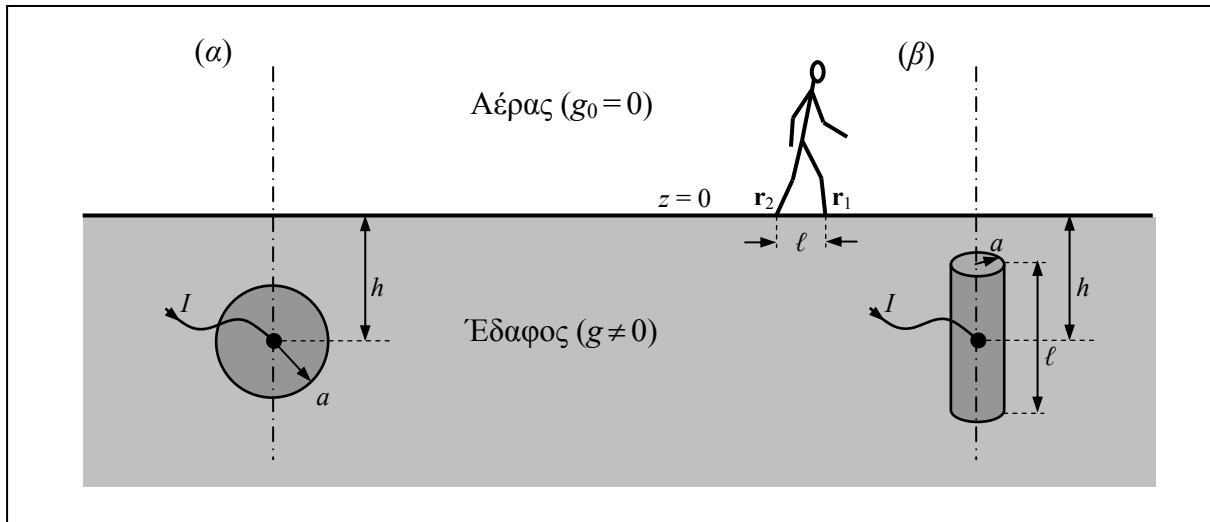


Σχήμα 5.2-17

Τα κατανομημένα αίτια γράφηκαν $\rho(\mathbf{r})$, $\dot{\sigma}(\mathbf{r}_S)$, $\dot{\lambda}(\ell)$, ως συναρτήσεις των συντεταγμένων που καθορίζουν, με ποιο τρόπο κατανέμεται στο χώρο η απελευθέρωση των φορτίων. Συνήθως, η εξάρτηση αυτή δεν είναι γνωστή, αλλά αποτελεί μέρος των αγνώστων ενός προβλήματος οριακών τιμών (όπως οι αντίστοιχες ποσότητες $\rho(\mathbf{r})$, $\sigma(\mathbf{r}_S)$, $\lambda(\ell)$, σε διατάξεις με διηλεκτρικά υλικά). Ως προς τη χωρική πυκνότητα $\dot{\rho}(\mathbf{r})$, όπως άλλωστε και για τη $\rho(\mathbf{r})$, μη μηδενική τιμή της αποτελεί μάλλον εξαίρεση σε πρακτικές εφαρμογές. Ως προς την επιφανειακή πυκνότητα $\dot{\sigma}(\mathbf{r}_S)$, όπως και για τη $\sigma(\mathbf{r}_S)$, η κατανομή της προσδιορίζεται από τη σχέση (5.2-49) και εκ των υστέρων, αφού έχει υπολογισθεί το δυναμικό. [Η επιφάνεια εκπομπής αποτελεί συνήθως το όριο υλικού με πολύ υψηλή ειδική αγωγιμότητα g_∞ , ώστε εκεί να μπορεί να ληφθεί $\mathbf{E} = \mathbf{J}/g_\infty = 0$ και $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$, συνεπώς ότι το δυναμικό εκεί έχει σταθερή τιμή. Η πληροφορία που είναι γνωστή στην επιφάνεια εκπομπής είναι αυτή η σταθερή τιμή του δυναμικού, και όχι η κατανομή $\dot{\sigma}(\mathbf{r}_S)$.] Τέλος, σε διεπιφάνειες μεταξύ στρωμάτων, όπου υπάρχει βηματική ασυνέχεια στην ειδική αγωγιμότητα, εκεί συνήθως είναι $\dot{\sigma}(\mathbf{r}_S) = 0$, αλλά επάγεται πυκνότητα $\sigma(\mathbf{r}_S)$, όπως έχει περιγραφεί στο Μέρος Α, παράγρ. 2.2.4 (σελ. 212).

Οι σχέσεις (5.2-47) έως (5.2-54) μπορούν να γενικευθούν, ώστε να συνεισφέρουν και διπολικές πηγές, όπως οι $\dot{\mathbf{p}}$, $\dot{\mathbf{p}}_{\ell\perp}(\ell)$, ή $\dot{p}_{S\perp}(\mathbf{r}_S)$, με αποτέλεσμα την πλήρη αντιστοιχία με τις σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου. [Η σημειακή διπολική πηγή $\dot{\mathbf{p}}$ μπορεί να περιγραφεί ως δύο σημειακές πηγές, με $\dot{q}_\pm = \pm I$, σε μικρή απόσταση \mathbf{d} μεταξύ τους, κλπ.]

Γειωτές: Είναι διατάξεις με μεταλλικά αντικείμενα στο έδαφος, στα οποία προσάγεται ρεύμα I , από κεραυνό ή από διαρροή ηλεκτρικής εγκατάστασης, ώστε το εκλυόμενο φορτίο να διασπαρεί στο αγωγίμο έδαφος. Παραδείγματα είναι ο σφαιρικός γειωτής, βλ. **Σχήμα 5.2-18α**, ή ο κυλινδρικός, βλ. **Σχήμα 5.2-18β**. [Επειδή σε διατάξεις γειωτών δεν έχει όλος ο χώρος την ίδια τιμή για την ειδική αγωγιμότητα g (στον αέρα είναι $g_0 = 0$, ενώ στο έδαφος είναι $g \neq 0$), δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το ολοκλήρωμα επαλληλίας. Η επίλυση μπορεί να γίνει με τη μέθοδο του κατοπτρισμού, σε συνδυασμό με πρόβλημα οριακών συνθηκών.]

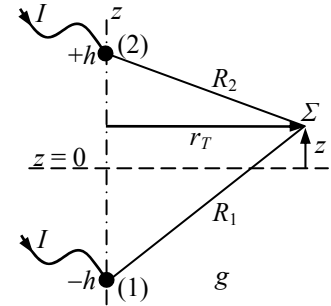


Σχήμα 5.2-18

Παράμετροι που χαρακτηρίζουν μία διάταξη γειωτή είναι:

- Αντίσταση γείωσης:** Ο γειωτής βρίσκεται σε θέση με δυναμικό Φ_{Γ} , ενώ στο άπειρο είναι $\Phi_{\infty} = 0$, άρα η τάση είναι $U_{\Gamma} = \Phi_{\Gamma} - \Phi_{\infty} = \Phi_{\Gamma}$. Στο αγώγιμο έδαφος ρέει συνολικά ρεύμα I , από τον γειωτή προς το άπειρο, συνεπώς το έδαφος συμπεριφέρεται ως αντιστάτης, με «αντίσταση γείωσης» $R_{\Gamma} = \Phi_{\Gamma}/I$ (ανεξάρτητη από το ρεύμα I). Η αντίσταση αυτή είναι σε σειρά με τη συνολική αντίσταση $R_{εξ}$ του εξωτερικού κυκλώματος, μέσω του οποίου προσάγεται το ρεύμα I .
- Βηματική τάση:** Στην ελεύθερη επιφάνεια του εδάφους $z = 0$, το δυναμικό είναι κάποια συνάρτηση των (x, y) ή των (r_T, φ) , που προσδιορίζεται από την έκφραση $\Phi(\mathbf{r})$ του δυναμικού με $z = 0$. Δύο σημεία $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ στο έδαφος θα έχουν μεταξύ τους διαφορά δυναμικού $\Delta\Phi = \Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2)$. Αν η απόσταση $\ell = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ αντιπροσωπεύει, βλ. **Σχήμα 5.2-18**, το βήμα ενός ανθρώπου που περπατά στο έδαφος (συνήθως $\ell \approx 0,75$ m), τότε ο άνθρωπος αυτός υποβάλλεται σε τάση ίση με $\Delta\Phi$. Η μέγιστη τιμή της $\Delta\Phi$ (σε κάθε θέση \mathbf{r}_S για απόσταση ℓ) ονομάζεται «βηματική τάση». Η βηματική τάση είναι ανάλογη προς το προσηγόμενο ρεύμα I και μπορεί να γραφεί ως $(\Delta\Phi)_{\max} = IR_{\Gamma}f(\mathbf{r}_S)$, όπου $f = f(x, y)$ ή $f = f(r_T, \varphi)$ είναι συνάρτηση των συντεταγμένων της επιφάνειας του εδάφους, η οποία εξαρτάται και από τη γεωμετρία του γειωτή. Το ρεύμα I είναι ίσο με $I = U_{εξ}/(R_{εξ} + R_{\Gamma})$, εξαρτώμενο από την τάση $U_{εξ}$ που προκαλεί τη διαρροή. Συνολικά, $(\Delta\Phi)_{\max} = U_{εξ}[R_{\Gamma}/(R_{εξ} + R_{\Gamma})]f(\mathbf{r}_S)$. Για το δυσμενέστερο ενδεχόμενο (μέγιστο $U_{εξ}$) πρέπει η βηματική τάση να μην υπερβαίνει το όριο ασφάλειας έναντι ηλεκτροπληξίας. Αν αυτό δεν είναι εφικτό, πρέπει να εμποδίζεται η προσπέλαση στην περιοχή, όπου το $\Delta\Phi$ υπερβαίνει αυτό το όριο.

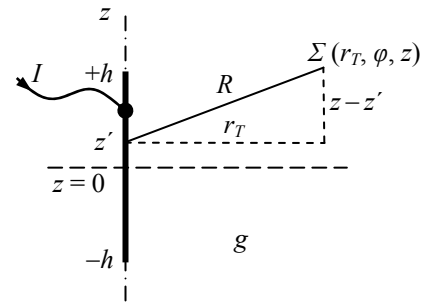
Παράδειγμα 5.2-22: Σε δύο σημειακές πηγές σε απόσταση $2h$ προσάγεται ρεύμα I στην καθεμία (και συνεπώς εκλύεται φορτίο $\dot{q} = I$ από κάθε πηγή). Ο παρακείμενος χώρος έχει σταθερή ειδική αγωγιμότητα g . Ζητείται το δυναμικό Φ σε ολόκληρο το χώρο.



Επίλυση: Ας θεωρηθεί ότι οι δύο σημειακές πηγές βρίσκονται στον άξονα z και συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, δηλαδή, ότι είναι στις θέσεις $r_T = 0, z = \mp h$. Η τυχαία θέση (r_T, φ, z) απέχει από τις τονισμένες θέσεις των πηγών, $r_T' = 0$ και $z' = \mp h$, αποστάσεις $R_{1,2}$, όπου $R_{1,2}^2 = r_T^2 + (z \pm h)^2$. Η επιλογή $\mathbf{r}_0 = \infty$ για το σημείο αναφοράς (ώστε να είναι $1/R_0 = 0$) είναι αποδεκτή, επειδή από το άπειρο το αίτιο δεν φαίνεται ούτε ως $\dot{\lambda}$, ούτε ως $\dot{\sigma}$, με πεπερασμένη τιμή στο άπειρο. Αθροίζοντας τη συνεισφορά των δύο αιτίων, προκύπτει το ζητούμενο δυναμικό:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \frac{I}{4\pi g} \sum_{\pm} \frac{1}{\sqrt{r_T^2 + (z \pm h)^2}}.$$

Παράδειγμα 5.2-23: Σε ευθύγραμμη ράβδο με μήκος $2h$, η οποία βρίσκεται στο εσωτερικό αγωγίμου υλικού με σταθερή ειδική αγωγιμότητα g , προσάγεται ρεύμα I που υποτίθεται πως εκλύεται ομοιόμορφα από το μήκος της ράβδου. Ζητείται το δυναμικό Φ .



Επίλυση: Πρόκειται για νηματοειδή πηγή, με $\dot{\lambda} = I/2h$, επειδή το φορτίο θεωρείται πως εκλύεται ομοιόμορφα σε μήκος $2h$. Ας τοποθετηθεί η ράβδος στον άξονα z , συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Με την επιλογή αυτή, η στοιχειώδης πηγή θα εκλύει $d\dot{Q}' = \dot{\lambda} dz'$, στις τονισμένες θέσεις $r_T' = 0, -h < z' < +h$. Για τη σχετική απόσταση είναι $R^2 = r_T^2 + (z - z')^2$, οπότε με αναφορά στο $\mathbf{r}_0 = \infty$ το δυναμικό γράφεται ως:

$$\Phi(r_T, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi g} \frac{I}{2h} \int_{-h}^{+h} \frac{dz'}{\sqrt{r_T^2 + (z - z')^2}}.$$

Το ολοκλήρωμα είναι απλό, επειδή το αίτιο είναι κατανεμημένο σε γραμμή, και τα όρια της ολοκλήρωσης είναι τα άκρα της γραμμής με το αίτιο.

Σχόλιο: Το ολοκλήρωμα είναι δυνατόν να εκφραστεί με τη βοήθεια στοιχειωδών συναρτήσεων, με την αλλαγή μεταβλητής $z' - z = r_T \sinh \psi, dz' = r_T \cosh \psi d\psi$ κλπ. Η διαδικασία, που δεν είναι εδώ το κύριο ζητούμενο, παρουσιάζεται στο **παράδ. 6.2-4**.

5.2.5 Δυναμικό $\Phi_{επ}$ για το επαγωγικό ηλεκτρικό πεδίο

Το επαγωγικό ηλεκτρικό πεδίο (βλ. παράγρ. 2.3.5 στο Μέρος Α) παράγεται από χρονικές μεταβολές της μαγνητικής ροής, και όχι από ηλεκτρικά φορτία. Με $\mathbf{D}_{επ} = \epsilon \mathbf{E}_{επ}$ ή οποιαδήποτε άλλη σχέση συνδέει τα πεδία $\mathbf{D}_{επ}$ και $\mathbf{E}_{επ}$, περιγράφεται από τις εξισώσεις:

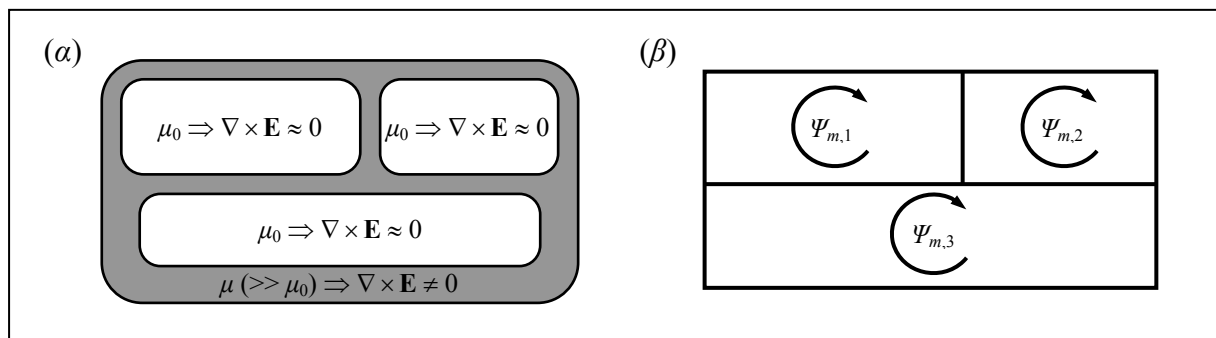
Ολοκληρωτικά (σε βρόχο ℓ με όριο την ανοικτή S , σε κλειστή επιφάνεια S , αντίστοιχα):

$$\oint_{\ell} \mathbf{E}_{επ} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad \oint_S \mathbf{D}_{επ} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (5.2-55)$$

Σημειακά (με τις συνοδούς οριακές συνθήκες):

$$\nabla \times \mathbf{E}_{επ} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D}_{επ} = 0. \quad (5.2-56)$$

Βρόχοι μαγνητικής ροής: Στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται υλικά με μεγάλη τιμή της μαγνητικής διαπερατότητας μ ($\gg \mu_0$), για να περιορισθεί η μαγνητική ροή $\Psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ στο εσωτερικό τους και να διοχετευθεί, ώστε να αξιοποιηθεί στα διάκενα. Αντίθετα, στον υπόλοιπο χώρο η μαγνητική διαπερατότητα, συνήθως, είναι ίση με μ_0 και, εν πάση περιπτώσει, έχει πολύ μικρές τιμές, με συνέπεια εκεί, αλλά όχι στα διάκενα, η πυκνότητα μαγνητικής ροής να είναι $\mathbf{B}_0 \ll \mathbf{B}$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει $\mathbf{B}_0 \approx 0$, συνεπώς, ιδίως όταν η χρονική μεταβολή είναι αργή, εκεί είναι $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}_0 / \partial t \approx 0$, βλ. **Σχήμα 5.2-19α**. Επίσης, συνήθως αυτοί οι μαγνητικοί κλάδοι έχουν μικρή διατομή, με συνέπεια να μπορούν να θεωρηθούν νηματοειδείς. Το αποτέλεσμα είναι ένα μαγνητικό κύκλωμα, όπως στο **Σχήμα 5.2-19β**. Αντλώντας έννοιες από τη θεωρία κυκλωμάτων, το κύκλωμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από βρόχους, τρεις στο **Σχήμα 5.2-19β**, και σε κάθε βρόχο i μπορεί να αποδοθεί η «μαγνητική ροή» $\Psi_{m,i}$, όπως στα ηλεκτρικά κυκλώματα σε κάθε βρόχο i αποδίδεται το ρεύμα I_i , για την επίλυσή του με τη μέθοδο των βρόχων. Με τη χρονική μεταβολή τους, οι μαγνητικές ροές όλων των βρόχων συνεισφέρουν στη δημιουργία του επαγωγικού ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα 5.2-19

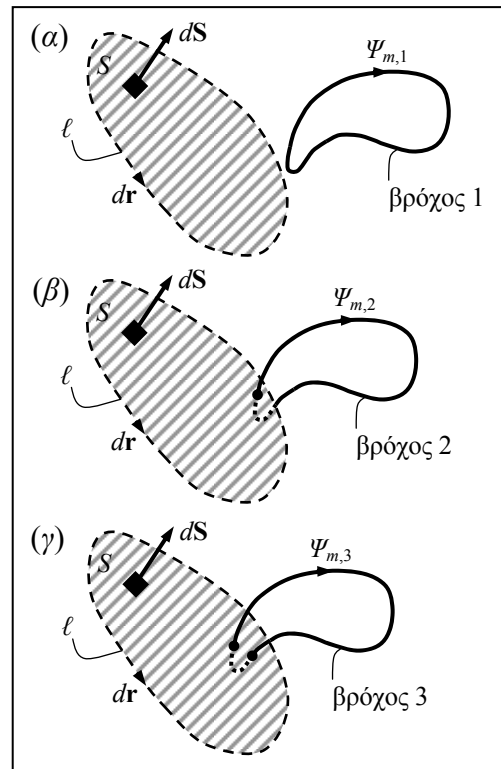
Κυκλοφορία επαγωγικού ηλεκτρικού πεδίου: Η ιδιότητα $\nabla \times \mathbf{E}_{\text{επ}} = 0$ στο χώρο με $\mu_0 \ll \mu$ επιτρέπει να εισαχθεί εκεί το «επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό» $\Phi_{\text{επ}}$, τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{E}_{\text{επ}} = -\nabla\Phi_{\text{επ}}, \quad (5.2-57)$$

όπως ακριβώς και για το ηλεκτροστατικό δυναμικό στη σχέση (5.2-1). Αντιστροφή της τελευταίας σχέσης είναι η (5.2-3), η οποία με όρους επαγωγικού ηλεκτρικού πεδίου θα γραφόταν $\Phi_{\text{επ}}(\mathbf{r}) = \Phi_{\text{επ}}(\mathbf{r}_0) - r_0 \int^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_{\text{επ}}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$, με $\Phi_{\text{επ}}(\mathbf{r}_0) = 0$, αν ληφθεί η αναφορά στο σημείο \mathbf{r}_0 . Υπάρχει όμως μία σημαντική διαφορά ανάμεσα στη σχέση αυτή και τη σχέση (5.2-3). Για το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι $\oint_{\ell} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ για οποιοδήποτε βρόχο ℓ , και, συνεπώς, η τιμή του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από τη διαδρομή από το σημείο \mathbf{r}_0 μέχρι το \mathbf{r} . Αντίθετα, το επαγωγικό ηλεκτρικό πεδίο υπακούει στο νόμο του *Faraday*, και είναι εν γένει $\oint_{\ell} \mathbf{E}_{\text{επ}} \cdot d\mathbf{r} = -(d/dt) \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ για οποιαδήποτε ανοικτή επιφάνεια S τερματίζεται στο βρόχο ℓ . Στην περίπτωση που εξετάζεται στην παρούσα παράγραφο, στην οποία η μαγνητική ροή θεωρείται ότι περιορίζεται στο εσωτερικό των νηματοειδών μαγνητικών κλάδων που σχηματίζουν τους μαγνητικούς βρόχους i , στο ολοκλήρωμα $\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ συνεισφέρουν οι βρόχοι μαγνητικής ροής που διαπερνούν την επιφάνεια S . Δηλαδή, είναι:

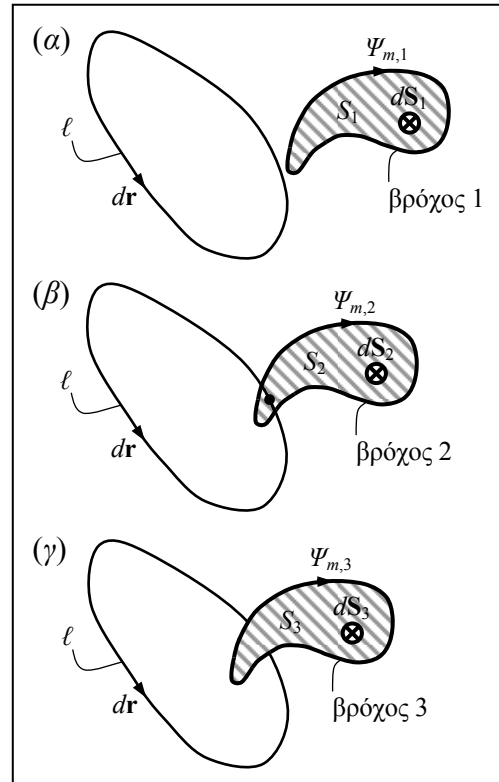
$$\oint_{\ell} \mathbf{E}_{\text{επ}} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \sum_{i \in S} \Psi_{m,i}, \quad (5.2-58)$$

όπου η άθροιση εκτείνεται στους βρόχους μαγνητικής ροής που τέμνουν την επιφάνεια S , με όριο την κλειστή καμπύλη ℓ . Αν κάποιος βρόχος, όπως ο βρόχος 1 στο **Σχήμα 5.2-20α**, δεν τέμνει την επιφάνεια S , τότε δεν προσμετράται στην άθροιση. Ο βρόχος 2, ο οποίος τέμνει την επιφάνεια S σε κάποιο σημείο της, συνεισφέρει στην άθροιση. Εφόσον, όπως η $\Psi_{m,2}$ στο **Σχήμα 5.2-20β**, η $\Psi_{m,i}$ είναι ομόρροπη με το στοιχείο $d\mathbf{S}$ (η φορά του οποίου συνδέεται δεξιόστροφα με την φορά των $d\mathbf{r}$ της ℓ), τότε η $\Psi_{m,i}$ λαμβάνεται θετική, αλλά, βέβαια, στη σχέση (5.2-58) σημασία έχει η χρονική παράγωγός της. Τέλος, αν ο βρόχος της μαγνητικής ροής τέμνει την επιφάνεια S σε δύο σημεία, όπως στο **Σχήμα 5.2-20γ**, τότε οι δύο συνεισφορές εξουδετερώνονται αμοιβαία κλπ.



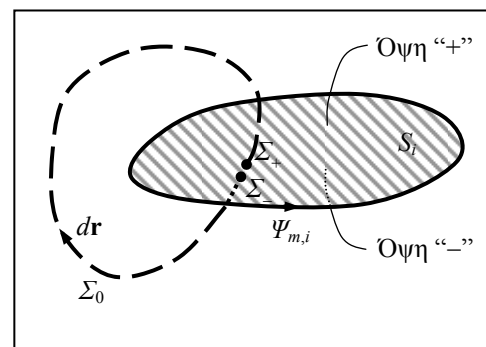
Σχήμα 5.2-20

Με βάση τα προηγούμενα, στο άθροισμα της σχέσης (5.2-58) κάθε βρόχος μαγνητικής ροής συνεισφέρει, είτε μία φορά, όταν τέμνει την επιφάνεια S σε σημεία με περιττό πλήθος, είτε καμία, όταν την τέμνει σε άρτιο πλήθος, ή καθόλου. Εποπτικά, αν θεωρηθούν οι δύο βρόχοι, ο ℓ για τον προσδιορισμό της κυκλοφορίας και αυτός με τη μαγνητική ροή $\Psi_{m,i}$, σαν κρίκοι, το πρώτο ενδεχόμενο αναφέρεται σε κρίκους που έχουν ενωθεί ως τμήματα αλυσίδας, ενώ το δεύτερο σε ελεύθερους κρίκους. Η αντιστοίχιση με τους κρίκους προβάλλει τη δυνατότητα να αντιστραφεί η θεώρηση και αντί να προσαρτηθεί στον βρόχο ℓ η επιφάνεια S , να θεωρηθεί ότι ο βρόχος i με τη μαγνητική ροή είναι το όριο κάποιας ανοικτής επιφάνειας S_i , με τη φορά του στοιχείου dS_i να καθορίζεται, κατά τα καθιερωμένα, με βάση τα δάκτυλα του δεξιού χεριού, σε σχέση με τη φορά της ροής $\Psi_{m,i}$ στο περίγραμμα του βρόχου. Με τη θεώρηση αυτή, αν ο βρόχος ℓ δεν τέμνει την S_i , όπως στα ενδεχόμενα (α) και (γ) του **Σχήματος 5.2-21**, ή αν την τέμνει σε άρτιο πλήθος σημείων, τότε η $\Psi_{m,i}$ δεν συνεισφέρει στο άθροισμα, ενώ αν την τέμνει μία φορά, όπως στο ενδεχόμενο (β), ή σε φορές περιττού πλήθους, τότε η $\Psi_{m,i}$ συνεισφέρει, με θετικό πρόσημο, αν το στοιχείο dS_i είναι ομόρροπο με το $d\mathbf{r}$ του βρόχου ℓ , με αρνητικό σε αντίθετη περίπτωση.



Σχήμα 5.2-21

Επιφάνεια ασυνέχειας: Με βάση τα σχόλια που προηγήθηκαν, σε κάθε βρόχο i μαγνητικής ροής προσαρτάται μία ανοικτή επιφάνεια S_i με οποιοδήποτε σχήμα, αρκεί το όριό της να ταυτίζεται με το βρόχο i και με τη φορά του dS_i καθοριζόμενη από τη φορά της $\Psi_{m,i}$ με βάση τα δάκτυλα του δεξιού χεριού. Στο ολοκλήρωμα $\int_{\Sigma_+}^{\Sigma_-} \mathbf{E}_{επ} \cdot d\mathbf{r}$ μεταξύ δύο σημείων Σ_{\pm} , που βρίσκονται στις δύο όψεις της επιφάνειας S_i , με διαδρομή ολοκλήρωσης μέσω κάποιου σημείου Σ_0 , που βρίσκεται έξω από την S_i , βλ. **Σχήμα 5.2-22**, ουσιαστικά εκτελείται ολοκλήρωση σε κλειστή καμπύλη, επειδή το τμήμα $\Sigma_+ \Sigma_-$ μεταξύ των δύο όψεων έχει απειροστό μήκος και δεν υπάρχει κανένας λόγος το πεδίο $\mathbf{E}_{επ}$ να έχει εκεί



Σχήμα 5.2-22

άπειρη τιμή. Είναι, λοιπόν, $\int_{\Sigma_+} \mathbf{E}_{\varepsilon\pi} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\ell} \mathbf{E}_{\varepsilon\pi} \cdot d\mathbf{r}$. Χρησιμοποιώντας το νόμο του *Faraday*, $\oint_{\ell} \mathbf{E}_{\varepsilon\pi} \cdot d\mathbf{r} = -(d/dt) \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, προκύπτει ότι μεταξύ των δύο όψεων της επιφάνειας S_i πρέπει να εισαχθεί ασυνέχεια στην τιμή του δυναμικού:

$$\Phi_{\varepsilon\pi}(\mathbf{r}_+) - \Phi_{\varepsilon\pi}(\mathbf{r}_-) = - \int_{\mathbf{r}_-}^{\mathbf{r}_+} \mathbf{E}_{\varepsilon\pi} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{\ell} \mathbf{E}_{\varepsilon\pi} \cdot d\mathbf{r} = - \frac{d}{dt} \Psi_{m,i}, \quad (5.2-59)$$

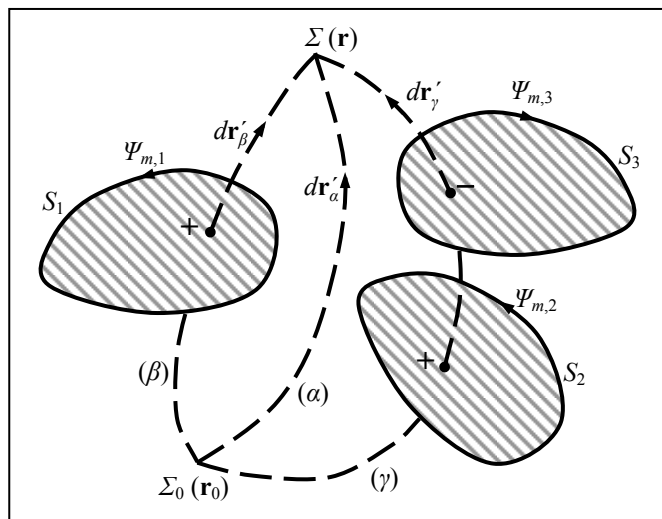
χωρίς αυτή η ασυνέχεια, η οποία είναι σταθερή ποσότητα, δηλαδή μη εξαρτώμενη από τη θέση, να έχει καμία συνέπεια στην τιμή του ηλεκτρικού πεδίου: Κατά την παραγωγή είναι $\mathbf{E}_{\varepsilon\pi}|_+ = -(\nabla \Phi_{\varepsilon\pi})|_+ = -(\nabla \Phi_{\varepsilon\pi})|_- + \nabla(\sigma\alpha\theta) = -(\nabla \Phi_{\varepsilon\pi})|_- = \mathbf{E}_{\varepsilon\pi}|_-$.

Γενικότερα, με την εισαγωγή της επιφάνειας ασυνέχειας σε κάθε βρόχο μαγνητικής ροής, το επαγωγικό δυναμικό $\Phi_{\varepsilon\pi}$ εκφράζεται ως μονότιμη συνάρτηση της θέσης \mathbf{r} , συνδεδεμένη με το επαγωγικό ηλεκτρικό πεδίο:

$$\Phi_{\varepsilon\pi}(\mathbf{r}) = \Phi_{\varepsilon\pi}(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_{\varepsilon\pi}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \frac{d}{dt} \sum_{S_i \in (\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} \Psi_{m,i} \operatorname{sgn}(d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{S}_i), \quad (5.2-60)$$

με $\Phi_{\varepsilon\pi}(\mathbf{r}_0) = 0$, αν θεωρηθεί ότι εκεί είναι το σημείο αναφοράς. Στον τελευταίο όρο συμμετέχουν εκείνες οι μαγνητικές ροές $\Psi_{m,i}$, των οποίων οι επιφάνειες S_i τέμνονται από τη διαδρομή ολοκλήρωσης, και εφαρμόζεται το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου $d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{S}_i$.

Στη σχέση (5.2-60), αν επιλεγεί διαφορετική διαδρομή για την ολοκλήρωση, τότε είναι ενδεχόμενο στο άθροισμα του τελευταίου όρου να συμμετέχουν οι μαγνητικές ροές διαφορετικών βρόχων. Παραδείγματος χάριν, για μετακίνηση από το σημείο Σ_0 μέχρι το Σ , όπως στο **Σχήμα 5.2-23**, από τις τρεις επιλογές για τη διαδρομή, στην (α) δεν συμπεριλαμβάνεται καμία μαγνητική ροή (η διαδρομή δεν τέμνει καμία S_i), στη δεύτερη πρέπει να προστεθεί ο όρος $-(d/dt)\Psi_{m,1}$, και στη διαδρομή (γ) ο όρος $-(d/dt)[\Psi_{m,2} - \Psi_{m,3}]$, όπου το αρνητικό πρόσημο στην $\Psi_{m,3}$ οφείλεται στο γεγονός ότι το $d\mathbf{r}'_{\gamma}$ είναι αντίρροπο προς το $d\mathbf{S}_3$, που η φορά του καθορίζεται από τη φορά του $\Psi_{m,3}$. Όποια πάντως και να είναι η επιλογή, η σχέση (5.2-60) θα δώσει το ίδιο τελικό αποτέλεσμα για το επαγωγικό δυναμικό.



Σχήμα 5.2-23

Σημειακές σχέσεις: Γενικά, ο χώρος στον οποίο αναπτύσσεται το επαγωγικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να έχει κατανομή στις διηλεκτρικές ιδιότητές του, περιγραφόμενη από την επιτρεπτότητα $\varepsilon(\mathbf{r})$. Οι σημειακές σχέσεις για το δυναμικό $\Phi_{\varepsilon\pi}$ διατυπώνονται αμέσως: Από τη στιγμή που δεν υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία, ή, αν υπάρχουν, η δράση τους περιγράφεται μέσω του ηλεκτροστατικού δυναμικού Φ με τις εξισώσεις της παραγρ. 5.2.3, και το μόνο αίτιο είναι η χρονομεταβλητή μαγνητική ροή, η οποία δρα μέσω της ασυνέχειας στο δυναμικό εκατέρωθεν των επιφανειών S_i , οι σημειακές σχέσεις είναι:

- Σε όλα τα σημεία του χώρου (εκτός από επιφάνειες με ιδιαιτερότητες):

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) \nabla \Phi_{\varepsilon\pi}) = 0, \quad (5.2-61)$$

και στη συνηθισμένη περίπτωση με $\varepsilon = \text{σταθ.}$ (έστω και τμηματικά, με τις ενδεχόμενες βηματικές ασυνέχειες να καλύπτονται από τη συνθήκη σε επιφάνεια):

$$\nabla^2 \Phi_{\varepsilon\pi} = \nabla \cdot (\nabla \Phi_{\varepsilon\pi}) = 0, \quad \text{όταν } \nabla \varepsilon = 0. \quad (5.2-62)$$

- Σε όλα τα σημεία κάθε επιφανείας, αλλά ιδίως σε επιφάνειες ασυνέχειας S_i ή με αλλαγή στις ιδιότητες του χώρου (στο ε):

$$\varepsilon_+ \left. \frac{\partial \Phi_{\varepsilon\pi+}}{\partial n} \right|_+ - \varepsilon_- \left. \frac{\partial \Phi_{\varepsilon\pi-}}{\partial n} \right|_- = 0, \quad (5.2-63)$$

$$\Phi_{\varepsilon\pi+} - \Phi_{\varepsilon\pi-} = -\frac{d}{dt} \Psi_{m,i}. \quad (5.2-64)$$

- Σε όλα τα σημεία κάθε γραμμής:

$$\left[r_T \frac{\partial}{\partial r_T} \int_0^{2\pi} d\varphi \varepsilon \Phi_{\varepsilon\pi} \right]_{r_T \rightarrow 0} = 0, \quad (5.2-65)$$

$$(r_T \varepsilon \Phi_{\varepsilon\pi}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = 0. \quad (5.2-66)$$

- Σε κάθε σημείο:

$$\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \varepsilon \Phi_{\varepsilon\pi} \right]_{r \rightarrow 0} = 0, \quad (5.2-67)$$

$$(r^2 \varepsilon \Phi_{\varepsilon\pi}) \Big|_{r \rightarrow 0} = 0. \quad (5.2-68)$$

Όλες οι εξισώσεις είναι ομογενείς, εκτός από αυτή για την τιμή του δυναμικού σε επιφάνεια, η οποία περιέχει την ασυνέχεια που παρουσιάσθηκε στη σχέση (5.2-59), εφόσον βέβαια πρόκειται για επιφάνεια ασυνέχειας, συνδεδεμένη με τον βρόχο με τη μαγνητική ροή $\Psi_{m,i}$.

Ολοκλήρωμα επαλληλίας: Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.2-61) έως (5.2-70) με τις αντίστοιχες σχέσεις της παραγρ. 5.2.3, αρχίζοντας από τη σχέση (5.2-35), παρατηρείται ότι οι δύο ομάδες εξισώσεων ταυτίζονται, όταν όλα τα αίτια στην παράγρ. 5.2.3 μηδενισθούν, εκτός από το διπολικό στρώμα $p_{S\perp}$, και συγκεκριμένα αν για το τελευταίο γίνει η αντιστοίχιση $p_{S\perp}/\epsilon_S = \text{σταθ.} \rightarrow -(d/dt)\Psi_{m,i}$. Ειδικότερα, αν ο χώρος χαρακτηρίζεται από την ίδια τιμή της επιτρεπτότητας, τότε η αντιστοίχιση καλύπτει και τις περιπτώσεις, κατά τις οποίες το δυναμικό μπορεί να γραφεί με κλειστή μορφή, ως ένα ολοκλήρωμα. Με απλή αλλαγή των συμβόλων στη σχέση (5.2-29), το επαγωγικό δυναμικό που παράγεται από βρόχο με μαγνητική ροή Ψ_m σε χώρο όπου παντού είναι ϵ_0 δίδεται από τη σχέση:

$$\Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt} \int_S \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt} \int_S dS' \frac{\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{i}_R}{R^2} = \frac{\Omega}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt}. \quad (5.2-69)$$

Κατά τα καθιερωμένα, R είναι η απόσταση του σημείου υπολογισμού του δυναμικού από τις θέσεις της επιφάνειας ασυνέχειας και Ω είναι η στερεή γωνία, με την οποία φαίνεται από το σημείο παρατήρησης \mathbf{r} η αρνητική όψη της επιφάνειας ασυνέχειας, βλ. σχέση (5.2-33).

Στη σχέση (5.2-69) υποτίθεται πως το σημείο αναφοράς βρίσκεται στο άπειρο. Αν προτιμηθεί άλλο σημείο αναφοράς, η σχέση προφανώς γίνεται:

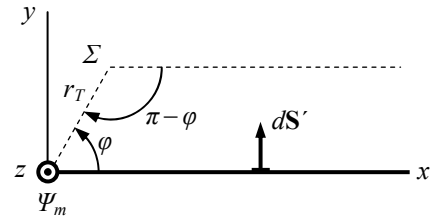
$$\Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt} \int_S d\mathbf{S}' \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right). \quad (5.2-70)$$

Επίσης, στις σχέσεις (5.2-69) και (5.2-70) το επαγωγικό δυναμικό γράφηκε σημειώνοντας και την εξάρτηση από το χρόνο t , η οποία προέρχεται από την εξάρτηση $\Psi_m(t)$ και υπονοείται και σε όλες τις σχέσεις αυτής της παραγράφου. Όπως και στην παράγρ. 2.3.5 του Μέρους Α υποτίθεται ότι οι χρονικές μεταβολές είναι αργές, ώστε οι μαγνητικές ροές να οφείλονται αποκλειστικά στα θεωρούμενα γνωστά ρεύματα, και η συνεισφορά του όρου $\partial\mathbf{D}/\partial t$ στο νόμο του *Ampere* να θεωρείται αμελητέα. Και βεβαίως, αν οι μαγνητικές ροές προσδιορίζονται μέσω των φασιθετών τους, αυτό καλύπτεται αντικαθιστώντας $d/dt \rightarrow j\omega$.

Ο προσδιορισμός του δυναμικού με γεωμετρική θεώρηση της στερεής γωνίας είναι εφικτός σε ειδικές απλές διατάξεις, όπως αυτή του **παραδ. 5.2-24**. Άλλες εφαρμογές προσδιορισμού του δυναμικού από βρόχους μαγνητικής ροής παρουσιάζονται στα **παραδ. 5.2-25** έως **27**. Οι δύο τελευταίες διατάξεις περιέχουν περισσότερους από ένα βρόχο, οπότε πριν εφαρμοσθεί η επαλληλία είναι απαραίτητη η επίλυση ενός μαγνητικού κυκλώματος, για να προσδιορισθεί η μαγνητική ροή κάθε βρόχου.

Παράδειγμα 5.2-24: Η μαγνητική ροή $\Psi_m = \Psi_{m0}\sin(\omega t)$ είναι συγκεντρωμένη σε ευθύγραμμο μαγνητικό κλάδο με άπειρο μήκος, με το μαγνητικό κύκλωμα να κλείνει μέσω του απείρου. Ζητείται το επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi_{\text{επ}}$ σε κάθε σημείο του χώρου (με παντού ϵ_0).

Επίλυση: Ας θεωρηθεί ότι ο κλάδος με τη μαγνητική ροή βρίσκεται στον άξονα z , ότι η φορά της μαγνητικής ροής, όταν είναι θετική, είναι προς το $z = +\infty$, και ότι ο βρόχος κλείνει μέσω του απείρου του ημιεπιπέδου $y = 0$, $x > 0$, όπως στο σχήμα. Μία προφανής απλή επιλογή για



την επιφάνεια ασυνέχειας, με όριο το μαγνητικό βρόχο, είναι το ημιεπίπεδο $y = 0$, $x > 0$ και από την υποθετίσα φορά για τη μαγνητική ροή Ψ_m το στοιχείο της επιφάνειας ασυνέχειας θα είναι $d\mathbf{S}' = \mathbf{i}_x dS'$. Τέλος, η χρονική παράγωγος είναι $(d/dt)\Psi_m = \omega\Psi_{m0}\cos(\omega t)$.

Η διάταξη επιδέχεται γεωμετρικό προσδιορισμό τη στερεής γωνίας Ω . Όπως έχει ήδη παρουσιασθεί στο **παράδ. 5.2-18**, από την τυχαία θέση $\Sigma = \{r_T, \varphi\}$ ο ημιάξονας $\varphi = 0$ (η προβολή του ημιεπιπέδου ασυνέχειας) φαίνεται ως κλάσμα $(\pi - \varphi)/2\pi$ της μέγιστης επίπεδης γωνίας 2π , συνεπώς το ημιεπίπεδο ασυνέχειας φαίνεται ως ισόποσο κλάσμα της $\Omega_{\text{max}} = 4\pi$, δηλαδή η στερεή γωνία είναι $\Omega = -2(\pi - \varphi)$, με το αρνητικό πρόσημο, επειδή από το σημείο Σ φαίνεται η θετική όψη της επιφάνειας ασυνέχειας. Αυτά αναφέρονται αυστηρά στην επιλογή $\varphi < \pi$. Αν ήταν $\varphi > \pi$, η επίπεδη γωνία θα γραφόταν $\varphi - \pi$, ώστε να είναι πάλι θετική, αλλά θα φαινόταν η αρνητική όψη, οπότε πάλι θα ήταν $\Omega = -2(\pi - \varphi)$. Συνεπώς, από τη σχέση (5.2-69) το επαγωγικό δυναμικό είναι:

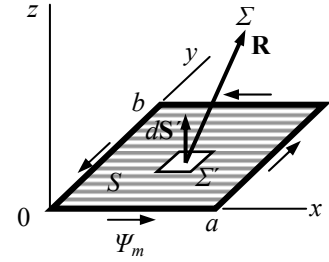
$$\Phi_{\text{επ}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Omega}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) \omega \Psi_{m0} \cos(\omega t).$$

Αν προτιμηθεί το επαγωγικό δυναμικό να προσδιορισθεί αναλυτικά, θα είναι $d\mathbf{S}' = \mathbf{i}_y dx' dz'$ και $\mathbf{R} = \mathbf{i}_x(x-x') + \mathbf{i}_y(y-y') + \mathbf{i}_z(z-z')$, με $y' = 0$, οπότε $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}' = y dx' dz'$. Με ολοκλήρωση στην έκταση της επιφάνειας ασυνέχειας, το επαγωγικό δυναμικό εκφράζεται ως το διπλό ολοκλήρωμα (που μπορεί να αντιμετωπισθεί με στοιχειώδεις τεχνικές ολοκλήρωσης):

$$\Phi_{\text{επ}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt} \int_S \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\omega \Psi_{m0}}{4\pi} y \cos(\omega t) \int_0^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{1}{[(x-x')^2 + (z-z')^2 + y^2]^{3/2}}.$$

Σχόλιο: Στην παρούσα διάταξη μπορεί να εφαρμοσθεί απευθείας ο νόμος του *Faraday*: Είναι $\oint_{\ell} \mathbf{E}_{\text{επ}} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r_T E_{\varphi} = -(d/dt) \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\omega \Psi_{m0} \cos(\omega t)$, και με $E_{\varphi} = -(1/r_T) \partial \Phi_{\text{επ}} / \partial \varphi$ προκύπτει αμέσως $\Phi_{\text{επ}} = (1/2\pi)(\varphi - \varphi_0) \omega \Psi_{m0} \cos(\omega t)$, η προηγούμενη έκφραση με $\varphi_0 = \pi$.

Παράδειγμα 5.2-25: Οι πλευρές ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $a \times b$, που βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ και με τη μία κορυφή του στην αρχή των αξόνων, αποτελούνται από υλικό με $\mu \gg \mu_0$ και μικρή διατομή, ενώ ο υπόλοιπος χώρος έχει ιδιότητες κενού (ϵ_0 και μ_0). Στο μαγνητικό υλικό ρέει χρονομεταβλητή μαγνητική ροή $\Psi_m = \Psi_{m0} \sin(\omega t)$, με τη φορά που δηλώνεται στο σχήμα.



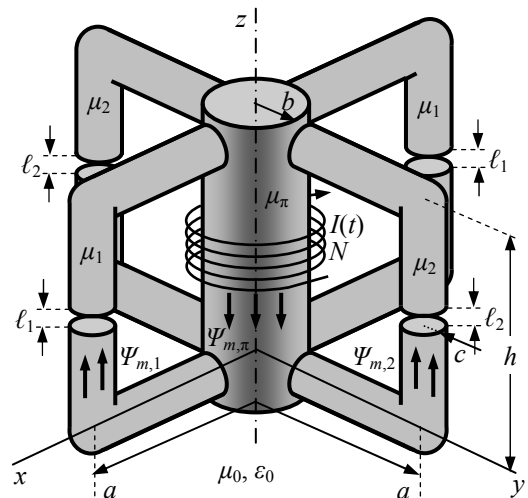
Ζητείται το επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi_{\text{επ}}$ παντού στο χώρο.

Επίλυση: Η μαγνητική ροή συγκεντρώνεται στο υλικό με την υψηλή μαγνητική διαπερατότητα, συνεπώς το ορθογώνιο αποτελεί βρόχο μαγνητικής ροής. Με όριο για την επιφάνεια ασυνέχειας τον βρόχο, η προφανής επιλογή είναι το ορθογώνιο $0 < x < a$, $0 < y < b$ στο επίπεδο $z = 0$. Με βάση τη φορά για τη μαγνητική ροή Ψ_m , η επιφάνεια ασυνέχειας θα αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες με $d\mathbf{S}' = \mathbf{i}_z dS' = \mathbf{i}_z dx' dy'$.

Παρά το απλό σχήμα της επιφάνειας ασυνέχειας, η στερεή γωνία Ω , με την οποία φαίνεται από το τυχαίο σημείο Σ , δεν μπορεί να προσδιορισθεί με απλή γεωμετρική θεώρηση. Χρειάζεται να γίνει αναλυτικός προσδιορισμός της Ω , ή, απευθείας του δυναμικού $\Phi_{\text{επ}}$. Η θέση του τυχαίου σημείου $\Sigma = \{x, y, z\}$ από ένα σημείο $\Sigma' = \{x', y', z' = 0\}$ της επιφάνειας ασυνέχειας είναι $\mathbf{R} = \mathbf{i}_x(x-x') + \mathbf{i}_y(y-y') + \mathbf{i}_z z$, οπότε $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}' = z dx' dy'$. Η ολοκλήρωση θα γίνει στην περιοχή $0 < x' < a$, $0 < y' < b$, στην οποία εκτείνεται η επιφάνεια ασυνέχειας, και τελικά προκύπτει για το επαγωγικό δυναμικό η έκφραση:

$$\Phi_{\text{επ}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt} \int_S \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\omega \Psi_{m0}}{4\pi} z \cos(\omega t) \int_0^a dx' \int_0^b dy' \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}$$

Παράδειγμα 5.2-26: Στη μαγνητική διάταξη του σχήματος, ο κυλινδρικός πυρήνας (με ακτίνα b και ύψος h) αποτελείται από υλικό με μαγνητική διαπερατότητα μ_π και φέρει τη διέγερση με ρεύμα $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ σε N ελίγματα. Στον πυρήνα συντρέχουν τέσσερις πλευρικοί κλάδοι $j = 1, 2, 1', 2'$, κυλινδρικοί με ακτίνα c και σε ορθή γωνία μεταξύ τους, καθένας εκ των οποίων αποτελείται από δύο οριζόντια σκέλη, με μήκος a , και ένα κατακόρυφο,



με ύψος h . Ο κλάδος j αποτελείται από υλικό με μαγνητική διαπερατότητα μ_j και στο κατακόρυφο σκέλος του έχει ένα μικρό διάκενο (με μ_0), με μήκος ℓ_j . Ο υπόλοιπος χώρος έχει ιδιότητες κενού. Ισχύουν οι ισχυρές ανισότητες $\mu_0 \ll \mu_\pi \sim \mu_j$ και $\ell_j \ll b \sim c, \ll a \sim h$, ενώ τα πηλίκα ℓ_j/μ_0 δεν εμπλέκονται σε καμία ισχυρή ανισότητα, συγκρινόμενα με τα h/μ_j και a/μ_j .

Ζητείται το επαγωγικό δυναμικό $\Phi_{\text{επ}}$ στο χώρο έξω από τα μαγνητικά υλικά (και τα διάκενα).

Επίλυση: Επειδή $\mu_\pi, \mu_j \gg \mu_0$, η μαγνητική ροή περιορίζεται στο εσωτερικό των μαγνητικών υλικών, καθώς και του διακένου (επειδή $\ell_j \ll c$). Η ιδιότητα $b, c \ll a, h$ σημαίνει ότι ο πυρήνας (με διατομή $S_\pi = pb^2$) και οι κλάδοι (με διατομή $S_j = \pi c^2$) είναι νηματοειδείς. Η ενιαία τιμή μ_0 για τη μαγνητική διαπερατότητα του υπόλοιπου χώρου επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα επαλληλίας (5.2-69), ακριβέστερα, το άθροισμα από τέσσερα τέτοια ολοκληρώματα, ένα για κάθε βρόχο μαγνητικής ροής. Η μαγνητική ροή κάθε βρόχου θα προσδιορισθεί από την επίλυση ενός απλού μαγνητικού κυκλώματος. Η μαγνητική αγωγιμότητα του πλευρικού κλάδου j είναι πρακτικά ίση με $G_{m,j} = \mu_j S_j / (2a + h) + \mu_0 S_j / \ell_j$, επειδή $b, c \ll a, h$ και $\ell_j \ll h$. Οι τέσσερις κλάδοι είναι συνδεδεμένοι παράλληλα μεταξύ τους και σε σειρά με τον πυρήνα, ο οποίος έχει μαγνητική αντίσταση $R_{m,\pi} = h/\mu_0 S_\pi$, άρα η ολική αντίσταση της διάταξης είναι $R_{m,\text{ολ}} = R_{m,\pi} + 1/[\sum_j G_{m,j}]$. Από το δεύτερο νόμο του *Kirchhoff*, η μαγνητική ροή στον πυρήνα είναι ίση με $\Psi_{m,\pi} = NI/R_{m,\text{ολ}}$, με φορά προς τα κάτω, για τη δεδομένη φορά της περιέλιξης και του ρεύματός της. Η ροή $\Psi_{m,\pi}$ επιμερίζεται σε κάθε κλάδο ως $\Psi_{m,j} = \Psi_{m,\pi} G_{m,j} / [\sum_j G_{m,j}]$, με φορά στο κατακόρυφο τμήμα προς τα πάνω. Αντιστοιχίζοντας σε κάθε ροή ως επιφάνεια ασυνέχειας ένα ορθογώνιο $a \times h$, είναι $dS'_1 = -\mathbf{i}_y dx' dz' = -\mathbf{i}_y d\ell' dz'$ (με $x' \rightarrow \ell'$), $dS'_2 = +\mathbf{i}_x dy' dz' = +\mathbf{i}_x d\ell' dz'$ (με $y' \rightarrow \ell'$), $dS'_3 = +\mathbf{i}_y dx' dz' = -\mathbf{i}_y d\ell' dz'$ (με $x' \rightarrow -\ell'$), $dS'_4 = -\mathbf{i}_x dy' dz' = +\mathbf{i}_x d\ell' dz'$ (με $y' \rightarrow -\ell'$), όπου έγινε εισαγωγή της μεταβλητής ℓ' , με $0 < \ell' < a$, για να γραφεί το τελικό αποτέλεσμα κάπως πιο σύντομα, συγκεκριμένα (με $z' - z \rightarrow \zeta$) ως:

$$\Phi_{\text{επ}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\omega N I_0 \sin(\omega t)}{4\pi [1 + R_{m,\pi} \sum_j G_{m,j}]} \int_0^a d\ell' \int_0^h dz' \sum_{\mp} \left\{ \frac{\mp y G_{m,1}}{[(x \mp \ell')^2 + y^2 + \zeta^2]^{3/2}} - \frac{\mp x G_{m,2}}{[x^2 + (y \mp \ell')^2 + \zeta^2]^{3/2}} \right\}.$$

Παράδειγμα 5.2-27: Η μαγνητική διάταξη του σχήματος, με πάχος δ , αποτελείται από: (α) Τρεις ράβδους από υλικό με μαγνητική διαπερατότητα $\mu \gg \mu_0$, πλάτος c και μήκος η μία h και οι άλλες δύο $(a + b)$. Η ράβδος με μήκος h φέρει N περιελίξεις τροφοδοτούμενες με ρεύμα $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$. (β) Μία πλάκα πλάτους b , από υλικό με μαγνητική διαπερατότητα $\mu_1 \ll \mu$, αλλά $\mu_1 \gg \mu_0$. Η πλάκα έχει ένα διάκενο με πλάτος ℓ_0 . Το διάκενο, όπως και ο υπόλοιπος

χώρος, έχει ιδιότητες κενού (μ_0, ϵ_0). Οι διαστάσεις συνδέονται με τις σχέσεις $h \sim a \sim b \gg \delta \gg c \sim \ell_0$, $c \gg (\mu_1/\mu)b$ και $\ell_0 \gg (\mu_0/\mu_1)h$.

Ζητείται το επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi_{\text{επ}}$ σε ολόκληρο το χώρο, εκτός από το εσωτερικό των υλικών και το διάκενο.

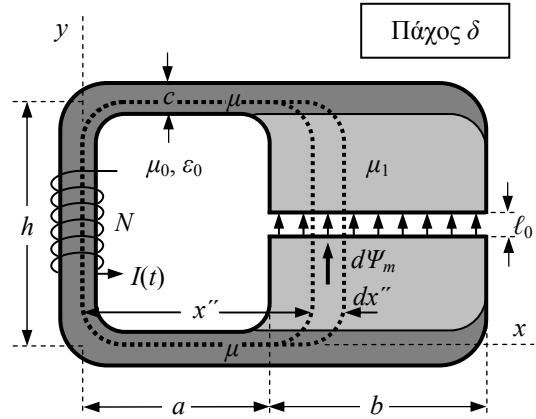
Επίλυση: Η μαγνητική ροή συγκεντρώνεται στα υλικά με υψηλή μαγνητική διαπερατότητα (είτε μ , είτε μ_1) και στο διάκενο, επειδή $\ell_0 \ll \delta, b$. Από τις ανισότητες $\ell_0 \gg (\mu_0/\mu_1)h$ και $c \gg (\mu_1/\mu)b$ φαίνεται ότι η μαγνητική αντίσταση καθεμιάς από τις τρεις ράβδους, ίση αντίστοιχα με $h/\mu c \delta$ και $(a+b)/\mu c \delta$, είναι πολύ μικρότερη από τη μαγνητική αντίσταση της πλάκας, ίση με $R_{m,\pi\lambda} = h/\mu_1 b \delta$, και αυτή είναι πολύ μικρότερη από του διακένου, ίση με $R_{m,0} = \ell_0/\mu_0 b \delta$. Συνεπώς, ισχύει η διάταξη $R_{m,\rho} \ll R_{m,\pi\lambda} \ll R_{m,0}$. Η σχέση $R_{m,\rho} \ll R_{m,\pi\lambda}$ υποδηλώνει ότι η πτώση μαγνητικής τάσης στα άκρα της πλάκας είναι η ίδια σε οποιοδήποτε σημείο του πλάτους b , συνεπώς το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} , άρα και η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} , έχουν ομοιόμορφη κατανομή στην πλάκα, όπως και στο διάκενο. Η δεύτερη σχέση ($R_{m,\pi\lambda} \ll R_{m,0}$) σημαίνει ότι για τον υπολογισμό της μαγνητικής ροής αρκεί να ληφθεί υπ' όψιν μόνο η αντίσταση $R_{m,0}$. Συνεπώς είναι $R_{m,0} \Psi_m = NI(t)$ και εισάγοντας την τιμή της $R_{m,0}$ τελικά προκύπτει $\Psi_m(t) = N\mu_0(b\delta/\ell_0)I_0 \sin(\omega t)$.

Οι ράβδοι με τις μικρές εγκάρσιες διαστάσεις $c \times \delta$ μπορούν να θεωρηθούν νηματοειδείς. Δεν μπορεί να γίνει, όμως, η ίδια προσέγγιση για την πλάκα και το διάκενο, επειδή το πλάτος τους b είναι μεγάλο, συγκρίσιμο με το μήκος h . Είναι δυνατόν, όμως, να θεωρηθεί ότι το πλάτος b αποτελείται από λωρίδες με απειροστό πλάτος dx'' , όπως στο σχήμα, και ότι από κάθε λωρίδα διέρχεται μαγνητική ροή $d\Psi_m = (\Psi_m/b)dx''$ ($= |\mathbf{B}|\delta dx''$). Κάθε λωρίδα αποτελεί συστατικό ενός ορθογωνικού βρόχου μαγνητικής ροής, με διαστάσεις $x'' \times h$, που με βάση το αποτέλεσμα του **παραδ. 5.2-25** συνεισφέρει στο επαγωγικό δυναμικό κατά:

$$d\Phi_{\text{επ}} = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\Psi_m}{dt} \frac{dx''}{b} z \int_0^{x''} dx' \int_0^h dy' \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Η συνεισφορά όλων των στοιχειωδών βρόχων συνυπολογίζεται ολοκληρώνοντας στο διάστημα $a < x'' < a+b$, και τελικά προκύπτει το επαγωγικό δυναμικό, ως τριπλό τώρα ολοκλήρωμα:

$$\Phi_{\text{επ}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\omega}{4\pi} \frac{z}{b} \Psi_{m0} \cos(\omega t) \int_a^{a+b} dx'' \int_0^{x''} dx' \int_0^h dy' \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{3/2}}.$$



5.3 Τα μαγνητικά δυναμικά \mathbf{A} και Φ_m

5.3.1 Διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} από κατανομές ρευμάτων

Ορισμός: Ο νόμος του Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, επιτρέπει να ορισθεί το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} , ώστε η περιστροφή του να είναι $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, επειδή τότε αυτόματα είναι $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$. Για να προσδιορισθεί, ωστόσο, ένα διανυσματικό πεδίο απαιτείται πληροφόρηση όχι μόνο για την περιστροφή του, αλλά και για την απόκλιση (όπως στη Μαγνητοστατική, που περιγράφεται από το ζεύγος $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ και $\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0$). Όταν είναι $\partial/\partial t = 0$, όπως ενδιαφέρει την παρούσα ενότητα, τότε γίνεται η επιλογή $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ και το δυναμικό \mathbf{A} ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{και} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (5.3-1)$$

με ακριβώς την ίδια μορφή με τις εξισώσεις της Μαγνητοστατικής (όταν είναι $\mu = \text{σταθ.}$).

Φυσικό περιεχόμενο: Υπενθυμίζεται ότι η μαγνητική ροή που διέρχεται από μία επιφάνεια S ορίζεται ως $\Psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, που με την εισαγωγή του διανυσματικού δυναμικού γράφεται $\Psi_m = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Stokes (βλ. Παράρτημα Α.5 του Μέρους Α), η μαγνητική ροή γράφεται:

$$\Psi_m = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (5.3-2)$$

ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην κλειστή καμπύλη ℓ , που αποτελεί το όριο της επιφάνειας S . Δηλαδή, σ' ένα βρόχο ℓ , η εφαπτομενική (στο περίγραμμα του βρόχου) συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού περιγράφει τη μαγνητική ροή που διέρχεται από το βρόχο, ανά μονάδα μήκους του περιγράμματος. Παραδείγματος χάριν, για να περιγραφεί το ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = \mathbf{i}_z B_0$ μέσω του διανυσματικού δυναμικού, μία επιλογή είναι η έκφραση $\mathbf{A} = \mathbf{i}_\phi A_\phi = \mathbf{i}_\phi \frac{1}{2} r_T B_0$. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από κυκλικό βρόχο με ακτίνα a είναι βέβαια ίση με $\Psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \pi a^2 B_0$, αλλά επίσης είναι ίση με $\oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = [(2\pi r_T) A_\phi]_{r_T=a} = \pi a^2 B_0$.

Στο φυσικό αυτό περιεχόμενο παραπέμπουν και οι μονάδες για το διανυσματικό δυναμικό, $\text{Wb/m} = \text{μονάδες μαγνητικής ροής} \text{ διά μονάδες μήκους}$. Ενώ είναι $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$, οι ισοδύναμες μονάδες $\text{T} \cdot \text{m} = \text{Wb/m}$ δεν είναι σε χρήση, για τον πρόσθετο λόγο ότι πρέπει να παρεμβληθεί η στιγμή, ώστε να είναι σαφής η αντιδιαστολή προς το $\text{Tm} = 10^{12} \text{ m}$.

Διαφορικές εξισώσεις: Η άμεση συσχέτιση του δυναμικού \mathbf{A} με τα ρεύματα επιτυγχάνεται, απαλείφοντας το πεδίο \mathbf{B} . Στη γενική περίπτωση, όταν η μαγνητική διαπερατότητα είναι χωρικά μεταβαλλόμενη, σχηματίζεται η εξίσωση:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = \mathbf{J}. \quad (5.3-3)$$

Όταν είναι $\mu = \text{σταθ.}$, ή, ισοδύναμα, όταν $\nabla\mu = 0$, η σχέση αυτή απλοποιείται σε:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J}, \quad \text{όταν } \nabla\mu = 0, \quad (5.3-4)$$

και με τον ορισμό της διανυσματικής Λαπλασιανής, $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$, τελικά, σχηματίζεται η διανυσματική εξίσωση του *Poisson*:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \text{όταν } \nabla\mu = 0 \quad (\text{με } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0). \quad (5.3-5)$$

Επισημαίνεται ότι η διανυσματική Λαπλασιανή $\nabla^2 \mathbf{A}$ είναι διάνυσμα που παράγεται από το διάνυσμα \mathbf{A} . Τα διανύσματα $\nabla^2 \mathbf{A}$ και \mathbf{A} δεν είναι κατ' ανάγκην συγγραμμικά. Επίσης, γενικά, τα $\mathbf{i}_\ell \cdot (\nabla^2 \mathbf{A})$ (η προβολή της διανυσματικής Λαπλασιανής $\nabla^2 \mathbf{A}$ στο \mathbf{i}_ℓ) και $\nabla^2 (\mathbf{i}_\ell \cdot \mathbf{A})$ (η βαθμωτή Λαπλασιανή της προβολής του \mathbf{A} στο \mathbf{i}_ℓ) δεν είναι ίσες ποσότητες, εκτός αν το \mathbf{i}_ℓ είναι σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα, όπως είναι τα $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y$ και \mathbf{i}_z . Ειδικά αν το διάνυσμα \mathbf{A} αναλυθεί σε καρτεσιανές συνιστώσες, $\mathbf{A} = \mathbf{i}_x A_x + \mathbf{i}_y A_y + \mathbf{i}_z A_z$, τότε ισχύει ότι:

$$\mathbf{i}_x \cdot \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x, \quad \mathbf{i}_y \cdot \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_y, \quad \mathbf{i}_z \cdot \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_z, \quad (5.3-6)$$

ενώ στα λοιπά συστήματα οι εκφράσεις είναι πιο πολύπλοκες (βλ. Πίνακα Α.4-2 στο Παράρτημα Α.4 του Μέρους Α). Εν γένει, όταν το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}_ℓ δεν είναι σταθερό, είναι $\mathbf{i}_\ell \cdot \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 (\mathbf{i}_\ell \cdot \mathbf{A}) + \text{πρόσθετοι όροι}$, που οφείλονται στις παραγώγους του \mathbf{i}_ℓ . Ας σημειωθεί, επίσης, ότι οι σχέσεις (5.3-6) αναφέρονται σε περιπτώσεις, κατά τις οποίες το διάνυσμα \mathbf{A} αναλύεται σε καρτεσιανές συνιστώσες, χωρίς κανέναν περιορισμό, ποιες συντεταγμένες περιγράφουν την εξάρτηση από το χώρο. Δηλαδή, η ισότητα $\mathbf{i}_x \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla^2 A_x$ ισχύει όχι μόνο αν επιλεγεί η εξάρτηση $A_x = A_x(x, y, z)$, αλλά και οι εξαρτήσεις $A_x = A_x(r, \theta, \varphi, z)$ και $A_x = A_x(r, \theta, \varphi)$.

Ολοκλήρωμα επαλληλίας για το δυναμικό \mathbf{A} από χωρική πυκνότητα \mathbf{J} : Θεωρώντας ότι το διανυσματικό δυναμικό έχει αναλυθεί σε καρτεσιανές συνιστώσες και ότι $\nabla\mu = 0$, κάθε συνιστώσα υπακούει στην εξίσωση του *Poisson*, παραδείγματος χάριν, η συνιστώσα A_x :

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x. \quad (5.3-7)$$

Η μορφή αυτής της εξίσωσης είναι ταυτόσημη με την ομώνυμη εξίσωση για το ηλεκτροστατικό δυναμικό, $\nabla^2 \Phi = -(1/\epsilon)\rho$. Βέβαια, και οι δύο αυτές σχέσεις επεκτείνονται κατάλληλα για να συμπεριλάβουν και τη συνεισφορά χωρικής πυκνότητας διπολικής ροπής, μαγνητικής και ηλεκτρικής, και συνοδεύονται από τις κατάλληλες οριακές συνθήκες σε επιφάνεια κλπ., οι

οποίες περιγράφουν τη συνεισφορά κατανομών ρεύματος και φορτίου, καθώς και μαγνητικών και ηλεκτρικών διπόλων, συγκεντρωμένων σε επιφάνεια κλπ. Όμως, στην πραγματικότητα αυτές οι κατανομές απλά και μόνο υποκαθιστούν, ως εναλλακτική περιγραφή (χρήσιμη πάντως στις εφαρμογές) τις χωρικές πυκνότητες \mathbf{J} και ρ , αντίστοιχα. Για παράδειγμα, μπορεί να θεωρηθεί, ότι μέσω της πυκνότητας \mathbf{J} περιγράφονται όλες οι κατανομές ρεύματος (θεωρώντας ότι στο \mathbf{J} περιλαμβάνονται και όροι με μορφή \mathbf{K}/δ , όπου δ είναι το πάχος της ρευματοφόρου επιφάνειας με την πυκνότητα \mathbf{K} , καθώς και όροι με μορφή $(i/S)\mathbf{i}_\ell$, όπου S είναι η διατομή ρευματοφόρου νήματος και $\mathbf{i}_\ell = d\mathbf{r}/d\ell$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του ρευματοφόρου νήματος). Τότε, η εξίσωση $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$ προσδιορίζει το δυναμικό \mathbf{A} πλήρως, επειδή περιλαμβάνει και τις πληροφορίες για τη συμπεριφορά σε ρευματοφόρο επιφάνεια ή γραμμή, όπως αντίστοιχα και η εξίσωση $\nabla^2 \Phi = -(1/\epsilon)\rho$.

Με αυτή την οπτική, μπορεί να αξιοποιηθεί το γεγονός, ότι η αντιστροφή της σχέσης $\nabla^2 \Phi = -(1/\epsilon)\rho$ είναι η σχέση (5.2-9):

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \left[\frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} - \frac{1}{R_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}')} \right] \rho(\mathbf{r}') dV', \quad (5.3-8)$$

οπότε για τη μαθηματικά ταυτόσημη σχέση $\nabla^2 A_x = -\mu J_x$ η αντίστροφη σχέση είναι:

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left[\frac{1}{R(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} - \frac{1}{R_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}')} \right] J_x(\mathbf{r}') dV', \quad (5.3-9)$$

και παρόμοια για τα A_y και A_z . Πολλαπλασιάζοντας με το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}_x προκύπτει ότι $\mathbf{i}_x A_x(\mathbf{r}) = (\mu/4\pi) \mathbf{i}_x \int_V [\dots] J_x' dV' = (\mu/4\pi) \int_V [\dots] (\mathbf{i}_x J_x') dV'$, όπου το \mathbf{i}_x μπορεί να πολλαπλασιάσει την ολοκληρωτέα παράσταση (να μπει «μέσα» στο ολοκλήρωμα), επειδή είναι σταθερό διάνυσμα, ανεξάρτητο από τις τονισμένες συντεταγμένες, που είναι οι μεταβλητές ολοκλήρωσης. Αθροίζοντας τις αντίστοιχες εκφράσεις των τριών συνιστωσών, $\mathbf{A} = \mathbf{i}_x A_x + \mathbf{i}_y A_y + \mathbf{i}_z A_z$, σχηματίζεται για το διανυσματικό δυναμικό η έκφραση:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right). \quad (5.3-10)$$

Η σχέση αυτή είναι τώρα μια αυθυπόστατη διανυσματική ισότητα, η οποία ισχύει ανεξάρτητα από την εκάστοτε επιλογή συστήματος συντεταγμένων. Η χρήση καρτεσιανού συστήματος αποτέλεσε απλώς ένα βοήθημα για την εκτέλεση των ενδιάμεσων πράξεων.

Επειδή το ρεύμα υπακούει στο νόμο διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου, $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ (με $\partial/\partial t = 0$), τα απειροστά στοιχεία $\mathbf{J}(\mathbf{r}')dV'$ δεν είναι αυθυπόστατα. Συνεπώς, δεν έχει νόημα να ειπωθεί ότι $(\mu/4\pi) \mathbf{J}(\mathbf{r}')dV'/R$ είναι η συνεισφορά του $\mathbf{J}(\mathbf{r}')dV'$ στη δημιουργία του \mathbf{A} και μόνο καταχρηστικά ονομάζεται το ολοκλήρωμα (5.3-10) «ολοκλήρωμα επαλληλίας».

Έλεγχος για τη συνθήκη $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$: Επειδή ο τελεστής ∇ αφορά παραγωγίσεις ως προς τις άτονες μεταβλητές, ενώ η ολοκλήρωση αφορά τις τονισμένες, για την απόκλιση θα είναι $\nabla \cdot \mathbf{A} = (\mu/4\pi)\nabla \cdot \int [1/R - 1/R_0]\mathbf{J}' dV' = (\mu/4\pi)\int \nabla \cdot \{[1/R - 1/R_0]\mathbf{J}(\mathbf{r}')\} dV'$. Μέσα πια στο ολοκλήρωμα, για το γινόμενο είναι $\nabla \cdot \{[1/R - 1/R_0]\mathbf{J}(\mathbf{r}')\} = [1/R - 1/R_0]\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla [1/R - 1/R_0] = \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla (1/R)$, επειδή η πυκνότητα ρεύματος είναι $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$, συνάρτηση της τονούμενης μεταβλητής, συνεπώς $\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$, ενώ και η σχετική απόσταση $R_0 = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|$ επίσης δεν εξαρτάται από τη θέση \mathbf{r} , ως προς την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις για την κλίση $\nabla(1/R_0)$. Στον όρο που απομένει, αξιοποιείται η συμμετρία $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$, με συνέπεια $\nabla(1/R) = -\nabla'(1/R)$, όπου τώρα ο τελεστής ∇' αφορά τις τονισμένες μεταβλητές. Με αυτές τις ενέργειες είναι:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right). \quad (5.3-11)$$

Αντιστρέφοντας την πορεία, αλλά τώρα με τις ίδιες ενέργειες ως προς τις τονισμένες μεταβλητές, είναι $\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla'(1/R) = \nabla' \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{r}')/R] - (1/R)\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \nabla' \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{r}')/R]$, επειδή σε μόνιμη κατάσταση, $\partial/\partial t = 0$, ο νόμος διατήρησης φορτίου δίνει $\nabla' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = -\partial\rho(\mathbf{r}', t)/\partial t = 0$. Το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης μετατρέπεται σε επιφανειακό (με το θεώρημα *Gauss*), συνεπώς:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_S d\mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}'_S)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|}, \quad (5.3-12)$$

με τις θέσεις \mathbf{r}'_S να αφορούν την επιφάνεια ολοκλήρωσης S , το όριο του χώρου V με την πυκνότητα $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$. Φυσικά, εκεί το ρεύμα $\mathbf{J}(\mathbf{r}'_S)$ το πολύ να είναι εφαπτομενικό, αλλιώς η S δεν θα ήταν το όριο της ρευματοφόρου περιοχής. Συνεπώς είναι $d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}'_S) = 0$, που επιβεβαιώνει ότι $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (όταν $\partial/\partial t = 0$).

Νόμος *Biot-Savart* (για χωρική πυκνότητα \mathbf{J}): Το πεδίο $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ μπορεί να προσδιορισθεί από την περιστροφή της σχέσης (5.3-10), ώστε να συσχετισθεί με το ρεύμα \mathbf{J} . Με παρόμοια διαδικασία, αυτή τη φορά με τον τελεστή $\nabla \times$ (που δρα, επίσης, στις άτονες μεταβλητές), είναι $\nabla \times \mathbf{A} = (\mu/4\pi)\nabla \times \int [1/R - 1/R_0]\mathbf{J}' dV' = (\mu/4\pi)\int \nabla \times \{[1/R - 1/R_0]\mathbf{J}(\mathbf{r}')\} dV'$. Μέσα στο ολοκλήρωμα, κατά τις παραγωγίσεις λόγω του τελεστή $\nabla \times$ ως προς τις άτονες μεταβλητές οι ποσότητες $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ και $R_0 = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|$ συμπεριφέρονται ως σταθερές, οπότε είναι:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V dV' \left[\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') \right]. \quad (5.3-13)$$

Για την κλίση του $1/R$ είναι $-\nabla(1/R) = -\nabla[(R^2)^{-1/2}] = +1/2(R^2)^{-3/2}\nabla(R^2) = 1/2R^{-3}2\mathbf{R} = \mathbf{R}/R^3 (= \mathbf{i}_R/R^2)$, με τελικό αποτέλεσμα την έκφραση για το πεδίο \mathbf{B} , καθώς και το πεδίο $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (5.3-14)$$

Αυτός είναι ο νόμος *Biot-Savart* και μπορεί να εφαρμοσθεί με την ίδια προϋπόθεση, όπως και η σχέση (5.3-10), ότι για ολόκληρο το χώρο είναι $\mu = \text{σταθ}$. (χωρίς να παραπλανά το γεγονός, ότι στη έκφραση για την ένταση του μαγνητικού πεδίου δεν εμφανίζεται η μαγνητική διαπερατότητα, μολονότι η παραδοχή $\nabla\mu = 0$ υπάρχει στα προηγούμενα βήματα).

Ολοκληρώματα επαλληλίας και νόμος *Biot-Savart* για κάθε κατανομή ρεύματος: Οι επιφανειακές πυκνότητες \mathbf{K} και τα νηματοειδή ρεύματα i , που στις σχέσεις (5.3-10) και (5.3-14) υποκρύπτονται ως όροι στην πυκνότητα \mathbf{J} , μπορούν να αποχωρισθούν από το \mathbf{J} και να προβληθούν αυτοτελώς με απλή διαδικασία:

- Κατά το μέρος που η πυκνότητα \mathbf{J} περιλαμβάνει έναν όρο \mathbf{K}/δ , λαμβάνεται $dV' = \delta dS'$, οπότε $\mathbf{J}dV' \rightarrow (\mathbf{K}/\delta)dV' = \mathbf{K}dS'$, με dS' το στοιχείο της ρευματοφόρου επιφάνειας.
- Για τον όρο $(i/S)\mathbf{i}_\ell$, ο οποίος ενδεχομένως περιλαμβάνεται στην πυκνότητα \mathbf{J} , λαμβάνεται $dV' = Sd\ell'$, και με $d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_\ell d\ell'$, το στοιχειώδες μήκος κατά μήκος της ρευματοφόρου γραμμής, προκύπτει η αντικατάσταση $\mathbf{J}dV' \rightarrow (i/S)\mathbf{i}_\ell dV' = i d\mathbf{r}'$.

Αποτέλεσμα των παραπάνω ενεργειών είναι το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} και το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} , καθώς και η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} , στην άτονη θέση \mathbf{r} , που παράγονται από ρεύματα στις τονισμένες θέσεις \mathbf{r}' του χώρου, \mathbf{r}'_s μιας ρευματοφόρου επιφάνειας, ή ℓ' μιας ρευματοφόρου γραμμής, να γράφονται ανάλογα με την περίπτωση ως:

- Το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu}{4\pi} \int_V dV' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right), \\ \frac{\mu}{4\pi} \int_S dS' \mathbf{K}(\mathbf{r}'_s) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right), \\ \frac{\mu}{4\pi} \int_\ell d\mathbf{r}' i(\ell') \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \end{cases} \rightarrow \frac{\mu i_0}{4\pi} \oint_\ell d\mathbf{r}' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right). \quad (5.3-15)$$

- Τα πεδία \mathbf{H} και $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3}, \\ \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}'_S) \times \mathbf{R}}{R^3}, \\ \frac{1}{4\pi} \int_{\ell} \frac{d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{R^3} i(\ell') \end{cases} \rightarrow \frac{i_0}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{R^3}. \quad (5.3-16)$$

Στις παραπάνω σχέσεις, κατά τα καθιερωμένα:

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ είναι η σχετική θέση του σημείου \mathbf{r} μέτρησης του δυναμικού ως προς τα ρεύματα, και $R = |\mathbf{R}|$ η αντίστοιχη σχετική απόσταση.

$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'$ είναι η σχετική θέση του σημείου αναφοράς \mathbf{r}_0 ως προς τα ρεύματα, και $R_0 = |\mathbf{R}_0|$ η αντίστοιχη σχετική απόσταση.

Επίσης, όταν υπάρχει μόνο νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα, τότε λόγω του νόμου διατήρησης ηλεκτρικού φορτίου, η ρευματοφόρος γραμμή δεν μπορεί να έχει ανοικτά άκρα και το ρεύμα ρέει υποχρεωτικά σε βρόχους, με το ρεύμα σε κλάδους που ανήκουν σε περισσότερους βρόχους να επιμερίζεται στους επιμέρους βρόχους, και σε κάθε βρόχο το ρεύμα είναι $i = i_0 = \text{σταθ.}$ (δηλ. $\partial i / \partial \ell' = 0$), όταν είναι $\partial / \partial t = 0$. Τότε $[d\mathbf{r}' i(\ell')][...] \rightarrow i_0 \oint d\mathbf{r}' [...]$, με ολοκλήρωση στο περίγραμμα ℓ του βρόχου, όπως παρουσιάζεται ως εναλλακτική (και προτιμότερη) γραφή στις παραπάνω σχέσεις για νηματοειδή ρεύματα. Τέλος, αν μία μόνιμη ροή ρεύματος εκδηλώνεται με διαφορετικό τρόπο σε διαφορετικές περιοχές του χώρου (αλλού ως χωρική πυκνότητα, αλλού ως επιφανειακή κλπ.), υπονοείται άθροιση των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων.

Σε σύγκριση με τις σχέσεις (5.3-15), στις σχέσεις (5.3-16) η ολοκληρωτέα παράσταση είναι κάπως πιο σύνθετη, το πλήθος ολοκληρώσεων είναι ισόποσο, αλλά αποφεύγονται οι τελικές παραγωγίσεις για το πεδίο $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Συνεπώς, δεν υπάρχει κάποιο ιδιαίτερο συγκριτικό πλεονέκτημα, το οποίο να συνηγορεί για τη χρήση του ολοκληρώματος επαλληλίας για το δυναμικό \mathbf{A} , σε σχέση με τον απευθείας προσδιορισμό του πεδίου μέσω του νόμου *Biot-Savart*, σε αντίθεση με την περίπτωση της ηλεκτροστατικής, όπως έχει σχολιασθεί σε συνδυασμό με τη σχέση (5.2-10).

Οι **παρατηρήσεις** για το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ σε μεγάλο βαθμό μεταφέρονται και στις παραπάνω σχέσεις, με πρόσθετες παρατηρήσεις που σχετίζονται με το διανυσματικό χαρακτήρα του δυναμικού \mathbf{A} . Συγκεκριμένα:

- (α) Όλες οι σχέσεις αναφέρονται σε χώρο με σταθερή μαγνητική διαπερατότητα μ , μέχρι το άπειρο. Αυτό αφορά και το νόμο *Biot-Savart* (5.3-17), ιδίως για το πεδίο \mathbf{H} , μολονότι εκεί δεν εμφανίζεται πουθενά το μ .
- (β) Το σημείο αναφοράς μπορεί να ληφθεί οπουδήποτε εξυπηρετεί (συχνά στο άπειρο, οπότε είναι $1/R_0 = 0$), με εξαιρέσεις:
 $\mathbf{r}_0 \neq \infty$, όταν στο άπειρο υπάρχει $\mathbf{K} \neq 0$ ή $i \neq 0$,
 \mathbf{r}_0 όχι σε σημεία ρευματοφόρου γραμμής.
 Φυσικά, οι εκφράσεις για τα πεδία \mathbf{B} και \mathbf{H} δεν εμπλέκουν κανένα σημείο αναφοράς.
- (γ) Η ολοκλήρωση γίνεται ως προς τις τονισμένες μεταβλητές (τις θέσεις με τα ρεύματα), στο διάστημα που αντιστοιχεί στο χώρο με την αντίστοιχη κατανομή ρεύματος, και είναι τριπλή, διπλή, ή απλή, ανάλογα αν το ρεύμα περιγράφεται ως \mathbf{J} , \mathbf{K} ή i .
- (δ) Σε διατάξεις με συμμετρίες, όπως με $\partial/\partial z = 0$ ή $\partial/\partial \phi = 0$, ισχύουν οι παρατηρήσεις (α) και (β) της σελ. 72.
- (ε) Η μετατόπιση του σημείου αναφοράς γίνεται αμέσως με αφαίρεση, όπως περιγράφεται για το ηλεκτροστατικό δυναμικό στη σχέση (5.2-5).
- (στ) Τα μη Καρτεσιανά μοναδιαία διανύσματα \mathbf{i}_T , \mathbf{i}_ϕ , \mathbf{i}_r , και \mathbf{i}_θ , που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των \mathbf{J} , \mathbf{K} και $d\mathbf{r}'$, εξαρτώνται από τις τονισμένες μεταβλητές και δεν είναι σταθερά. Αυτό έχει ως συνέπεια, ότι $A_T \neq (\mu/4\pi) \int dV' J_T(\mathbf{r}')(1/R - 1/R_0)$ κλπ..
- (ζ) Ιδιαίτερα σε περιπτώσεις με νηματοειδή ρεύματα, η φορά του ρεύματος πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν σωστά (είτε μόνο στο πρόσημο του i , είτε μόνο στη φορά του $d\mathbf{r}$).
- (η) Τα ρεύματα συνδέονται μεταξύ τους με το νόμο διατήρησης φορτίου, με $\partial/\partial t = 0$. Έτσι, αν είναι $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$, τότε οι σχέσεις δεν μπορούν να εφαρμοσθούν, επειδή υπάρχει ρ με $\partial\rho/\partial t = -\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$, δηλ. $\partial/\partial t \neq 0$. Όμοια, αν η πυκνότητα \mathbf{J} τερματίζεται απότομα στη διεύθυνσή της, τότε εκεί πρέπει να υπάρχει κατάλληλο \mathbf{K} (ή i), όπως απαιτεί ο νόμος διατήρησης φορτίου με $\partial/\partial t = 0$. Σε τ'ετοιες περιπτώσεις το δυναμικό \mathbf{A} προσδιορίζεται συμπεριλαμβάνοντας όλες τις επί μέρους κατανομές ρεύματος που υποχρεωτικά συνυπάρχουν και συναποτελούν τη μόνιμη ροή ρεύματος.
- (θ) Οι καρτεσιανές συνιστώσες του \mathbf{A} συνδέονται με τις αντίστοιχες συνιστώσες των $\mathbf{J}dV$, $\mathbf{K}dS$ και $i d\mathbf{r}$ ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως το ηλεκτροστατικό δυναμικό Φ με τα dQ . Όταν είναι γνωστή η έκφραση $\Phi(\mathbf{r})$ για κάποια κατανομή ρ , σ ή λ και οι καρτεσιανές συνιστώσες των \mathbf{J} ή \mathbf{K} ή το i έχουν στο χώρο την ίδια κατανομή, όπως τα ρ , σ ή λ , αντίστοιχα, τότε μπορεί να σχηματισθεί αμέσως η έκφραση $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, με τις αντικαταστάσεις:

$$\Phi \rightarrow A_x, A_y, \text{ ή } A_z,$$

$$\varepsilon \rightarrow 1/\mu,$$

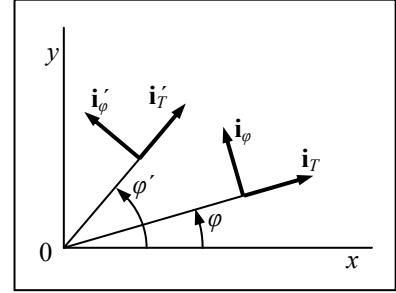
$$\rho \rightarrow J_x, J_y, \text{ ή } J_z, \text{ ή } \sigma \rightarrow K_x, K_y, \text{ ή } K_z, \text{ και } \lambda dl \rightarrow idx, idy, \text{ ή } idz.$$

Η χρήση των σχέσεων (5.3-15) και (5.3-16) επιδεικνύεται στα *παραδ. 5.3-1* έως *5.3-4*.

Διατάξεις με κυλινδρική συμμετρία, δηλαδή με $\partial/\partial\varphi = 0$: Θεωρώντας πάλι ότι στο στοιχείο $\mathbf{J}dV'$ περιλαμβάνονται και τα ενδεχόμενα στοιχεία $\mathbf{K}dS'$ και idr' , τότε σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι (με $\xi = \varphi' - \varphi$):

$$\mathbf{i}_T \cdot \mathbf{i}_T' = \cos \xi, \quad \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}_\varphi' = \cos \xi,$$

$$\mathbf{i}_T \cdot \mathbf{i}_\varphi' = -\sin \xi, \quad \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}_T' = \sin \xi.$$



Επίσης, ο στοιχειώδης όγκος είναι $dV' = r_T' dr_T' d\varphi' dz' = r_T' dr_T' d\xi dz'$. Σχηματίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα του $\mathbf{A} = (\mu/4\pi)\mathbf{J}dV'/R$, με $R_0 = \infty$, χωρίς να θίγεται η γενικότητα, με τα άτονα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{i}_T , \mathbf{i}_φ και \mathbf{i}_z , όταν είναι $\partial\mathbf{J}(\mathbf{r}')/\partial\varphi' = 0$ (άρα, και $\partial\mathbf{J}(\mathbf{r}')/\partial\xi = 0$) προκύπτει:

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint r_T' dr_T' dz' J_T(r_T', z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \xi d\xi}{R(r_T', z', \cos \xi, r_T, z)}, \\ A_\varphi &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint r_T' dr_T' dz' J_\varphi(r_T', z') \int_0^{2\pi} \frac{\cos \xi d\xi}{R(r_T', z', \cos \xi, r_T, z)}, \\ A_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iint r_T' dr_T' dz' J_z(r_T', z') \int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{R(r_T', z', \cos \xi, r_T, z)}, \end{aligned} \quad (5.3-17)$$

όπου $R^2 = r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos \xi + (z - z')^2$ για τη σχετική απόσταση. Ο όρος $\cos \xi$ προέρχεται από τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{i}_T \cdot \mathbf{i}_T'$ και $\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}_\varphi'$. Αντίθετα, τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{i}_T \cdot \mathbf{i}_\varphi'$ και $\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}_T'$ παράγουν όρους με το $\sin \xi$, με μορφή $\int_0^{2\pi} d\xi \sin \xi / R(\cos \xi)$. Πρόκειται για ολοκλήρωμα περιττής συναρτησης [το ημίκυκλο της περιττής συνάρτησης $\sin \xi$ με την άρτια $R(\cos \xi)$], άρα ίσο με μηδέν, γιατί οι σχέσεις (5.3-17) δεν συμπεριλαμβάνουν τους αντίστοιχους όρους.

Γράφοντας $\mathbf{J}_{\kappa\lambda\pi}$ για να επισημανθεί ότι στο στοιχείο $\mathbf{J}dV'$ περιλαμβάνονται και τα $\mathbf{K}dS'$ και idr' , από τα παραπάνω συνάγεται ότι όταν $\partial/\partial\varphi = 0$, τότε:

$$\begin{aligned} J_{T,\kappa\lambda\pi} = 0 &\Rightarrow A_T = 0 \quad (\text{όταν } \partial/\partial\varphi = 0), \\ J_{\varphi,\kappa\lambda\pi} = 0 &\Rightarrow A_\varphi = 0 \quad (\text{όταν } \partial/\partial\varphi = 0), \\ J_{z,\kappa\lambda\pi} = 0 &\Rightarrow A_z = 0 \quad (\text{σε κάθε περίπτωση}). \end{aligned} \quad (5.3-18)$$

Η τελευταία περίπτωση δεν εξαρτάται από την ιδιότητα $\partial/\partial\varphi = 0$ (είναι, δηλαδή, $A_z = 0$ όταν $J_{z,\kappa\lambda\pi} = 0$, είτε είναι $\partial/\partial\varphi = 0$, είτε όχι), όπως σημειώνεται.

Οι ίδιες πληροφορίες είναι δυνατόν να εξαχθούν από τη διανυσματική εξίσωση του Poisson, $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$. Με τις σχέσεις του Πίνακα Α.4-2 (από το Παράρτημα Α.4 του Μέρους Α) και με την ενδεχόμενη παρουσία κατανομών \mathbf{K} και i να περιλαμβάνεται στο \mathbf{J} , είναι:

$$\begin{aligned} -\mu J_T &= \mathbf{i}_T \cdot \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_T - A_T/r_T^2 \quad (\text{όταν } \partial/\partial\varphi = 0) \quad \text{άρα } J_{T,\kappa\lambda\pi} = 0 \Rightarrow A_T = 0, \\ -\mu J_\varphi &= \mathbf{i}_\varphi \cdot \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_\varphi - A_\varphi/r_T^2 \quad (\text{όταν } \partial/\partial\varphi = 0) \quad \text{άρα } J_{\varphi,\kappa\lambda\pi} = 0 \Rightarrow A_\varphi = 0, \\ -\mu J_z &= \mathbf{i}_z \cdot \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_z \quad (\text{σε κάθε περίπτωση}) \quad \text{άρα } J_{z,\kappa\lambda\pi} = 0 \Rightarrow A_z = 0. \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας και τη σχέση $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, αναπαράγονται τα πορίσματα που περιέχονται (με $s = \varphi$) στη σχέση (2.3-16) του Μέρους Α:

$$\begin{aligned} J_{\varphi,\kappa\lambda\pi} = 0 &\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{i}_T A_T + \mathbf{i}_z A_z \Rightarrow B_T = 0, B_z = 0, B_\varphi = \frac{\partial A_T}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r_T}, \\ \mathbf{J}_{\perp\varphi,\kappa\lambda\pi} = 0 &\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{i}_\varphi A_\varphi \Rightarrow B_\varphi = 0, B_T = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, B_z = \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T A_\varphi). \end{aligned} \quad (5.3-19)$$

Και ένα παρένθετο σχόλιο: Έχει ήδη αναφερθεί στην παράγραφο 5.2.1 ότι το ολοκλήρωμα ως προς ξ στη σχέση (5.3-17γ) μπορεί να εκφρασθεί με τη βοήθεια του «πλήρους ελλειπτικού ολοκληρώματος a' είδους», $K(m)$. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} d\xi \cos \xi / R(\cos \xi)$, το οποίο εμφανίζεται στις άλλες δύο σχέσεις, μπορεί να εκφρασθεί με το «πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα β' είδους», $E(m)$. Οι δύο αυτές ανώτερες υπερβατικές συναρτήσεις ορίζονται ως:

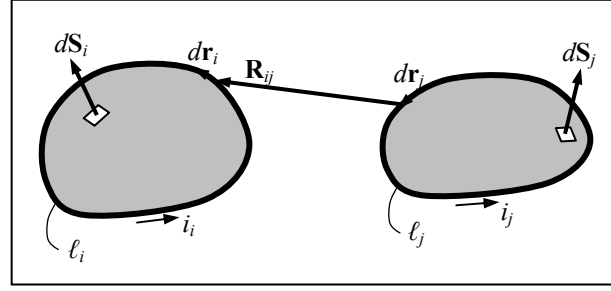
$$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - m \sin^2 \theta]^{1/2}}, \quad E(m) = \int_0^{\pi/2} d\theta [1 - m \sin^2 \theta]^{1/2}.$$

Για να εμφανισθούν αυτές οι συναρτήσεις, στα ολοκληρώματα των σχέσεων (5.3-19) εισάγονται, όπως και στην παράγρ. 5.2.1, οι ποσότητες $R_{\max}^2(r_T, z, r_T', z') = (r_T + r_T')^2 + (z - z')^2$ (ίση με $R^2|_{\xi=\pi}$) και $m(r_T, z, r_T', z') = 4r_T r_T' / R_{\max}^2 (< 1)$. Με την αλλαγή μεταβλητής $\xi = \pi - 2\theta$, προκύπτει $R^2 = R_{\max}^2(1 - m \sin^2 \theta)$ και $\cos \xi = -1 + 2 \sin^2 \theta = m^{-1}[(2-m) - 2(1 - m \sin^2 \theta)]$, με τελικό αποτέλεσμα ότι:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{R} = \frac{4}{R_{\max}} K(m), \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\xi \cos \xi}{R} = \frac{4}{m R_{\max}} [(2-m)K(m) - 2E(m)].$$

Όπως όμως έχει σχολιασθεί και στην παράγρ. 5.2.1, η διατύπωση του αποτελέσματος με κλειστή μορφή προσφέρει μόνο αισθητική ικανοποίηση, ενώ, κατά κανόνα, οι ολοκληρώσεις τελικά εξυπηρετεί να γίνονται αριθμητικά.

Αλληλεπαγωγή δύο βρόχων (τύπος του Neumann): Σε δύο βρόχους ℓ_i και ℓ_j ρέει ρεύμα i_i και i_j , όπως στο **Σχήμα 5.3-1**, με αποτέλεσμα σε κάθε θέση \mathbf{r} του χώρου να παράγεται μαγνητικό πεδίο, το οποίο μπορεί να περιγραφεί μέσω του διανυσματικού δυναμικού $\mathbf{A}_i(\mathbf{r})$ και $\mathbf{A}_j(\mathbf{r})$. Η μαγνητική ροή που διέρχεται από τον βρόχο i , λόγω του ρεύματος i_j στο βρόχο j , δίδεται από τη σχέση (5.3-2), που εδώ εξειδικεύεται σε:



Σχήμα 5.3-1

$$\Psi_{m,ij} = \int_{S_i} \mathbf{B}_j(\mathbf{r}_{S_i}) \cdot d\mathbf{S}_i = \oint_{\ell_i} \mathbf{A}_j(\ell_j) \cdot d\mathbf{r}_i \quad (5.3-20)$$

Αν, τώρα, ο χώρος χαρακτηρίζεται από σταθερή τιμή μ για τη μαγνητική διαπερατότητα, τότε το διανυσματικό δυναμικό περιγράφεται από τη σχέση (5.3-15γ):

$$\mathbf{A}_j = \frac{\mu i_j}{4\pi} \oint_{\ell_j} \frac{d\mathbf{r}_j}{R_{ij}}, \quad (5.3-21)$$

και από τον συνδυασμό των δύο σχέσεων προκύπτει η εξεταζόμενη μαγνητική ροή:

$$\Psi_{m,ij} = \frac{\mu i_j}{4\pi} \oint_{\ell_i} \oint_{\ell_j} \frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{R_{ij}}, \quad (5.3-22)$$

όπου $d\mathbf{r}_i$ και $d\mathbf{r}_j$ είναι τα στοιχειώδη μήκη στην περιφέρεια των βρόχων i και j , ενώ $R_{ij} = |\mathbf{R}_{ij}| = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ είναι η απόσταση μεταξύ δύο τυχαίων σημείων στους βρόχους i και j .

Το πηλίκο $\Psi_{m,ij}/i_j = L_{ij}$ είναι ο συντελεστής αλληλεπαγωγής μεταξύ των δύο βρόχων i και j και δίδεται από τον τύπο του Neumann,

$$L_{ij} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\ell_i} \oint_{\ell_j} \frac{d\mathbf{r}_i \cdot d\mathbf{r}_j}{R_{ij}}, \quad (5.3-23)$$

με την προϋπόθεση ότι $\mu = \text{σταθ.}$ μέχρι το άπειρο. Η εφαρμογή του τύπου του Neumann παρουσιάζεται στα **παραδ. 5.3-5** και **5.3-6**. Όπως είναι αναμενόμενο, σε γραμμικό μέσο ο συντελεστής αλληλεπαγωγής εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του χώρου (το μ) και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δύο βρόχων (σχήμα, περιγραφόμενο από τα $d\mathbf{r}_i$ και $d\mathbf{r}_j$, και σχετική θέση, περιγραφόμενη από το R_{ij}). Προφανώς, επειδή $R_{ij} = R_{ji}$, είναι και $L_{ij} = L_{ji}$.

Σύστημα αλληλεπαγωγών: Η μαγνητική ροή που διέρχεται από τον βρόχο i , λόγω όλων των βρόχων j (συμπεριλαμβανομένου και του i) και των αντίστοιχων ρευμάτων i_j , είναι:

$$\Psi_{m,i} = \sum_j \Psi_{m,ij} = \sum_j L_{ij} i_j. \quad (5.3-24)$$

Η έκφραση αυτή ισχύει για κάθε βρόχο i , οπότε μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων:

$$\vec{\Psi}_m = \vec{L} \cdot \vec{I}, \quad (5.3-25)$$

όπου $\vec{\Psi}_m = [\Psi_{m,i}]$ είναι πίνακας-στήλη της μαγνητικής ροής, $\vec{L} = [L_{ij}]$ είναι συμμετρικός τετραγωνικός πίνακας των αλληλεπαγωγών και $\vec{I} = [i_j]$ είναι πίνακας-στήλη των ρευμάτων των βρόχων.

Αυτεπαγωγή βρόχου: Στον πίνακα \vec{L} τα στοιχεία L_{ii} της διαγωνίου είναι οι συντελεστές αυτεπαγωγής (η μαγνητική ροή Ψ_{mi} που διέρχεται από το βρόχο i , έχοντας παραχθεί από το ρεύμα i_i του ίδιου βρόχου, ανά μονάδα ρεύματος). Όμως, ο τύπος του *Neumann* (5.3-23) έχει βασισθεί στην παραδοχή νηματοειδούς βρόχου και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της αυτεπαγωγής. Ο λόγος είναι ότι στην έκφραση αυτή ο παρονομαστής R_{ij} μηδενίζεται όταν τα δύο στοιχεία $d\mathbf{r}_i$ και $d\mathbf{r}_j$ αναφέρονται στο ίδιο σημείο $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$ του βρόχου, με αποτέλεσμα λογαριθμικό απειρισμό. Ο απειρισμός αυτός σχετίζεται με τον απειρισμό του μαγνητικού πεδίου, $H_\phi \sim 1/r_T$ κοντά σε νηματοειδή αγωγό, που για το διανυσματικό δυναμικό δίνει $A_z \sim -\ln(r_T/r_{T0})$. Δεν οφείλεται, δηλαδή, σε φυσικά αίτια, αλλά στο ότι αστοχεί η παραδοχή για νηματοειδή αγωγό με μηδενικό πάχος. Για να προσδιορισθεί η αυτεπαγωγή, απαιτείται να ανακληθεί η χωρική πυκνότητα \mathbf{J} , που έχει προσεγγισθεί από το νηματοειδές ρεύμα, $i d\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{J} dV$, και να γίνει ολοκλήρωση χωριστά στο εσωτερικό της πυκνότητας \mathbf{J} (στο εσωτερικό του αγωγού) και στο εξωτερικό (\Rightarrow εσωτερική και εξωτερική αυτεπαγωγή). Όταν πρόκειται για αγωγό με διατομή μικρή σε σχέση με τις λοιπές διαστάσεις του, το αποτέλεσμα περιέχει μέτρια ευαίσθητη (λογαριθμική) εξάρτηση από το σχήμα και το πάχος της διατομής.

Αυτεπαγωγή πηνίου: Ορίζεται ως το πηλίκο $L = N\Psi_m/I_L$, όπου N είναι το πλήθος των ελιγμάτων και Ψ_m η μαγνητική ροή που διέρχεται από τη διατομή του πηνίου, δηλαδή, από οποιονδήποτε ρευματοφόρο βρόχο του. Ακριβέστερα, η ολική μαγνητική ροή Ψ , η οποία διέρχεται από όλα τα ελίγματα του πηνίου, δεν είναι $N\Psi_m$, αλλά το άθροισμα των επιμέρους μαγνητικών ροών από κάθε έλιγμα j ($j = 1, 2, \dots, N$) του πηνίου. Αυτό σημαίνει ότι στον ορισμό της αυτεπαγωγής πρέπει να γίνει η αντικατάσταση $N\Psi_m \rightarrow \Psi = \sum_j \Psi_{m,j}$. Εκφράζοντας τη μαγνητική ροή μέσω του διανυσματικού δυναμικού \mathbf{A} , προκύπτει:

$$\Psi = \sum_j \Psi_{m,j} = \sum_j \oint_{\ell_j} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}_j = \int_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (5.3-26)$$

όπου $d\mathbf{r}_j$ είναι το στοιχειώδες μήκος κάθε σπείρας ℓ_j . Οι διαδοχικές σπείρες, που όλες μαζί σχηματίζουν το πηνίο, αποτελούν τμήματα ενός ρευματοφόρου αγωγού ℓ , με στοιχειώδες μήκος $d\mathbf{r}$.

Αν οι σπείρες είναι σε αρκετά πυκνή διάταξη, ώστε να θεωρηθεί ότι σχηματίζουν επιφάνεια S' με στοιχειώδες εμβαδόν dS' , τότε το ρεύμα του πηνίου μπορεί να παρασταθεί από επιφανειακή πυκνότητα \mathbf{K} (γενικά μη σταθερή, ούτε κατά μέτρο) και το δυναμικό \mathbf{A} μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S'} \frac{\mathbf{K} dS'}{R}. \quad (5.3-27)$$

Με βάση όλα τα προηγούμενα προκύπτει για την αυτεπαγωγή πηνίου η έκφραση:

$$L = \frac{\mu}{4\pi I_L} \int_{S'} \int_{\ell} \frac{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}'_S)}{R}, \quad (5.3-28)$$

όπου, σύμφωνα και με το **Σχήμα 5.3-2**,

dS' = στοιχείο της παράπλευρης ρευματοφόρου επιφάνειας S' του πηνίου,

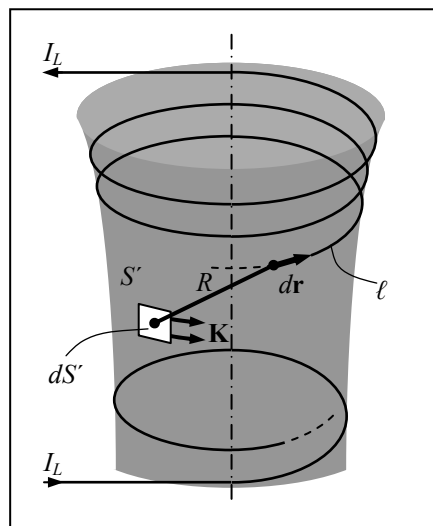
$\mathbf{K}(\mathbf{r}'_S)$ = επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος, μέσω της οποίας περιγράφεται το ρεύμα NI_L ,

$d\mathbf{r}$ = στοιχείο του μήκους ℓ της περιέλιξης,

$R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_S|$ = απόσταση μεταξύ των $d\mathbf{r}$ (θέση \mathbf{r}) και dS' (θέση \mathbf{r}'_S).

Επειδή το ρεύμα I_L του πηνίου θα είναι αναγκαστικά συντελεστής στην έκφραση για το επιφανειακό ρεύμα \mathbf{K} , η έκφραση για την αυτεπαγωγή L είναι ανεξάρτητη από το ρεύμα.

Το παράδ. 5.3-7 παρουσιάζει την επίλυση μιας διάταξης αυτεπαγωγής.



Σχήμα 5.3-2

Παράδειγμα 5.3-1: Ευθύγραμμο ρευματοφόρο νήμα στον άξονα $r_T = 0$ έχει ρεύμα $i = i_0$ με φορά προς το $z \rightarrow +\infty$. Ζητείται, σε χώρο με μ_0 , να προσδιορισθούν (α) το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} και (β) η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} .

Επίλυση: (α) Με βάση τη θέση του νήματος ($r_T' = 0$, $\varphi' = \text{αδιάφορο}$, $-\infty < z' < +\infty$) και τη φορά του ρεύματος, θα είναι $d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_z dz'$. Το ρεύμα φθάνει μέχρι το άπειρο με πεπερασμένη τιμή, οπότε η αναφορά δεν μπορεί να ληφθεί εκεί, ούτε και στον άξονα z (όπου βρίσκεται το νηματοειδές ρεύμα), αλλά οπουδήποτε αλλού, στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{i}_T r_{T0} + \mathbf{i}_z z_0$. Από το ολοκλήρωμα επαλληλίας, και με δεδομένο ότι $\mathbf{i}_z = \text{σταθ.}$, προκύπτει η έκφραση

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \oint_{\ell} d\mathbf{r}' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) = \mathbf{i}_z \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \left(\frac{1}{\sqrt{r_T^2 + (z - z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_{T0}^2 + (z_0 - z')^2}} \right).$$

Η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει με την αντικατάσταση $z' = z + r_T \sinh \zeta$, $dz' = r_T \cosh \zeta d\zeta$ κλπ. για το πρώτο ολοκλήρωμα και με $z' = z_0 + r_{T0} \sinh \zeta_0$ κλπ. για το δεύτερο, οπότε για το αόριστο ολοκλήρωμα είναι $\int dz' (1/R - 1/R_0) = \zeta - \zeta_0$. Επειδή $\sinh \zeta = \frac{1}{2}(e^\zeta - e^{-\zeta}) = (z' - z)/r_T$, επιλύοντας ένα τριώνυμο ως προς e^ζ , προκύπτει $\zeta = \ln \{ [(z' - z)/r_T] + [[(z' - z)/r_T]^2 + 1]^{1/2} \}$, ενώ η λύση με το αρνητικό πρόσημο απορρίπτεται, επειδή πρέπει $e^\zeta \geq 0$. Με παρόμοια έκφραση για το ζ_0 , η διαφορά $\zeta - \zeta_0$ γράφεται ως ο λογάριθμος πηλίκου. Είναι $(\zeta - \zeta_0)_{z' \rightarrow +\infty} = 0$ και $(\zeta - \zeta_0)_{z' = -\infty} = 2 \ln(r_T/r_{T0})$, οπότε το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}_z \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \ln \frac{r_T}{r_{T0}}.$$

Εναλλακτικά, στην παρούσα περίπτωση η αντίστοιχη διάταξη ηλεκτροστατικής αναφέρεται σε νηματοειδές φορτίο λ_0 στον άξονα z , διάταξη για την οποία είναι γνωστή η έκφραση για το ηλεκτροστατικό δυναμικό, βλ. σχέση (5.2-14):

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_T}{r_{T0}} \right).$$

Χρησιμοποιώντας τις αντιστοιχίες που σημειώνονται στην παρατήρηση (θ), σελ. 131-132, με τις αντικαταστάσεις $\epsilon_0 \rightarrow 1/\mu_0$, $\Phi \rightarrow A_z$ και $\lambda_0 dz \rightarrow i_0 dz$ αναπαράγεται η έκφραση για το δυναμικό $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

(β) Για την εφαρμογή του νόμου *Biot-Savart* χρειάζεται η σχετική απόσταση, ως διάνυσμα, $\mathbf{R} = \mathbf{i}_T r_T + \mathbf{i}_z(z - z')$, οπότε $d\mathbf{r}' \times \mathbf{R} = \mathbf{i}_\varphi r_T dz'$, με αποτέλεσμα η μαγνητική επαγωγή να περιγράφεται από το ολοκλήρωμα:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{d\mathbf{r}' \times \mathbf{R}}{R^3} = \mathbf{i}_\varphi \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} r_T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{[r_T^2 + (z - z')^2]^{3/2}},$$

όπου λήφθηκε υπ' όψιν ότι τα r_T και \mathbf{i}_φ είναι ανεξάρτητα από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης z' . Με την ίδια αλλαγή μεταβλητής, όπως προηγουμένως, προκύπτει:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_\varphi \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} r_T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_T \cosh \zeta d\zeta}{(r_T \cosh \zeta)^3} = \mathbf{i}_\varphi \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r_T},$$

το αναμενόμενο αποτέλεσμα

Σχόλια:

- Η παρούσα διάταξη έχει έντονες συμμετρίες, με αποτέλεσμα εδώ να είναι στοιχειώδης η εφαρμογή του νόμου του *Ampere* (είτε ολοκληρωτικά, είτε σημειακά) για να εξαχθεί το αποτέλεσμα $\mathbf{B} = \mathbf{i}_\varphi \mu_0 i_0 / 2\pi r_T$. Ακολουθώντας, ο ορισμός $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ εδώ εξειδικεύεται σε $B_\varphi = -\partial A_z / \partial r_T$, και με απλή ολοκλήρωση από το σημείο αναφοράς r_{T0} , στο οποίο $A_z(r_T = r_{T0}) = 0$, προκύπτει η προαναφερθείσα εξάρτηση του $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Για την παρούσα διάταξη, αυτή θα ήταν η φυσιολογική πορεία επίλυσης. Η χρήση του ολοκληρώματος επαλληλίας και του νόμου *Biot-Savart* έγινε μόνο για να επιδειχθεί η διαδικασία.
- Η εναλλακτική επίλυση μέσω της αντίστοιχης διάταξης για το ηλεκτροστατικό δυναμικό είναι σύντομη μόνο όταν σε τέτοια διάταξη είναι από την αρχή γνωστή η έκφραση $\Phi(\mathbf{r})$, όπως εδώ. Αν αυτή η έκφραση δεν είναι γνωστή, για να προσδιορισθεί απαιτείται ο ίδιος ακριβώς όγκος εργασίας, όπως για τη συνιστώσα (εδώ, την A_z) του διανυσματικού δυναμικού, και επιπλέον πρέπει να γίνουν και οι αντιστοιχίσεις.
- Η επίλυση είναι εφικτή και με την εξίσωση *Poisson*, $\nabla^2 A_z = (1/r_T)(\partial/\partial r_T)(r_T \partial A_z / \partial r_T) = -\mu_0 J_z$, με $J_z = i_0/S$ στον κύλινδρο $\pi r_T^2 < S \rightarrow 0$, αλλά $J_z = 0$ για $r_T > \sqrt{(S/\pi)} \rightarrow 0$. Ολοκληρώνοντας έξω από τη διατομή S του νήματος, εκεί που είναι $J_z = 0$, προκύπτει:

$$\left(r_T \frac{\partial A_z}{\partial r_T} \right)_{r_T} = \left(r_T \frac{\partial A_z}{\partial r_T} \right)_{r_T \rightarrow 0} = -\left(r_T B_\varphi \right)_{r_T \rightarrow 0} = -\frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial r_T} = -\frac{\mu_0 i_0}{2\pi r_T}.$$

και με μία ακόμα ολοκλήρωση προκύπτει η συνιστώσα A_z . Η τελευταία αυτή ολοκλήρωση είναι περιττή, αν ζητούμενο είναι μόνο το $\mathbf{B} = -\mathbf{i}_\varphi \partial A_z / \partial r_T$.

- Αν η φορά του i_0 ήταν προς το $-\infty$, αυτό πρέπει να ληφθεί υπ' όψιν μία και μόνο φορά. Σωστός χειρισμός της ποσότητας $i d\mathbf{r}'$ είναι εναλλακτικά:

$$\text{Είτε } i = -i_0 \text{ και } d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_z dz' \text{ (δηλαδή } dz' > 0) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{i}_z (\mu_0 / 4\pi) (-i_0) \int_{-\infty}^{+\infty} dz' (1/R - 1/R_0),$$

$$\text{Είτε } i = i_0 \text{ και } d\mathbf{r}' = \mathbf{i}_z dz' \text{ (άρα τώρα } dz' < 0) \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{i}_z (\mu_0 / 4\pi) (+i_0) \int_{+\infty}^{-\infty} dz' (1/R - 1/R_0).$$

Επιλογές όπως $i = i_0$, με $d\mathbf{r}' = -\mathbf{i}_z dz'$ (λόγω φοράς του i) και με όρια $\int_{+\infty}^{-\infty}$ (πάλι λόγω φοράς του i) λαμβάνουν υπ' όψιν τη φορά του i δύο φορές, που ισοδυναμεί με καμία.

Παράδειγμα 5.3-2: Χωρική πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_0 \cos(\pi x/2a)$ υπάρχει στο πρίσμα με άπειρο μήκος και με διατομή στο διάστημα $-a < x < a$, $-b < y < b$. Ζητείται, σε χώρο με μ_0 , να προσδιορισθούν το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} και η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} .

Επίλυση: Από το άπειρο η ρευματική κατανομή φαίνεται σαν νηματοειδής, με πεπερασμένη τιμή, οπότε για το σημείο αναφοράς πρέπει να είναι $\mathbf{r}_0 \neq \infty$. Αποδεκτή είναι οποιαδήποτε άλλη θέση $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, όπως η θέση $\mathbf{r}_0 = 0$. Με $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}_z J_0 \cos(\pi x'/2a)$, $dV' = dx' dy' dz'$, με ολοκλήρωση στην περιοχή $-a < x' < a$, $-b < y' < b$, $-\infty < z' < \infty$ προκύπτει

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_z \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-b}^b dy' \int_{-a}^a dx' \cos\left(\frac{\pi x'}{2a}\right) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right),$$

όπου οι σχετικές αποστάσεις έχουν τη γνωστή μορφή $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$ και $R_0^2 = (x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (z_0 - z')^2$.

Για την εφαρμογή του νόμου *Biot-Savart*, εκτός από τα προηγούμενα, χρειάζεται και η σχετική απόσταση ως διάνυσμα, $\mathbf{R} = (x - x')\mathbf{i}_x + (y - y')\mathbf{i}_y + (z - z')\mathbf{i}_z$, οπότε για το εξωτερικό γινόμενο είναι $\mathbf{J} \times \mathbf{R} = J_0 \cos(\pi x'/2a)[\mathbf{i}_y(x - x') - \mathbf{i}_x(y - y')]$ και το πεδίο \mathbf{B} εκφράζεται ως:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-b}^b dy' \int_{-a}^a dx' \cos\left(\frac{\pi x'}{2a}\right) \left[-\mathbf{i}_x \frac{y - y'}{R^3} + \mathbf{i}_y \frac{x - x'}{R^3} \right].$$

Σχόλια:

- Στις εκφράσεις για τα \mathbf{A} και \mathbf{B} η πλασματική εξάρτηση από τη θέση z (μέσω του R) εξαλείφεται, για παράδειγμα με $\zeta = z' - z$, οπότε $\int_{-\infty}^{+\infty} dz' [\dots] \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta [\dots]$, όπου τώρα η σχετική απόσταση (το τετράγωνό της) είναι $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + \zeta^2$, ανεξάρτητη του z . Η ολοκλήρωση αυτή μπορεί να γίνει με στοιχειώδεις τεχνικές, με την αντικατάσταση $\zeta = r_T \sinh \xi$, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.
- Παρόμοια ενέργεια για τη θέση y , όπως η αντικατάσταση $\eta = y' - y$, οπότε $R^2 = (x - x')^2 + \eta^2 + \zeta^2$ μεταφέρει την εξάρτηση από το y στα όρια, επειδή $\int_{-b}^{+b} dy' [\dots] \rightarrow \int_{-b-y}^{b-y} d\eta [\dots]$. Και αυτή η ολοκλήρωση είναι εφικτή με στοιχειώδεις τεχνικές, χρησιμοποιώντας την ποσότητα R^2 ως ανεξάρτητη μεταβλητή, οπότε $\frac{1}{2} dR^2 = \eta d\eta$, ποσότητα που εμφανίζεται στον αριθμητή στο ολοκλήρωμα του νόμου *Biot-Savart* (με μικρό, πάντως, όφελος).
- Όταν όμως είναι $b = \infty$, η διάταξη χαρακτηρίζεται από $\partial/\partial y = 0$ με $J_y = 0$, έχει δηλαδή επαρκή συμμετρία για επίλυση ως προς το πεδίο $\mathbf{H} = \mathbf{i}_y H(x)$ με εφαρμογή του νόμου του *Ampere*, ώστε να προσδιορισθεί ακολούθως το διανυσματικό δυναμικό, αν χρειάζεται. Αυτή θα ήταν η φυσιολογική επιλογή για την πορεία επίλυσης.

Παράδειγμα 5.3-3: Επιφανειακό ρεύμα με πυκνότητα $\mathbf{K} = \mathbf{i}_\varphi K_0 \exp(-r_T/a)$ ρέει στο επίπεδο $z = 0$. Σε χώρο με μ_0 ζητούνται το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} και η μαγνητική επαγωγή \mathbf{B} .

Επίλυση: Επειδή $\mathbf{K}|_{r \rightarrow \infty} = 0$, μπορεί να ληφθεί η αναφορά στο άπειρο, δηλαδή $1/R_0 = 0$. Το ρεύμα $\mathbf{K}(\mathbf{r}') = \mathbf{i}'_\varphi K_0 \exp(-r'_T/a)$, στις τονισμένες μεταβλητές, ρέει στο επίπεδο $z' = 0$, στην περιοχή $0 < r'_T < \infty$, $0 < \varphi' < 2\pi$, με στοιχειώδες εμβαδό $dS' = r'_T dr'_T d\varphi'$. Για τη σχετική απόσταση είναι $R^2 = r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos(\varphi' - \varphi) + z^2$, οπότε προκύπτει:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int_0^\infty dr'_T r'_T \exp(-r'_T/a) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{R} \mathbf{i}'_\varphi(\varphi').$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}'_φ , προερχόμενο από την έκφραση του ρεύματος $\mathbf{K}(\mathbf{r}')$ στις τονισμένες μεταβλητές, εξαρτάται από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης φ' και, συνεπώς, παραμένει μέρος της ολοκληρωτέας ποσότητας. Επειδή είναι επιθυμητό να εκφρασθεί το δυναμικό \mathbf{A} με τη βοήθεια των \mathbf{i}_T και \mathbf{i}_φ , που αναφέρονται στη θέση \mathbf{r} , και όχι εκείνων που εξαρτώνται από το \mathbf{r}' , που μεταβάλλεται κατά την ολοκλήρωση, το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}'_φ αναλύεται σε συνιστώσες στο άτονο σύστημα, $\mathbf{i}'_\varphi = \mathbf{i}_T \sin(\varphi - \varphi') + \mathbf{i}_\varphi \cos(\varphi - \varphi')$, με αποτέλεσμα:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int_0^\infty dr'_T r'_T \exp(-r'_T/a) \int_0^{2\pi} d\xi \frac{-\mathbf{i}_T \sin \xi + \mathbf{i}_\varphi \cos \xi}{R},$$

με την αλλαγή μεταβλητής $\xi = \varphi' - \varphi$. Εύκολα φαίνεται ότι $\int_0^{2\pi} d\xi \sin \xi / R(\cos \xi) = 0$, επειδή οι θέσεις ξ και $2\pi - \xi$ έχουν αθροιστικά μηδενική συνεισφορά, αφού είναι $\sin(2\pi - \xi) = -\sin \xi$, ενώ $\cos(2\pi - \xi) = +\cos \xi$ και $R(\cos(2\pi - \xi)) = +R(\cos \xi)$, οπότε τελικά:

$$\mathbf{A}(r_T, z) = \mathbf{i}_\varphi \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int_0^\infty dr'_T r'_T \exp(-r'_T/a) \int_0^{2\pi} \frac{d\xi \cos \xi}{\sqrt{r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos \xi + z^2}}.$$

Για να προσδιορισθεί απευθείας τώρα το πεδίο \mathbf{B} με εφαρμογή του νόμου *Biot-Savart*, εκτός από τις προηγούμενες ποσότητες χρειάζεται και η σχετική απόσταση, $\mathbf{R} = \mathbf{i}_T r_T - \mathbf{i}'_T r'_T + \mathbf{i}_z z$, ως διάνυσμα, όπου πάλι έχει γίνει διάκριση μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{i}_T (που αναφέρεται στις άτονες συντεταγμένες για την περιγραφή του δυναμικού \mathbf{A}) και \mathbf{i}'_T (για τις θέσεις \mathbf{r}' , στις οποίες βρίσκεται το ρεύμα \mathbf{K}). Για το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}$ χρειάζεται το γινόμενο $\mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{R} = r_T \mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}_T - r'_T \mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}'_T + z \mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}_z$. Η γωνία μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων, που εμπλέκονται στα εξωτερικά γινόμενα, είναι, κατά περίπτωση, ίση με $\xi = \varphi' - \varphi$ και $\xi \pm \pi/2$, οπότε είναι $\mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}_T = -\mathbf{i}_z \cos \xi$, $\mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}'_T = -\mathbf{i}'_z = -\mathbf{i}_z$ και $\mathbf{i}'_\varphi \times \mathbf{i}_z = -\mathbf{i}'_T = \mathbf{i}_T \cos \xi - \mathbf{i}_\varphi \sin \xi$. Για τους ίδιους λόγους με προηγουμένως είναι $\int_0^{2\pi} d\xi \sin \xi / R^3 = 0$, οπότε τελικά:

$$\mathbf{B}(r_T, z) = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int_0^\infty dr'_T r'_T \exp(-r'_T/a) \int_0^{2\pi} d\xi \frac{\mathbf{i}_z (r'_T - r_T \cos \xi) - \mathbf{i}_T z \cos \xi}{[r_T^2 + r_T'^2 - 2r_T r_T' \cos \xi + z^2]^{3/2}}.$$

Παράδειγμα 5.3-4: Σε μία διάταξη, η μόνιμη ροή ηλεκτρικού ρεύματος περιορίζεται στην επίπεδη πλάκα $0 < z < h$, συμπεριλαμβανόμενων των ορίων της. Τμήμα της ροής εκδηλώνεται ως $\mathbf{J} = \mathbf{i}_x J_x + \mathbf{i}_z J_z$ στο εσωτερικό της πλάκας, με $J_z = J_0 \sin(\pi z/2h) \cos(\pi x/2h) f(y)$, όπου $f(y) = \exp(-y^2/a^2)$. Επίσης, όλες οι κατανομές που συναποτελούν τη ροή ρεύματος δεν έχουν συνιστώσες παράλληλες με τον άξονα y . Ολόκληρος ο χώρος χαρακτηρίζεται από μαγνητική διαπερατότητα μ_0 . Προσδιορίστε αρχικά τις λοιπές κατανομές ηλεκτρικού ρεύματος, στο μέτρο που συνδέονται με τη συνιστώσα J_z , και ακολούθως την ένταση μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} .

Επίλυση: Για την πυκνότητα \mathbf{J} πρέπει να είναι $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, επειδή σε μόνιμη κατάσταση είναι $\partial \rho / \partial t = 0$, συνεπώς $\partial J_x / \partial x = -\partial J_z / \partial z = -(\pi J_0 / 2h) \cos(\pi z/2h) \cos(\pi x/2h) f(y)$. Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή, προκύπτει $J_x = -J_0 \cos(\pi z/2h) \sin(\pi x/2h) f(y)$. Μαθηματικά, το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης συμπληρώνεται από οποιαδήποτε συνάρτηση $J_1(y, z)$, που αντιπροσωπεύει τη σταθερά ολοκλήρωσης. Αυτή η ποσότητα με κανένα τρόπο δεν συνδέεται με τα δεδομένα, οπότε τίθεται ίση με μηδέν. Ηλεκτρικό ρεύμα, με μορφή $\mathbf{J} = \mathbf{i}_x J_1(y, z)$, θα μπορούσε να υπάρχει στο εσωτερικό της πλάκας, αλλά τελείως αυθυπόστατα και ανεξάρτητα από την προκείμενη ροή ρεύματος. Στο όριο $z = 0$ της πλάκας, με ενδεχόμενη παρουσία πυκνότητας \mathbf{K}_0 , είναι $\partial \sigma_0 / \partial t = 0$, σε μόνιμη κατάσταση, και $\mathbf{J}(z < 0) = 0$, για ροή που περιορίζεται στην περιοχή $0 < z < h$, οπότε ο νόμος διατήρησης φορτίου γράφεται $-\nabla \cdot \mathbf{K}_0 = +\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{J}_+ = J_z(z = 0^+) = 0$ (με την επιλογή $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$), δηλαδή, $\mathbf{K}_0 = 0$ [για τους ίδιους λόγους που αναφέρθηκαν προηγουμένως σε σχέση με την ποσότητα $J_1(y, z)$]. Αντίθετα, στο πάνω όριο ($z = h$) της πλάκας υπάρχει υποχρεωτικά επιφανειακή πυκνότητα $\mathbf{K}_h = \mathbf{i}_x K_h$. Ενώ πάλι είναι $\partial \sigma_h / \partial t = 0$ και $\mathbf{J}(z > 0) = 0$, τώρα (πάλι με $\mathbf{i}_n = \mathbf{i}_z$) η ισότητα $-\nabla \cdot \mathbf{K}_h = -\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{J}_-$ δίνει $\partial K_h / \partial x = J_z(z = h^-) = J_0 \cos(\pi x/2h) f(y) \neq 0$, και μετά από ολοκλήρωση, παραλείποντας τη σταθερά ολοκλήρωσης, όπως και προηγουμένως, προκύπτει $\mathbf{K}_h = \mathbf{i}_x (2h J_0 / \pi) \sin(\pi x/2h) f(y)$. Συγκεντρώνοντας όλες τις πληροφορίες, η ροή ρεύματος αποτελείται από:

- Χωρική πυκνότητα, στην περιοχή $0 < z < h$, ίση με:

$$\mathbf{J} = \left[\mathbf{i}_z J_0 \sin\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2h}\right) - \mathbf{i}_x J_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2h}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right) \right] f(y).$$

- Επιφανειακή πυκνότητα, στο επίπεδο $z = h$, ίση με:

$$\mathbf{K}_h = \mathbf{i}_x \frac{2h J_0}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{2h}\right) f(y),$$

όπου $f(y) = \exp(-y^2/a^2)$.

Δεδομένου ότι η ροή ρεύματος αποτελείται από δύο ρευματικές κατανομές, το μαγνητικό πεδίο θα εκφρασθεί μέσω του νόμου *Biot-Savart* ως το άθροισμα των δύο συνεισφορών (5.3-16α) και (5.3-16β):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_J + \mathbf{H}_K = \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} + \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \frac{\mathbf{K}_h(\mathbf{r}'_S) \times \mathbf{R}_h}{R_h^3}.$$

Στον πρώτο όρο είναι $dV' = dx' dy' dz'$, με ολοκλήρωση στον τριδιάστατο χώρο της πλάκας. Η σχετική απόσταση (το τετράγωνό της) βέβαια είναι $R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$ και, ως διάνυσμα, $\mathbf{R} = (x-x')\mathbf{i}_x + (y-y')\mathbf{i}_y + (z-z')\mathbf{i}_z$, οπότε για το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{J} \times \mathbf{R}$ χρειάζονται τα γινόμενα $\mathbf{i}_z \times \mathbf{R} = -\mathbf{i}_x(y-y') + \mathbf{i}_y(x-x')$ και $\mathbf{i}_x \times \mathbf{R} = -\mathbf{i}_y(z-z') + \mathbf{i}_z(y-y')$. Με βάση αυτές τις πληροφορίες, η συνεισφορά της χωρικής πυκνότητας \mathbf{J} στο μαγνητικό πεδίο είναι ίση με:

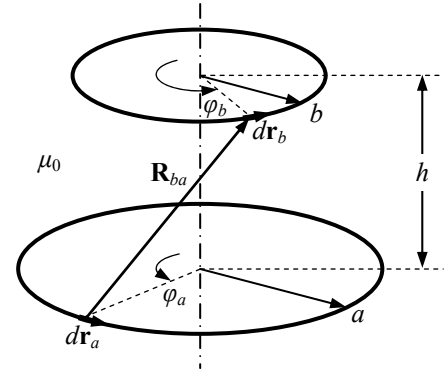
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_J(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_V dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^3} \\ &= -\mathbf{i}_x \frac{J_0}{4\pi} \int_0^h dz' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left\{ \frac{y-y'}{R^3} \sin\left(\frac{\pi z'}{2h}\right) \cos\left(\frac{\pi x'}{2h}\right) f(y') \right\} \\ &\quad + \mathbf{i}_y \frac{J_0}{4\pi} \int_0^h dz' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left\{ \left[\frac{x-x'}{R^3} \sin\left(\frac{\pi z'}{2h}\right) \cos\left(\frac{\pi x'}{2h}\right) + \frac{z-z'}{R^3} \cos\left(\frac{\pi z'}{2h}\right) \sin\left(\frac{\pi x'}{2h}\right) \right] f(y') \right\} \\ &\quad + \mathbf{i}_z \frac{J_0}{4\pi} \int_0^h dz' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left\{ -\frac{y-y'}{R^3} \cos\left(\frac{\pi z'}{2h}\right) \sin\left(\frac{\pi x'}{2h}\right) f(y') \right\}. \end{aligned}$$

Για τον δεύτερο όρο, το στοιχείο είναι $dS' = dx' dy'$, και η ολοκλήρωση αναφέρεται στην διδιάστατη έκταση του ορίου $z' = h$ της πλάκας. Για τη σχετική απόσταση τώρα είναι $R_h^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-h)^2$ και, ως διάνυσμα, $\mathbf{R}_h = (x-x')\mathbf{i}_x + (y-y')\mathbf{i}_y + (z-h)\mathbf{i}_z$, και επειδή είναι $\mathbf{K}_h = \mathbf{i}_h K_h$, για το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{K}_h \times \mathbf{R}_h$ χρειάζεται μόνο το γινόμενο $\mathbf{i}_x \times \mathbf{R}_h = -\mathbf{i}_y(z-h) + \mathbf{i}_z(y-y')$. Η συνεισφορά της πυκνότητας \mathbf{K}_h είναι, συνεπώς, ίση με:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_K(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \frac{\mathbf{K}_h(\mathbf{r}'_S) \times \mathbf{R}_h}{R_h^3} \\ &= -\mathbf{i}_y \frac{2hJ_0}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left\{ \frac{z-h}{R_h^3} \sin\left(\frac{\pi x'}{2h}\right) f(y') \right\} \\ &\quad + \mathbf{i}_z \frac{2hJ_0}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left\{ \frac{y-y'}{R_h^3} \sin\left(\frac{\pi x'}{2h}\right) f(y') \right\}. \end{aligned}$$

Το μαγνητικό πεδίο στη θέση $\mathbf{r} = (x, y, z)$ είναι το άθροισμα, και όχι επαλληλία, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_J + \mathbf{H}_K$.

Παράδειγμα 5.3-5: Σε χώρο με μ_0 , να προσδιορισθεί ο συντελεστής αλληλεπαγωγής μιας διάταξης, που αποτελείται από δύο κυκλικούς βρόχους, με ακτίνες a και b , τοποθετημένους ομοαξονικά και παράλληλα μεταξύ τους, σε απόσταση h , με ομόρροπα τα ρεύματα I_a και I_b .



Επίλυση: Για τα στοιχειώδη μήκη κάθε βρόχου είναι $d\mathbf{r}_a = \mathbf{i}_{\varphi_a} a d\varphi_a$ και $d\mathbf{r}_b = \mathbf{i}_{\varphi_b} b d\varphi_b$, οπότε το εσωτερικό γινόμενο τους είναι $d\mathbf{r}_a \cdot d\mathbf{r}_b = ab d\varphi_a d\varphi_b \cos(\varphi_a - \varphi_b)$. Με $R_{ba}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\varphi_a - \varphi_b) + h^2$ προκύπτει για την αλληλεπαγωγή από τον τύπο του Neumann, σχέση (5.3-23):

$$L_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\ell_a} \oint_{\ell_b} \frac{d\mathbf{r}_a \cdot d\mathbf{r}_b}{R_{ab}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi_a \int_0^{2\pi} d\varphi_b \frac{ab \cos(\varphi_a - \varphi_b)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + h^2) - 2ab \cos(\varphi_a - \varphi_b)}}.$$

Επειδή οι γωνίες φ_a και φ_b εμφανίζονται μόνο μέσω της διαφοράς τους $\zeta = \varphi_a - \varphi_b$, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μεταβλητές ολοκλήρωσης οι φ_a και ζ , η καθεμία στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Η ολοκλήρωση ως προς φ_a δίνει απλώς 2π , επειδή η ολοκληρωτέα παράσταση εξαρτάται πια μόνο από την ζ , ενώ η εξάρτηση από το ζ έχει συμμετρία, οπότε τελικά προκύπτει:

$$L_{ab} = \mu_0 \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 + h^2}} \int_0^\pi d\zeta \frac{\cos \zeta}{\sqrt{1 - \frac{2ab}{a^2 + b^2 + h^2} \cos \zeta}}.$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί με χρήση ελλειπτικών ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα 5.3-6: Δύο ορθογώνιοι βρόχοι, με διαστάσεις $a \times b$, είναι τοποθετημένοι όπως στο σχήμα. Ζητείται ο συντελεστής αλληλεπαγωγής, σε χώρο με μ_0 .

Επίλυση: Χωρίζοντας κάθε ολοκλήρωμα \oint_{ℓ_1} και \oint_{ℓ_2} σε τέσσερις όρους (από έναν για κάθε πλευρά), προκύπτουν $4 \times 4 = 16$ όροι, από τους οποίους είναι $d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 \neq 0$ μόνο στους τέσσερις συνδυασμούς:

$$(B\Gamma)-(EZ): d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = dy_1 \cdot dy_2, \text{ με } R_{12}^2 = a^2 + (y_2 - y_1)^2 + h^2 = R_I^2,$$

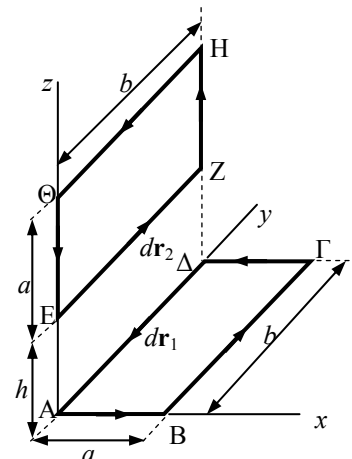
$$(B\Gamma)-(H\Theta): d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = -dy_1 dy_2,$$

$$\text{με } R_{12}^2 = a^2 + (y_2 - y_1)^2 + (a + h)^2 = R_{II}^2,$$

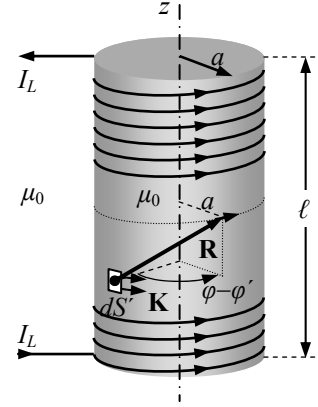
$$(\Delta A)-(EZ): d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = -dy_1 dy_2, \text{ με } R_{12}^2 = (y_2 - y_1)^2 + h^2 = R_{III}^2,$$

$$(\Delta A)-(H\Theta): d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 = dy_1 dy_2, \text{ με } R_{12}^2 = (y_2 - y_1)^2 + (a + h)^2 = R_{IV}^2.$$

$$\text{Τελικά: } L_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^b dy_1 \int_0^b dy_2 \left[\frac{1}{R_I} - \frac{1}{R_{II}} - \frac{1}{R_{III}} + \frac{1}{R_{IV}} \right].$$



Παράδειγμα 5.3-7: Σε χώρο με μ_0 , κυκλικό πηνίο έχει ακτίνα a και N ελίγματα, κατανομημένα ομοιόμορφα και σε πυκνή διάταξη σε μήκος ℓ (όπου οι ποσότητες a και ℓ έχουν συγκρίσιμη τιμή και δεν επιτρέπουν την παραδοχή απείρου μήκους, $\ell \gg a$). Ζητείται η αυτεπαγωγή L του πηνίου.



Επίλυση: Λόγω της ομοιόμορφης διάταξης, η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ελιγμάτων είναι ίση με $\delta = N/\ell$. Με τον άξονα z να συμπίπτει με τον άξονα του πηνίου, το στοιχειώδες μήκος σε κάθε έλιγμα είναι $d\mathbf{r} = \mathbf{i}_\varphi a d\varphi + \mathbf{i}_z dz = a(\mathbf{i}_\varphi + \mathbf{i}_z \delta/2\pi a) d\varphi$ (λόγω της αναλογίας $dz/ad\varphi = \delta/2\pi a$), όπου η γωνία φ μεταβάλλεται στο διάστημα $0 < \varphi < 2\pi N$, ώστε να καλυφθεί όλο το μήκος, που εκτείνεται σε N σπείρες.

Τα ρευματοφόρα έλιγματα, λόγω της πυκνής διάταξής τους, μπορούν να περιγραφούν από επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος \mathbf{K} , η οποία, εκφραζόμενη στις τονισμένες μεταβλητές, βρίσκεται στην επιφάνεια $r'_T = a$, $0 < z' < \ell$ (και $0 < \varphi' < 2\pi$), με στοιχειώδες εμβαδόν $dS' = a d\varphi' dz'$. Η πυκνότητα $\mathbf{K} = \mathbf{i}_\varphi K_\varphi + \mathbf{i}_z K_z$ είναι συγγραμμική με το $d\mathbf{r}$, συνεπώς $K_z/K_\varphi = \delta/2\pi a$ και επειδή είναι $K_\varphi = I_L/\delta$, στις τονισμένες μεταβλητές είναι $\mathbf{K} = (I_L/\delta)(\mathbf{i}'_\varphi + \mathbf{i}_z \delta/2\pi a)$.

Τέλος, για την απόσταση R μεταξύ των $d\mathbf{r}$ [σε ακτίνα a , γωνία φ και υψόμετρο $z(\varphi) = (\delta/2\pi a)a\varphi = (\delta/2\pi)\varphi$] και dS' [σε ακτίνα a , γωνία φ' και υψόμετρο z'] είναι:

$$R^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{\delta}{2\pi} \varphi - z' \right)^2.$$

Χρησιμοποιώντας όλα τα προηγούμενα στη σχέση (5.3-28), η αυτεπαγωγή γράφεται ως:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{4\pi I_L} \int_S dS' \int_\ell \frac{d\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}'_S)}{R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi I_L} \int_0^{2\pi} d\varphi' a \int_0^\ell dz' \int_0^{2\pi N} d\varphi a \left(\mathbf{i}_\varphi + \mathbf{i}_z \frac{\delta}{2\pi a} \right) \cdot \left[\frac{I_L}{\delta} \left(\mathbf{i}'_\varphi + \mathbf{i}_z \frac{\delta}{2\pi a} \right) \right] \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Το ρεύμα I_L φυσικά απαλείφεται, ενώ στο εσωτερικό γινόμενο οι μόνοι μη μηδενικοί όροι είναι οι $\mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}'_\varphi = \cos(\varphi - \varphi')$ και $\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_z = 1$, οπότε προκύπτει τελικά:

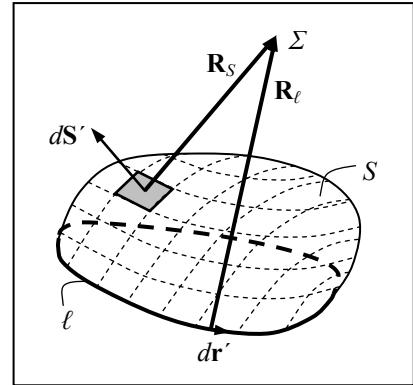
$$L = \frac{\mu_0 a^2}{4\pi \delta} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\ell dz' \int_0^{2\pi N} d\varphi \frac{\cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{\delta}{2\pi a} \right)^2}{\sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos(\varphi - \varphi') + \left(\frac{\delta}{2\pi} \varphi - z' \right)^2}}.$$

5.3.2 Διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} από κατανομές μαγνητικών διπόλων

Διανυσματικό δυναμικό ρευματοφόρου βρόχου: Για ένα βρόχο ℓ με ρεύμα i σε χώρο με μ_0 , το διανυσματικό δυναμικό είναι, σύμφωνα με τα γνωστά:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{d\mathbf{r}'}{R_{\ell}}, \quad (5.3-29)$$

όπου R_{ℓ} είναι η απόσταση του σημείου Σ στη θέση \mathbf{r} από το τυχαίο σημείο του βρόχου και υποτίθεται ότι ο βρόχος έχει πεπερασμένο μήκος και η αναφορά λαμβάνεται στο άπειρο. Με το θεώρημα του *Stokes*, σχέση (Α.5-2β) στο Παράρτημα Α.5 του Μέρους Α, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε επιφανειακό, $\oint_{\ell} d\mathbf{r}'/R_{\ell} = -\oint_S (\nabla' \cdot \mathbf{R}_S^{-1}) \times d\mathbf{S}'$, όπου S είναι οποιαδήποτε επιφάνεια έχει ως όριο τον βρόχο ℓ και R_S είναι η απόσταση του Σ από το στοιχείο $d\mathbf{S}'$ της επιφάνειας S , βλ. και **Σχήμα 5.3-3**. Δεδομένου επίσης, ότι ισχύει $\nabla' \cdot \mathbf{R}_S^{-1} = \mathbf{R}_S/R_S^3$ (βλ. σελ. 128), και αντιστρέφοντας τη σειρά στο εξωτερικό γινόμενο, $-\mathbf{R}_S \times d\mathbf{S}' = d\mathbf{S}' \times \mathbf{R}_S$, το διανυσματικό δυναμικό του ρευματοφόρου βρόχου δίδεται από τη σχέση:



Σχήμα 5.3-3

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_S \frac{d\mathbf{S}' \times \mathbf{R}_S}{R_S^3}. \quad (5.3-30)$$

Διανυσματικό δυναμικό και μαγνητικό πεδίο μαγνητικού διπόλου: Στο όριο, όταν το εμβαδόν της S , όπως επίσης και η περίμετρος του βρόχου, είναι πολύ μικρά και ταυτόχρονα το ρεύμα πολύ μεγάλο ($i \rightarrow \infty$), ο ρευματοφόρος βρόχος εκφυλίζεται σε μαγνητικό δίπολο με διπολική ροπή $\mathbf{m} = i \int_S d\mathbf{S}'$. Καθώς είναι $S \rightarrow 0$, το σημείο Σ απέχει πρακτικά την ίδια απόσταση \mathbf{R} από οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας S , οπότε μπορεί να τεθεί $\mathbf{R}_S = \mathbf{R}$, μη μεταβαλλόμενο κατά την ολοκλήρωση. Έτσι, από τη σχέση (5.3-30) σχηματίζεται το **διανυσματικό δυναμικό στη θέση \mathbf{r} , που οφείλεται σε μαγνητικό δίπολο \mathbf{m} στη θέση \mathbf{r}' :**

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (5.3-31)$$

με $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, τη θέση παρατήρησης σε σχέση με τη θέση του διπόλου.

Με την ειδική επιλογή διπόλου με $\mathbf{m} = m_0 \mathbf{i}_z$ και στην αρχή των αξόνων ($\mathbf{r}' = 0$), είναι $\mathbf{R} = r \mathbf{i}_r$, συνεπώς $\mathbf{m} \times \mathbf{R} = m_0 \mathbf{i}_z \times (r \mathbf{i}_r) = \mathbf{i}_\theta m_0 r \sin \theta$, οπότε το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_\theta \frac{\mu_0 m_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2}, \quad (5.3-32)$$

και παραγωγίζοντας, $\mathbf{H} = (1/\mu_0)\mathbf{B} = (1/\mu_0)\nabla \times \mathbf{A}$, ένα **δίπολο στην αρχή των αξόνων παράγει μαγνητικό πεδίο με ένταση** (εναλλακτικά σε σφαιρικές και κυλινδρικές συντεταγμένες):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{m_0}{4\pi} \frac{\mathbf{i}_r 2 \cos \theta + \mathbf{i}_\theta \sin \theta}{r^3} \\ &= \frac{m_0}{4\pi} \frac{\mathbf{i}_T 3r_T z + \mathbf{i}_z (2z^2 - r_T^2)}{(r_T^2 + z^2)^{5/2}}. \end{aligned} \quad (5.3-33)$$

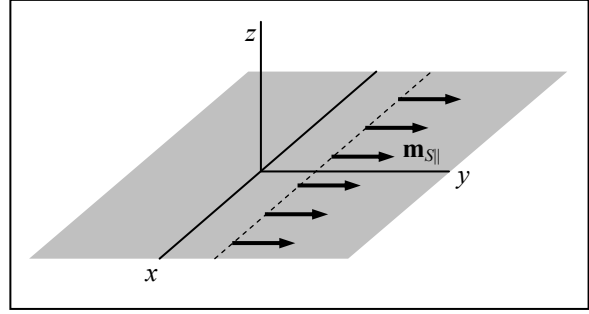
Η σύγκριση με το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από ηλεκτρικό δίπολο, βλ. σχέση (5.2-20α) αποκαλύπτει ότι υπάρχει πλήρης ταύτιση στη χωρική εξάρτηση του πεδίου που παράγεται από το αντίστοιχο δίπολο (ηλεκτρικό ή μαγνητικό). Αυτός είναι, άλλωστε, ο λόγος που ο απειροστός ρευματοφόρος βρόχος ονομάζεται (μαγνητικό) δίπολο, μολονότι δεν υπάρχουν άμεσα αναγνωρίσιμοι πόλοι, όπως θα ήταν τα μαγνητικά φορτία, αν υπήρχαν. Πάντως, με την εισαγωγή στην παράγρ. 5.3.4 του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού Φ_m και της επιφάνειας ασυνέχειας που συνοδεύει ένα ρευματοφόρο βρόχο, ως πόλοι ενός μαγνητικού διπόλου αναγνωρίζονται οι δύο όψεις της καθαρά νοητής επιφάνειας ασυνέχειας.

Διανυσματικό δυναμικό κατανεμημένων διπόλων: Δίπολα κατανεμημένα στο χώρο, ή κοντά σε επιφάνεια, ή τέλος κοντά σε γραμμή μπορούν να περιγραφούν, όπως στην παράγραφο 1.3-2 του Μέρους Α, από τις αντίστοιχες πυκνότητες, τη χωρική \mathbf{M} , την επιφανειακή \mathbf{m}_s και τέλος τη γραμμική \mathbf{m}_ℓ . Για τις κατανομές αυτές, το στοιχειώδες μαγνητικό δίπολο είναι αντίστοιχα ίσο με $d\mathbf{m} = \{\mathbf{M}dV, \mathbf{m}_s dS, \mathbf{m}_\ell d\ell\}$, που συμπεριφέρεται ως σημειακό. Κατά συνέπεια, η σχέση (5.3-31) αμέσως γενικεύεται σε:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{m}' \times \mathbf{R}}{R^3}, \quad (5.3-34)$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, τα στοιχειώδη δίπολα εκφράζονται στις τονισμένες μεταβλητές, κατά τα γνωστά, $d\mathbf{m}' = \{\mathbf{M}(\mathbf{r}')dV', \mathbf{m}_s(\mathbf{r}'_s)dS', \mathbf{m}_\ell(\ell')d\ell'\}$, και η ολοκλήρωση ως προς τις τονισμένες μεταβλητές (τις θέσεις των διπόλων) εκτείνεται σ' όλη την περιοχή που καταλαμβάνεται από τα δίπολα. Η διαδικασία για τη χρήση του ολοκληρώματος είναι ίδια με τις προηγούμενες ανάλογες περιπτώσεις, και μάλιστα με τον μαθηματικά ταυτόσημο νόμο *Biot-Savart*, οπότε δεν είναι απαραίτητη η επίδειξη της χρήσης του μέσω παραδειγμάτων, εκτός από τις περιπτώσεις των ειδικών διπολικών κατανομών που ακολουθούν.

Διανυσματικό δυναμικό μαγνητικού διπολικού στρώματος (με σταθερή μαγνητική ροπή, σε επίπεδο με άπειρη έκταση): Ας θεωρηθεί, όπως στο **Σχήμα 5.3-4**, ότι το διπολικό στρώμα έχει μαγνητική ροπή $\mathbf{m}_S = \mathbf{m}_{S\parallel} = \mathbf{i}_y m_{S0}$ και βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$. Για τη σχέση (5.3-34) είναι $d\mathbf{m}' = m_{S0} dx' dy' \mathbf{i}_y$, και η ολοκλήρωση, στην έκταση που καταλαμβάνεται από τη διπολική ροπή, θα γίνει στην περιοχή $-\infty < x' < \infty$ και $-\infty < y' < \infty$, με $z' = 0$. Για τη σχετική απόσταση, ως διάνυσμα είναι $\mathbf{R} = (x-x')\mathbf{i}_x + (y-y')\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z$, για το μέτρο της είναι $R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2$ και τέλος είναι $d\mathbf{m}' \times \mathbf{R} = m_{S0} dx' dy' [z\mathbf{i}_x - (x-x')\mathbf{i}_z]$ για το εξωτερικό γινόμενο. Με όλες αυτές τις πληροφορίες, το διανυσματικό δυναμικό γράφεται:



Σχήμα 5.3-4

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m_{S0}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{\mathbf{i}_x z - \mathbf{i}_z (x-x')}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right]^{3/2}}. \quad (5.3-35)$$

Αμέσως φαίνεται, ότι $A_y = 0$ εκ ταυτότητας. Επίσης είναι $A_z = 0$, ως ολοκλήρωμα συνάρτησης περιττής ως προς $\zeta = x' - x$. Αντικαθιστώντας $x' - x = \zeta$, $y' - y = \eta$, το δυναμικό γράφεται:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_x \frac{\mu_0 m_{S0}}{4\pi} z \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \frac{1}{\left[\zeta^2 + \eta^2 + z^2 \right]^{3/2}}, \quad (5.3-36)$$

σχέση που προβάλλει, ότι $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, όπως αναμένεται λόγω γενικότερης συμμετρίας. Για την πρώτη ολοκλήρωση γίνεται η αλλαγή μεταβλητών $\{\zeta = \rho \cos \theta, \eta = \rho \sin \theta\}$, ουσιαστικά, εισάγοντας πολικές συντεταγμένες ως προς άξονες $\{\zeta, \eta\}$, οπότε $d\zeta d\eta \rightarrow \rho d\rho d\theta$, με όρια ολοκλήρωσης $0 < \rho < \infty$ και $0 < \theta < 2\pi$, οπότε η ολοκληρωτέα παράσταση είναι ανεξάρτητη από το θ και η ολοκλήρωσή του δίνει 2π , με αποτέλεσμα την έκφραση:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_x \frac{\mu_0 m_{S0}}{4\pi} z (2\pi) \int_0^{+\infty} d\rho \frac{\rho}{\left[\rho^2 + z^2 \right]^{3/2}}. \quad (5.3-37)$$

Η τελική αλλαγή μεταβλητών είναι $\rho \rightarrow R(\rho) = [\rho^2 + z^2]^{1/2}$, με $\rho d\rho = R dR$, που δίνει $\int R dR / R^3 = -(1/R)$, και με τα όρια $R(0) = |z|$ και $R(\infty) = \infty$ προκύπτει:

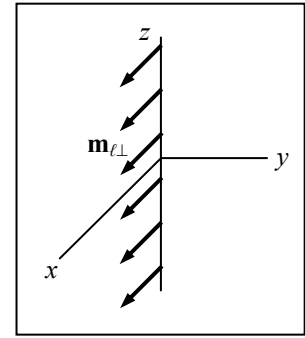
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_x \frac{\mu_0 m_{S0}}{2} \frac{z}{|z|} = \mathbf{i}_x \frac{\mu_0 m_{S0}}{2} \text{sgn}(z). \quad (5.3-38)$$

Το δυναμικό έχει ασυνέχεια στο επίπεδο $z = 0$. Η ασυνέχεια οφείλεται στην παρουσία του διπολικού στρώματος $\mathbf{m}_{S\parallel}$ και είναι ίση με $A_x(z=0^+) - A_x(z=0^-) = \mu_0 m_{S0}$. Ερμηνεύεται αντιστοιχίζοντας το $\mathbf{m}_{S\parallel}$ με ρεύματα $\mathbf{K}_{\pm} = \pm \mathbf{i}_x m_{S0}/d$ (με $d \rightarrow 0$) στα επίπεδα $z = \pm 1/2 d$, οπότε στον ενδιάμεσο χώρο αναπτύσσεται πεδίο $\mathbf{B} = \mathbf{i}_y \mu_0 m_{S0}/d$, οπότε σε ορθογώνιο βρόχο (με $d\mathbf{S} // \mathbf{i}_y$) η εφαρμογή της σχέσης (5.3-2) δίνει την ασυνέχεια.

Γενικά, επιφανειακή πυκνότητα $\mathbf{m}_{S\parallel}$, ακόμα και αν δεν είναι σταθερή, ούτε σε επίπεδη επιφάνεια, ούτε με άπειρη έκταση, σε μικρές αποστάσεις μοιάζει να είναι σταθερή και σε άπειρη επίπεδη επιφάνεια, οπότε:

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-) = \mu_0 \mathbf{m}_{S\parallel}. \quad (5.3-39)$$

Διανυσματικό δυναμικό μαγνητικής διπολικής ταινίας (με σταθερή μαγνητική ροπή, σε ευθεία γραμμή με άπειρο μήκος): Με τον προσανατολισμό των αξόνων, όπως στο **Σχήμα 5.3-5**, η διπολική ταινία έχει διπολική ροπή $\mathbf{m}_\ell = \mathbf{m}_{\ell\perp} = \mathbf{i}_x m_{\ell 0}$, στον άξονα $r_T = 0$. Τώρα, είναι $d\mathbf{m} = m_{\ell 0} dz' \mathbf{i}_x$ και με $\mathbf{R} = r_T \mathbf{i}_T + (z - z') \mathbf{i}_z$ το εξωτερικό γινόμενο είναι $d\mathbf{m}' \times \mathbf{R} = m_{\ell 0} dz' [\mathbf{i}_z r_T \sin \varphi - \mathbf{i}_y (z - z')]$, όπου οι ποσότητες r_T και $\mathbf{i}_z \sin \varphi = \mathbf{i}_x \times \mathbf{i}_T$ είναι ανεξάρτητες από τη μεταβλητή ολοκλήρωσης z' . Προκύπτει αμέσως ότι $A_x = 0$, καθώς επίσης και ότι $A_y = 0$, πάλι επειδή η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι περιττή συνάρτηση του $z' - z$. Με τη μεταβλητή $\zeta = (z' - z)/r_T$, το διανυσματικό δυναμικό γράφεται:



Σχήμα 5.3-5

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_z \frac{\mu_0 m_{\ell 0}}{4\pi} \frac{\sin \varphi}{r_T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2)^{3/2}}. \quad (5.3-40)$$

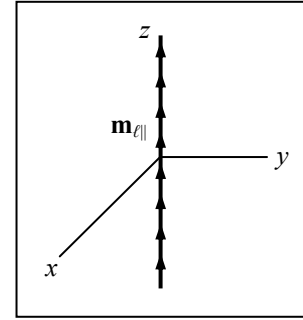
Με την αλλαγή μεταβλητής $\zeta = \sinh \psi$, $d\zeta = \cosh \psi d\psi$, $1 + \zeta^2 = \cosh^2 \psi$ και όρια $-\infty < \psi < \infty$, προκύπτει $\int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta / (1 + \zeta^2)^{3/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi / \cosh^2 \psi = \tanh(+\infty) - \tanh(-\infty) = 2$, οπότε:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_z \frac{\mu_0 m_{\ell 0}}{2\pi} \frac{\sin \varphi}{r_T} = \frac{\mu_0}{2\pi r_T} \mathbf{m}_\ell \times \mathbf{i}_T, \quad (5.3-41)$$

όπου στην τελευταία έκφραση το \mathbf{m}_ℓ έχει γραφεί ως διάνυσμα.

Η έκφραση αυτή έχει ως χαρακτηριστικά τον απειρισμό του δυναμικού (όταν $r_T = 0$), καθώς και τη «διπολική» εξάρτηση από το $\sin \varphi$. Όμοια με την προηγούμενη διάταξη, η σχέση (5.3-41) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και όταν $\mathbf{m}_\ell \neq \text{σταθ.}$, αλλά σε αποστάσεις $r_T \rightarrow 0$, πολύ κοντά στη γραμμή.

Διανυσματικό δυναμικό νηματοειδούς σωληνοειδούς (σε ευθεία γραμμή με άπειρο μήκος): Τοποθετώντας το σωληνοειδές με διπολική ροπή $\mathbf{m}_\ell = \mathbf{i}_z m_{\ell\parallel} = \mathbf{i}_z m_{\ell 0}$ στον άξονα z , όπως στο **Σχήμα 5.3-6**, είναι $d\mathbf{m}' = \mathbf{i}_z m_{\ell 0} dz'$, με $r_T' = 0$, στο διάστημα $-\infty < z' < \infty$, οπότε πάλι $\mathbf{R} = r_T \mathbf{i}_T + (z - z') \mathbf{i}_z$, αλλά τώρα $d\mathbf{m}' \times \mathbf{R} = \mathbf{i}_\varphi m_{\ell 0} r_T dz'$. Το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}_φ , καθώς και η ακτινική θέση r_T , που προέρχονται από το γινόμενο $\mathbf{i}_z \times (r_T \mathbf{i}_T)$, είναι ανεξάρτητα από τις τονισμένες μεταβλητές, ως προς τις οποίες θα γίνει η ολοκλήρωση. Συνεπώς, είναι $A_z = A_T = 0$ και με $\zeta = (z' - z)/r_T$ προκύπτει:



Σχήμα 5.3-6

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_\varphi \frac{\mu_0 m_{\ell 0}}{4\pi} \frac{1}{r_T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{(1 + \zeta^2)^{3/2}}, \quad (5.3-42)$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ακριβώς όπως στην προηγούμενη διάταξη, και το αποτέλεσμα είναι:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_\varphi \frac{\mu_0 m_{\ell 0}}{2\pi} \frac{1}{r_T} = \frac{\mu_0}{2\pi r_T} \mathbf{m}_\ell \times \mathbf{i}_T. \quad (5.3-43)$$

Αξιοσημείωτο είναι πως η εναλλακτική έκφραση, αυτή με το εξωτερικό γινόμενο, συμπίπτει με την αντίστοιχη στη σχέση (5.3-41).

Η έκφραση αυτή για το δυναμικό \mathbf{A} έχει συνιστώσα A_φ , με απειρισμό χαρακτηριστικό του $\mathbf{m}_\ell = \mathbf{i}_\ell m_{\ell\parallel}$. Για την ερμηνεία του απειρισμού, το \mathbf{m}_ℓ αντικαθίσταται από επιφανειακό ρεύμα $\mathbf{K} = \mathbf{i}_\varphi m_{\ell 0}/S$, στην κυλινδρική επιφάνεια $r_T' = a$, με $S = \pi a^2 \rightarrow 0$ και $\mathbf{K} \rightarrow \infty$. Το ρεύμα \mathbf{K} παράγει πεδίο με πυκνότητα μαγνητικής ροής $\mathbf{B} = \mathbf{i}_z \mu_0 K = \mathbf{i}_z \mu_0 m_{\ell 0}/\pi a^2 \rightarrow \infty$ μόνο μέσα στον κύλινδρο. Η αντίστοιχη μαγνητική ροή είναι $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 m_{\ell 0}$, ίση με $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r_T A_\varphi$, σύμφωνα με τη σχέση (5.3-2), και έτσι ερμηνεύεται η έκφραση για το \mathbf{A} .

Γενικά, κάθε γραμμική πυκνότητα $m_{\ell\parallel} \mathbf{i}_\ell$ με αποκλειστικά εφαπτομενική συνιστώσα, ακόμα και αν $m_{\ell\parallel} \neq \text{σταθ.}$, ή αν $\mathbf{i}_\ell \neq \text{σταθ.}$, ή επίσης αν το μήκος της δεν είναι άπειρο, σε μικρές αποστάσεις r_T μοιάζει να είναι σταθερή, σε ευθεία γραμμή, με άπειρο μήκος, οπότε αναμένεται απειρισμός του A_φ , με μορφή:

$$\left(r_T \int_0^{2\pi} A_\varphi d\varphi \right)_{r_T \rightarrow 0} = \mu_0 m_{\ell\parallel}(\ell). \quad (5.3-44)$$

5.3.3 Σημειακές σχέσεις για το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A}

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη μεταβολή του διανυσματικού δυναμικού \mathbf{A} στο χώρο, όταν είναι $\partial/\partial t = 0$, έχει ήδη διατυπωθεί στην παράγραφο 5.3.1. Στη γενική περίπτωση, όταν η μαγνητική διαπερατότητα μεταβάλλεται χωρικά, είναι η εξίσωση:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = \mathbf{J}, \quad (5.3-45)$$

και σε ομογενές μέσο ($\mu = \text{σταθ.}$) η σχέση αυτή απλοποιείται σε:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \mathbf{J}, \quad \text{όταν } \nabla \mu = 0. \quad (5.3-46)$$

Με τον ορισμό της διανυσματικής Λαπλασιανής, $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$, και την υιοθέτηση της συνθήκης $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, τελικά, σχηματίζεται η διανυσματική εξίσωση του *Poisson*:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad \text{όταν } \nabla \mu = 0 \quad (\text{με } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0), \quad (5.3-47)$$

που εξειδικεύεται στη διανυσματική εξίσωση του *Laplace*, $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$, στις περιοχές του χώρου χωρίς χωρικά ρεύματα (όπου είναι $\mathbf{J} = 0$).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η διανυσματική Λαπλασιανή $\nabla^2 \mathbf{A}$ είναι διανυσματικός τελεστής και ορίζεται διαφορετικά από τη βαθμωτή Λαπλασιανή, όπως τη $\nabla^2 \Phi$. Εν γένει τα διανύσματα $\nabla^2 \mathbf{A}$ και \mathbf{A} δεν είναι συγγραμμικά, όπως επίσης, εν γένει η Λαπλασιανή του διανύσματος \mathbf{A} δεν έχει ως συνιστώσες τις βαθμωτές Λαπλασιανές των συνιστωσών του \mathbf{A} , δηλαδή εν γένει είναι $\mathbf{i}_\ell \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) \neq \nabla^2 (\mathbf{i}_\ell \cdot \mathbf{A})$. Όμως, στην ειδική περίπτωση με $\mathbf{i}_\ell = \{\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z\}$, όν δηλαδή το διάνυσμα \mathbf{A} αναλυθεί σε καρτεσιανές συνιστώσες, τότε ισχύουν οι ισότητες όπως $\mathbf{i}_x \cdot (\nabla^2 \mathbf{A}) = \nabla^2 A_x$, βλ. σχέση (5.3-6), ανεξάρτητα από το σε ποιες συντεταγμένες (καρτεσιανές ή μη) έχουν εκφρασθεί οι συνιστώσες A_x κλπ. Οι αναλυτικές εκφράσεις για τη διανυσματική Λαπλασιανή παρουσιάζονται στο Μέρος Α (Πίνακας Α.4-2 του Παραρτήματος Α.4).

Στις παραπάνω σχέσεις, καθώς και σε εκείνες που ακολουθούν, έχει υποτεθεί η συντακτική σχέση $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$, που περιγράφει γραμμικό και ιστροπικό υλικό, χωρίς μόνιμη μαγνήτιση $\mathbf{M}_{\text{μον}}$. Αυτό περιορίζει τη γενικότητα, όμως έτσι αποφεύγονται υπερβολικά σύνθετες εκφράσεις για τις σημειακές σχέσεις. Άλλωστε, οι σημειακές σχέσεις είναι ήδη επιβαρυνμένες από το γεγονός ότι το δυναμικό \mathbf{A} είναι διάνυσμα και όχι βαθμωτή ποσότητα, σε αντίθεση με το δυναμικό Φ στην παράγραφο 5.2.3, καθώς και ότι συνδέεται με το παράγωγο πεδίο \mathbf{B} (ενώ το δυναμικό Φ συνδέεται με το θεμελιώδες πεδίο \mathbf{E}) με εξίσωση περιστροφής, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (σχέση που είναι περισσότερο σύνθετη από την κλίση $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$).

Οριακές συνθήκες: Ως διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με διανυσματικές ποσότητες, η διανυσματική εξίσωση του *Poisson*, ή του *Laplace*, συνοδεύεται από πληροφορίες για τη συνέχεια τόσο του δυναμικού \mathbf{A} (τρεις συνιστώσες), όσο και της παραγώγου του, που εκδηλώνεται μέσω της περιστροφής και της απόκλισης. Οι ποσότητες αυτές εν γένει είναι συνεχείς, εκτός αν σε κάποια επιφάνεια, γραμμή, ή σημείο υπάρχει συγκεντρωμένο ηλεκτρικό ρεύμα ή διπολική ροπή, καθώς επίσης αν σε κάποια επιφάνεια συμβαίνει μετάβαση σε υλικό με διαφορετική τιμή της μαγνητικής διαπερατότητας μ . Τότε εκδηλώνονται ασυνέχειες. Οι σχετικές πληροφορίες εξάγονται εφαρμόζοντας σε κατάλληλες επιφάνειες S ή γραμμές ℓ τις ολοκληρωτικές σχέσεις:

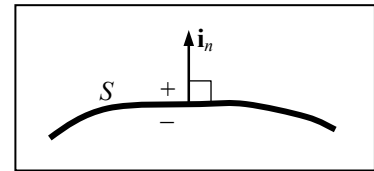
$$\oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (5.3-48\alpha\beta)$$

που αντιστοιχούν στις σχέσεις $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ και $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, καθώς και τις σχέσεις:

$$\oint_{\ell} \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S dI, \quad \oint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (5.3-48\gamma\delta)$$

που αντιπροσωπεύουν τους νόμους του *Ampere*, $\nabla \times (\mu^{-1}\mathbf{B}) = \mathbf{J}$, και του *Gauss*, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Συνθήκες σε επιφάνεια: Με τους καθιερωμένους συμβολισμούς του **Σχήματος 5.3-7** (όψεις “+” και “-” και κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}_n με φορά προς την όψη “+”), σε μία επιφάνεια S μπορεί να υπάρχουν ένα ή περισσότερα από τα ακόλουθα αίτια, που προκαλούν βηματική ασυνέχεια:



Σχήμα 5.3-7

- Διπολικό στρώμα με μαγνητική ροπή $\mathbf{m}_{S||}$ προκαλεί ασυνέχεια στις εφαπτομενικές συνιστώσες του δυναμικού \mathbf{A} , όπως περιγράφεται από τη σχέση (5.3-39). Αν το εσωτερικό του διπολικού στρώματος (ο χώρος μεταξύ των \mathbf{K}_+ και \mathbf{K}_-) χαρακτηρίζεται από μαγνητική διαπερατότητα μ_m , η μαγνητική επαγωγή στο εσωτερικό του στρώματος, η οποία είναι υπεύθυνη για την ασυνέχεια του δυναμικού \mathbf{A} , είναι ανάλογη προς το μ_m , οπότε με εφαρμογή της σχέσης (5.3-48α) η σχέση (5.3-39) γενικεύεται σε:

$$\mathbf{i}_n \times (\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-) = \mu_m \mathbf{m}_{S||}. \quad (5.3-49)$$

- Αντίθετα, δεν υπάρχει αίτιο που να προκαλεί ασυνέχεια στην κάθετη συνιστώσα του \mathbf{A} : Η σχέση (5.3-48β) είναι σε κάθε περίπτωση ομογενής, οπότε:

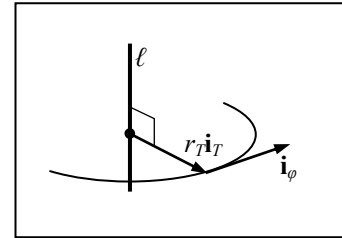
$$\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-) = 0. \quad (5.3-50)$$

- Επιφανειακό ρεύμα \mathbf{K} στην επιφάνεια S προκαλεί ασυνέχεια στο πεδίο $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$, ενώ (ακόμα και αν $\mathbf{K} = 0$) πρόσθετη ασυνέχεια προκαλείται από αλλαγή στις ιδιότητες του χώρου (στο μ) μεταξύ των δύο όψεων της S . Από την οριακή συνθήκη για το πεδίο \mathbf{H} , $\mathbf{i}_n \times (\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-) = \mathbf{K}$, προκύπτει η συνθήκη για τις εφαπτομενικές συνιστώσες του $\nabla \times \mathbf{A}$:

$$\mathbf{i}_n \times \left(\frac{1}{\mu_+} \nabla \times \mathbf{A}_+ - \frac{1}{\mu_-} \nabla \times \mathbf{A}_- \right) = \mathbf{K}. \quad (5.3-51)$$

- Τέλος, η κάθετη συνιστώσα της μαγνητικής επαγωγής \mathbf{B} έχει ασυνέχεια, $\mathbf{i}_n \cdot (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = -\nabla \cdot (\mu_m \mathbf{m}_{S\parallel})$, που προκαλεί αντίστοιχη ασυνέχεια στην κάθετη συνιστώσα του $\nabla \times \mathbf{A}$. Η αντίστοιχη εξίσωση είναι, όμως, εξαρτημένη από τη σχέση (5.3-49) και μαθηματικά πλεονάζει.

Συνθήκες σε γραμμή: Μετρώντας με r_T τις αποστάσεις από τη γραμμή ℓ (Σχήμα 5.3-8), τα αίτια που παράγουν ασυνέχεια (απειρισμό) είναι τα ακόλουθα:



Σχήμα 5.3-8

- Γραμμική πυκνότητα διπολικής ροπής, είτε ως διπολική ταινία με $\mathbf{m}_\ell = \mathbf{m}_{\ell\perp}$, είτε ως νηματοειδές σωληνοειδές με $\mathbf{m}_\ell = \mathbf{i}_\ell m_{\ell\parallel}$, παράγει πεδίο του οποίου το διανυσματικό δυναμικό απειρίζεται στη γραμμή. Γενικεύοντας τις σχέσεις (5.3-41) και (5.3-43) της προηγούμενης παραγράφου, για να συμπεριληφθεί το ενδεχόμενο να είναι η μαγνητική διαπερατότητα στην άμεση γειτονιά της γραμμής ίση με μ_m (και όχι με μ_0), η διαμήκης (A_ℓ) και η αζιμουθιακή (A_ϕ) συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού έχουν κοντά στη γραμμή τιμές τέτοιες ώστε:

$$(r_T \mathbf{A}) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = \frac{\mu_m}{2\pi} \mathbf{m}_\ell \times \mathbf{i}_T. \quad (5.3-52)$$

- Εφαρμόζοντας τη σχέση (5.3-48β) σε λεπτό κύλινδρο με ακτίνα $r_T \rightarrow 0$ προκύπτει το αναμενόμενο, ότι η ακτινική (σε σχέση με τη γραμμή) συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού δεν απειρίζεται, ειδικότερα ότι:

$$\left(r_T \int_0^{2\pi} A_T d\phi \right) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = 0. \quad (5.3-53)$$

- Επίσης, εφαρμόζοντας τη σχέση (5.3-48γ), το νόμο του *Ampere*, σε κυκλικό βρόχο με ακτίνα $r_T \rightarrow 0$, στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συνεισφέρει μόνο η συνιστώσα $H_\phi =$

$(1/\mu)(\partial A_T/\partial z - \partial A_z/\partial r_T)$. Αν στη γραμμή υπάρχει νηματοειδές ρεύμα i , τότε είναι $H_\phi \sim 1/r_T \rightarrow \infty$. Όμως, από τις δύο εμπλεκόμενες συνιστώσες του διανυσματικού δυναμικού, η συνιστώσα A_T έχει πεπερασμένη τιμή, όπως μόλις σημειώθηκε, οπότε ο απειρισμός του πεδίου συνδέεται μόνο με τη συνιστώσα A_z , με τη σχέση $H_\phi = -(1/\mu)\partial A_z/\partial r_T$. Συνεπώς, σε νηματοειδές ρεύμα i απειρίζεται η ακτινική παράγωγος της συνιστώσας A_z , όπως περιγράφεται από τη σχέση:

$$\left(r_T \int_0^{2\pi} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r_T} d\phi \right) \Bigg|_{r_T \rightarrow 0} = -i. \quad (5.3-54)$$

- Τέλος, η ενδεχόμενη παρουσία κατανομής \mathbf{m}_{\parallel} οδηγεί σε $B_T(r_T \rightarrow 0) \sim 1/r_T^2 \rightarrow \infty$, όμως αυτές οι πληροφορίες μπορούν να προέλθουν από παραγωγή της σχέσης (5.3-52).

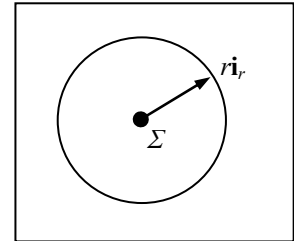
Συνθήκες σε σημείο: Με τους καθιερωμένους συμβολισμούς, όπως στο **Σχήμα 5.3-9**:

- Αν στο σημείο Σ υπάρχει σημειακό μαγνητικό δίπολο \mathbf{m} , τότε σύμφωνα με τη σχέση (5.3-31) το διανυσματικό δυναμικό θα έχει απειρισμό $\sim r^2$. Με μ_m τη μαγνητική διαπερατότητα στην περιοχή του σημειακού διπόλου, το διανυσματικό δυναμικό θα είναι:

$$\left(r^2 \mathbf{A} \right) \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{\mu_m}{4\pi} \mathbf{m} \times \mathbf{i}_r. \quad (5.3-55)$$

- Τέλος, από την εφαρμογή της σχέσης (5.3-48β) σε σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα $r \rightarrow 0$ προκύπτει η συνθήκη:

$$\left(r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta A_r \right) \Big|_{r \rightarrow 0} = 0. \quad (5.3-56)$$



Σχήμα 5.3-9

5.3.4 Βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m

Ορισμός: Χρονικά αμετάβλητο ηλεκτρικό ρεύμα, ή έστω αργά μεταβαλλόμενο, ώστε να μπορεί να εφαρμοσθεί ο νόμος του *Ampere*, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, χωρίς τον όρο $\partial \mathbf{D} / \partial t$, συναντάται στις εφαρμογές σε αγωγία υλικά με διατομές πολύ μικρότερες από τον περιβάλλοντα χώρο. Τότε η ροή ρεύματος περιγράφεται μέσω νηματοειδών ρευμάτων i_j , όπως σε κλάδους j ενός ηλεκτρικού κυκλώματος, ενώ πρακτικά όλος ο υπόλοιπος χώρος έχει ειδική αγωγιμότητα $g_0 = 0$, οπότε εκεί είναι $\mathbf{J} = 0$. Τα ρεύματα i_j , συνολικά, παράγουν μαγνητικό πεδίο \mathbf{H} , όμως στο χώρο έξω από τους αγωγούς, εκεί που είναι $\mathbf{J} = 0$, το πεδίο \mathbf{H} είναι αστρόβιλο, $\nabla \times \mathbf{H} = 0$. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει να περιγραφεί το μαγνητικό πεδίο ως η κλίση μιας βαθμωτής ποσότητας, ειδικότερα ως:

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m, \quad (5.3-57)$$

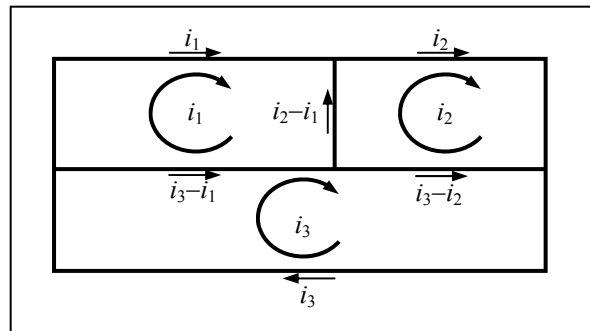
όπου η ποσότητα Φ_m ονομάζεται «βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό», με μονάδες τα *Ampere*.

Κυκλοφορία μαγνητικού πεδίου: Μολονότι είναι $\nabla \times \mathbf{H} = 0$, το μαγνητικό πεδίο έχει μη μηδενική κυκλοφορία, όταν προσδιορίζεται σε βρόχο ℓ από το εσωτερικό του οποίου διέρχεται ηλεκτρικό ρεύμα, πιο συγκεκριμένα, όταν η ανοικτή επιφάνεια S , με όριο στον βρόχο ℓ , τέμνεται από έναν ή περισσότερους ρευματοφόρους κλάδους j . Τότε:

$$\oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{j \in S} (\pm) i_j, \quad (5.3-58)$$

με το πρόσημο να λαμβάνεται θετικό, όταν το ρεύμα είναι ομόρροπο με το στοιχείο dS , και αρνητικό όταν είναι αντίρροπο. Ή, ισοδύναμα, αν τα ηλεκτρικά ρεύματα ενταχθούν σε βρόχους, όπως στη μέθοδο των βρόχων στην ανάλυση ηλεκτρικών κυκλωμάτων, τότε γίνεται εστίαση στα ρεύματα των βρόχων, με i_i το ρεύμα του βρόχου i , ενώ τα ρεύματα των κλάδων προσδιορίζονται από το άθροισμα των ρευμάτων των παρακείμενων βρόχων, όπως στο **Σχήμα 5.3-10**. Το άθροισμα είναι αλγεβρικό, ανάλογα με τη φορά του ρεύματος του βρόχου i σε σχέση με τη φορά του ρεύματος του κλάδου j . Τότε είναι:

$$\oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i \in S} i_i. \quad (5.3-59)$$



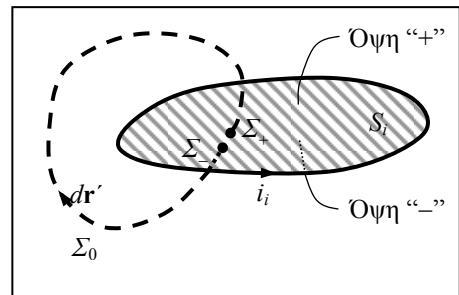
Σχήμα 5.3-10

Αναλογία με επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό: Από τη μέχρι τώρα παρουσίαση είναι φανερή η ομοιότητα με το επαγωγικό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi_{\varepsilon\pi}$ της παραγράφου 5.2.5, που προβάλλεται στα πρώτα τέσσερα ζεύγη από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
 g_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{J} = 0 & \leftrightarrow \mu_0 \ll \mu \Rightarrow \mathbf{B} = 0, \\
 \nabla \times \mathbf{H} = 0 & \leftrightarrow \nabla \times \mathbf{E}_{\varepsilon\pi} = 0, \\
 \mathbf{H} = -\nabla \Phi_m & \leftrightarrow \mathbf{E}_{\varepsilon\pi} = -\nabla \Phi_{\varepsilon\pi}, \\
 \oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i \in S} i_i & \leftrightarrow \oint_{\ell} \mathbf{E}_{\varepsilon\pi} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \sum_{i \in S} \Psi_{m,i}, \\
 \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} & \leftrightarrow \mathbf{D}_{\varepsilon\pi} = \varepsilon \mathbf{E}_{\varepsilon\pi}, \\
 \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \leftrightarrow \nabla \cdot \mathbf{D}_{\varepsilon\pi} = 0,
 \end{aligned} \tag{5.3-60}$$

στις οποίες έχουν συμπεριληφθεί και τα αυτονόητα δύο τελευταία ζεύγη εξισώσεων. Οι ομοιότητες αυτές επιτρέπουν να επαναληφθούν και εδώ όλες οι διαδικασίες που έχουν ακολουθηθεί στην παράγραφο 5.2.5, με προφανείς τις αντιστοιχίες $\mathbf{E}_{\varepsilon\pi} \leftrightarrow \mathbf{H}$, $\Phi_{\varepsilon\pi} \leftrightarrow \Phi_m$, $i_i \leftrightarrow (-d/dt)\Psi_{m,i}$ κλπ. Για το λόγο αυτό, η παρουσίαση που ακολουθεί είναι κάπως πιο συνοπτική από εκείνη της παραγράφου 5.2.5 συνολικά.

Επιφάνεια ασυνέχειας: Προκειμένου η αντιστροφή της σχέσης $\mathbf{H} = -\nabla \Phi_m$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\Phi_m(\mathbf{r}) = \Phi_m(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$, με $\Phi_m(\mathbf{r}_0) = 0$, αν ληφθεί η αναφορά στο σημείο \mathbf{r}_0 , να δίνει το δυναμικό Φ_m ως μονότιμη συνάρτηση της θέσης \mathbf{r} , σε κάθε ρευματοφόρο βρόχο i προσαρτάται μία ανοικτή επιφάνεια S_i με οποιοδήποτε σχήμα, αλλά με το όριό της να ταυτίζεται με τον βρόχο i , και με τη φορά του dS_i να καθορίζεται από τη φορά του ρεύματος i_i με βάση τα δάκτυλα του δεξιού χεριού. Αν υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int^+ \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$ μεταξύ δύο σημείων Σ_{\pm} , που βρίσκονται στις δύο όψεις της επιφάνειας S_i , με διαδρομή ολοκλήρωσης μέσω κάποιου σημείου Σ_0 , που βρίσκεται έξω από την S_i , όπως στο **Σχήμα 5.3-11**, ουσιαστικά εκτελείται ολοκλήρωση σε κλειστή καμπύλη, επειδή το τμήμα $\Sigma_+ \Sigma_-$ έχει απειροστό μήκος, ίσο με το «πάχος» της επιφάνειας, ενώ για το πεδίο \mathbf{H} δεν δικαιολογείται απειρισμός. Κατά συνέπεια, είναι $\int^+ \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \rightarrow \oint_{\ell} \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$. Εφαρμόζοντας το νόμο του *Ampere*, $\oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \int_S dI = i_i$, διαπιστώνεται, ότι μεταξύ των δύο όψεων της επιφάνειας S_i εκδηλώνεται ασυνέχεια στην τιμή του δυναμικού Φ_m , ίση με:



Σχήμα 5.3-11

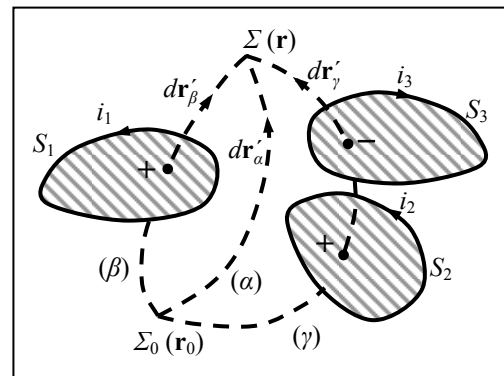
$$\Phi_m(\mathbf{r}_+) - \Phi_m(\mathbf{r}_-) = - \int_{\mathbf{r}_-}^{\mathbf{r}_+} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{\ell} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = i_\ell, \quad (5.3-61)$$

χωρίς αυτή η ασυνέχεια να έχει καμία συνέπεια στην τιμή του μαγνητικού πεδίου, αφού κατά την παραγωγή είναι $\mathbf{H}|_+ = -(\nabla\Phi_m)|_+ = -(\nabla\Phi_m)|_- + \nabla i_\ell = -(\nabla\Phi_m)|_- = \mathbf{H}|_-$.

Με την εισαγωγή μιας τέτοιας επιφάνειας ασυνέχειας σε κάθε βρόχο, το μαγνητικό δυναμικό στην τυχαία θέση \mathbf{r} προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \Phi_m(\mathbf{r}_0) - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{H}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \sum_{S_i \in (\mathbf{r}_0, \mathbf{r})} i_i \operatorname{sgn}(d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{S}_i), \quad (5.3-62)$$

όπου $\Phi_m(\mathbf{r}_0) = 0$, αν εκεί είναι το σημείο αναφοράς. Στον τελευταίο όρο συμμετέχουν τα ρεύματα εκείνων των ρευματοφόρων βρόχων, των οποίων οι επιφάνειες S_i τέμνονται από τη διαδρομή ολοκλήρωσης, με το πρόσημο του εσωτερικού γινομένου $d\mathbf{r}' \cdot d\mathbf{S}_i$. Ανάλογα με τη διαδρομή, στο άθροισμα μπορεί να συμμετέχουν διαφορετικοί βρόχοι, όπως συμβαίνει στις τρεις διαφορετικές διαδρομές του **Σχήματος 5.3-12**, ή μπορεί οι επιφάνειες S_i κάποιων βρόχων να τέμνονται από τη διαδρομή ολοκλήρωσης περισσότερες φορές από μία, χωρίς αυτό να έχει καμία συνέπεια ως προς την τελική τιμή του δυναμικού $\Phi_m(\mathbf{r})$.



Σχήμα 5.3-12

Οι **σημειακές σχέσεις** για το δυναμικό Φ_m διατυπώνονται αμέσως από τις εξισώσεις της Μαγνητοστατικής, σε συνδυασμό με τον ορισμό $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m$. Με τη μαγνητική διαπερατότητα εξαρτώμενη από το χώρο, $\mu = \mu(\mathbf{r})$, οι εξισώσεις είναι:

- Σε όλα τα σημεία του χώρου (εκτός από επιφάνειες κλπ. με ιδιαιτερότητες):

$$\nabla \cdot (\mu(\mathbf{r}) \nabla \Phi_m) = 0, \quad (5.3-63)$$

και όταν, όπως συνήθως, είναι $\mu = \text{σταθ.}$, έστω και τμηματικά, με τη συνθήκη σε επιφάνεια να καλύπτει τις ενδεχόμενες βηματικές ασυνέχειες, τότε σχηματίζεται η εξίσωση του *Laplace*:

$$\nabla^2 \Phi_m = \nabla \cdot (\nabla \Phi_m) = 0, \quad \text{όταν } \nabla \mu = 0. \quad (5.3-64)$$

- Σε όλα τα σημεία κάθε επιφάνειας, αλλά ιδίως σε επιφάνειες ασυνέχειας S_i ή με αλλαγή στις ιδιότητες του χώρου:

$$\mu_+ \left. \frac{\partial \Phi_{m+}}{\partial n} \right|_+ - \mu_- \left. \frac{\partial \Phi_{m-}}{\partial n} \right|_- = 0. \quad (5.3-65)$$

$$\Phi_{m+} - \Phi_{m-} = i_i. \quad (5.3-66)$$

- Σε όλα τα σημεία κάθε γραμμής:

$$\left[r_T \frac{\partial}{\partial r_T} \int_0^{2\pi} d\varphi \mu \Phi_m \right]_{r_T \rightarrow 0} = 0, \quad (5.3-67)$$

$$(r_T \mu \Phi_m) \Big|_{r_T \rightarrow 0} = 0. \quad (5.3-68)$$

- Σε κάθε σημείο:

$$\left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \mu \Phi_m \right]_{r \rightarrow 0} = 0, \quad (5.3-69)$$

$$(r^2 \mu \Phi_m) \Big|_{r \rightarrow 0} = 0. \quad (5.3-70)$$

Εκτός από τη σχέση (5.3-66), η οποία εκδηλώνει την ασυνέχεια που παρουσιάστηκε στη σχέση (5.3-61), όλες οι εξισώσεις είναι ομογενείς, όπως είναι αναμενόμενο, αφού η ανάπτυξη μαγνητικού πεδίου οφείλεται μόνο στα ρεύματα i_i των ρευματοφόρων βρόχων που περιγράφονται από τις επιφάνειες ασυνέχειας και δεν υπάρχουν κατανεμημένα αίτια.

Ολοκλήρωμα επαλληλίας: Συγκρίνοντας είτε με τις σχέσεις (5.2-61) έως (5.2-68) της παραγρ. 5.2.5 για το επαγωγικό δυναμικό $\Phi_{\varepsilon\pi}$, είτε απευθείας με τις αντίστοιχες σχέσεις της παραγρ. 5.2.3, αρχίζοντας από τη σχέση (5.2-35), όταν το μόνο αίτιο για το δυναμικό Φ είναι διπολικό στρώμα $p_{S\perp}$, αμέσως συνάγεται το συμπέρασμα, ότι σε χώρο με την ίδια τιμή της μαγνητικής διαπερατότητας παντού (πρακτικά, όταν παντού $\mu = \mu_0$), το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό, λόγω ενός ρευματοφόρου βρόχου με ρεύμα i σε χώρο με σταθερό μ είναι:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} i \int_S \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi} i \int_S dS' \frac{\mathbf{i}'_n \cdot \mathbf{i}_R}{R^2} = -\frac{\Omega}{4\pi} i, \quad (5.3-71)$$

όπου $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ είναι, κατά τα καθιερωμένα, η απόσταση \mathbf{r} του σημείου υπολογισμού του δυναμικού από τις θέσεις \mathbf{r}' της επιφάνειας ασυνέχειας. Επίσης Ω είναι η στερεή γωνία, με την οποία φαίνεται από το σημείο παρατήρησης \mathbf{r} η αρνητική όψη της επιφάνειας ασυνέχειας. Υπενθυμίζεται ότι η στερεή γωνία Ω ορίζεται στην παράγρ 5.2.2, βλ. σχέση (5.2-33) και σχετικό κείμενο.

Στη σχέση (5.3-71) υποτίθεται πως το σημείο αναφοράς βρίσκεται στο άπειρο. Αν προτιμηθεί άλλο σημείο αναφοράς, η σχέση προφανώς γενικεύεται σε:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} i \int_S d\mathbf{S}' \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{R}_0}{R_0^3} \right). \quad (5.3-72)$$

Το **βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό μαγνητικού διπόλου** προσδιορίζεται με στοιχειώδη εφαρμογή της σχέσης (5.3-71). Εκφράζοντας το μαγνητικό δίπολο \mathbf{m} ως το γινόμενο $i\mathbf{S}$ στο όριο μικρού βρόχου ($|\mathbf{S}| \rightarrow 0$) με ισχυρό ρεύμα ($i \rightarrow \infty$), η ολοκληρωτέα παράσταση παραμένει πρακτικά σταθερή στη μικρή έκταση της επιφάνειας S , και μπορεί να γραφεί $\int_S d\mathbf{S}' \cdot (\mathbf{R}/R^3) = (\mathbf{R}/R^3) \cdot (\int_S d\mathbf{S}') = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{R}/R^3)$, και παρόμοια για τον δεύτερο όρο στη σχέση (5.3-72), αν η αναφορά δεν ληφθεί στο άπειρο. Εμφανίζεται, έτσι, το γινόμενο $\mathbf{m} = i\mathbf{S}$, οπότε το δυναμικό Φ_m ενός σημειακού μαγνητικού διπόλου εκφράζεται ως:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{R}_0}{R_0^3} \right). \quad (5.3-73)$$

Ως προς την εξάρτηση από το χώρο, η σχέση αυτή είναι ταυτόσημη με τη σχέση (5.2-19β) για το ηλεκτροστατικό δυναμικό, που οφείλεται σε σημειακό ηλεκτρικό δίπολο.

Αν το μαγνητικό δίπολο ληφθεί στην αρχή των αξόνων (στη θέση $\mathbf{r}' = 0$), τότε είναι $\mathbf{R} = \mathbf{r} = r\mathbf{i}_r = r_T\mathbf{i}_T + z\mathbf{i}_z$, ανάλογα με το σύστημα συντεταγμένων που θα προτιμηθεί. Αν επιπλέον επιλεγεί ο προσανατολισμός $\mathbf{m} = m_0\mathbf{i}_z$, τότε, με την αναφορά στο άπειρο, είναι:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{m_0 \cos\theta}{4\pi r^2} = \frac{m_0 z}{4\pi r^3}, \quad (5.3-74\alpha)$$

και υπολογίζοντας την κλίση, $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_m$, προκύπτει και η ένταση του μαγνητικού πεδίου:

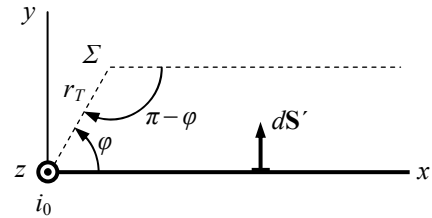
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{m_0 \mathbf{i}_r 2 \cos\theta + \mathbf{i}_\theta \sin\theta}{4\pi r^3} = \frac{m_0 \mathbf{i}_T 3r_T z + \mathbf{i}_z (2z^2 - r_T^2)}{4\pi (r_T^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (5.3-74\beta)$$

Προβάλλεται, έτσι, εντονότερα η αντιστοιχία με το ηλεκτρικό δίπολο, όπως φαίνεται αντιπαραβάλλοντας με τις σχέσεις (5.2-20), αλλά και (5.3-33).

Τα **παραδ. 5.3-8** έως **11** παρουσιάζουν εφαρμογές του ολοκληρώματος επαλληλίας για τον προσδιορισμό του δυναμικού Φ_m σε διατάξεις με ρευματοφόρους βρόχους. Πρόκειται για προσαρμογή των **παραδ. 5.2-24** έως **27** της παραγρ. 5.2.5, με τη μεταγραφή $(-d\Psi_m/dt) \rightarrow i$, που σημαίνει και ότι $\Phi_{επ} \rightarrow \Phi_m$.

Παράδειγμα 5.3-8: Μαγνητικό ρεύμα $i = i_0$ είναι συγκεντρωμένο σε ευθύγραμμο αγωγό με άπειρο μήκος, με το κύκλωμα να κλείνει μέσω του απείρου. Ζητείται το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m σε κάθε σημείο του χώρου, που θεωρείται ομογενής (βλ. και *παράδ. 5.2-24*).

Επίλυση: Ας θεωρηθεί ότι ο ρευματοφόρος αγωγός συμπίπτει με τον άξονα z , ότι η φορά του ρεύματος είναι προς το $z = +\infty$, και ότι ο βρόχος κλείνει μέσω του απείρου του ημιεπιπέδου $y = 0, x > 0$, όπως στο σχήμα.



Μία προφανώς απλή επιλογή για την επιφάνεια ασυνέ-

χειας (με όριο τον ρευματοφόρο βρόχο) είναι το ημιεπίπεδο $y = 0, x > 0$ και από την υποθε-
θείσα φορά για το ρεύμα i_0 το στοιχείο της επιφάνειας ασυνέχειας θα είναι $d\mathbf{S}' = \mathbf{i}_y dS'$.

Η διάταξη επιδέχεται γεωμετρικό προσδιορισμό τη στερεής γωνίας Ω . Όπως έχει ήδη παρου-
σιασθεί στο *παράδ. 5.2-18*, από την τυχαία θέση $\Sigma = \{r_T, \varphi\}$ ο ημιάξονας $\varphi = 0$ (η προβολή
του ημιεπιπέδου ασυνέχειας) φαίνεται ως κλάσμα $(\pi - \varphi)/2\pi$ της μέγιστης επίπεδης γωνίας
 2π , συνεπώς το ημιεπίπεδο ασυνέχειας φαίνεται ως ισόποσο κλάσμα της $\Omega_{\max} = 4\pi$, δηλαδή η
στερεή γωνία είναι $\Omega = -2(\pi - \varphi)$, με το αρνητικό πρόσημο, επειδή από το σημείο Σ φαίνεται
η θετική όψη της επιφάνειας ασυνέχειας. Αυτά αναφέρονται αυστηρά στην επιλογή $\varphi < \pi$. Αν
ήταν $\varphi > \pi$, η επίπεδη γωνία θα γραφόταν $\varphi - \pi$, ώστε να είναι πάλι θετική, αλλά θα φαι-
νόταν η αρνητική όψη, οπότε πάλι θα ήταν $\Omega = -2(\pi - \varphi)$. Συνεπώς, από τη σχέση (5.3-72) το
βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό είναι:

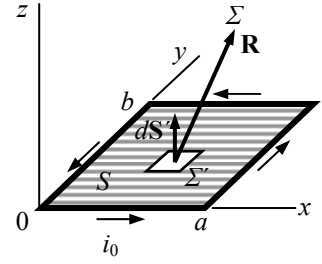
$$\Phi_m(\mathbf{r}) = -\frac{\Omega}{4\pi} i_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) i_0.$$

Αν προτιμηθεί, το βαθμωτό δυναμικό να προσδιορισθεί αναλυτικά, θα είναι $d\mathbf{S}' = \mathbf{i}_y dx' dz'$ και
 $\mathbf{R} = \mathbf{i}_x(x - x') + \mathbf{i}_y(y - y') + \mathbf{i}_z(z - z')$, με $y' = 0$, οπότε $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}' = y dx' dz'$. Με ολοκλήρωση στην
έκταση της επιφάνειας ασυνέχειας, το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό εκφράζεται ως το διπλό
ολοκλήρωμα:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} i_0 \int_S \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{i_0}{4\pi} y \int_0^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \frac{1}{\left[(x - x')^2 + (z - z')^2 + y^2\right]^{3/2}}.$$

Σχόλιο: Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με στοιχειώδεις τεχνικές ολοκλήρω-
σης. Πάντως, στην παρούσα διάταξη, η φυσιολογική πορεία θα ήταν να εφαρμοσθεί απευ-
θείας ο νόμος του *Ampere*: Είναι $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi r_T H_\varphi = i_0$, και με $H_\varphi = -(1/r_T) \partial \Phi_m / \partial \varphi$ προκύπτει
αμέσως $\Phi_m = -(1/2\pi)(\varphi - \varphi_0) i_0$, η προηγούμενη έκφραση με $\varphi_0 = \pi$.

Παράδειγμα 5.3-9: Οι πλευρές ενός ορθογωνίου στο επίπεδο $z = 0$, με διαστάσεις $a \times b$ και με τη μία κορυφή του στην αρχή των αξόνων, αποτελούνται από αγωγίμο υλικό με μικρή διατομή, ενώ ο υπόλοιπος χώρος είναι μονωτής, $g_0 = 0$. Στο αγωγίμο υλικό ρέει ηλεκτρικό ρεύμα $i = i_0$, με τη φορά που δηλώνεται στο σχήμα.



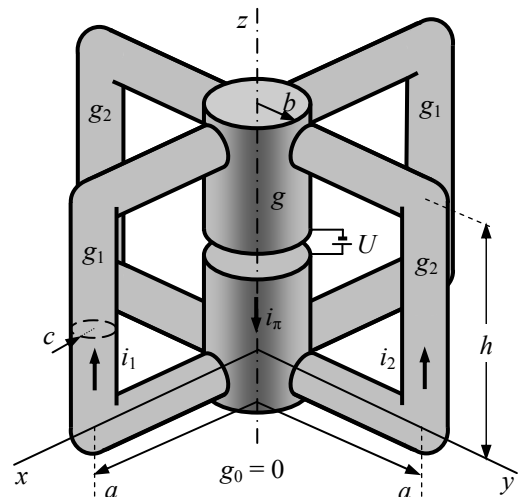
Ζητείται το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m παντού στο χώρο (βλ. και *παράδ.* 5.2-25).

Επίλυση: Το ηλεκτρικό ρεύμα περιορίζεται στο αγωγίμο υλικό και σχηματίζει έναν ορθογώνιο ρευματοφόρο βρόχο. Με το βρόχο ως όριό της, η προφανής επιλογή για την επιφάνεια ασυνέχειας είναι το ορθογώνιο $0 < x < a$, $0 < y < b$ στο επίπεδο $z = 0$. Με βάση τη φορά για το ρεύμα i_0 , η επιφάνεια ασυνέχειας θα αποτελείται από στοιχειώδεις επιφάνειες με $d\mathbf{S}' = \mathbf{i}_z dS' = \mathbf{i}_z dx' dy'$.

Η στερεή γωνία Ω , με την οποία φαίνεται από το τυχόν σημείο Σ η επιφάνεια ασυνέχειας, δεν μπορεί, παρ' όλο το απλό σχήμα της, να προσδιορισθεί με απλή γεωμετρική θεώρηση, αλλά χρειάζεται να γίνει αναλυτικός προσδιορισμός της Ω , ή απευθείας του δυναμικού Φ_m . Η θέση του τυχαίου σημείου $\Sigma = \{x, y, z\}$ από το σημείο $\Sigma' = \{x', y', z' = 0\}$ της επιφάνειας ασυνέχειας είναι $\mathbf{R} = \mathbf{i}_x(x - x') + \mathbf{i}_y(y - y') + \mathbf{i}_z z$, οπότε $\mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}' = z dx' dy'$. Η ολοκλήρωση θα γίνει στην περιοχή $0 < x' < a$, $0 < y' < b$, στην οποία εκτείνεται η επιφάνεια ασυνέχειας, και τελικά προκύπτει για το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό η έκφραση:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{i_0}{4\pi} \int_S \frac{d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}}{R^3} = \frac{i_0}{4\pi} z \int_0^a dx' \int_0^b dy' \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Παράδειγμα 5.3-10: Στη διάταξη του σχήματος, ο κυλινδρικός πυρήνας (με ακτίνα b και ύψος h) αποτελείται από υλικό με ειδική αγωγιμότητα g_π και διακόπτεται από ένα μικρό διάκενο, μεταξύ των δύο όψεων του οποίου εφαρμόζεται τάση U , μεσω κατάλληλου διπολικού καλωδίου από πολύ καλό αγωγό. Στον πυρήνα συντρέχουν τέσσερις πλευρικοί κλάδοι $j = 1, 2, 1', 2'$, κυλινδρικοί με ακτίνα c και σε ορθή γωνία μεταξύ τους. Κάθε κλάδος αποτελείται από δύο οριζόντια σκέλη, με μήκος a , και ένα κατακόρυφο, με ύψος h . Ο κλάδος j αποτελείται από υλικό με ειδική



αγωγιμότητα g_j , με την ίδια τιμή στους αντιμέτωπους ομοεπίπεδους κλάδους. Ο υπόλοιπος χώρος έχει ιδιότητες κενού (ϵ_0, μ_0 και $g_0 = 0$).

Ζητείται το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m στον εξωτερικό χώρο (βλ. και *παράδ. 5.2-26*).

Επίλυση: Επειδή στον υπόλοιπο χώρο είναι $g_0 = 0$, το ηλεκτρικό ρεύμα περιορίζεται στο εσωτερικό των αγωγίων στοιχείων, συμπεριλαμβανόμενου και του καλωδίου τροφοδοσίας. Η ιδιότητα $b, c \ll a, h$ σημαίνει ότι ο πυρήνας (με διατομή $S_\pi = \pi b^2$) και οι κλάδοι (με διατομή $S_j = \pi c^2$) είναι νηματοειδείς. Η ενιαία τιμή μ_0 για τη μαγνητική διαπερατότητα του υπόλοιπου χώρου επιτρέπει να χρησιμοποιηθεί το ολοκλήρωμα επαλληλίας (5.3-72), ακριβέστερα ένα άθροισμα από τέσσερα τέτοια ολοκληρώματα, ένα για κάθε βρόχο. Το ρεύμα κάθε βρόχου θα προσδιορισθεί από την επίλυση ενός απλού κυκλώματος: Η αγωγιμότητα του πλευρικού κλάδου j είναι ίση με $G_j = g_j S_j / (2a + h)$, επειδή $b, c \ll a, h$. Οι τέσσερις κλάδοι είναι σε παράλληλη συνδεσμολογία μεταξύ τους και σε σειρά με τον πυρήνα (με αντίσταση $R_{m,\pi} = h / \mu S_\pi$), ενώ η αντίσταση της τροφοδοσίας μπορεί να αμεληθεί, άρα η ολική αντίσταση της διάταξης είναι $R_{ολ} = R_\pi + 1 / [\sum_j G_j]$. Από τον δεύτερο νόμο του *Kirchhoff*, το ρεύμα στον πυρήνα είναι ίσο με $i_\pi = U / R_{ολ}$, με φορά προς τα κάτω, για τη δεδομένη πολικότητα της πηγής. Το ρεύμα i_π επιμερίζεται σε κάθε κλάδο ως $i_j = i_\pi G_j / [\sum_j G_j]$, με φορά στο κατακόρυφο τμήμα προς τα πάνω. Αντιστοιχίζοντας σε κάθε ρευματοφόρο βρόχο ως επιφάνεια ασυνέχειας ένα ορθογώνιο $a \times h$ (βλ. και *σχόλιο*), είναι $dS_1' = -i_y dx' dz' = -i_y dl' dz'$ (με $x' \rightarrow \ell'$), $dS_2' = +i_x dy' dz' = +i_x dl' dz'$ (με $y' \rightarrow \ell'$), $dS_3' = +i_y dx' dz' = -i_y dl' dz'$ (με $x' \rightarrow -\ell'$), $dS_4' = -i_x dy' dz' = +i_x dl' dz'$ (με $y' \rightarrow -\ell'$), όπου έγινε εισαγωγή της μεταβλητής ℓ' (με $0 < \ell' < a$) για να γραφεί το τελικό αποτέλεσμα κάπως πιο σύντομα, συγκεκριμένα (με $z' - z \rightarrow \zeta$) ως:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{U}{4\pi [1 + R_{m,0} \sum_j G_{m,j}]} \int_0^a d\ell' \int_0^h dz' \sum_{\mp} \left\{ \frac{\mp y G_{m,1}}{[(x \mp \ell')^2 + y^2 + \zeta^2]^{3/2}} - \frac{\mp x G_{m,2}}{[x^2 + (y \mp \ell')^2 + \zeta^2]^{3/2}} \right\}.$$

Σχόλιο: Κάθε επιφάνεια ασυνέχειας περιλαμβάνει, εκτός από ένα ορθογώνιο $a \times h$, και τον βρόχο που σχηματίζει το καλώδιο τροφοδοσίας. Αυτός ο βρόχος έχει θεωρηθεί με μικρό εμβαδό, επειδή σε διπολικό καλώδιο η απόσταση μεταξύ των δύο αγωγών είναι πολύ μικρή.

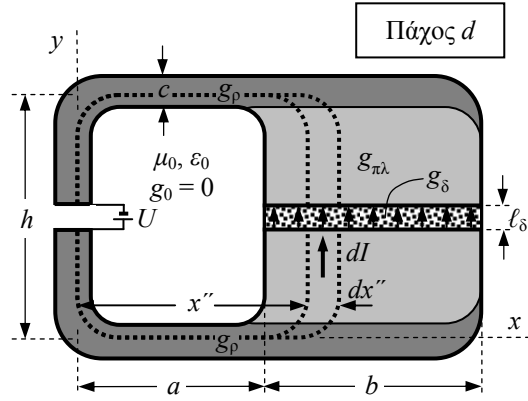
Παράδειγμα 5.3-11: Η διάταξη του σχήματος, με πάχος d , αποτελείται από (α) τρεις ράβδους από υλικό με ειδική αγωγιμότητα g_p , πλάτος c και μήκος η μία h και οι άλλες δύο $(a + b)$, και (β) μία πλάκα πλάτους b , από υλικό με ειδική αγωγιμότητα $g_{\pi\lambda} \ll g_p$. Η ράβδος με μήκος h έχει ένα μικρό διάκενο, στα άκρα του οποίου εφαρμόζεται τάση U . Η πλάκα έχει μία διακοπή σε ολόκληρο το πλάτος της b , με μήκος ℓ_δ , στην οποία παρεμβάλλεται υλικό με ειδική αγωγι-

μότητα g_δ , με μικρή τιμή ($g_\delta \ll g_{\pi\lambda}$). Ο υπόλοιπος χώρος έχει ιδιότητες κενού (μ_0, ϵ_0 και $g_0 = 0$). Για τις διαστάσεις ισχύει $h \sim a \sim b \gg d \gg c \sim \ell_\delta$ και $\ell_\delta \gg (g_\delta/g_{\pi\lambda})h$ και $c \gg (g_{\pi\lambda}/g_\rho)b$.

Ζητείται το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό Φ_m έξω από τα αγωγίμα υλικά (βλ. και *παράδ. 5.2-27*).

Επίλυση: Από την ανισότητα $c \gg (g_{\pi\lambda}/g_\rho)b$ φαίνε-

ται ότι η αντίσταση κάθε ράβδου, ίση αντίστοιχα με $h/g_\rho cd$ και $(a+b)/gcd$, είναι πολύ μικρότερη από την αντίσταση της πλάκας (ίση με $R_{\pi\lambda} = h/g_{\pi\lambda}bd$), και η τελευταία είναι πολύ πιο μικρή από της διακοπής (ίση με $R_\delta = \ell_\delta/g_\delta bd$), επειδή $\ell_\delta \gg (g_\delta/g_{\pi\lambda})h$. Έτσι, για τις αντιστάσεις είναι $R_\rho \ll R_{\pi\lambda} \ll R_\delta$. Η σχέση $R_\rho \ll R_{\pi\lambda}$ υποδηλώνει ότι η πτώση τάσης στα άκρα της πλάκας είναι η ίδια σε οποιοδήποτε σημείο του πλάτους b , συνεπώς το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E} , άρα και η πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} , έχουν ομοιόμορφη εγκάρσια κατανομή στην πλάκα (όπως και στη διακοπή της). Η δεύτερη σχέση ($R_{\pi\lambda} \ll R_\delta$) σημαίνει απλώς ότι για τον υπολογισμό του ρεύματος αρκεί να ληφθεί υπ' όψιν μόνο η αντίσταση R_δ , οπότε είναι $R_\delta I = U$.



Οι ράβδοι με τις μικρές εγκάρσιες διαστάσεις $c \times d$ μπορούν να θεωρηθούν νηματοειδείς. Δεν μπορεί, όμως, να γίνει η ίδια προσέγγιση για την πλάκα και τη διακοπή της, επειδή το πλάτος της b είναι μεγάλο. Το πλάτος b μπορεί, ωστόσο, να θεωρηθεί ότι αποτελείται από λωρίδες με απειροστό πλάτος dx'' , όπως στο σχήμα, που από την καθεμία διέρχεται ρεύμα $dI = (I/b)dx''$ ($= |\mathbf{J}|dx''$). Κάθε λωρίδα αποτελεί συστατικό ενός ορθογώνιου ρευματοφόρου βρόχου, με διαστάσεις $x'' \times h$, που με βάση το *παράδ. 5.3-9* συνεισφέρει στο δυναμικό κατά:

$$d\Phi_m = \frac{1}{4\pi} I \frac{dx''}{b} z \int_0^{x''} dx' \int_0^h dy' \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right]^{3/2}}.$$

Η συνεισφορά όλων των στοιχειωδών βρόχων συνυπολογίζεται ολοκληρώνοντας στο διάστημα $a < x'' < a+b$, και έτσι προκύπτει το βαθμωτό δυναμικό, ως το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{U}{4\pi} \frac{g_\delta bd}{\ell_\delta} \frac{z}{b} \int_a^{a+b} dx'' \int_0^{x''} dx' \int_0^h dy' \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \right]^{3/2}}.$$

Σχόλιο: Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, στην επιφάνεια ασυνέχειας δεν έχει περιληφθεί η συνεισφορά του εξωτερικού κυκλώματος (του καλωδίου τροφοδοσίας). Αυτή η συνεισφορά μπορεί να είναι αξιόλογη, αν οι δύο κλάδοι προσαγωγής και επιστροφής του ρεύματος έχουν αξιόλογη απόσταση μεταξύ τους.

5.4 Τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά $\{\mathbf{A}, \Phi\}$

5.4.1 Γενικές ιδιότητες

Ορισμός δυναμικών \mathbf{A} και Φ : Όπως έχει σχολιασθεί στην παράγραφο 5.1, στη γενική περίπτωση χρονομεταβλητών διατάξεων, ειδικότερα όταν οι χρονικές παράγωγοι $\partial\mathbf{B}/\partial t$ και $\partial\mathbf{D}/\partial t$ έχουν αξιόλογη τιμή σε ευρύτερες περιοχές του χώρου, τότε τα δυναμικά Φ και Φ_m δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, επειδή είναι $\nabla \times \mathbf{E} \neq 0$ και $\nabla \times \mathbf{H} \neq 0$. Όμως, ο νόμος του *Gauss* για τη μαγνητική επαγωγή, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, ισχύει σε κάθε περίπτωση ως ομογενής εξίσωση. Αυτό επιτρέπει να ορισθεί το διανυσματικό δυναμικό ως χρονοεξαρτώμενη πια ποσότητα $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, που ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (5.4-1)$$

όπως ακριβώς στην παράγραφο 5.3.1. Ακολουθώντας, εισάγοντας στο νόμο του *Faraday* αυτή την έκφραση, προκύπτει $\nabla \times \mathbf{E} = -(\partial/\partial t)\mathbf{B} = -(\partial/\partial t)(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times (\partial\mathbf{A}/\partial t)$, δηλαδή είναι $\nabla \times (\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t) = 0$. Τώρα, μηδενίζεται η περιστροφή της ποσότητας $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t$, και αυτή η ποσότητα είναι δυνατόν να γραφεί ως η κλίση μιας βαθμωτής ποσότητας, για την οποία διατηρείται ο συμβολισμός $-\Phi$. Έτσι, εισάγεται το βαθμωτό δυναμικό $\Phi(\mathbf{r}, t)$, ως γενίκευση του ηλεκτροστατικού δυναμικού, από τη σχέση:

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}. \quad (5.4-2)$$

Φυσικό περιεχόμενο: Τα δυναμικά \mathbf{A} και Φ συνδέονται μεταξύ τους και αποτελούν μία ενιαία τετραδιάστατη οντότητα. Ονομάζονται συνολικά «ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά» $\{\mathbf{A}, \Phi\}$, και αυτοτελώς «διανυσματικό» δυναμικό το \mathbf{A} και «βαθμωτό» το Φ .

Το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} έχει το ίδιο φυσικό περιεχόμενο, είτε είναι $\partial/\partial t = 0$, είτε $\partial/\partial t \neq 0$, και εκφράζει τη μαγνητική ροή που διέρχεται από ένα βρόχο, ανά μονάδα μήκους του περιγράμματός του, όπως υποδηλώνεται από τις μονάδες του, *Weber* ανά μέτρο (Wb/m), βλ. και παράγρ. 5.3.1. Η σχετική πορεία αναπαράγεται στην ακόλουθη αλυσίδα σχέσεων:

$$\Psi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.4-3)$$

Το βαθμωτό δυναμικό Φ , όπως υποδηλώνεται από τις μονάδες του (*Volt*), αποτελεί γενίκευση του ηλεκτροστατικού δυναμικού σε χρονομεταβλητές διατάξεις. Ολοκληρώνοντας τη σχέση (5.4-2) μεταξύ δύο σημείων κατά μήκος μιας ανοικτής καμπύλης ℓ , είναι:

$$\Phi(\mathbf{r}_2, t) - \Phi(\mathbf{r}_1, t) = - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r}. \quad (5.4-4)$$

Ο πρώτος όρος είναι η τάση (διαφορά δυναμικού) που συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο. Ο δεύτερος όρος σχετίζεται με την επαγωγική τάση (την τάση πηνίου): Όταν η καμπύλη ℓ είναι κλειστή, τότε ο όρος αυτός δίνει την αρνητική χρονική μεταβολή της μαγνητικής ροής.

Εξαγωγή διαφορικών εξισώσεων: Με πορεία ανάλογη προς τις προηγούμενες περιπτώσεις και με την παραδοχή αρχικά ότι το μέσο είναι γραμμικό, αλλά μη ομογενές, με $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ και $\mu = \mu(\mathbf{r})$, τα πεδία $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ και $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$, εκφράζονται με χρήση των σχέσεων (5.4-1) και (5.4-2) και εισάγονται στο νόμο του Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ και στο νόμο των Ampere-Maxwell, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$. Έτσι, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \nabla(\varepsilon \nabla \Phi) &= -\rho - \nabla \left(\varepsilon \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right), \\ \nabla \times \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \right] &= \mathbf{J} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (5.4-5)$$

Κυρίως ενδιαφέρουν διατάξεις, στις οποίες το μέσο είναι ομογενές. Σε τέτοιες διατάξεις αναφέρεται το υπόλοιπο μέρος αυτής της παραγράφου. Τότε, οι εξισώσεις απλοποιούνται σε:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \Phi) &= -\frac{1}{\varepsilon} \rho - \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ -\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= -\mu \mathbf{J} + \varepsilon \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad \text{όταν } \nabla \varepsilon = 0 \text{ και } \nabla \mu = 0 \quad (5.4-6)$$

Τώρα, στη δεύτερη σχέση εμφανίζεται το γινόμενο $\varepsilon \mu = 1/c_\varepsilon^2$, όπου c_ε είναι η ταχύτητα του φωτός στο συγκεκριμένο μέσο (με $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ στην περίπτωση του κενού).

Οι εξισώσεις για τα δυναμικά, είτε οι (5.4-5), είτε οι (5.4-6), είτε άλλες μορφές που ακολουθούν, αποτελούν σύστημα τεσσάρων βαθμωτών διαφορικών εξισώσεων (για τις τρεις συνιστώσες του \mathbf{A} και το Φ) δεύτερης τάξης με μερικές παραγώγους ως προς τις τρεις συντεταγμένες του χώρου και το χρόνο. Η λύση $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ του συστήματος δίνει αμέσως με απλές παραγωγίσεις τις 6 συνιστώσες των πεδίων $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ και ακολούθως των $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ και $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$. Η περιγραφή με τα δυναμικά $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ είναι ισοδύναμη με αυτή με τα πεδία, από τις εξισώσεις Maxwell. Σε κάθε περίπτωση, ο μηδενισμός των χρονικών παραγώγων αναπαράγει τις σχέσεις (5.2-35) και (5.2-36) για το δυναμικό Φ και τις σχέσεις (5.3-45) και (5.3-46) για το \mathbf{A} , συνεπώς τα δυναμικά $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ είναι πράγματι γενικεύσεις των προηγούμενων.

Συνθήκες για την απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{A}$: Η περιστροφή ενός διανύσματος δεν αρκεί για τον προσδιορισμό του, αλλά πρέπει να δοθούν πληροφορίες και για την απόκλιση. Αυτό φαίνεται και στις εξισώσεις της Μαγνητοστατικής, οι οποίες περιλαμβάνουν όχι μόνο την εξίσωση περιστροφής, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$, αλλά και την εξίσωση απόκλισης, $\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0$. Συνεπώς, η σχέση (5.4-1), που προσδιορίζει την περιστροφή του \mathbf{A} , ως $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$, πρέπει να συμπληρωθεί από κάποια σχέση για την απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Βέβαια, με διαφορετική τιμή για την απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{A}$ σχηματίζονται διαφορετικές συναρτήσεις $\{\mathbf{A}, \Phi\}$, που όμως πρέπει να δίνουν τα ίδια πεδία στις σχέσεις (5.4-1) και (5.4-2). Αυτό πράγματι επιτυγχάνεται αν οι οποιοσδήποτε δύο επιλογές $\{\mathbf{A}_1, \Phi_1\}$ και $\{\mathbf{A}_2, \Phi_2\}$ συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 + \nabla f, \quad \Phi_2 = \Phi_1 - \frac{\partial}{\partial t} f, \quad (5.4-7)$$

με οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση f . Τότε είναι $\mathbf{B}_2 = \nabla \times \mathbf{A}_2 = \nabla \times (\mathbf{A}_1 + \nabla f) = \nabla \times \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1$, επειδή $\nabla \times \nabla f = 0$ για κάθε f , και, επίσης, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1$, επειδή στη σχέση (5.4-2) προσθαφαιρείται η ποσότητα $(\partial/\partial t)(\nabla f) = \nabla(\partial f/\partial t)$. Οι δύο επιλογές έχουν, όμως, διαφορετική τιμή για την απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{A}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_2 = \nabla \cdot \mathbf{A}_1 + \nabla^2 f, \quad (5.4-8)$$

επειδή η Λαπλασιανή $\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$ μπορεί να έχει οποιαδήποτε τιμή.

Από τη στιγμή που η τιμή της απόκλισης $\nabla \cdot \mathbf{A}$ δεν καθορίζεται από κάποια φυσική απαίτηση, είναι απόλυτα θεμιτό να χρησιμοποιηθεί ως κριτήριο για την επιλογή της η απλούστευση των εξισώσεων. Οι δύο βασικές επιλογές είναι η συνθήκη *Coulomb* και η συνθήκη *Lorentz*, που παρουσιάζονται στα επόμενα.

Διαφορικές εξισώσεις με τη συνθήκη *Coulomb*: Η συνθήκη αυτή είναι απλά η ομογενής σχέση:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (5.4-9)$$

Πάντοτε είναι δυνατόν να επιλεγεί αυτή η συνθήκη. Αν έχει προσδιορισθεί κάποιο \mathbf{A}_1 , τέτοιο ώστε $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_1$ αλλά $\nabla \cdot \mathbf{A}_1 \neq 0$, τότε με $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \nabla f$ είναι πάλι $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, αλλά ταυτόχρονα γίνεται και $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, εφόσον επιλεγεί η συνάρτηση f τέτοια, ώστε $\nabla^2 f = -\nabla \cdot \mathbf{A}_1$. Και αντίστροφα, αν το δυναμικό \mathbf{A} ικανοποιεί τη συνθήκη του *Coulomb*, το ίδιο θα συμβαίνει και με το δυναμικό $\mathbf{A} + \nabla f$, εφόσον η f ικανοποιεί την εξίσωση του *Laplace*, $\nabla^2 f = 0$.

Με την επιλογή αυτή, στη σχέση (5.4-6α) ο τελευταίος όρος μηδενίζεται, ενώ αν στη σχέση (5.4-6β) προστεθεί ο μηδενικός, λόγω της συνθήκης *Coulomb*, όρος $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ σχηματίζεται η διανυσματική Λαπλασιανή $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$. Υπενθυμίζοντας ότι αναφερόμαστε πια μόνο σε ομογενή μέσα ($\nabla \varepsilon = 0$ και $\nabla \mu = 0$), με τη συνθήκη *Coulomb* τα δυναμικά περιγράφονται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= -\frac{1}{\varepsilon} \rho, \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu \mathbf{J} + \varepsilon \mu \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad \text{με } \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \end{aligned} \quad (5.4-10)$$

Η πρώτη σχέση είναι η εξίσωση του *Poisson*, ταυτόσημη με τη σχέση (5.2-35) της Ηλεκτροστατικής. Τώρα το δυναμικό Φ εξαρτάται και από το χρόνο, αλλά, όσον αφορά τη διαφορική εξίσωση, ο χρόνος t είναι υποβαθμισμένος σε παράμετρο. Η δεύτερη σχέση περιγράφει ότι το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} υπακούει στην κυματική εξίσωση, με ταχύτητα διάδοσης ίση με $c_e = (\varepsilon \mu)^{-1/2}$, την ταχύτητα του φωτός στο μέσο, και με διέγερση οφειλόμενη στο ρεύμα \mathbf{J} , αλλά και στο δυναμικό Φ , το οποίο μπορεί να έχει προσδιορισθεί αυτοτελώς από την πρώτη σχέση και να θεωρηθεί γνωστό.

Στη σχέση (5.4-10β), η απόκλιση και η περιστροφή της δεξιάς πλευράς (χωρίς τον συντελεστή $-\mu$) είναι:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\mathbf{J} - \varepsilon \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] &= \nabla \cdot \mathbf{J} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0, \\ \nabla \times \left[\mathbf{J} - \varepsilon \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \right] &= \nabla \times \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (5.4-11)$$

όπου στη σχέση για την απόκλιση χρησιμοποιήθηκε και η σχέση (5.4-10α) και ο μηδενισμός οφείλεται στο νόμο διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου, ενώ στη σχέση για την περιστροφή χρησιμοποιήθηκε και η ταυτότητα ότι η περιστροφή οποιασδήποτε κλίσης είναι ίση με μηδέν. Συνεπώς, το δυναμικό \mathbf{A} εξαρτάται από το σωληνοειδές ρεύμα $\mathbf{J}_{\text{σωλ}}$, για το οποίο είναι $\nabla \times \mathbf{J}_{\text{σωλ}} = \nabla \times \mathbf{J}$ και $\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{σωλ}} = 0$, βλ. σχέσεις (1.2-17) στο Μέρος Α, ενώ το αστρόβιλο ρεύμα $\mathbf{J}_{\text{αστρ}}$, για το οποίο είναι $\nabla \times \mathbf{J}_{\text{αστρ}} = 0$ και $\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{αστρ}} = \nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho / \partial t$, βλ. σχέσεις (1.2-16) στο Μέρος Α, καθορίζει, μέσω της πυκνότητας φορτίου $\rho = -\int (\nabla \cdot \mathbf{J}) dt$, το δυναμικό Φ . Με άλλα λόγια, με τη συνθήκη *Coulomb* το δυναμικό Φ προσδιορίζει το γενικευμένο ηλεκτροστατικό πεδίο και το δυναμικό \mathbf{A} το ηλεκτροδυναμικό (βλ. σελ. 128 στο Μέρος Α).

Διαφορικές εξισώσεις με τη συνθήκη Lorentz: Στη συνθήκη αυτή το ζητούμενο είναι να περιγράφονται και τα δύο δυναμικά μέσω του κυματικού τελεστή. Για να σχηματισθεί στην αριστερή πλευρά των εξισώσεων αυτός ο τελεστής, στη σχέση (5.4-6α) προστίθεται η ποσότητα $(-\epsilon\mu)(\partial^2\Phi/\partial t^2)$ και στη σχέση (5.4-6β) η ποσότητα $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$, που μαζί με τη διπλή περιστροφή σχηματίζει τη διανυσματική Λαπλασιανή. Έτσι δημιουργούνται οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon}\rho - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \epsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right), \\ \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A} + \epsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right).\end{aligned}\tag{5.4-12}$$

Οι σχέσεις αυτές υποδεικνύουν, ότι πράγματι είναι εφικτό να περιγράφονται τα δυναμικά μόνο μέσω του κυματικού τελεστή. Αρκεί η επιλογή να είναι η «συνθήκη Lorentz»:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = -\epsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}.\tag{5.4-13}$$

Πάντοτε είναι δυνατόν να επιλεγεί η συνθήκη του Lorentz. Αν έχουν προσδιορισθεί κάποια $\{\mathbf{A}_1, \Phi_1\}$, που να δίνουν τα πεδία $\{\mathbf{B}, \mathbf{E}\}$, χωρίς όμως να ικανοποιούν τη σχέση (5.4-13), τότε η επιλογή $\{\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \nabla f, \Phi = \Phi_1 - \partial f/\partial t\}$ δίνει τα ίδια πεδία και ταυτόχρονα ικανοποιεί τη συνθήκη του Lorentz, εφόσον επιλεγεί η συνάρτηση f τέτοια, ώστε να είναι $\nabla^2 f - \epsilon\mu\partial^2 f/\partial t^2 = -\nabla\cdot(\mathbf{A}_1 + \epsilon\mu\partial\Phi_1/\partial t)$. Και αντίστροφα, αν τα δυναμικά $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ ικανοποιούν τη συνθήκη του Lorentz, το ίδιο θα συμβαίνει και με τα δυναμικά $\{\mathbf{A} + \nabla f, \Phi - \partial f/\partial t\}$, εφόσον η f ικανοποιεί την ομογενή κυματική εξίσωση, $\nabla^2 f - \epsilon\mu\partial^2 f/\partial t^2 = 0$.

Με την επιλογή αυτή στην αριστερή πλευρά παραμένει ο κυματικός τελεστής, ενώ στη δεξιά πλευρά εμφανίζονται μόνο τα αίτια. Το αποτέλεσμα είναι ότι και τα δύο δυναμικά ικανοποιούν ισότιμα κυματικές εξισώσεις, με ταχύτητα διάδοσης $c_\epsilon = (\epsilon\mu)^{-1/2}$:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi - \epsilon\mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon}\rho, \\ \nabla^2\mathbf{A} - \epsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu\mathbf{J},\end{aligned}\quad \text{με } \nabla\cdot\mathbf{A} = -\epsilon\mu\frac{\partial\Phi}{\partial t}.\tag{5.4-14}$$

Αν το διανυσματικό δυναμικό αναλυθεί σε καρτεσιανές συνιστώσες, $\mathbf{A} = \mathbf{i}_x A_x + \mathbf{i}_y A_y + \mathbf{i}_z A_z$, για τη διανυσματική Λαπλασιανή είναι $\mathbf{i}_x\cdot(\nabla^2\mathbf{A}) = \nabla^2 A_x$ κλπ. Τότε, εξειδικεύοντας στο κενό, με ϵ_0 και μ_0 , και με τη συνθήκη Lorentz, καθεμία από τις τέσσερις συνιστώσες $\{A_x, A_y, A_z, \Phi\}$ των ηλεκτρομαγνητικών δυναμικών περιγράφεται από αυτοτελή βαθμωτή εξίσωση:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_x &= -\mu_0 J_x, & \nabla^2 A_y - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_y &= -\mu_0 J_y, \\ \nabla^2 A_z - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} A_z &= -\mu_0 J_z, & \nabla^2 \Phi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \end{aligned} \quad (5.4-15)$$

Ολοκλήρωμα επαλληλίας κυματικής εξίσωσης: Καθεμία από τις εξισώσεις (5.4-15) έχει τη μορφή:

$$\square^2 F = -f, \quad (5.4-16)$$

όπου με $\square^2 = \nabla^2 - c^{-2} \partial^2 / \partial t^2$ συμβολίζεται ο κυματικός τελεστής, με ταχύτητα διάδοσης c . Ζητούμενο είναι το δυναμικό $F(\mathbf{r}, t)$, το οποίο παράγεται από τις πηγές $f(\mathbf{r}', t')$. Η διάκριση μεταξύ άτονων μεταβλητών $\{\mathbf{r}, t\}$ για τη θέση και το χρόνο προσδιορισμού του F , που προκαλείται από τις πηγές f , και των τονισμένων μεταβλητών $\{\mathbf{r}', t'\}$ για τη θέση και το χρόνο των πηγών, γίνεται γενικεύοντας την αντίστοιχη διάκριση των προηγούμενων παραγράφων. Η πρόσθετη διάκριση μεταξύ t και t' οφείλεται στην κυματική εξίσωση, η οποία περιγράφει διάδοση με ταχύτητα c . Συνεπώς, η δράση της πηγής f στη θέση \mathbf{r}' τη στιγμή t' γίνεται αισθητή στη θέση $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{R}$ τη μεταγενέστερη χρονική στιγμή $t = t' + R/c$, και όχι ακαριαία.

Όπως θα επιβεβαιωθεί στη συνέχεια (σαφώς παρένθετα, και γι' αυτό χωρίς αρίθμηση στις εξισώσεις), το ολοκλήρωμα επαλληλίας για το δυναμικό $F(\mathbf{r}, t)$ που παράγεται στη θέση \mathbf{r} και τη χρονική στιγμή t από την παρουσία αιτίων $f(\mathbf{r}', t')$ σε οποιαδήποτε θέση \mathbf{r}' κάποια προγενέστερη στιγμή t' , δηλαδή, η λύση μιας κυματικής εξίσωσης με μορφή $\square^2 F = -f$, είναι:

$$F(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int dV' \frac{f(\mathbf{r}', t')}{R}, \quad (5.4-17)$$

όπου ας επαναληφθούν οι συμβολισμοί:

- \mathbf{r} είναι η θέση, στην οποία προσδιορίζεται το δυναμικό,
- t είναι η αντίστοιχη χρονική στιγμή, κατά την οποία προσδιορίζεται το δυναμικό,
- $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ είναι κάθε θέση με πηγές,
- $t' = t - R/c$ είναι ο προγενέστερος χρόνος εκπομπής (στη θέση \mathbf{r}'),
που αντιστοιχεί σε λήψη (στο \mathbf{r}) τη στιγμή t ,
- $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ είναι η σχετική απόσταση του σημείου \mathbf{r} από κάθε θέση \mathbf{r}' .

Η ολοκλήρωση, ως προς τις τονισμένες μεταβλητές θέσης, εκτείνεται στο χώρο, στον οποίο κατά τις προγενέστερες χρονικές στιγμές $t' = t - R/c$ είναι $f \neq 0$. Όταν είναι $\partial/\partial t = 0$, η έκφραση αυτή προφανώς αναπαράγει τα αντίστοιχα ολοκληρώματα των παραγρ. 5.2.1 και 5.3.1.

Επαλήθευση της σχέσης (5.4-17): Για να επιβεβαιωθεί ότι πράγματι το ολοκλήρωμα επαλληλίας (5.4-17) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\square^2 F = -f$, δηλαδή ότι:

$$\nabla \cdot (\nabla F) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} F = -f,$$

σημειώνεται αρχικά ότι οι τελεστές ∇ και $\partial/\partial t$ δρουν στις άτονες μεταβλητές και συνεπώς διαφέρουν από τους τελεστές ∇' και $\partial/\partial t'$. Όταν ο τελεστής \square^2 εφαρμόζεται στο ολοκλήρωμα της σχέσης (5.4-17), δρα στις άτονες μεταβλητές, και όχι στις τονούμενες μεταβλητές θέσης, ως προς τις οποίες γίνεται η ολοκλήρωση. Είναι συνεπώς δυνατόν να αντιστραφεί η σειρά και να γίνει πρώτα η παραγωγή ως προς τις άτονες μεταβλητές θέσης και ύστερα η ολοκλήρωση ως προς τις τονισμένες. Από τον τελεστή $\square^2 = \nabla^2 - c^{-2}(\partial^2/\partial t^2)$ το μέρος ∇^2 αφορά τόσο τον όρο $1/R$ (όπου $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$), όσο και τον όρο f (επειδή $t' = t - R/c$), δηλαδή αφορά το γινόμενο f επί $1/R$, ενώ το μέρος $(\partial^2/\partial t^2)$ αφορά μόνο τον όρο f (πάλι επειδή $t' = t - R/c$). Με διαδοχική εφαρμογή των κανόνων για την παραγωγή γινομένου (βλ. Πίνακα Α.4-4 στο Παράρτημα Α.4 του Μέρους Α), προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$\square^2 F = \frac{1}{4\pi} \int dV' \left[f \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{R} \right) + 2(\nabla f) \cdot \left(\nabla \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \nabla \cdot (\nabla f) - \frac{1}{R} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} f \right) \right].$$

Για τις παραγώγους της σχετικής απόστασης $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ σχετικά εύκολα προκύπτει, ότι:

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad \nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \right) = \frac{2}{R} \quad \text{και} \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0,$$

με τη σημαντική και για τη συνέχεια επισήμανση ότι η τελευταία σχέση δεν ισχύει όταν $\mathbf{R} = 0$, αλλά εκεί είναι $\nabla \cdot (\mathbf{R}/R^3) = \infty$.

Η συνάρτηση f έχει την εξάρτηση $f = f(\mathbf{r}', t' = t - R/c)$, συνεπώς εξαρτάται τόσο από τον άτονο χρόνο, όσο και από την άτονη θέση, μέσω του R . Επειδή $\partial R/\partial t = 0$, είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}', t') = \left(\frac{\partial}{\partial t'} f \right) \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} f, \quad \text{συνεπώς} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} f = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} f,$$

ενώ:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial f}{\partial t'} \quad \text{και} \quad \nabla \cdot (\nabla f) = -\frac{1}{c} \frac{2}{R} \frac{\partial f}{\partial t'} + \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial f}{\partial t'} \right).$$

Με τη βοήθεια αυτών των σχέσεων, στη σχέση για το $\square^2 F$ όλοι οι όροι στο ολοκλήρωμα απαλείφονται εκ ταυτότητας, εκτός από τον πρώτο, δηλαδή είναι:

$$\square^2 F = -\frac{1}{4\pi} \int dV' f(\mathbf{r}', t') \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right).$$

Επειδή είναι $\nabla \cdot (\mathbf{R}/R^3) = 0$, εκτός όταν $\mathbf{R} = 0$, μη μηδενική συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προέρχεται μόνο από τις θέσεις $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R} = \mathbf{r}$, και μόνο από τους χρόνους $t' = t - R/c$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας το $f(\mathbf{r}', t')$ από το $f(\mathbf{r}, t)$ δεν αλλοιώνεται η τιμή του ολοκληρώματος. Όμως, το $f(\mathbf{r}, t)$ δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές ολοκλήρωσης, οπότε:

$$\square^2 F = -\frac{1}{4\pi} f(\mathbf{r}, t) \int dV' \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right),$$

με ολοκλήρωση σε περιοχή με $R \rightarrow 0$. Λόγω της αντισυμμετρίας $\mathbf{R} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ είναι $\nabla \cdot (\mathbf{R}/R^3) = -\nabla' \cdot (\mathbf{R}/R^3)$, οπότε το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int dV' \nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\int dV' \nabla' \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\oint_S d\mathbf{S}' \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3},$$

όπου έγινε χρήση του θεωρήματος *Gauss*, για μετατροπή του χωρικού ολοκληρώματος της απόκλισης σε επιφανειακό σε κλειστή επιφάνεια. Με $d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R} = -R dS'$ και ολοκληρώνοντας σε σφαιρική επιφάνεια ($R = \text{σταθ.}$, $\oint dS' = 4\pi R^2$), ή αναγνωρίζοντας απλώς το ολοκλήρωμα που προσδιορίζει στερεή γωνία, βλ. σχέση (5.2-33), προκύπτει $-\oint d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{R}/R^3 = 4\pi$, οπότε πράγματι η σχέση (5.4-17) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση $\square^2 F = -f$.

Ολοκληρώματα επαλληλίας για τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά: Επιστρέφοντας στις συνιστώσες $\{A_x, A_y, A_z, \Phi\}$ των ηλεκτρομαγνητικών δυναμικών, παίρνοντας στη σχέση (5.4-17) διαδοχικά $F = \Phi$, $F = A_x$ κλπ. και $f = (1/\epsilon_0)\rho$, $f = \mu_0 J_x$ κλπ. και αθροίζοντας τις συνιστώσες του \mathbf{A} , πολλαπλασιασμένες με το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, σχηματίζονται τα ολοκληρώματα επαλληλίας για τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά $\{\mathbf{A}, \Phi\}$:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R}, \end{aligned} \tag{5.4-18}$$

όπου $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ και με ολοκλήρωση ως προς όλες τις θέσεις \mathbf{r}' με φορτία και ρεύματα, αλλά με βάση τις τιμές που είχαν κατά τις προγενέστερες χρονικές στιγμές $t' = t - R/c$. Αυτό το τελευταίο σημείο είναι που διαφοροποιεί τις σχέσεις αυτές από τις σχεδόν πανομοιότυπες αντίστοιχες σχέσεις των παραγράφων 5.2.1 και 5.3.1. Κατά τα λοιπά, ισχύουν όλα όσα έχουν αναφερθεί στις παραγράφους αυτές. Για παράδειγμα, αν τα φορτία ή ρεύματα είναι επιφανειακά κλπ., εννοούνται οι αντικαταστάσεις $\rho dV' \rightarrow \sigma dS'$, $ldl' \rightarrow \eta q$ και $\mathbf{J} dV' \rightarrow \mathbf{K} dS'$ ή $id\mathbf{r}'$.

Τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά, όπως δίδονται μέσω των ολοκληρωμάτων επαλληλίας (5.4-18), ικανοποιούν, όπως δείχθηκε προηγουμένως, τις κυματικές εξισώσεις (5.4-14). Όμως, οι εξισώσεις αυτές σχηματίστηκαν με την παραδοχή ότι τα δυναμικά συνδέονται με τη συνθήκη *Lorentz*. Συνεπώς, και με τη μορφή των ολοκληρωμάτων επαλληλίας (5.4-18) τα δυναμικά συνδέονται με τη σχέση $\nabla \cdot \mathbf{A} + \epsilon_0 \mu_0 \partial \Phi / \partial t = 0$. Με την έννοια αυτή, οι τέσσερις ποσότητες $\{A_1, A_2, A_3, \Phi\}$, με το διανυσματικό δυναμικό να έχει αναλυθεί σε συνιστώσες σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων, δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά αρκεί να προσδιορισθούν οι τρεις και ακολούθως η τέταρτη προκύπτει με μία απλή ολοκλήρωση. Συνήθως, πρώτα προσδιορίζεται το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} και ακολούθως το βαθμωτό δυναμικό εξάγεται με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο.

Σε ορισμένες βασικές διατάξεις είναι δυνατόν στα ολοκληρώματα επαλληλίας οι ολοκληρώσεις να γίνουν αναλυτικά και να προσδιορισθούν με κλειστή μορφή τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά και ακολούθως τα πεδία. Τέτοιες περιπτώσεις παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο 5.4.2, καθιστώντας ταυτόχρονα περιττό να παρουσιασθούν χωριστά **παραδείγματα** για την εφαρμογή των ολοκληρωμάτων επαλληλίας. Ακόμα και όταν η αναλυτική ολοκλήρωση δεν είναι εφικτή, πάλι οι πληροφορίες που περιέχονται στις σχέσεις (5.4-18) είναι δυνατόν να εξαχθούν αριθμητικά. Σε κάθε περίπτωση, για να εφαρμοσθούν αυτές οι σχέσεις πρέπει να είναι εκ των προτέρων γνωστά τα αίτια $\rho_{κλπ}$ και $\mathbf{J}_{κλπ}$. Και αυτό δεν συμβαίνει συχνά.

Μηδενισμός συνιστωσών σε συμμετρικές διατάξεις: Στα ολοκληρώματα (5.4-17) συχνά εξυπηρετούν οι αλλαγές μεταβλητής $z' \rightarrow \zeta = z' - z$ ή/και $\phi' \rightarrow \xi = \phi' - \phi$. Με αυτές τις αντικαταστάσεις εξαλείφεται η εξάρτηση από τις συντεταγμένες z ή/και ϕ στη σχετική απόσταση R , αλλά μεταφέρεται τόσο στις συναρτήσεις ρ και \mathbf{J} [π.χ. $\rho(z') \rightarrow \rho(\zeta + z)$], όσο και στα όρια ολοκλήρωσης [π.χ. $\int_{z_1}^{z_2} (...) dz' \rightarrow \int_{\zeta_1 = z_1 - z}^{\zeta_2 = z_2 - z} (...) d\zeta$]. Η κατάσταση, όμως, απλουστεύεται, ριζικά, όταν τα αίτια $\{\rho, \mathbf{J}\}$ δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες z' ή/και ϕ' . Θα εξετασθεί χωριστά η ανεξαρτησία από καθεμία από τις συντεταγμένες z' και ϕ' .

(α) Όταν $\partial/\partial z' \{\rho, \mathbf{J}\} = 0$, δηλαδή, όταν η κατανομή φορτίων και ρευμάτων δεν μεταβάλλεται κατά τον άξονα z , τότε αναγκαστικά θα είναι $z_1 = -\infty$ και $z_2 = +\infty$, οπότε η εξάρτηση των ολοκληρωμάτων από το z εξαλείφεται και στα όρια, συνεπώς $\partial \Phi / \partial z = 0$ και $\partial \mathbf{A} / \partial z = 0$, όπως αναμένεται. Επιπλέον:

(α1) Αν είναι $J_z = 0$, τότε θα είναι $A_z = 0$, οπότε προκύπτει $E_z = 0$ και $B_x = B_y = 0$, ή $B_T = B_\phi = 0$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες, ενώ οι άλλες συνιστώσες των πεδίων εν γένει είναι μη μηδενικές και δίδονται από τις σχέσεις:

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \quad E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \quad (5.4-19)$$

και παρόμοια οι E_T , E_φ και B_z σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

- (α2) Αν είναι $J_x = J_y = 0$, δηλαδή $\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_z$, τότε θα είναι $A_x = A_y = 0$, δηλαδή $\mathbf{A} = \mathbf{i}_z A_z$. Επίσης, σε κυλινδρικές συντεταγμένες, αν είναι $J_T = J_\varphi = 0$, που πάλι σημαίνει $\mathbf{J} = \mathbf{i}_z J_z$, τότε θα είναι πάλι $\mathbf{A} = \mathbf{i}_z A_z$, συνεπώς $A_T = A_\varphi = 0$. Τώρα είναι $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, οπότε αναγκαστικά $\partial\rho/\partial t = 0$, οπότε, τουλάχιστον για το χρονομεταβλητό μέρος του ρ που ενδιαφέρει εδώ, είναι $\rho = 0$, με αποτέλεσμα ότι $\Phi = 0$, τουλάχιστον κατά το χρονομεταβλητό μέρος του. Για τις πεδιακές συνιστώσες προκύπτει $B_z = 0$ και $E_x = E_y = 0$ (ή, $E_T = E_\varphi = 0$), ενώ εν γένει μη μηδενικές είναι οι πεδιακές συνιστώσες:

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (5.4-20)$$

και παρόμοια για τις E_z , B_T και B_φ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

- (β) Όταν $\partial/\partial\varphi'\{\rho, \mathbf{J}\} = 0$, τότε η εξάρτηση από το φ εξαλείφεται, δεδομένου ότι η ολοκλήρωση, είτε ως προς φ' , είτε ως προς $\zeta = \varphi' - \varphi$, εκτείνεται σε έναν πλήρη κύκλο (όπως, από $\zeta = -\varphi$ ως $\zeta = -\varphi + 2\pi$). Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\mathbf{i}_T \cdot \mathbf{i}_T' = \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}_\varphi' = \cos \zeta$, ενώ $-\mathbf{i}_T \cdot \mathbf{i}_\varphi' = \mathbf{i}_\varphi \cdot \mathbf{i}_T' = \sin \zeta$ και ότι το $\sin \zeta$ είναι περιττή συνάρτηση του ζ , ενώ το $\cos \zeta$, καθώς και η σχετική απόσταση $R(\zeta)$, είναι άρτιες συναρτήσεις του ζ , προκύπτουν για το \mathbf{A} οι συνιστώσες:

$$\{A_T, A_\varphi, A_z\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{dV'}{R} \{J_T \cos \zeta, J_\varphi \cos \zeta, J_z\}. \quad (5.4-21)$$

- (β1) Αν επιπλέον είναι $J_\varphi = 0$, τότε θα είναι $A_\varphi = 0$, συνεπώς $E_\varphi = 0$ και $B_T = B_z = 0$ (ή, σε σφαιρικές συντεταγμένες, $B_r = B_\theta = 0$), και οι υπόλοιπες πεδιακές συνιστώσες που εν γένει μη μηδενικές δίδονται από τις σχέσεις:

$$B_\varphi = \frac{\partial A_T}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r_T}, \quad E_T = -\frac{\partial\Phi}{\partial r_T} - \frac{\partial A_T}{\partial t}, \quad E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad (5.4-22)$$

και παρόμοιες εκφράσεις δίνουν τις σφαιρικές συνιστώσες B_φ , E_r και E_θ .

- (β2) Αν, τέλος, είναι $J_T = J_z = 0$, δηλαδή $\mathbf{J} = \mathbf{i}_\varphi J_\varphi$, τότε θα είναι $A_T = A_z = 0$, δηλαδή $\mathbf{A} = \mathbf{i}_\varphi A_\varphi$. Η, σε σφαιρικές συντεταγμένες, αν είναι $J_r = J_\theta = 0$, που πάλι σημαίνει $\mathbf{J} = \mathbf{i}_\varphi J_\varphi$, τότε πάλι θα είναι $\mathbf{A} = \mathbf{i}_\varphi A_\varphi$, δηλαδή $A_r = A_\theta = 0$. Για τους ίδιους λόγους, όπως στο σημείο (α2), προκύπτει ότι αναγκαστικά είναι $\rho = 0$, συνεπώς $\Phi = 0$, κατά το

χρονομεταβλητό μέρος τους. Μηδενικές είναι τώρα οι πεδιακές συνιστώσες $B_\varphi = 0$ και $E_T = E_z = 0$ (ή, $E_r = E_\theta = 0$), ενώ για τις υπόλοιπες συνιστώσες ισχύει:

$$E_\varphi = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}, \quad B_T = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r_T} \frac{\partial}{\partial r_T} (r_T A_\varphi), \quad (5.4-23)$$

και παρόμοια για τις σφαιρικές συνιστώσες E_φ , B_r και B_θ .

Τα παραπάνω συμπεράσματα για τα πεδία $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ ταυτίζονται με αυτά που έχουν παρουσιασθεί στην παράγραφο 2.4.1 του Μέρους Α, βλ. σχέσεις (2.4-2) και (2.4-3). Για τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ τα συμπεράσματα συγκεφαλαιώνονται ως εξής:

Αν είναι $\partial/\partial z = 0$ και $J_z = 0$, τότε $A_z = 0$.

Αν είναι $\partial/\partial z = 0$ και $\mathbf{J}_{\perp z} = 0$ (οπότε και $\partial\rho/\partial t = 0$), τότε $\mathbf{A}_{\perp z} = 0$ και $\partial\Phi/\partial t = 0$.

Αν είναι $\partial/\partial\varphi = 0$ και $J_\varphi = 0$, τότε $A_\varphi = 0$.

Αν είναι $\partial/\partial\varphi = 0$ και $\mathbf{J}_{\perp\varphi} = 0$ (οπότε και $\partial\rho/\partial t = 0$), τότε $\mathbf{A}_{\perp\varphi} = 0$ και $\partial\Phi/\partial t = 0$.

Φυσικά, τα παραπάνω δεν περιορίζονται σε χωρικές κατανομές φορτίων και ρευμάτων, αλλά εφαρμόζονται και σε κάθε άλλη κατανομή, υποκαθιστώντας ενδεχόμενο επιφανειακό φορτίο σ από $\rho = \sigma/\delta$, όπου δ είναι το πάχος της φορτισμένης επιφάνειας, κλπ.

Η **ημιτονοειδής μόνιμη κατάσταση** περιγράφεται εξαιρετικά αποτελεσματικά με την εισαγωγή των φασιθετών. Με την καθιερωμένη σε τεχνικές εφαρμογές σύμβαση για τους φασιθέτες, τα δυναμικά συνδέονται με τους φασιθέτες τους ως:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \{ \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t) \}, \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \text{Re} \{ \Phi(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t) \}, \end{aligned} \quad (5.4-24)$$

η παραγωγή ως προς το χρόνο υποκαθίσταται από έναν απλό πολλαπλασιασμό, $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$, ενώ βέβαια οι παραγωγίσεις ως προς το χώρο παραμένουν ανεπηρέαστες, με οποιονδήποτε διαφορικό τελεστή και αν εκφράζονται. Με τον τρόπο αυτό, όλες οι σχέσεις της παρούσας παραγράφου μεταγράφονται αμέσως σε όρους φασιθετών. Πιο συγκεκριμένα, οι βασικότερες σχέσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

- Σύνδεση δυναμικών με πεδία, σχέσεις (5.4-1) και (5.4-2):

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - j\omega\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (5.4-25)$$

- Συνθήκη *Coulomb* και εξισώσεις για τα δυναμικά, σχέσεις (5.4-9) και (5.4-10):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} + j\epsilon_0 \mu_0 \omega \nabla \Phi. \end{cases} \quad (5.4-26)$$

- Συνθήκη *Lorentz* και εξισώσεις για τα δυναμικά, σχέσεις (5.4-13) και (5.4-14), με τον κυματικό τελεστή, $\square^2 = \nabla^2 - c^{-2}(\partial^2/\partial t^2)$, να αντικαθίσταται από τον τελεστή του *Helmholtz*, $\nabla^2 + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \nabla^2 + (\omega/c)^2 = \nabla^2 + k^2$, με τη σταθερά διάδοσης (κυματαριθμό) για τον κενό χώρο, $k = \omega/c$, όπως και στην τελευταία από τις σχέσεις (5.4-26):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\epsilon_0 \mu_0 \omega \Phi \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\ \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \end{cases} \quad (5.4-27)$$

- Ολοκληρώματα επαλληλίας για τα δυναμικά, σχέσεις (5.4-18):

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', \omega)}{R} \exp(-jkR), \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega)}{R} \exp(-jkR). \end{aligned} \quad (5.4-28)$$

Σ' όλες τις σχέσεις (5.4-25)-(5.4-28) υπονοούνται φασιθέτες, όπως, άλλωστε, τεκμαίρεται από την εμφάνιση της φανταστικής μονάδας j και της κυκλικής συχνότητας ω , και επίσης προβάλλεται ρητά στις τελευταίες σχέσεις με τη δήλωση, ότι τα Φ και \mathbf{A} εξαρτώνται από το ω , και όχι από τον χρόνο t . Το μόνο σημείο που ίσως χρειάζεται κάποια διευκρίνιση αφορά την εμφάνιση του συντελεστή $\exp(-jkR)$ στις σχέσεις (5.4-28). Από τις σχέσεις (5.4-24) είναι $\Phi(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\Phi(\mathbf{r}, \omega) \exp(j\omega t)\}$, αλλά $\rho(\mathbf{r}', t') = \text{Re}\{\rho(\mathbf{r}', \omega) \exp(j\omega t')\}$ και επειδή $t' = t - R/c$, είναι $\rho(\mathbf{r}', t') = \text{Re}\{\rho(\mathbf{r}', \omega) \exp(-jkR) \exp(j\omega t)\}$, δηλαδή, το $\rho(\mathbf{r}', \omega)$ εμφανίζεται πολλαπλασιασμένο με το συντελεστή $\exp(-jkR)$, ώστε να αναφέρεται στον παρελθόντα χρόνο t' . Για τους ίδιους λόγους και ο φασιθέτης του διανυσματικού δυναμικού \mathbf{A} συνδέεται με το φασιθέτη του $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')$ που όμως αποδίδεται από το γινόμενο $\mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega) \exp(-jkR)$.

Σε καθεμία από τις βασικές διατάξεις της παραγράφου 5.4.2 που ακολουθεί, η μελέτη γίνεται και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται και με χρήση των φασιθετών.

5.4.2 Δυναμικά $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ βασικών διατάξεων

Οι βασικές διατάξεις της παρούσας παραγράφου αναφέρονται σε χώρο που παντού έχει ιδιότητες κενού (ϵ_0, μ_0) και τα αίτια που παράγουν τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ θεωρούνται δεδομένα. Ικανοποιούνται, συνεπώς, οι προϋποθέσεις για να εφαρμοσθούν τα ολοκληρώματα επαλληλίας της προηγούμενης παραγράφου. Στη γενική περίπτωση χρονικής εξάρτησης τα φορτία ή ρεύματα συμμετέχουν στην παραγωγή των δυναμικών με τις τιμές που είχαν κατά τις προγενέστερες χρονικές στιγμές $t' = t - R/c$:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R}.\end{aligned}\tag{5.4-29}$$

Στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση οι χρονομεταβλητές ποσοότητες περιγράφονται από τους φασιθέτες και η χρονική καθυστέρηση περιέχεται στο συντελεστή $\exp(-jkR)$:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}', \omega)}{R} \exp(-jkR), \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \omega)}{R} \exp(-jkR).\end{aligned}\tag{5.4-30}$$

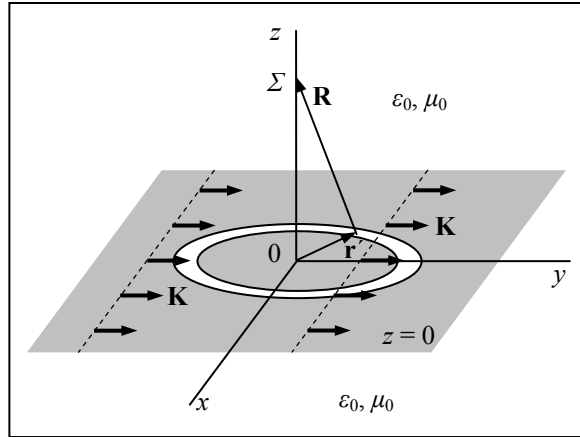
Σε κάθε περίπτωση, η ολοκλήρωση εκτείνεται στην περιοχή με τα φορτία ή τα ρεύματα, η οποία περιγράφεται από τις τονισμένες συντεταγμένες, κατά τα γνωστά.

Η επίλυση παρουσιάζεται για τις ακόλουθες διατάξεις:

- Ρευματοφόρο επίπεδο με άπειρη έκταση,
- Ρευματοφόρος ευθεία γραμμή με άπειρο μήκος,
- Σημειακό ηλεκτρικό δίπολο,
- Σημειακό μαγνητικό δίπολο,
- Ευθύγραμμη μαγνητική διπολική ταινία με άπειρο μήκος.

Κάθε διάταξη επιλύεται αρχικά με τις σχέσεις (5.4-29) και ακολούθως με τους φασιθέτες, κυρίως στα βήματα που διαφέρουν. Βέβαια, οι χρονοεξαρτώμενες εκφράσεις μετατρέπονται σε φασιθέτες με αντικαταστάσεις, όπως $\cos(\omega t) \rightarrow 1$ και $\sin(\omega t) \rightarrow -j$, ή των συμπλεγμάτων από συναρτήσεις *Bessel* α' και β' είδους από συναρτήσεις *Hankel*, και αντίστροφα. Η αυτοτελής επίλυση με τη χρήση τόσο των σχέσεων (5.4-29), όσο και των (5.4-30), έγινε ώστε να μην παραλειφθεί το κύριο ζητούμενο αυτού του κειμένου, το οποίο αποτελεί η εξοικείωση του αναγνώστη και με τις δύο μεθόδους.

Επιφανειακό ρεύμα με σταθερή διεύθυνση σε επίπεδο με άπειρη έκταση: Ας θεωρηθεί, όπως στο **Σχήμα 5.4-1**, ότι το ρεύμα βρίσκεται στο επίπεδο $z = 0$ με διεύθυνση \mathbf{i}_y και περιγράφεται από κάποια συνάρτηση $\mathbf{K} = \mathbf{i}_y K_0 f(t)$. Επειδή είναι $\rho dV' = 0$ και δεν υπάρχει άλλη κατανομή φορτίου, είναι $\Phi = 0$. Επίσης, το ρεύμα έχει διεύθυνση \mathbf{i}_y , με άλλα λόγια, είναι $J_{x,\kappa\lambda\pi} dV' = 0$ και $J_{z,\kappa\lambda\pi} dV' = 0$, συνεπώς $A_x = A_z = 0$. Η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα των $\{\mathbf{A}, \Phi\}$ είναι η A_y , η οποία με $\mathbf{J} dV' \rightarrow \mathbf{i}_y K_0 f(t') dS'$ δίδεται από το ολοκλήρωμα:



Σχήμα 5.4-1

$$A_y = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int dS' \frac{1}{R} f\left(t - \frac{R}{c}\right), \quad (5.4-31)$$

με ολοκλήρωση σε ολόκληρο το ρευματοφόρο επίπεδο $z' = 0$.

Επειδή είναι $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, είναι αδιάφορο ποιες είναι οι συντεταγμένες x και y του σημείου Σ , στο οποίο θα υπολογισθεί το δυναμικό. Προτιμότερη, συνεπώς, είναι η απλούστερη επιλογή, να τοποθετηθεί το σημείο Σ στον άξονα z . Η διάταξη συνολικά δεν είναι συμμετρική σε περιστροφή περί τον άξονα Oz , επειδή το ηλεκτρικό ρεύμα έχει συγκεκριμένη διεύθυνση, αυτό όμως έχει ήδη ληφθεί υπ' όψιν κατά τη διαπίστωση ότι $\mathbf{A} = \mathbf{i}_y A_y$. Το μόνο που χρειάζεται πλέον είναι να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα στη σχέση (5.4-31). Η μόνη εξάρτηση είναι μέσω της σχετικής απόστασης R και γι' αυτό το ολοκλήρωμα (μολονότι όχι η διάταξη συνολικά) έχει τη συμμετρία $\partial/\partial \varphi = 0$. Αυτό υποδεικνύει πως για την περιγραφή των θέσεων στο ρευματοφόρο επίπεδο εξυπηρετεί η χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων. Θα γραφεί, συνεπώς, $\mathbf{r}' = \mathbf{i}_r' r_T'$ και $dS' = r_T' dr_T' d\varphi'$, και με $\mathbf{r} = \mathbf{i}_z z$ για το σημείο Σ , θα είναι $R^2 = r_T'^2 + z^2$. Με αυτές τις πληροφορίες, το ολοκλήρωμα ως προς φ' μπορεί να γίνει αμέσως. Το αποτέλεσμα:

$$A_y = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} 2\pi \int_0^\infty dr_T' r_T' \frac{f(t - R/c)}{R}, \quad (5.4-32)$$

ουσιαστικά περιγράφει πως ως στοιχείο στην επιφάνεια $z' = 0$ έχει ληφθεί κυκλικός δακτύλιος με ακτίνα r_T' και εμβαδόν $dS' = 2\pi r_T' dr_T'$. Η χρήση τέτοιου στοιχείου, με διαστάσεις που σε κάποια διεύθυνση, εδώ τη φ' , δεν είναι απειροστές, είναι εδώ αποδεκτή, μόνο επειδή

οποιαδήποτε γωνιακή θέση φ' δίνει την ίδια τιμή για την ποσότητα R , από την οποία και μόνο εξαρτάται το ολοκλήρωμα στη σχέση (5.4-31).

Με πρώτη αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης από r'_T σε $R(r'_T)$, όπου $RdR = r'_T dr'_T$ και $R(r'_T=0) = |z|$ (επειδή η σχετική απόσταση είναι $R \geq 0$) και $R(r'_T=\infty) = \infty$, και ακολούθως με νέα αλλαγή μεταβλητής από R σε $\tau(R) = t - R/c$, όπου $\tau(R=|z|) = t - |z|/c$, $\tau(R=\infty) = -\infty$ και $d\tau = -(1/c)dR$, όπως περιγράφεται από την ακόλουθη σειρά πράξεων, προκύπτει:

$$A_y = \frac{\mu_0 K_0}{2} \int_{|z|}^{\infty} dR f\left(t - \frac{R}{c}\right) = -\frac{\mu_0 K_0 c}{2} \int_{t - \frac{|z|}{c}}^{-\infty} d\tau f(\tau) = \frac{\mu_0 K_0 c}{2} F\left(t - \frac{|z|}{c}\right), \quad (5.4-33)$$

όπου έχει εισαχθεί η συνάρτηση $F(t) = -\infty \int^t f(\tau) d\tau$. Συνεπώς, το **επιφανειακό ρεύμα $\mathbf{K} = \mathbf{i}_y K_0 f(t)$ στο επίπεδο $z = 0$ με άπειρη έκταση** παράγει τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(z, t) = \mathbf{i}_y A_y = \mathbf{i}_y \frac{\mu_0 K_0 c}{2} F\left(t - \frac{|z|}{c}\right). \quad (5.4-34)$$

Τα πεδία υπολογίζονται παραγωγίζοντας [όπου $(\partial/\partial z)|z| = \text{sgn}(z) = z/|z|$], και είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial z} A_y = \mathbf{i}_x \frac{\mu_0 K_0}{2} f\left(t - \frac{|z|}{c}\right) \text{sgn}(z), \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} = -\mathbf{i}_y \frac{\mu_0 K_0 c}{2} f\left(t - \frac{|z|}{c}\right), \end{aligned} \quad (5.4-35)$$

που αναπαράγουν με στροφή κατά 90° τα αποτελέσματα του **παραδ. 2.4-6** του Μέρους Α. Όλες οι ποσότητες (A_y , E_y και B_x) εμπλέκουν συναρτήσεις του $t' = t - |z|/c$, δηλαδή αντιπροσωπεύουν μεγέθη που απομακρύνονται από το αίτιο (το ρεύμα) στο $z' = 0$.

Αν η διέγερση \mathbf{K} έχει ημιτονοειδή εξάρτηση, αν π.χ. είναι $f(t) = \cos(\omega t)$, τότε η μόνη διαφοροποίηση με τα προηγούμενα είναι η εξειδίκευση $F(t) = \omega^{-1} \sin(\omega t)$, χωρίς τη συνεισφορά από το όριο $\tau = -\infty$, που δεν ταιριάζει σε ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση, επειδή είναι μία ποσότητα ανεξάρτητη από το χρόνο (άσχετα με το ότι εδώ είναι μαθηματικά απροσδιόριστη).

Για εξάρτηση $f(t) = \cos(\omega t)$, ο φασιθέτης του ρεύματος είναι $\mathbf{K} = \mathbf{i}_y K_0$, επειδή $\cos(\omega t) = \text{Re}\{\exp(j\omega t)\}$. Η επίλυση ακολουθεί ακριβώς τα ίδια βήματα συλλογισμών και αλλαγών μεταβλητής, με τη μόνη διαφορά ότι στο ολοκλήρωμα δεν εμπλέκεται η συνάρτηση $f(t - R/c)$, αλλά η $\exp(-jkR)$. Συγκεντρωτικά, η πορεία από την έναρξη με τη σχέση (5.4-31) μέχρι την κατάληξη στη σχέση (5.4-33) παρουσιάζεται στην ακόλουθη αλυσίδα σχέσεων:

$$\begin{aligned}
A_y &= \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} \int dS' \frac{1}{R} \exp(-jkR) = \frac{\mu_0 K_0}{4\pi} 2\pi \int_0^\infty dr'_r r'_r \frac{\exp(-jkR)}{R} \\
&= \frac{\mu_0 K_0}{2} \int_{|z|}^\infty dR \exp(-jkR) = -j \frac{\mu_0 K_0}{2k} \exp(-jk|z|),
\end{aligned} \tag{5.4-36}$$

όπου τώρα η ποσότητα A_y είναι, βέβαια, φασιθέτης. Στο τελευταίο βήμα, η συνεισφορά από το άνω όριο $R = \infty$ παραλείπεται, για τους λόγους που προαναφέρθηκαν σε σχέση με τη συνάρτηση $F(t) = \omega^{-1} \sin(\omega t)$. Παρατηρείται ότι αν προσαρτηθεί στην καταληκτική έκφραση από τις σχέσεις (5.4-36) ο εννοούμενος παράγοντας $\exp(j\omega t)$, η εξαγωγή του πραγματικού μέρους δίνει $\text{Re}\{(j\omega)^{-1} \exp(-jk|z|) \exp(j\omega t)\} = \omega^{-1} \sin[\omega(t - |z|/c)]$, δηλαδή ακριβώς τη συνάρτηση $F(t - |z|/c)$ που αντιστοιχεί στην $f(t) = \cos(\omega t)$, όπως στη σχέση (5.4-33).

Επομένως, οι φασιθέτες των δυναμικών που παράγονται από **επιφανειακό ρεύμα με φασιθέτη $\mathbf{K} = \mathbf{i}_y K_0$ στο επίπεδο $z = 0$ με άπειρη έκταση** είναι:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(z, \omega) = \mathbf{i}_y A_y = -\mathbf{i}_y j \frac{\mu_0 K_0}{2k} \exp(-jk|z|). \tag{5.4-37}$$

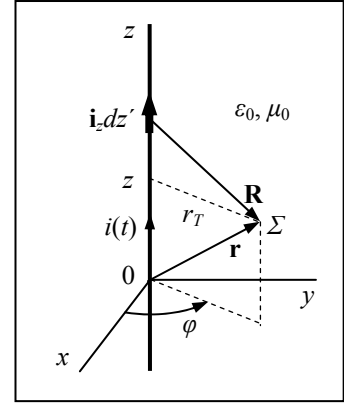
Τέλος, με χρήση του φασιθέτη $\mathbf{A} = \mathbf{i}_y A_y$, που εξαρτάται μόνο από τη συντεταγμένη z , οι φασιθέτες των πεδίων είναι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial z} A_y = \mathbf{i}_x \frac{\mu_0 K_0}{2} \exp(-jk|z|) \text{sgn}(z), \\
\mathbf{E} &= -j\omega \mathbf{A} = -\mathbf{i}_y \frac{\mu_0 K_0 c}{2} \exp(-jk|z|).
\end{aligned} \tag{5.4-38}$$

Εύκολα φαίνεται ότι $\text{Re}\{\exp(-jk|z|) \exp(j\omega t)\} = \cos[\omega(t - |z|/c)] = f(t - |z|/c)$, όπως αναμένεται εξειδικεύοντας τις σχέσεις (5.4-35) με $f(t) = \cos(\omega t)$.

Ας σημειωθεί καταλήγοντας ότι οι φασιθέτες των δυναμικών και των πεδίων περιέχουν, ως αποτέλεσμα της αλγεβρικής διαδικασίας για την εξαγωγή τους, το συντελεστή $\exp(-jk|z|)$, συντελεστή με μορφή $\exp(-j\beta z)$, όταν είναι $z > 0$, και με μορφή $\exp(+j\beta z)$, όταν είναι $z < 0$, όπως είναι αναμενόμενο για φυσικούς λόγους, σε αποτέλεσμα που παράγεται από αίτιο στο επίπεδο $z = 0$ και απομακρύνεται από αυτό.

Ημιτονοειδές ρεύμα σε νηματοειδή ευθύγραμμο αγωγό με άπειρο μήκος: Ας θεωρηθεί (Σχήμα 5.4-2) ότι το ηλεκτρικό ρεύμα βρίσκεται στον άξονα $r_T = 0$, με μορφή $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$. Είναι $\rho dV' = 0$ και $J_x dV' = J_y dV' = 0$ (για κάθε κατανομή φορτίου και ρεύματος), συνεπώς είναι $\Phi = 0$, $A_x = A_y = 0$, και με την αντιστοιχία $\mathbf{J}dV' \rightarrow id\mathbf{r}' = \mathbf{i}_z i_0 \cos(\omega t') dz'$ η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα των δυναμικών, η A_z , είναι ίση με:



Σχήμα 5.4-2

$$A_z = \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\cos(\omega t')}{R}, \quad (5.4-39)$$

όπου $R^2 = r_T^2 + (z - z')^2$ και $t' = t - R/c$, συνεπώς $\omega t' = \omega t - kR$. Με την αλλαγή μεταβλητής από z' σε $\zeta = (z' - z)/r_T$, οπότε $dz' = r_T d\zeta$ και $R^2 = r_T^2(1 + \zeta^2)$, προκύπτει:

$$A_z = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 + \zeta^2}} \cos[\omega t - kr_T \sqrt{1 + \zeta^2}], \quad (5.4-40)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε, ότι η ολοκληρωτέα παράσταση είναι άρτια συνάρτηση του ζ , και έτσι ως κάτω όριο λήφθηκε το $\zeta = 0$. Με μια δεύτερη αλλαγή μεταβλητής, από ζ σε ψ , που ορίζεται ως $\zeta = \sinh \psi$, οπότε $d\zeta = \cosh \psi d\psi$ και $1 + \zeta^2 = 1 + \sinh^2 \psi = \cosh^2 \psi$, η συνιστώσα A_z γράφεται:

$$\begin{aligned} A_z &= \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \int_0^{\infty} d\psi \cos[\omega t - kr_T \cosh \psi] \\ &= \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \left\{ \cos(\omega t) \int_0^{\infty} d\psi \cos(kr_T \cosh \psi) + \sin(\omega t) \int_0^{\infty} d\psi \sin(kr_T \cosh \psi) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4-41)$$

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στην τελευταία έκφραση αντιπροσωπεύουν συναρτήσεις *Bessel*, και ειδικότερα (για $\xi > 0$) τις συναρτήσεις *Bessel* α' και β' είδους, τάξης $m = 0$:

$$J_0(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\psi \sin(\xi \cosh \psi), \quad Y_0(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\psi \cos(\xi \cosh \psi). \quad (5.4-42)$$

Συνεπώς, τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά που παράγονται από νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα $i = i_0 \cos(\omega t)$ στον άξονα z είναι:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(r_T, t) = \mathbf{i}_z A_z = \mathbf{i}_z \frac{\mu_0 i_0}{4} [J_0(kr_T) \sin(\omega t) - Y_0(kr_T) \cos(\omega t)], \quad (5.4-43)$$

και επειδή η μόνη μη μηδενική συνιστώσα έχει την εξάρτηση $A_z(r_T, t)$, τα πεδία που αντιστοιχούν σε αυτά τα δυναμικά είναι:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{i}_\varphi \frac{\partial A_z}{\partial r_T} = \mathbf{i}_\varphi \frac{\mu_0 k i_0}{4} [J_1(kr_T) \sin(\omega t) - Y_1(kr_T) \cos(\omega t)], \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{i}_z \frac{\partial A_z}{\partial t} = -\mathbf{i}_z \frac{\mu_0 \omega i_0}{4} [J_0(kr_T) \cos(\omega t) + Y_0(kr_T) \sin(\omega t)],\end{aligned}\quad (5.4-44)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι οι παράγωγοι των συναρτήσεων *Bessel* τάξης $m = 0$ είναι ίσες με $(d/d\xi)J_0(\xi) = -J_1(\xi)$ και $(d/d\xi)Y_0(\xi) = -Y_1(\xi)$, με $J_1(\xi)$ και $Y_1(\xi)$ συναρτήσεις πάλι *Bessel* α' και β' είδους, αλλά τώρα τάξης $m = 1$.

Για επιβεβαίωση, ότι το A_z αντιπροσωπεύει ποσότητα που απομακρύνεται από το αίτιο, το ρεύμα στον άξονα $r_T = 0$, οι προσεγγίσεις:

$$J_0(\xi \gg 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \cos\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_0(\xi \gg 1) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}} \sin\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right), \quad (5.4-45)$$

δίνουν την έκφραση για το δυναμικό του μακρινού πεδίου (εκείνου που αντιστοιχεί σε $\xi = kr_T \gg 1$, δηλαδή, σε θέσεις $r_T \gg k^{-1} = \lambda/2\pi$, όπου $\lambda = 2\pi/k$ είναι το μήκος κύματος):

$$A_z(r_T \gg k^{-1}, t) = \frac{\mu_0 i_0}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r_T}} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r_T}{c}\right) - \frac{\pi}{4}\right]. \quad (5.4-46)$$

Στη σχέση αυτή η εξάρτηση από τη θέση και το χρόνο περιγράφεται μέσω του συμπλέγματος $t' = t - r_T/c$, όπως είναι αναμενόμενο.

Στο αντίθετο όριο, $r_T \ll k^{-1} = \lambda/2\pi$, δηλαδή $\xi \ll 1$, οι συναρτήσεις *Bessel* προσεγγίζονται από τις σχέσεις $J_0(\xi \ll 1) = 1$ και $Y_0(\xi \ll 1) = (2/\pi) \ln \xi$. Στο όριο αυτό είναι $|\ln \xi| \gg 1$ και δεσπόζει η συνάρτηση Y_0 , συνεπώς η συνιστώσα A_z του δυναμικού είναι:

$$A_z(r_T \ll k^{-1}, t) = -\frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \cos(\omega t) \ln(kr_T). \quad (5.4-47)$$

Η έκφραση αυτή, το δυναμικό του κοντινού πεδίου, έχει ουσιαστικά μαγνητοστατικό χαρακτήρα. Αντιστοιχίζοντας $i_0 \leftrightarrow i(t) = i_0 \cos(\omega t)$, ταυτίζεται με το αποτέλεσμα του **παράδ. 5.3-1**, με την αναφορά στο $r_{T0} = k^{-1}$, ενώ ο χρόνος t υποβαθμίζεται σε παράμετρο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός, ότι σε θέσεις $r_T \rightarrow 0$ μόνο τα παρακείμενα τμήματα του ρεύματος i γίνονται αντιληπτά, ενώ οι θέσεις με $|z' - z| \gg k^{-1}$ έχουν κατά μέσο όρο μηδενική συνεισφορά.

Επειδή είναι $\text{Re}\{\exp(j\omega t)\} = \cos(\omega t)$, η διέγερση $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ περιγράφεται από το φασιθέτη $i = i_0$. Ακολουθώντας την ίδια πορεία, με τους ίδιους συλλογισμούς και τις ίδιες

αλλαγές μεταβλητής, αντί για τις σχέσεις (5.4-39) έως (5.4-41) η επίλυση για το φασιθέτη A_z περιγράφεται από την αλληλουχία:

$$\begin{aligned}
 A_z &= \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{R} \exp(-jkR) \\
 &= \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} \exp\left[-jkr_T \sqrt{1+\zeta^2}\right] \\
 &= \frac{\mu_0 i_0}{2\pi} \int_0^{\infty} d\psi \exp[-jkr_T \cosh \psi].
 \end{aligned} \tag{5.4-48}$$

Το ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση έχει πραγματικό και φανταστικό μέρος, τα οποία εκφράζονται από τις συναρτήσεις *Bessel* J_0 και Y_0 , βλ. σχέσεις (5.4-42). Προτιμάται, όμως, η εισαγωγή των συναρτήσεων *Hankel* α' και β' είδους, που σε τάξη $m = 0$ είναι:

$$\begin{aligned}
 H_0^{(1)}(\zeta) &= J_0(\zeta) + jY_0(\zeta) = -j \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\psi \exp(j\zeta \cosh \psi), \\
 H_0^{(2)}(\zeta) &= J_0(\zeta) - jY_0(\zeta) = j \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} d\psi \exp(-j\zeta \cosh \psi).
 \end{aligned} \tag{5.4-49}$$

Οι δύο συναρτήσεις *Hankel* συνδέονται με τις *Bessel* α' και β' είδους με τον ίδιο τρόπο, όπως η εκθετική με τις τριγωνομετρικές, $\exp(\pm j\zeta) = \cos \zeta \pm j \sin \zeta$. Για διάδοση επίπεδων κυμάτων προς το $z = +\infty$, ο συντελεστής φάσης επιλέγεται με το κάτω πρόσημο, ως $\exp(-j\beta z)$, όπως έχει εμφανισθεί στη σχέση (5.4-36). Για αίτιο στον άξονα $r_T = 0$ και συνεπώς ακτινική διάδοση προς το $r_T = \infty$, όπως αυτή που μελετάται εδώ, η κατάλληλη επιλογή μεταξύ των δύο συναρτήσεων (5.4-49) είναι πάλι με το κάτω πρόσημο, η συνάρτηση $H_0^{(2)}$. [Αντίθετα, όπως η συνάρτηση $\exp(+j\beta z)$ περιγράφει κύματα με κατεύθυνση προς το $z = +\infty$, έτσι και τα κύματα που κατευθύνονται $r_T = 0$ περιγράφονται από τη συνάρτηση $H_0^{(1)}$. Όλα αυτά ισχύουν, εφόσον κατά την περιγραφή με φασιθέτη η χρονική εξάρτηση έχει υποτεθεί ως $\exp(+j\omega t)$, ενώ με την αντίθετη επιλογή $\exp(-j\omega t)$ όλα αυτά αντιστρέφονται.]

Αναγνωρίζοντας, λοιπόν, στην τελευταία από τις σχέσεις (5.4-48) τη συνάρτηση $H_0^{(2)}$, όπως αναμένεται, αφού αυτή η συνάρτηση περιγράφει κύματα που απομακρύνονται προς το $r_T = \infty$, οι φασιθέτες των ηλεκτρομαγνητικών δυναμικών που οφείλονται σε **νηματοειδές ηλεκτρικό ρεύμα με φασιθέτη $i = i_0$ στον άξονα z** είναι:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(r_T, \omega) = \mathbf{i}_z A_z = -\mathbf{i}_z j \frac{\mu_0 i_0}{4} H_0^{(2)}(kr_T). \tag{5.4-50}$$

Εύκολα φαίνεται ότι η σχέση για το A_z αναπαράγει το αποτέλεσμα (5.4-43). Χωρίς να γραφεί ο συντελεστής $\frac{1}{4}\mu_0 i_0$, οι πράξεις είναι: $\text{Re}\{(-j)H_0^{(2)} \exp(j\omega t)\} = \text{Re}\{(-j)(J_0 - jY_0)(\cos \omega t + j \sin \omega t)\} = [J_0 \sin \omega t - Y_0 \cos \omega t]$.

Τα πεδία που αντιστοιχούν στα δυναμικά (5.4-50) έχουν τους φασιθέτες:

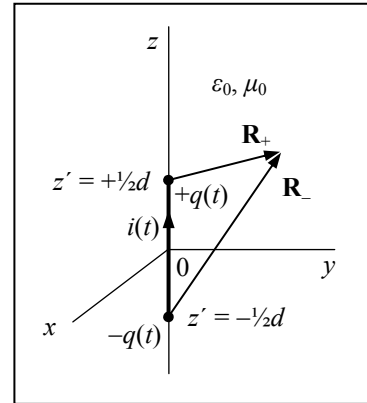
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\mathbf{i}_\phi \frac{\partial A_z}{\partial r_T} = -\mathbf{i}_\phi j \frac{\mu_0 k i_0}{4} H_1^{(2)}(kr_T),$$

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} = -\mathbf{i}_z j\omega A_z = -\mathbf{i}_z \frac{\mu_0 \omega i_0}{4} H_0^{(2)}(kr_T),$$
(5.4-51)

με $H_1^{(2)}(\xi) = -(d/d\xi)H_0^{(2)}(\xi)$ για την παράγωγο. Οι εκφράσεις αυτές έχουν ήδη εξαχθεί στην παράγρ. 2.4.3 του Μέρους Α, βλ. σχέσεις (2.4-109α), με χρήση των εξισώσεων του *Maxwell*. Στην παράγραφο 2.4.3 η παρουσίαση εστιάζει περισσότερο στη διάδοση των κυλινδρικών κυμάτων, οπότε τα πεδία έχουν εκφρασθεί με κάποιο συντελεστή πλάτους E_0 . Ακολούθως, μελετώντας το κοντινό πεδίο έχει γίνει εκεί η ταυτοποίηση $E_0 = -\frac{1}{4}\mu_0 \omega i_0$, σε συμφωνία με το συντελεστή του E_z στη σχέση (5.4-51β).

Διπολική κεραία με ημιτονοειδή χρονική εξάρτηση:

Τώρα, το αίτιο είναι ένα σημειακό ηλεκτρικό δίπολο, το οποίο ας ληφθεί στην αρχή των αξόνων ($\mathbf{r}' = 0$) με $\mathbf{p}(t) = \mathbf{i}_z p_0 \cos(\omega t)$. Υποκαθιστώντας το δίπολο, όπως στο **Σχήμα 5.4-3**, από φορτία $\pm q(t) = \pm q_0 \cos(\omega t)$, στις θέσεις $z'_\pm = \pm \frac{1}{2}d$ (με $q_0 d = p_0$, όπου $d \rightarrow 0$ και $q_0 \rightarrow \infty$), ο νόμος διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου επιβάλλει την παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος μεταξύ των δύο πόλων. Επιλέγοντας επιφάνεια *Gauss* που περικλείει μόνο τον αρνητικό πόλο, το εξερχόμενο ρεύμα είναι $\oint_S dI = -(d/dt)(-q(t)) = -\omega q_0 \sin(\omega t)$. Ας ληφθεί αυτό το ρεύμα ως νηματοειδές, με $i(t) = -i_0 \sin(\omega t)$ στο $r'_T = 0$, $-d/2 < z' < +d/2$, με $i_0 = \omega q_0$, δηλαδή $i_0 d = \omega p_0$ (και επειδή $d \rightarrow 0$, θα είναι και $i_0 \rightarrow \infty$).



Σχήμα 5.4-3

Με την υποκατάσταση του σημειακού διπόλου από δύο ετερόσημα σημειακά φορτία, με νηματοειδές ρεύμα ενδιάμεσα, η συνεισφορά κάθε συστατικού στα δυναμικά είναι η ακόλουθη:

- Ηλεκτρικά φορτία, με $\rho dV' \rightarrow \pm q(t)$, σε θέσεις $z'_\pm = \pm \frac{1}{2}d$ που αντιστοιχούν σε σχετικές αποστάσεις με $R_\pm^2 = r_T^2 + (z - z'_\pm)^2$. Αθροίζοντας ως προς τα δύο πρόσημα, το βαθμωτό δυναμικό Φ που παράγουν είναι ίσο με:

$$\Phi = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\pm} (\pm) \frac{\cos[\omega(t - R_{\pm}/c)]}{R_{\pm}}. \quad (5.4-52)$$

- Ηλεκτρικό ρεύμα, με $\mathbf{J}dV' \rightarrow i(t)$ στο διάστημα $-d/2 < z' < +d/2$ του άξονα $r'_T = 0$. Με $R^2 = r_T^2 + (z - z')^2$, παράγουν διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} ίσο με:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{i}_z \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} dz' \frac{\sin[\omega(t - R/c)]}{R}. \quad (5.4-53)$$

Δεν έχει ληφθεί ακόμα το όριο $d \rightarrow 0$, συνεπώς οι παραπάνω εκφράσεις (με $i_0 = \omega q_0$) ισχύουν για οποιαδήποτε τιμή του d . Για παράδειγμα, με $d \rightarrow \infty$ (και $\omega t \rightarrow \omega t - \pi/2$) αναπαράγονται τα αποτελέσματα της προηγούμενης διάταξης, αλλά με $\Phi = 0$, επειδή τότε τα φορτία βρίσκονται στο άπειρο και συνεπώς $1/R_{\pm} = 0$.

Μεταβαίνοντας τώρα στο όριο $d \rightarrow 0$, είναι προτιμότερο πρώτα το όριο αυτό να εφαρμοσθεί στη σχέση (5.4-53) για το διανυσματικό δυναμικό \mathbf{A} . Η ολοκλήρωση εκτείνεται σε πολύ μικρό διάστημα με μήκος $d \rightarrow 0$, συνεπώς θα είναι και $z' \approx 0$ (επειδή $|z'| < \frac{1}{2}d$), οπότε $R \approx [r_T^2 + z'^2]^{1/2} = r$. Επομένως, το ολοκλήρωμα είναι ίσο με την ολοκληρωτέα παράσταση πολλαπλασιασμένη με το μήκος d . Η παράλειψη του z' οδηγεί σε δύο συνθήκες, οι οποίες δίνουν ποσοτικό περιεχόμενο στη συνθήκη $d \rightarrow 0$: (α) να είναι $d \ll r$, ώστε να μπορεί να τεθεί $R = r$ στον παρανομαστή, και (β) να είναι $d \ll c/\omega = k^{-1}$, ώστε να μπορεί να τεθεί $R = r$ στο όρισμα του ημιτόνου. Με τις συνθήκες αυτές, και με $i_0 d = \omega p_0$ και $\omega/c = k$, προκύπτει:

$$A_z = -\frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r} \sin(\omega t - kr). \quad (5.4-54)$$

Με τις ίδιες συνθήκες ($d \ll r$ και $d \ll c/\omega$) δεν είναι δυνατόν να τεθεί απλώς $R_{\pm} = r$ στην έκφραση για το βαθμωτό δυναμικό Φ , αλλά απαιτείται ανάπτυγμα, όπως και για τον υπολογισμό του δυναμικού Φ από ηλεκτρικό δίπολο, βλ. παράγρ. 5.2.2. Όμως, πολύ πιο απλό είναι να αξιοποιηθεί η συνθήκη Lorentz, $\partial\Phi/\partial t = -c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = -c^2 \partial A_z / \partial z = -c^2 (\partial r / \partial z) (\partial A_z / \partial r)$. Για τις δύο παραγώγους είναι:

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{r_T^2 + z^2} = \frac{z}{r} = \cos\theta \quad \text{και} \quad \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r^2} [\sin(\omega t - kr) + kr \cos(\omega t - kr)],$$

και η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο, και με $c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$, δίνει το βαθμωτό δυναμικό Φ :

$$\Phi = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} [\cos(\omega t - kr) - kr \sin(\omega t - kr)]. \quad (5.4-55)$$

Από τους δύο όρους στην έκφραση αυτή για το βαθμωτό δυναμικό Φ , ο πρώτος επικρατεί σε αποστάσεις $r \ll c/\omega = k^{-1} = \lambda/2\pi$ και ταυτίζεται με το ηλεκτροστατικό δυναμικό από ηλεκτρικό δίπολο, όπως στη σχέση (5.2-19α), αλλά διατηρώντας την κυματική εξάρτηση $t' = t - r/c$. Και επειδή η σχέση (5.2-19α) προέκυψε με διωνυμικό ανάπτυγμα, σαν αυτό που θα είχε χρησιμοποιηθεί στη σχέση (5.4-52), επιβεβαιώνεται έμμεσα ο πρώτος όρος στη σχέση (5.4-55). Σε αντίθεση με το αντίστοιχο όριο στην προηγούμενη διάταξη, εδώ ο διπολικός όρος γίνεται αισθητός παντού. Πάντως, σε μεγάλες αποστάσεις ($r \gg c/\omega = \lambda/2\pi$) επικρατεί ο δεύτερος όρος του Φ , όρος με την ίδια εξάρτηση ($\sim r^{-1}$), όπως και το A_z .

Συνοψίζοντας, τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά που οφείλονται σε **ηλεκτρικό δίπολο** $\mathbf{p}(t) = \mathbf{i}_z p_0 \cos(\omega t)$ στην αρχή των αξόνων είναι:

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, t) &= \frac{p_0 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} [\cos(\omega t - kr) - kr \sin(\omega t - kr)], \\ \mathbf{A}(r, t) &= \mathbf{i}_z A_z = -\mathbf{i}_z \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r} \sin(\omega t - kr).\end{aligned}\tag{5.4-56}$$

Παρατηρώντας ότι τα δυναμικά τελικά εκφράστηκαν σε σφαιρικές συντεταγμένες, ανεξάρτητα από το αν για το δυναμικό \mathbf{A} προσδιορίστηκε η μη σφαιρική συνιστώσα A_z , για τον προσδιορισμό των πεδίων $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ διευκολύνει ελαφρώς η χρήση σφαιρικών συνιστωσών, $\mathbf{A} = \mathbf{i}_r A_r + \mathbf{i}_\theta A_\theta$, με $A_r = A_z \cos \theta$ και $A_\theta = -A_z \sin \theta$. Επειδή είναι $\partial/\partial \varphi = 0$ και $A_\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{i}_\varphi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} A_r \right], \\ \mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} &= -\mathbf{i}_r \left[\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial A_r}{\partial t} \right] - \mathbf{i}_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \right].\end{aligned}\tag{5.4-57}$$

Οι πράξεις είναι στοιχειώδεις, αλλά το σχετικά ογκώδες αποτέλεσμα δεν είναι απαραίτητο για τις ανάγκες του κειμένου αυτού και δεν παρουσιάζεται.

Για την επίλυση με φασιθέτες και προκειμένου να υπάρχει δυνατότητα σύγκρισης των αποτελεσμάτων, το σημειακό δίπολο θα ληφθεί πάλι στην αρχή των αξόνων και με φασιθέτη $\mathbf{p} = \mathbf{i}_z p_0$, και ακολούθως θα υποκατασταθεί από φορτία $\pm q_0$ στις θέσεις των πόλων $z'_\pm = \pm \frac{1}{2}d$ και από νηματοειδές ρεύμα $i = j i_0$ [που αντιστοιχεί σε $i(t) = -i_0 \sin(\omega t)$, επειδή $\text{Re}\{j \exp(j\omega t)\}$] στο ενδιάμεσο ευθύγραμμο τμήμα $r'_r = 0$, $-d/2 < z' < +d/2$, με $i_0 = \omega q_0$, λόγω του νόμου διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου. Οι ποσότητες αυτές συνδέονται πάλι με τις σχέσεις $q_0 d = p_0$ και $i_0 d = \omega p_0$, με $q_0 \rightarrow \infty$, $i_0 \rightarrow \infty$ και $d \rightarrow 0$. Τα δύο συστατικά του διπόλου (ζεύγος φορτίων και ρεύμα) συνεισφέρουν στον σχηματισμό των δυναμικών αντίστοιχα τις ποσότητες:

$$\Phi = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\pm} (\pm) \frac{\exp(-jkR_{\pm})}{R_{\pm}}, \quad (5.4-58)$$

με $R_{\pm}^2 = r_T^2 + (z - z_{\pm})^2$, και:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_z j \frac{\mu_0 i_0}{4\pi} \int_{-d/2}^{d/2} dz' \frac{\exp(-jkR)}{R}, \quad (5.4-59)$$

με $R^2 = r_T^2 + (z - z')^2$. Πάλι, είναι απλούστερο να προσδιορισθεί πρώτα το διανυσματικό δυναμικό, επειδή στο μικρό διάστημα ολοκλήρωσης ($d \rightarrow 0$) είναι $R \approx r$ και η ολοκλήρωση απλοποιείται σε πολλαπλασιασμό επί d . Και από τη σχέση (5.4-59) φαίνεται ότι η συνθήκη $d \rightarrow 0$ ποσοτικοποιείται σε $d \ll r$ λόγω του παρανομαστή και $d \ll c/\omega = k^{-1} = \lambda/2\pi$ λόγω του αριθμητή, ο οποίος έχει ημιτονοειδή συμπεριφορά, και όχι εκθετική. Ακολουθώντας, αντί για το διωνυμικό ανάπτυγμα που απαιτείται για το άθροισμα (5.4-58), το βαθμωτό δυναμικό προσδιορίζεται από τη συνθήκη Lorentz, $j\omega\Phi = -c^2\nabla \cdot \mathbf{A} = -c^2\partial A_z/\partial z = -c^2(\partial r/\partial z)(\partial A_z/\partial r)$. Για την πρώτη παράγωγο είναι, βέβαια, πάλι $\partial r/\partial z = \cos\theta$, ενώ τώρα η δεύτερη παράγωγος είναι:

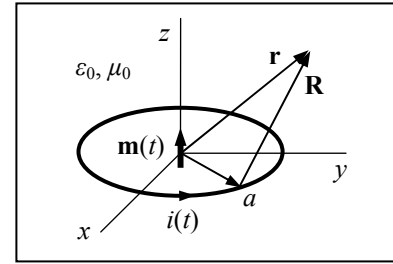
$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = j \frac{\mu_0 i_0 d}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\exp(-jkr)}{r} \right] = -j \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r^2} (1 + jkr) \exp(-jkr),$$

και ο φασιθέτης του βαθμωτού δυναμικού Φ προκύπτει τελικά με μία διαίρεση με το $j\omega$. Συγκεντρωτικά, οι φασιθέτες των δυναμικών που παραγονται από **ηλεκτρικό δίπολο με φασιθέτη $\mathbf{p} = \mathbf{i}_z p_0$ στην αρχή των αξόνων** είναι:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, \omega) &= \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + jkr) \exp(-jkr), \\ \mathbf{A}(r, \omega) &= \mathbf{i}_z j \frac{\mu_0 \omega p_0}{4\pi r} \exp(-jkr). \end{aligned} \quad (5.4-60)$$

Και στις εκφράσεις αυτές αναγνωρίζεται ο συντελεστής $\exp(-jkr)$ που περιγράφει σφαιρικά, εδώ, κύματα που διαδίδονται προς το $r = \infty$, συντελεστής με ίδια ακριβώς μορφή, όπως ο συντελεστής $\exp(-jk|z|)$ των επίπεδων κυμάτων, ενώ για τα κυλινδρικά κύματα η αντίστοιχη συμπεριφορά περιέχεται στη συνάρτηση $H_0^{(2)}$. Η σύγκριση με τις σχέσεις (5.4-56) είναι απλή: Διατηρώντας μόνο τους όρους που περιέχουν μιγαδικές ποσότητες και εισάγοντας τη συντομογραφία $\psi = \omega t - kr$, είναι $\text{Re}\{(1 + jkr)\exp(j\psi)\} = \cos\psi - kr \sin\psi$ για το δυναμικό Φ , ενώ για τη συνιστώσα A_z είναι απλά $\text{Re}\{j\exp(j\psi)\} = -\sin\psi$, αναπαράγοντας τις σχέσεις (5.4-56). Τέλος, οι φασιθέτες των πεδίων προσδιορίζονται εφαρμόζοντας στα δυναμικά (5.4-60) τους τελεστές των σχέσεων (5.4-57), αλλά βέβαια με $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$.

Σημειακή βροχοκεραία, δηλαδή σημειακό μαγνητικό δίπολο, Το οποίο ας υποτεθεί με μορφή $\mathbf{m} = \mathbf{i}_z m_0 \cos(\omega t)$ και ότι είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων ($z' = 0, r_T' = 0$). Ας περιγραφεί το μαγνητικό δίπολο (βλ. **Σχήμα 5.4-4**) από ρεύμα $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ σε κυκλικό βρόχο με ακτίνα a στο επίπεδο στο $z = 0$, ώστε $i_0 \pi a^2 = m_0$ (με $a \rightarrow 0$ και $i_0 \rightarrow \infty$).



Σχήμα 5.4-4

Το ρεύμα $i(t)$ δε μεταβάλλεται κατά μήκος της ρευματοφόρου γραμμής, συνεπώς δεν υπάρχουν φορτία ($\rho dV' = 0$ για κάθε κατανομή φορτίου), οπότε είναι $\Phi = 0$. Για τα ρεύματα είναι $\mathbf{J} dV' \rightarrow i(t) d\mathbf{r}' = \mathbf{i}'_\phi i_0 a \cos(\omega t) d\phi'$, σε θέσεις με $r_T' = a$ και $z' = 0$, οπότε το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 i_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' \mathbf{i}'_\phi \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R}. \quad (5.4-61)$$

Επειδή η διάταξη (το μαγνητικό δίπολο ή ο ισοδύναμος ρευματοφόρος βρόχος) δεν μεταβάλλεται με τη γωνία ϕ , θα γίνει η καθιερωμένη αλλαγή μεταβλητής $\xi = \phi' - \phi$ και για το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{i}'_ϕ , που εξαρτάται από τη γωνία ϕ , είναι στο τονισμένο σύστημα $\mathbf{i}'_\phi = \mathbf{i}'_\phi \cos \xi + \mathbf{i}'_T \sin \xi$. Επίσης, είτε χρησιμοποιηθούν κυλινδρικές, είτε σφαιρικές συντεταγμένες, η σχετική απόσταση R εξαρτάται από τη γωνία ϕ' μέσω του συνημιτόνου $\cos \xi$, δηλαδή $R = R(\cos \xi)$, που είναι άρτια συνάρτηση του ξ . Από τους δύο όρους στο άθροισμα που δίνει το \mathbf{i}'_ϕ , εκείνος με την περιττή συνάρτηση $\sin \xi$ δίνει, συνεπώς, μηδενικό αποτέλεσμα κατά την ολοκλήρωση, οπότε το διανυσματικό δυναμικό γράφεται:

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}'_\phi \frac{\mu_0 i_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \cos \xi \frac{\cos[\omega(t - R/c)]}{R}. \quad (5.4-62)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να προέλθει και απευθείας από τη σχέση (5.4-21), παρατηρώντας ότι συντρέχουν οι προϋποθέσεις της περίπτωσης (β2) στη σελ. 172: ότι είναι $\partial/\partial\phi = 0$ και ταυτόχρονα δεν υπάρχουν ρεύματα κάθετα στο \mathbf{i}'_ϕ .

Χρησιμοποιώντας, τώρα, σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ) , ο ρευματοφόρος βρόχος περιγράφεται από $r' = a$ και $\theta' = \pi/2$ (οπότε $\cos \theta' = 0$ και $\sin \theta' = 1$) και για τη σχετική απόσταση είναι $R = [r^2 - 2ra \sin \theta \cos \xi + a^2]^{1/2} = r[1 - 2(a/r) \sin \theta \cos \xi + (a/r)^2]^{1/2}$. Η μικρή τιμή της ακτίνας a ($\rightarrow 0$) υποδηλώνει ότι στον παρονομαστή και τον αριθμητή της ολοκληρωτέας παράστασης μπορούν να γίνουν οι ακόλουθες προσεγγίσεις, οι οποίες ταυτόχρονα δίνουν και ποσοτικό περιεχόμενο στη συνθήκη $a \rightarrow 0$:

- Όταν $a \ll r$, στον παρονομαστή είναι αποδεκτή η διωνυμική προσέγγιση:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \left[1 - 2 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \zeta + \frac{a^2}{r^2} \right]^{-1/2} \approx \frac{1}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \zeta \right] \quad (5.4-63)$$

- Όταν πάλι $a \ll r$, αλλά επίσης (λόγω της ημιτονοειδούς συμπεριφοράς του αριθμητή) $a \ll c/\omega = k^{-1}$, οι δύο αυτές συνθήκες επιτρέπουν δύο διαδοχικές προσεγγίσεις στον αριθμητή $\cos(\omega t - kR)$:

$$\begin{aligned} R &= r \left[1 - 2 \frac{a}{r} \sin \theta \cos \zeta + \frac{a^2}{r^2} \right]^{1/2} \approx r \left[1 - \frac{a}{r} \sin \theta \cos \zeta \right] = r - a \sin \theta \cos \zeta, \\ \cos(\omega t - kR) &\approx \cos[(\omega t - kr) + ka \sin \theta \cos \zeta] \\ &\approx \cos(\omega t - kr) - ka \sin \theta \cos \zeta \sin(\omega t - kr). \end{aligned} \quad (5.4-64)$$

Με βάση αυτές τις προσεγγίσεις, η ολοκληρωτέα παράσταση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\cos \zeta}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \zeta \right] \left[\cos(\omega t - kr) - ka \sin \theta \cos \zeta \sin(\omega t - kr) \right]. \quad (5.4-65)$$

Στην ολοκλήρωση ως προς ζ εμφανίζονται μόνο τα ολοκληρώματα $\int_0^{2\pi} d\zeta \cos \zeta = \int_0^{2\pi} d\zeta \cos^3 \zeta = 0$ και $\int_0^{2\pi} d\zeta \cos^2 \zeta = \pi$. Συγκεντρώνοντας, λοιπόν, από τη σχέση (5.4-65) μόνο τους όρους που σχηματίζουν το $\cos^2 \zeta$ και εισάγοντας τον ορισμό $i_0 \pi a^2 = m_0$ για το πλάτος του διπόλου, προκύπτει, τελικά, ότι τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά που παράγονται από **μαγνητικό δίπολο** $\mathbf{m} = \mathbf{i}_z m_0 \cos(\omega t)$ **στην αρχή των αξόνων** είναι:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(r, \theta, t) = \mathbf{i}_\varphi \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r^2} \left[\cos(\omega t - kr) - kr \sin(\omega t - kr) \right]. \quad (5.4-66)$$

Η έκφραση για τη μοναδική μη μηδενική συνιστώσα A_z έχει την ίδια δομή με την έκφραση για το βαθμωτό δυναμικό από ηλεκτρικό δίπολο, συνεπώς η συμπεριφορά στα όρια $r \gg c/\omega$ και $r \ll c/\omega$ είναι όπως έχει σχολιασθεί σε σχέση με την εξίσωση (5.4-55). Επίσης, οι πεδιακές συνιστώσες προσδιορίζονται με απλές πράξεις:

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}_r \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \quad \mathbf{E} = -\mathbf{i}_\varphi \frac{\partial A_\varphi}{\partial t}, \quad (5.4-67)$$

όμως η έκταση των σχετικών εκφράσεων, σε συνδυασμό με τη σπουδαιότητά τους (όσον αφορά το παρόν κείμενο) τις αποτρέπει να παρουσιασθούν, όπως και στην αμέσως προηγούμενη περίπτωση του σημειακού ηλεκτρικού διπόλου.

Αν προτιμηθεί η επίλυση με φασιθέτες, το σημειακό μαγνητικό δίπολο στην αρχή των αξόνων θα έχει διπολική ροπή με φασιθέτη $\mathbf{m} = \mathbf{i}_z m_0$, υποκαθιστάμενο από ρεύμα i_0 σε κυκλικό βρόχο με ακτίνα a . Για τον βρόχο αυτό, η απουσία φορτίων και ο περιορισμός των ρευμάτων μόνο στη διεύθυνση φ θα δώσουν για τη μοναδική μη μηδενική συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού διαδοχικά τις εκφράσεις:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 i_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \mathbf{i}'_{\varphi'} \frac{\exp(-jkR)}{R} = \mathbf{i}_{\varphi} \frac{\mu_0 i_0 a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \cos \xi \frac{\exp(-jkR)}{R}. \quad (5.4-68)$$

Για τη σχετική απόσταση R ισχύουν, πάλι με την έννοια $a \ll r$, οι προσεγγίσεις (5.4-63) για τον παρονομαστή και (5.4-64α) για το όρισμα του αριθμητή, και η πρόσθετη, πάλι, συνθήκη $a \ll \omega/c = k^{-1}$ οδηγεί στην ακόλουθη προσέγγιση για τον αριθμητή στο τελευταίο από τα ολοκληρώματα (5.4-68):

$$\exp(-jkR) \approx \exp(-jkr + jka \sin \theta \cos \xi) \approx [1 + jka \sin \theta \cos \xi] \exp(-jkr), \quad (5.4-69)$$

και με βάση αυτές τις προσεγγίσεις, η ολοκληρωτέα παράσταση παίρνει τώρα τη μορφή:

$$\cos \xi \frac{\exp(-jkR)}{R} \approx \frac{\cos \xi}{r} \left[1 + \frac{a}{r} \sin \theta \cos \xi \right] [1 + jka \sin \theta \cos \xi] \exp(-jkr). \quad (5.4-70)$$

Στην ολοκλήρωση ως προς ξ που ακολουθεί συνεισφέρει μόνο ο συνολικός συντελεστής του $\cos^2 \xi$. Έτσι, σχηματίζεται το τελικό αποτέλεσμα ότι **μαγνητικό δίπολο, με φασιθέτη $\mathbf{m} = \mathbf{i}_z m_0$ στην αρχή των αξόνων**, παράγει τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(r, \theta, \omega) = \mathbf{i}_{\varphi} \frac{\mu_0 m_0 \sin \theta}{4\pi r^2} [1 + jkr] \exp(-jkr). \quad (5.4-71)$$

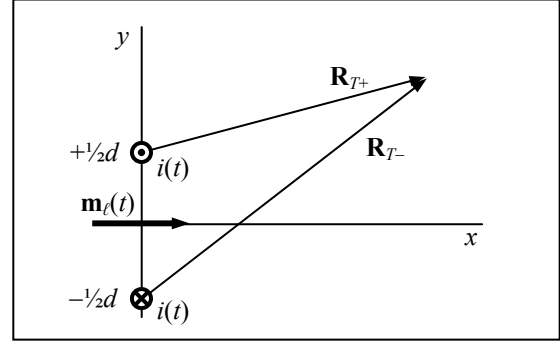
Εύκολα φαίνεται ότι με $\psi = \omega t - kr$ είναι $\text{Re}\{(1 + jkr)(\cos \psi + j \sin \psi)\} = \cos \psi - kr \sin \psi$, με άλλα λόγια ότι αναπαράγεται η σχέση (5.4-66). Όσον αφορά τέλος τα πεδία, πάλι αρκεί να σημειωθεί ότι οι φασιθέτες τους υπολογίζονται εύκολα από τις σχέσεις:

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}_r \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\varphi} \sin \theta) - \mathbf{i}_{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}), \quad (5.4-72)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{i}_{\varphi} j\omega A_{\varphi},$$

χωρίς, όμως, πάλι να γραφούν οι ογκώδεις εκφράσεις που προκύπτουν.

Μαγνητική διπολική ταινία με σταθερή διεύθυνση της μαγνητικής ροπής σε ευθεία με άπειρο μήκος: Ας τοποθετηθεί η ταινία στον άξονα $r_T = 0$, με ροπή $\mathbf{m}_\ell(t) = \mathbf{i}_x m_{\ell 0} \cos(\omega t)$, όπως φαίνεται στο **Σχήμα 5.4-5**. Περιγράφοντας την ταινία από δύο αντίρροπα νηματοειδή ρεύματα $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$, στις θέσεις $y = \pm 1/2 d$ του επιπέδου $x = 0$ και με $m_{\ell 0} = i_0 d$ ($i_0 \rightarrow \infty$, $d \rightarrow 0$), το διανυσματικό δυναμικό κάθε ρεύματος περιγράφεται από τη σχέση (5.4-43), με κατάλληλη μετατόπιση της αρχής των αξόνων. Αυτό σημαίνει πως η μοναδική μη μηδενική συνιστώσα έχει τη μορφή:



Σχήμα 5.4-5

$$A_z = \frac{\mu_0 i_0}{4} \left\{ \left[J_0(kR_{T+}) - J_0(kR_{T-}) \right] \sin(\omega t) - \left[Y_0(kR_{T+}) - Y_0(kR_{T-}) \right] \cos(\omega t) \right\}, \quad (5.4-73)$$

όπου $R_{T\pm}$ είναι οι εγκάρσιες αποστάσεις της θέσης \mathbf{r} από τη θέση $x' = 0$, $y' = \pm d/2$ κάθε ρεύματος. Για τις αποστάσεις αυτές, επειδή $x^2 + y^2 = r_T^2$ και $y = r_T \cos \varphi$, είναι:

$$R_{T\pm}^2 = x^2 + \left(y \mp \frac{d}{2} \right)^2 = x^2 + y^2 \mp yd + \frac{1}{4} d^2 = r_T^2 \left[1 \mp \frac{d}{r_T} \sin \varphi + \frac{1}{4} \frac{d^2}{r_T^2} \right], \quad (5.4-74)$$

οπότε, με $d/r_T \ll 1$ (που ποσοτικοποιεί τη συνθήκη $d \rightarrow 0$) ισχύουν οι προσεγγίσεις:

$$R_{T\pm} \approx r_T \left[1 \mp \frac{1}{2} \frac{d}{r_T} \sin \varphi + \dots \right] \quad \text{και} \quad kR_{T\pm} \approx kr_T \mp \frac{1}{2} kd \sin \varphi. \quad (5.4-75)$$

Για τη συνάρτηση *Bessel* $J_0(\zeta)$, το ανάπτυγμα *Taylor* δίνει:

$$J_0(kR_{T\pm}) \approx J_0(kr_T) \mp \frac{dJ_0}{d\zeta} \Big|_{\zeta=kr_T} \frac{kd}{2} \sin \varphi, \quad (5.4-76)$$

και επειδή είναι $dJ_0/d\zeta = -J_1(\zeta)$, τη συνάρτηση *Bessel* τάξης $m = 1$, η διαφορά των συναρτήσεων J_0 , που εμφανίζεται στη σχέση (5.4-73), προσεγγίζεται ως:

$$J_0(kR_{T+}) - J_0(kR_{T-}) \approx kdJ_1(kr_T) \sin \varphi. \quad (5.4-77)$$

Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για τη διαφορά των συναρτήσεων Y_0 , απλά με την αντικατάσταση $J \rightarrow Y$.

Εισάγοντας τις διαφορές των συναρτήσεων J_0 και Y_0 στη σχέση (5.4-73) εμφανίζεται το γινόμενο $i_0 d = m_{\ell 0}$, και μεταβαίνοντας στη διπολική ταινία, το τελικό αποτέλεσμα είναι, πως **μαγνητική διπολική ταινία, που βρίσκεται στον άξονα $r_T = 0$ και έχει μαγνητική ροπή $\mathbf{m}_\ell(t) = \mathbf{i}_x m_{\ell 0} \cos(\omega t)$, παράγει τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά:**

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(r_T, \varphi, t) = \mathbf{i}_z \frac{\mu_0 k m_{\ell 0}}{4} \sin \varphi \left[J_1(kr_T) \sin(\omega t) - Y_1(kr_T) \cos(\omega t) \right]. \quad (5.4-78)$$

Επειδή η μόνη μη μηδενική συνιστώσα έχει την εξάρτηση $A_z(r_T, \varphi, t)$, τα αντίστοιχα πεδία έχουν τις συνιστώσες:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{i}_T \frac{1}{r_T} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \mathbf{i}_\varphi \frac{\partial A_z}{\partial r_T}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{i}_z \frac{\partial A_z}{\partial t}, \quad (5.4-79)$$

παραλείποντας, όπως και στα προηγούμενα διπολικά αίτια, τις τελικές εκφράσεις (μολονότι εδώ είναι λιγότερο σχοινοτενείς από των προηγούμενων περιπτώσεων).

Αν η μαγνητική διπολική ταινία περιγράφεται από το φασιθέτη $\mathbf{m}_\ell = \mathbf{i}_x m_{\ell 0}$ της μαγνητικής ροπής της, η διαδικασία είναι πανομοιότυπη. Το ρεύμα στις δύο ίδιες ρευματοφόρες ευθείες περιγράφεται τώρα από το φασιθέτη $i = i_0$, οπότε, μεταφέροντας το αποτέλεσμα (5.4-50) ώστε να αναφέρεται σε δύο αίτια, μετατοπισμένα από τον άξονα, η συνιστώσα A_z γράφεται:

$$A_z = -j \frac{\mu_0 i_0}{4} \left[H_0^{(2)}(kR_{T+}) - H_0^{(2)}(kR_{T-}) \right]. \quad (5.4-80)$$

Για τις αποστάσεις $R_{T\pm}$ ισχύουν όσα αναφέρονται στις σχέσεις (5.4-74) και (5.4-75), όπως επίσης ισχύουν οι σχέσεις (5.4-76) και (5.4-77), με τη μεταγραφή $J_0 \rightarrow H_0^{(2)}$, της οποίας η παράγωγος είναι ίση με $-H_1^{(2)} = -[J_1 - jY_1]$. Η κατάληξη είναι ότι **μαγνητική διπολική ταινία, στον άξονα $r_T = 0$ και με φασιθέτη τις μαγνητικής ροπής ίσο με $\mathbf{m}_\ell = \mathbf{i}_x m_{\ell 0}$, παράγει τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά:**

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(r_T, \omega) = \mathbf{i}_z A_z = -\mathbf{i}_z j \frac{\mu_0 k m_{\ell 0}}{4} \sin \varphi H_1^{(2)}(kr_T). \quad (5.4-81)$$

Η επιβεβαίωση ότι οι δύο εκφράσεις (5.4-78) και (5.4-81) περιέχουν τις ίδιες πληροφορίες προέρχεται από την ισότητα $\text{Re}\{(-j)(J_1 - jY_1)(\cos \omega t + j \sin \omega t)\} = J_1 \sin \omega t - Y_1 \cos \omega t$, ενώ για τα πεδία ας μην επαναληφθούν τα ίδια σχόλια.

Ας σημειωθεί τέλος ότι η διανυσματική ποσότητα $\mathbf{i}_z m_{\ell 0} \sin \varphi$, που εμφανίζεται στις τελικές εκφράσεις για το δυναμικό, είναι ίση με $(\mathbf{i}_x m_{\ell 0}) \times \mathbf{i}_T = \mathbf{m}_{\ell 0} \times \mathbf{i}_T$, επιτρέποντας να διατυπωθεί το δυναμικό \mathbf{A} με γενικό τρόπο, όπως παρουσιάζεται στη σύνοψη που ακολουθεί.

Σύνοψη βασικών διατάξεων: Στις βασικές διατάξεις που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα, η επιλογή των συντεταγμένων έγινε με κριτήριο τη διευκόλυνση της ανάλυσης. Είναι πάντως εφικτό να γραφούν τα αποτελέσματα χωρίς καμία αναφορά σε συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων, όπως έγινε υπαινιγμός στο τέλος της τελευταίας διάταξης και είναι πολύ πιο φανερό στις προηγούμενες διατάξεις. Με αυτή τη θεώρηση τα ηλεκτρομαγνητικά δυναμικά [και οι φασιθέτες τους], που οφείλονται στις αναφερόμενες διατάξεις, είναι:

- Σε απόσταση R_{\perp} από επίπεδο με άπειρη έκταση, με επιφανειακό ρεύμα $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_0 \cos(\omega t)$ [με φασιθέτη $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0$], από τις σχέσεις (5.4-34) [και (5.4-37)]:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{K}_0 \frac{\mu_0}{2k} \sin(\omega t - kR_{\perp}), \quad (5.4-82)$$

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = -\mathbf{K}_0 j \frac{\mu_0}{2k} \exp(-jkR_{\perp}). \quad (5.4-83)$$

- Σε απόσταση R_{\perp} από ευθεία γραμμή (με $d\mathbf{r} = \mathbf{i}_{\ell} d\ell$), με νηματοειδές ρεύμα $i(t) = i_0 \cos(\omega t)$ [με φασιθέτη $i = i_0$], από τις σχέσεις (5.4-43) [και (5.4-50)]:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}_{\ell} \frac{\mu_0 i_0}{4} [J_0(kR_{\perp}) \sin(\omega t) - Y_0(kR_{\perp}) \cos(\omega t)], \quad (5.4-84)$$

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = -\mathbf{i}_{\ell} j \frac{\mu_0 i_0}{4} H_0^{(2)}(kR_{\perp}). \quad (5.4-85)$$

- Σε απόσταση $\mathbf{R} = \mathbf{i}_R R$ από σημειακό ηλεκτρικό δίπολο, με ροπή $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \cos(\omega t)$ [με φασιθέτη $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$], από τις σχέσεις (5.4-56) [και (5.4-60)]:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{i}_R \cdot \mathbf{p}_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} [\cos(\omega t - kR) - kR \sin(\omega t - kR)], \quad (5.4-86)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{p}_0 \frac{\mu_0 \omega}{4\pi R} \sin(\omega t - kR),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{i}_R \cdot \mathbf{p}_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} (1 + jkR) \exp(-jkR), \quad (5.4-87)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{p}_0 j \frac{\mu_0 \omega}{4\pi R} \exp(-jkR).$$

- Σε απόσταση $\mathbf{R} = \mathbf{i}_R R$ από σημειακό μαγνητικό δίπολο, με ροπή $\mathbf{m}(t) = \mathbf{m}_0 \cos(\omega t)$ [με φασιθέτη $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$], από τις σχέσεις (5.4-66) [και (5.4-71)]:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{m}_0 \times \mathbf{i}_R) \frac{\mu_0}{4\pi R^2} [\cos(\omega t - kR) - kR \sin(\omega t - kR)], \quad (5.4-88)$$

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = (\mathbf{m}_0 \times \mathbf{i}_R) \frac{\mu_0}{4\pi R^2} [1 + jkR] \exp(-jkR). \quad (5.4-89)$$

- Σε απόσταση $\mathbf{R}_\perp = \mathbf{i}_\perp R_\perp$ από ευθεία γραμμή με μαγνητική διπολική ταινία, με ροπή $\mathbf{m}_\ell(t) = \mathbf{m}_{\ell 0} \cos(\omega t)$ [με φασιθέτη $\mathbf{m}_\ell = \mathbf{m}_{\ell 0}$], από τις σχέσεις (5.4-78) [και (5.4-81)]:

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{m}_{\ell 0} \times \mathbf{i}_\perp) \frac{\mu_0 k}{4} [J_1(kR_\perp) \sin(\omega t) - Y_1(kR_\perp) \cos(\omega t)], \quad (5.4-90)$$

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = -(\mathbf{m}_{\ell 0} \times \mathbf{i}_\perp) j \frac{\mu_0 k}{4} H_1^{(2)}(kR_\perp). \quad (5.4-91)$$