ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ LAPLACE ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

Σε σφαιρικά συστήματα με αξονική συμμετρία (δηλαδή ανεξαρτησία από την αζιμουθιακή γωνία φ) η εξίσωση Laplace γίνεται:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \phi_e}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial \phi_e}{\partial \vartheta}\right)=0 \qquad (1)$$

Η λύση της (1) είναι εν γένει της μορφής

$$\phi_e=\sum_{n\geq 0}\left(a_n r^n+b_n r^{-n-1}\right)P_n(\cos\vartheta) \qquad (2)$$

όπου a_n, b_n συντελεστές που προσδιορίζονται από τις οριακές συνθήκες και $P_n(\cos\vartheta)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre ($\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x) = 0$ αν $n\neq m$).

Ενδεικτικά:

$$P_0(\cos\vartheta)=1\,,\quad P_1(\cos\vartheta)=\cos\vartheta\,,$$

$$P_2(\cos\vartheta)=\frac{3\cos\vartheta+1}{4}\,,\quad P_3(\cos\vartheta)=\frac{5\cos3\vartheta+3\cos\vartheta}{8}\,,\ldots \qquad (3)$$

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΜΗΔΕΝΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

Εντός ενός ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}=\hat{z}E_0$ βάζουμε μία σφαιρική σταγόνα της οποίας η επιφάνεια καθίσταται ισοδυναμική με δυναμικό μηδενικό ($\phi_e=0$ στο $r=R$, όπου R η ακτίνα της σταγόνας). Για να υπολογίσουμε το πεδίο παντού στο χώρο

Βρίσκουμε πρώτα το δυναμικό που αντιστοιχεί στο ομογενές πεδίο κατά τη διεύθυνση z: Προφανώς $\phi_e = +zE_0$ $\left(\Rightarrow \vec{E} = -\hat{z}\dfrac{\partial \phi_e}{\partial z}\right)$.

Όμως: $z = r\cos\theta$ οπότε: $\phi_e = rE_0\cos\theta$. Προφανώς το δυναμικό αυτό παραμένει ανεπηρέαστο για $r \to \infty$, οπότε

$\phi_e(r\to\infty) = rE_0\cos\theta$. Με βάση τις (2) και (3) θα πρέπει να έχουμε τελικά για τη λύση:

$$\phi_e = (Ar + Br^{-2})\cos\theta$$ οπότε με δεδομένο ότι

για $r \to \infty$ $\phi_e = r E_0\cos\theta$, παίρνουμε $A = E_0$ και έτσι

$\phi_e = (E_0 r + Br^{-2})\cos\theta$. Όμως, επίσης ($\phi_e = 0$ για $R = r$)

οπότε:

$$0 = E_0 R + \frac{B}{R^2} \Rightarrow B = -E_0R^3.$$ Τελικά λοιπόν:

$$\phi_e = \left(E_0 r - E_0\frac{R^3}{r^2}\right)\cos\theta = E_0R\left(\frac{r}{R} - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta.$$

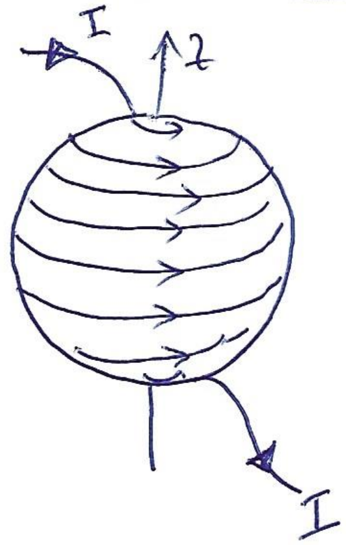
Για να υπολογίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα φορτίων στην σταγόνα, έχουμε:

$$\sigma_u = \varepsilon_0\left(\hat{n}\cdot\vec{E}_{έξω} - \cancel{\hat{n}\cdot\vec{E}_{μέσα}}\right) = \varepsilon_0\hat{r}\cdot\vec{E}_{έξω} = -\hat{r}\cdot\left(\frac{\partial\phi_e}{\partial r}\right)\bigg|_{r=R}\varepsilon_0$$

$$= -3\varepsilon_0E_0\cos\theta$$

δηλαδή, για $E_0 > 0$, ο βόρειος πόλος είναι ~~θετικά~~ αρνητικά φορτισμένος ($-3E_0$) ενώ ο νότιος θετικά ($+3E_0$).

Σφαιρικό πηνίο



Έστω ότι η ακτίνα της σφαιρικής περιέλιξης είναι R και N το πλήθος των περιελίξεων. Το ρεύμα που ρέει στην επιφάνεια μπορεί να προσεγγιστεί με ένα επιφανειακό αζιμουθιακό ρεύμα

$$\vec{K} = \hat{\varphi} K(\vartheta)$$

Το $K(\vartheta)$ υπολογίζεται εύκολα από το γεγονός ότι οι σπείρες είναι N και καλύπτουν διάστημα (στο z) ίσο με $2R$. Άρα ανά μονάδα μήκους z έχουμε $\frac{N}{2R} I$ Ampere. Οπότε για διάστημα dz τα Ampere είναι $\frac{N}{2R} I dz$.. όμως το dz αντιστοιχεί σε μεταβολή της πολικής γωνίας ϑ κατά $d\vartheta$ μέσα από τη σχέση $dz = -\sin\vartheta \, d\vartheta \, R$. οπότε για ϑ έχουμε $K(\vartheta) = \frac{N}{2R} I \sin\vartheta$ και έτσι:

$$\vec{K} = \hat{\varphi} \frac{N}{2R} I \sin\vartheta .$$

επειδή ο αριθμός των περιελίξεων Ampere στο τόξο $R d\vartheta$ είναι το μέτρο του $\vec{K}$. Από τις συνθήκες Maxwell έχουμε

$$\hat{n} \times (\vec{H}_{έξω} - \vec{H}_{μέσα})_{r=R} = \vec{K} \quad \text{με} \quad \hat{n} = \hat{r} \quad \text{οπότε:}$$

$$H_\vartheta^{έξω} - H_\vartheta^{μέσα} = \frac{N}{2R} I \sin\vartheta .$$

Δεδομένου ότι: Φ_m : $\vec{H} = -\nabla \Phi_m$ και η παραγώγιση γίνεται ως προς ϑ, συνάγεται ότι η εξάρτηση του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού θα είναι $\cos\vartheta$. Άρα η ακτινική εξάρτηση θα είναι συνδυασμός των r και r^{-2}.

④

Εκτός του πηνίου το μαγνητικό πεδίο (και το βαθμωτό δυναμικό ϕ_m) θα πρέπει να φθίνουν όταν $r \to \infty$, οπότε:

$$\phi_m = \frac{A}{r^2}\cos\theta \quad \text{για } r>R \quad \text{και} \quad \phi_m = Br\cos\theta \quad \text{για } r<R$$

(έτσι αποφεύγονται αφύσικοι απειρισμοί). Εκτός της συνθήκης για το επιφανειακό ρεύμα έχουμε επιπλέον και τη συνέχεια της μαγνητικής επαγωγής στο $r=R$:

$$\mu_0 \hat{n}\cdot(\vec{H}^{\varepsilon\xi\omega} - \vec{H}^{\mu\varepsilon\sigma\alpha}) = \mu_0 \hat{r}\cdot(\vec{H}^{\varepsilon\xi\omega} - \vec{H}^{\mu\varepsilon\sigma\alpha}) = 0$$ και με δεδομένο ότι $\vec{H}\cdot\hat{r} = H_r = -\frac{\partial\phi_m}{\partial r}$ παίρνουμε τελικά

$$\vec{H} = \frac{NI}{3R}(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta) \quad \text{για } r<R \quad \text{και}$$

$$\vec{H} = \frac{NI}{6R}(2\hat{r}\cos\theta + \hat{\theta}\sin\theta) \quad \text{για } r>R.$$

Οι αντίστοιχες τιμές του βαθμωτού μαγνητικού δυναμικού είναι:

$$\phi_m = -\frac{NIr}{3R}\cos\theta \quad \text{για } r<R \quad \text{και}$$

$$\phi_m = \frac{NI}{6}\left(\frac{R}{r}\right)^2\cos\theta \quad \text{για } r>R.$$

Παρατηρούμε ότι (π.χ. στους πόλους, $\theta = 0, \pi$). υπάρχει ασυνέχεια του δυναμικού αυτού μεταξύ του $r=R^-$ και $r=R^+$ η οποία κατά απόλυτη τιμή είναι ίση με $\frac{NI}{6}$. (έστω $I>0$). Άρα το βαθμωτό μαγνητικό δυναμικό δεν έχει φυσική σημασία: το οποίο είναι αντίστοιχα με το ηλεκτρικό δυναμικό ϕ_e το οποίο είναι συνεχής συνάρτηση παντού και πάντα.